5. Corriente y voltaje alternos

La corriente alterna (ca) es una corriente que cambia periódicamente de sentido de circulación. También cambia su magnitud (normalmente) de manera continua. A diferencia de ca, la magnitud de la corriente continua (cc) es constante.

La CA cosenoidal:

$$\underbrace{I(t)}_{\text{el valor instantáneo}} = \underbrace{I_0}_{\text{la amplitud}} \cdot \overbrace{\cos}^{\text{una función armónica}} \underbrace{(\omega t + \varphi)}_{\text{una función lineal}}$$

$$I_0 > 0$$

El período del coseno: $\Delta\varphi = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad 2\pi = \omega T \quad \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

ω: frecuencia angular

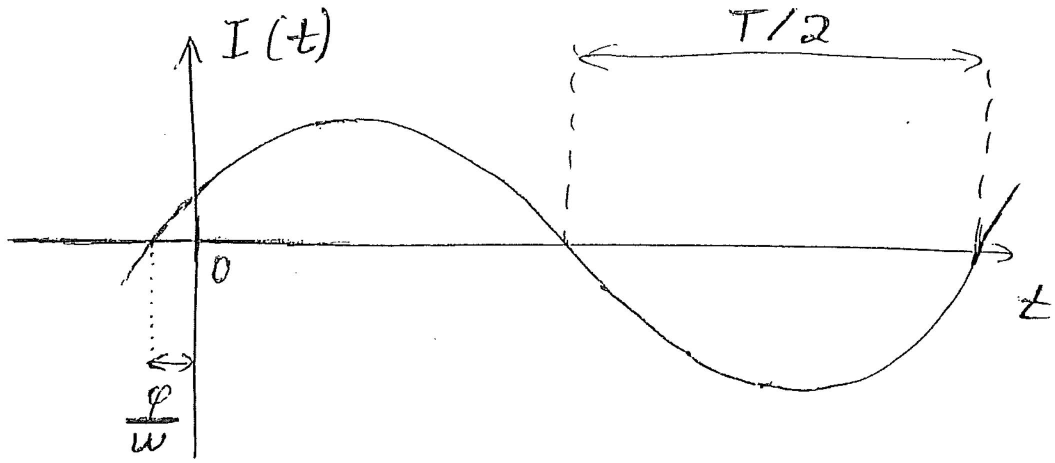
T: el período

Definición: La frecuencia:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = 2\pi f}}$$

φ es la <u>fase inicial</u>.



El <u>voltaje alterno</u> (va) cosenoidal:

$$V(t) = V_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

El resistor: $\boxed{V_R = R \cdot I}$

$\Rightarrow$ I y V_R están en fase.

El condensador:

$$Q = C \cdot V_c \Rightarrow \qquad I = C \cdot \frac{dV_c}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_c = C^{-1} \int I \, dt}$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow V_c = C^{-1} \omega^{-1} I_0 \, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{\text{el desfase}})$$

frecuencia angular

$\Rightarrow$ I y V_c están en desfase.

El inductor:

$$\boxed{V_L = L \frac{dI}{dt}}$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow V_L = L \omega I_0 \left[-\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \right]$$

$$\Rightarrow \quad V_L = \underset{\swarrow}{w} L I_0 \cos\left(wt + \varphi + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{el desfase}}\right)$$

<u>frecuencia angular</u>

$\Rightarrow$ I y V_L están en desfase.

La potencia eléctrica <u>instantánea</u>:

$$P(t) = V(t) \cdot I(t)$$

La potencia eléctrica <u>media</u>:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P \, dt$$

<u>El resistor:</u>

$$P_R = I^2 \cdot R = I_0^2 \cdot R \cdot \cos^2(wt + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{P}_R = \frac{1}{T} I_0^2 R \underbrace{\int_0^T \cos^2(wt+\varphi) \, dt}_{= \frac{T}{2}}$$

$$\boxed{\bar{P}_R = \frac{1}{2} I_0^2 R}$$

para <u>ca</u> o <u>va</u>

$\rightarrow$ valor eficaz

El condensador:

$$P_C = V_C \cdot I = \frac{I_0^2}{\omega C} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{P}_C = \frac{1}{T} \frac{I_0^2}{\omega C} \underbrace{\int_0^T \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi)\, dt}_{=0}$$

$$\boxed{\bar{P}_C = 0}$$ ideal

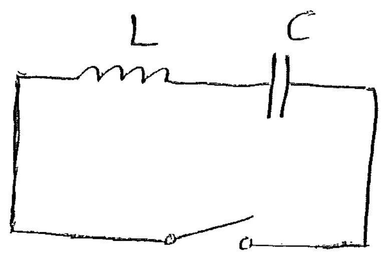
El inductor: $P_L = V_L \cdot I$

$$\boxed{\bar{P}_L = 0}$$ ideal

Condensadores y inductores no "consumen" energía, sino que la toman prestada durante un cuarto de ciclo, para devolverla en el siguiente cuarto de ciclo.

Nótense: $\left\langle \cos(t) \cos(t+a) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \cos(a)$

Circuito LC en serie



El condensador inicialmente está cargado ($Q = Q_c$), y luego se cierra el interruptor.

La segunda ley de Kirchhoff:

$$V_L + V_c = 0$$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{dI}{dt} + C^{-1} Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + C^{-1} \cdot I = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0}$$

<u>Ansatz:</u> $\quad I = c_1 \cdot e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = c_1 \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{1}{LC} c_1 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad q\, e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\, i\, \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Definición: $\boxed{w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\, i\, w_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = C_1\, e^{i w_0 t} + C_2\, e^{-i w_0 t}}$$

(solución general)

C_1 y C_2 son constantes con valores complejos. La corriente eléctrica es real: $\quad Im(I) = 0$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \underset{\text{conjugado}}{C_2^*} = C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = C \cdot e^{i w_0 t} + c.c.}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2 \cdot Re\left[C \cdot e^{i w_0 t}\right]$$

$$\mathcal{C} = \underbrace{|\mathcal{C}|}_{\text{el módulo}} \cdot e^{i \underbrace{\arg(\mathcal{C})}_{\text{el argumento}}}$$

el módulo — el argumento

$$\Rightarrow \quad I = 2 \cdot \mathrm{Re}\left[|\mathcal{C}| \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \right]$$

$$\boxed{\varphi = \arg(\mathcal{C})}$$

Según la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

vemos que:

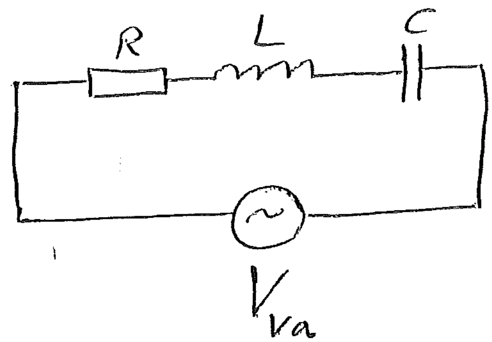
$$I = 2 \cdot |\mathcal{C}| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Con la amplitud $I_0 = 2 \cdot |\mathcal{C}|$ la solución se escribe:

$$\boxed{I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)} \qquad I_0 \geq 0$$

$\Rightarrow$ ω_0 es la frecuencia angular de un circuito no amortiguado ($R = 0$). (oscilador armónico libre)

Circuito RLC en serie



$R \rightarrow$ amortiguado

$V_{va} \rightarrow$ forzado

La segunda Ley de Kirchhoff:

$$-V_{va} + V_R + V_L + V_c = 0$$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + C^{-1} Q = V_{va}$$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} + C^{-1} \cdot I = \frac{d}{dt} V_{va}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_{va}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + w_0^2 I = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_{va}}$$

(ecuación diferencial lineal no homogénea)

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad , \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$V_{va} = V_{va,0} \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

importante

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{V_{va,0} \cdot \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$\alpha_0 = \frac{V_{va,0}}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \underbrace{I_{0,1}\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)} + \underbrace{I_{0,2} \cos(\omega t + \varphi)}}$$

la solución de la ecuación diferencial homogénea

solución particular

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ (amortiguamiento débil)

El primer término: $I_{0,1}\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ completa se amortigua exponencialmente con el tiempo. Por esa razón recibe el nombre de "solución transitoria"

El segundo término representa la "solución estacionaria" (para $t \gg \frac{1}{\gamma}$)

$$\underset{(\gamma t \gg 1)}{\Rightarrow} \quad I(t) = I_{0,2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= Re\Big[\underbrace{I_{0,2} \cdot e^{i(\omega t+\varphi)}}_{= I_c(t)}\Big]$$

$\uparrow$ complejo

$$\frac{d}{dt} I_c = I_{0,2}\, i\omega\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} I_c = -I_{0,2}\, \omega^2\, e^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{-I_{0,2}\omega^2 e^{i\varphi} + 2\gamma I_{0,2}\, i\omega\, e^{i\varphi} + \omega_0^2 I_{0,2} e^{i\varphi} = \alpha_0 \cdot \omega}$$

$$\Rightarrow \quad I_{0,2} = \frac{\alpha_0\, \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\gamma\omega} \cdot e^{-i\varphi} \quad , \alpha_0 \geq 0 \quad , I_{0,2} \geq 0$$

El módulo:

$$\Rightarrow \quad I_{0,2} = \frac{\alpha_0\, \omega}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega|} = \underline{\underline{\frac{\alpha_0\, \omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}}}$$

El argumento:

$$-\varphi = \arg\left[\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega\right]$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\left[\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] \rightarrow \text{el ángulo de desfase}$$

$$V_{va} = V_{va,0} \cdot \operatorname{sen}(wt)$$
$$= V_{va,0} \cdot \cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ El desfase con respecto al voltaje V_{va}:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2}\right]$$
$$= \operatorname{arctg}\left[\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right]$$

Utilizamos números complejos para llegar al resultado facilmente.

Con una CA compleja

$$I_c = I_0 \, e^{iwt}$$

Y un VA complejo

$$V_c = V_0 \, e^{i(wt+\varphi)}$$

se puede definir una impedancia compleja:

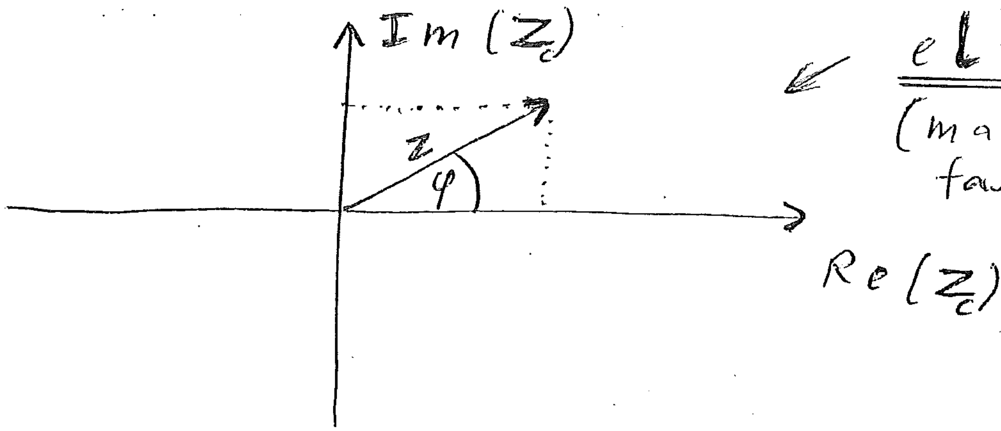
$$Z_c = \frac{V_0 \, e^{i(wt+\varphi)}}{I_0 \, e^{iwt}} = \frac{V_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{c,R} = \underline{\underline{R}}$$

$$Z_{c,C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{-i\,\frac{1}{\omega C}}}$$

$$Z_{c,L} = \omega L\, e^{+i\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{i\,\omega L}}$$

<u>El plano complejo:</u>



$\underbrace{\text{fase}}$ $\underbrace{\text{vector}}$

el fasor

(magnitud y fase)

<u>En coordenadas polares:</u> Z, φ

$$Z = |Z_c| \qquad \varphi = \arg(Z_c)$$

<u>En coordenadas cartesianas:</u> R, X

$$R = Re(Z_c) \quad , \quad X = Im(Z_c)$$

R ↑ <u>la resistencia</u>

X ↑ <u>la reactancia</u>

$\Rightarrow$ El condensador:

$$X_c = \mathrm{Im}(Z_{c,c}) = -\frac{1}{\omega C}$$

El inductor:

$$X_L = \mathrm{Im}(Z_{c,L}) = \omega L$$

Nótese: La solución particular de la ecuación diferencial lineal nos deja utilizar la fórmula de Euler.
Los fasores se usan en Electrónica, Acústica, óptica etc.

La admitancia es el inverso de la impedancia:

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} \Rightarrow Y = \frac{1}{Z}$$

Circuito RLC en serie para $t \gg \frac{1}{\gamma}$ (solución particular)

$$\Rightarrow Z_c = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}$$

$$= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow |Z_c| = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\arg(Z_c) = \varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right]$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{w}{L}}{\sqrt{R^2 \cdot \frac{w^2}{L^2} + \left(wL \cdot \frac{w}{L} - \frac{1}{wC} \cdot \frac{w}{L}\right)^2}}$$

importante

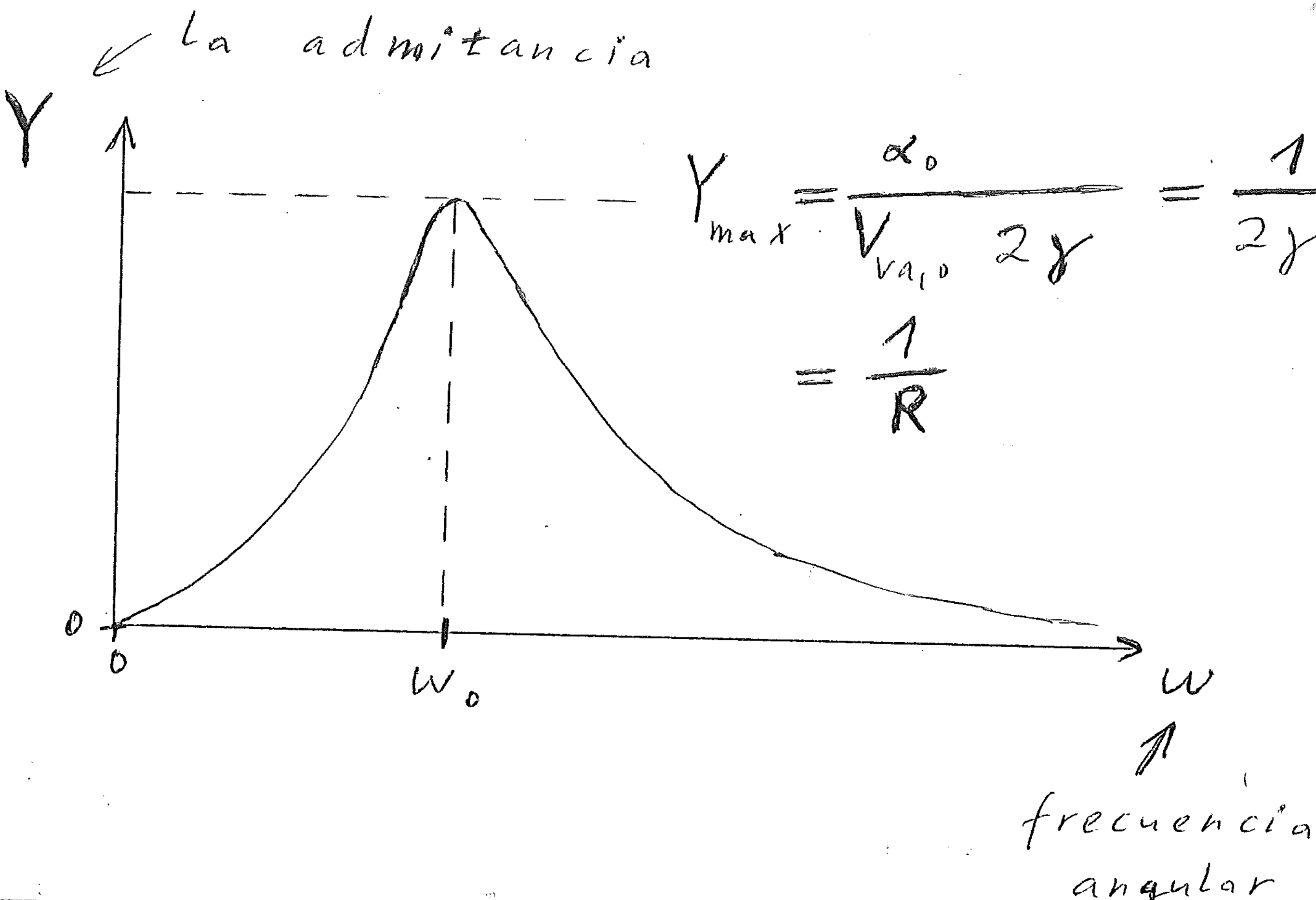
$$= \frac{\alpha_0 w \;/ V_{va,0}}{\sqrt{(2\gamma w)^2 + (w^2 - w_0^2)^2}}$$

Correcto

$$\arg(Y_c) = -\operatorname{arctg}\left[\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right]$$

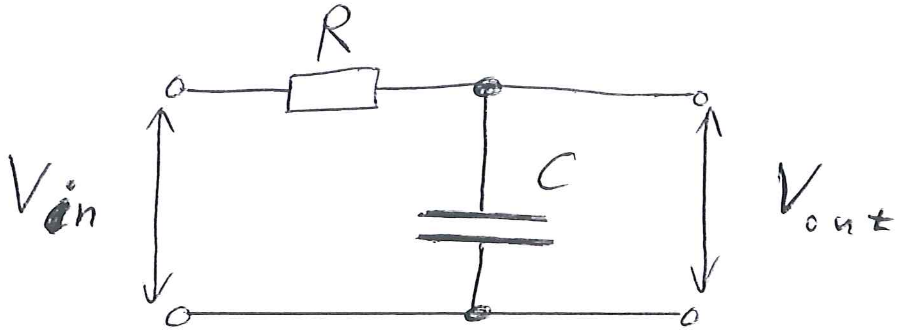
$$= -\operatorname{arctg}\left[\frac{w^2 - \frac{1}{LC}}{\frac{R}{L} w}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right]$$

Correcto



$$Y_{max} = \frac{\alpha_0}{V_{va,0}\; 2\gamma} = \frac{1}{2\gamma L} = \frac{1}{R}$$

El filtro paso bajo

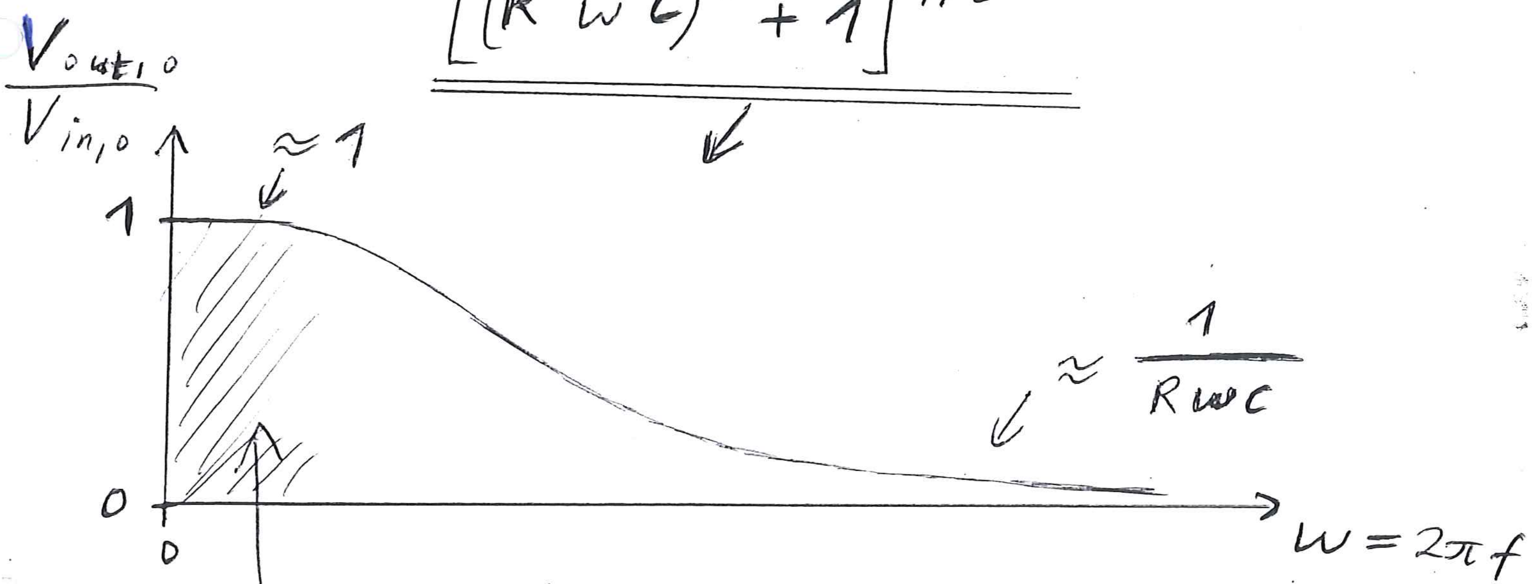


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_c}{R + X_c} = \frac{-i\,\frac{1}{wC}}{R - i\,\frac{1}{wC}}$$

<u>modulo</u>

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{\frac{1}{wC}}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\left[(RwC)^2 + 1\right]^{1/2}}$$



<u>paso bajo</u>

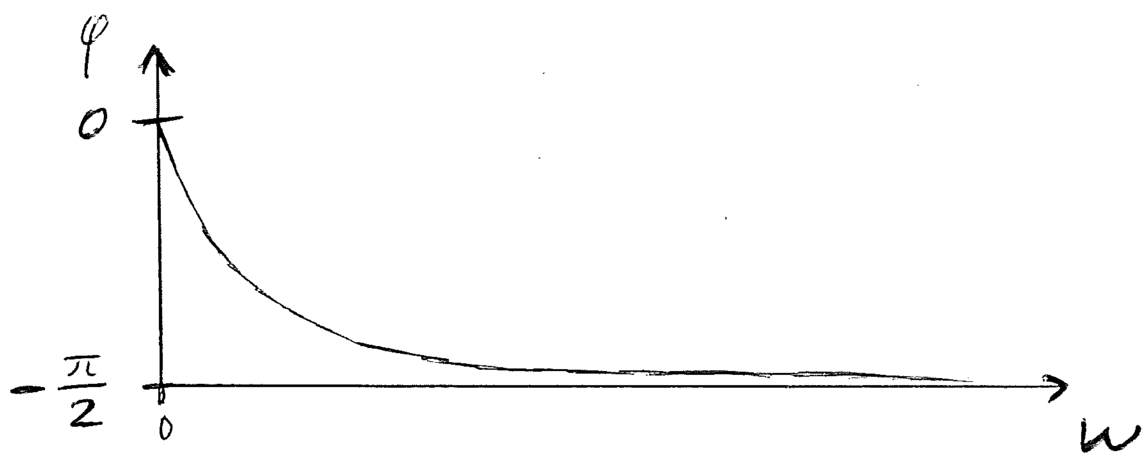
desfase

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-i\frac{1}{wC}}{R - i\frac{1}{wC}} = \frac{i}{i - RwC}$$

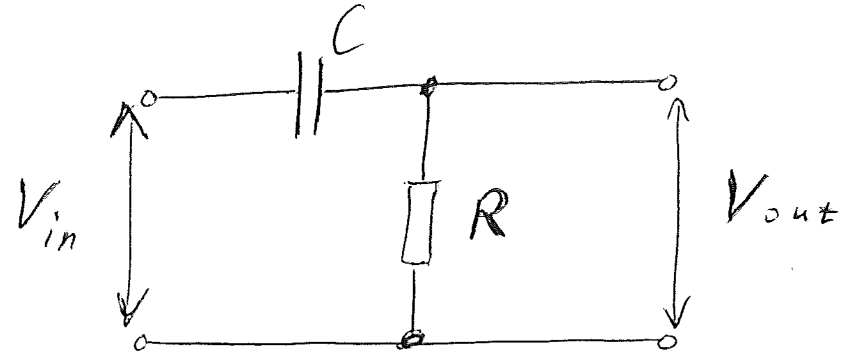
$$= \frac{i}{i - RwC} \cdot \frac{-i - RwC}{-i - RwC} = \frac{1 - iRwC}{1 + (RwC)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-RwC}{1}\right)$$

$$= -\arctan(RwC)$$



El filtro paso alto

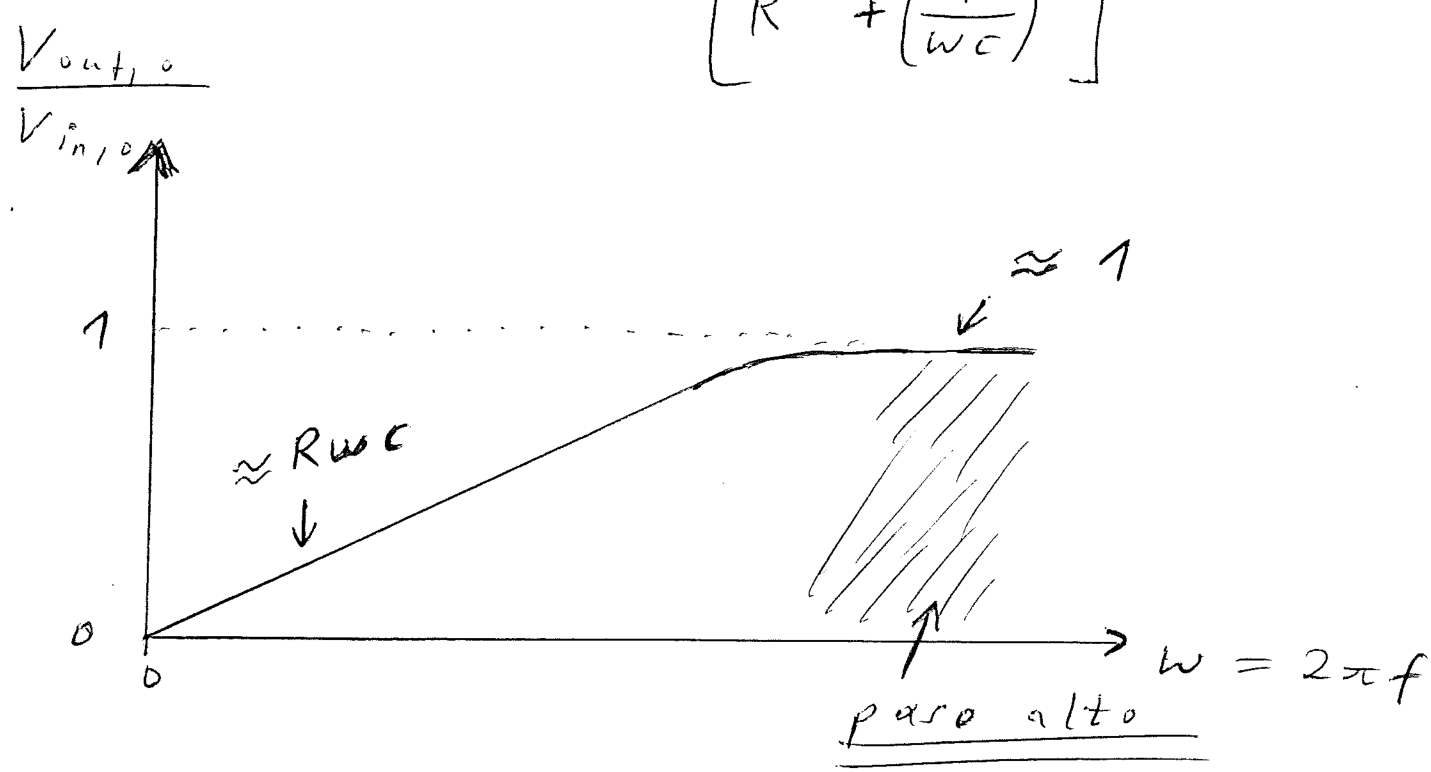


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R - i\frac{1}{wC}} = \frac{RwC}{RwC - i}$$

modulo

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{RwC}{\left[(RwC)^2 + 1\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{R}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2\right]^{1/2}}$$



der fase

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R - i\frac{1}{wC}} \cdot \frac{R + i\frac{1}{wC}}{R + i\frac{1}{wC}}$$

$$= \frac{R^2 + i\frac{R}{wC}}{R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{R}{wC}}{R^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\arctan\left(\frac{1}{RwC}\right)}}$$