Ejercicios

Polinomios

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

¿Son las siguientes expresiones algebraicas polinomios en $\mathbb{R}[x]$? En caso afirmativo, ¿qué grado tienen?

- $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$ Es un polinomio de grado n.
- $1 + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^3}$ no es un polinomio ya que algunos términos tienen exponente negativo.
- $1 - x^{-2}$ no es un polinomio ya que algunos términos tienen exponente negativo.
- $\sqrt{x} + 3$ no es un polinomio ya que algunos términos no tienen como exponente un natural.
- $x + x^2 i$
- $(x + 1)^2$ representa un polinomio de grado 2.
- $x + x^5 + x^{10001}$ es un polinomio de grado 10001.

Pregunta 2

Hallar α y β para que $x^5 - \alpha x + \beta$ sea divisible entre $x^2 - 4$.

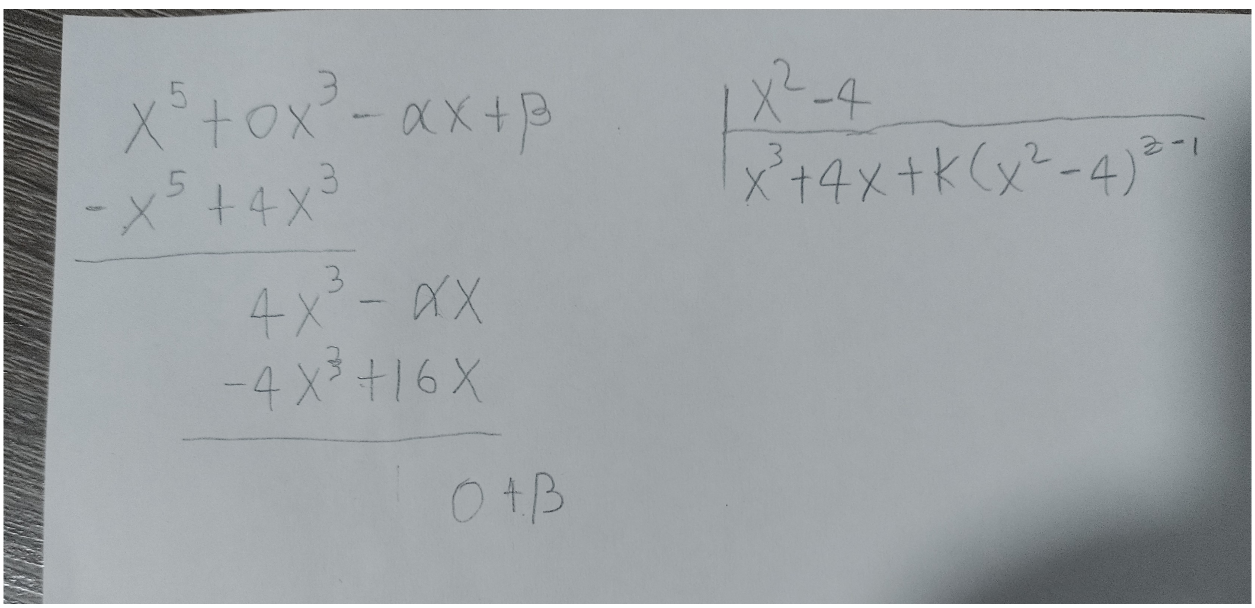
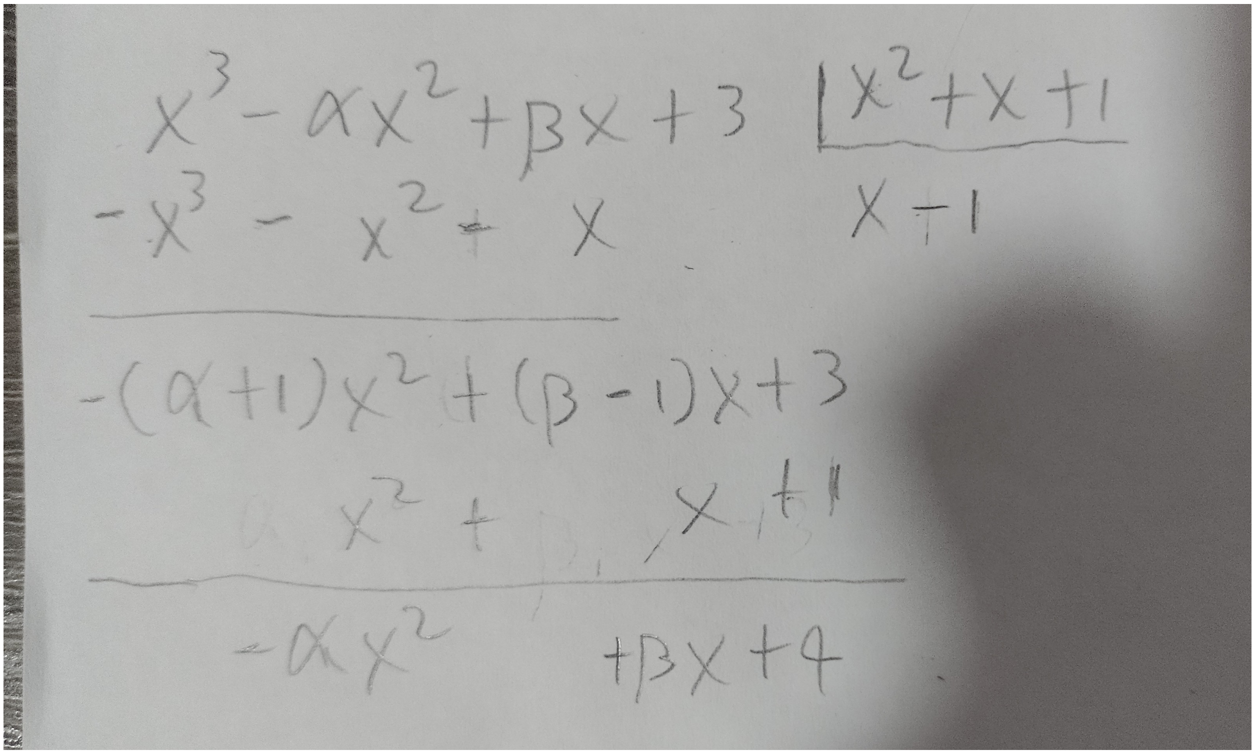


Figure 1: unchanged image

$-\alpha x + \beta = -16x + k(x^2 - 4)^z$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{N} - \{0\}$

Pregunta 3

Hallar α y β para que $x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3$ sea divisible entre $x^2 + x + 1$



$x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3 \quad \underline{|x^2 + x + 1}$

$-x^3 - x^2 \mp x \qquad x + 1$

$-(\alpha + 1)x^2 + (\beta - 1)x + 3$

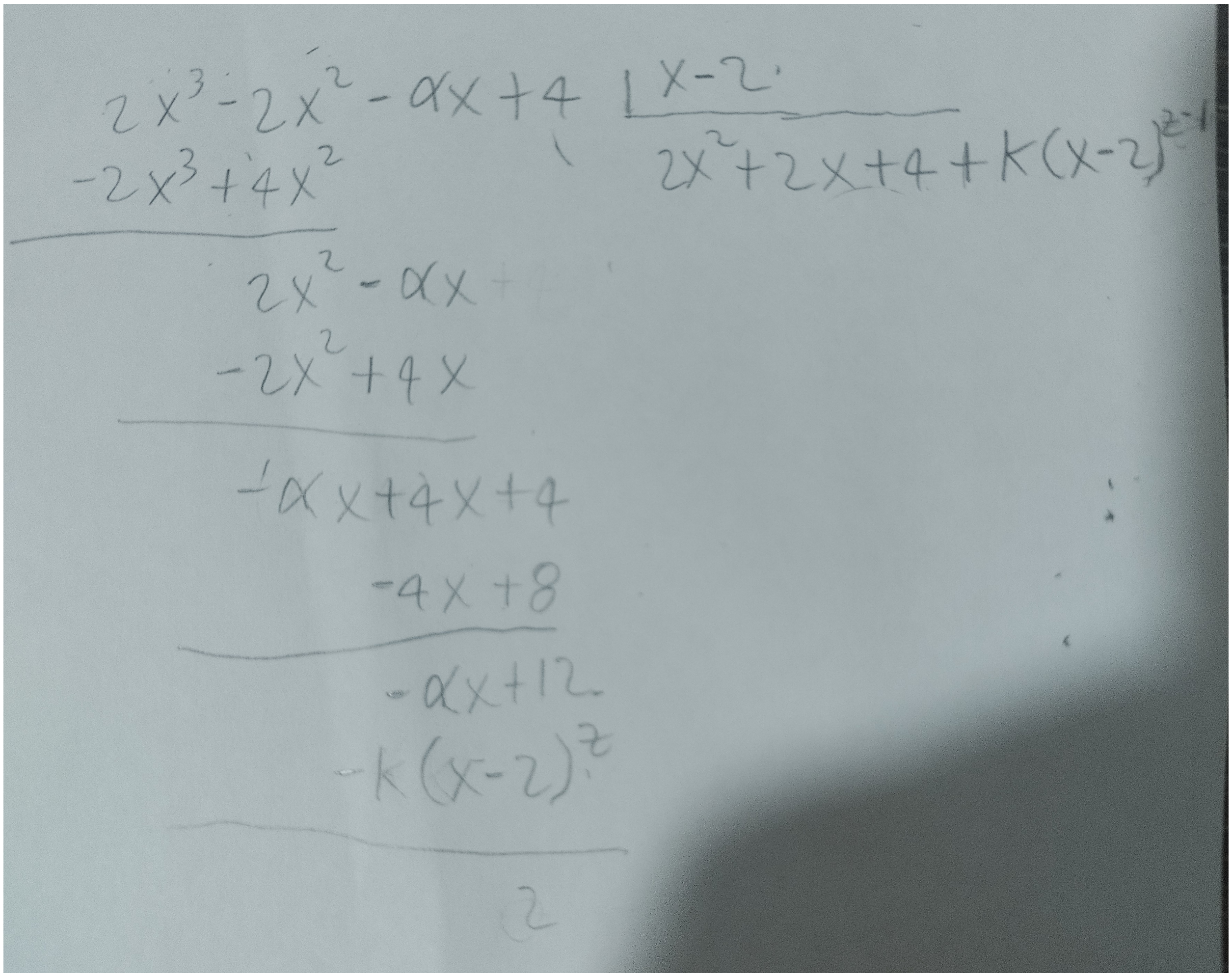
$x^2 + x + 1$

$-\alpha x^2 + \beta x + 4$

$-\alpha x^2 + \beta x + 4 - k(x^2 - 4)^z = 0$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{N} - \{0\}$

Pregunta 4

Encontrar el valor de α para que al dividir $2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4$ entre $x - 2$ dé resto 2



$-\alpha x + 12 - k(x-2)^z = 2$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$-\alpha x + 12 - k(x-2)^z = 2$$
$$\alpha = \frac{2 - 12 + k(x-2)^z)}{x} = \frac{-10 + k(x-2)^z}{x}$$

Pregunta 5

Determinar el valor de α para que $2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4$ admita $x = 2$ como una de sus raíces

Para que admita $x = 2$ como una raíz $2x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4$ debe de ser divisible entre $x - 2$. Haciendo el mismo ejercicio 4 pero igualando a 0.

$-\alpha x + 12 - k(x-2)^z = 0$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$\alpha = \frac{0 - 12 + k(x-2)^z)}{x} = \frac{-12 + k(x-2)^z}{x}$$

Pregunta 6

Dados los polinomios

$$p(x) = x^4 - 6x + 1 \qquad q(x) = 3x^3 - 5x \qquad r(x) = x^4 - x^2 + 2$$

```
p = "x ^ 4 - 6 * x + 1"
q = '3 * x ^ 3 - 5 * x'
r = 'x ^ 4 - x ^ 2 + 2'
```

Realizar las siguientes operaciones

- $p(x) + 3q(x) + r(x)$

```
result = paste(p, '+3*(', q, ')+', r)

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$p(x) + 3q(x) + r(x) = 2x^4 + 9x^3 - x^2 - 21x + 3$$

- $p(x) - [q(x) + 5r(x)]$

```
result = paste('(', p, ') - ((', q, ') + 5 * (', r,'))')

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$p(x) - [q(x) + 5r(x)] = -4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 9$$

- $p(x) + q(x) * r(x)$

```
result = paste('(', p, ') + (', q, ') * (', r,')')

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$p(x) + q(x) * r(x) = 3x^7 - 8x^5 + x^4 + 11x^3 - 16x + 1$$

- $[4p(x) + q(x)] * r(x)$

```
result = paste('(4 * (', p, ') + (', q, ')) * (', r,')')

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$[4p(x) + q(x)] \cdot r(x) = 4x^8 + 3x^7 - 4x^6 - 32x^5 + 12x^4 + 35x^3 - 4x^2 - 58x + 8$$

- $\frac{p(x)}{q(x)} - r(x)$

```
result = paste('((', p, ') / (', q, ')) - (', r,')')

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$\frac{p(x)}{q(x)} - r(x) = \frac{3x^7 - 8x^5 - x^4 + 11x^3 - 4x - 1}{(-3x^2 + 5)\,x}$$

- $\frac{p(x)}{r(x)} \cdot 2q(x)$

```
result = paste('((', p, ') / (', r, ')) / 2 * (', q,')')

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$\frac{p(x)}{r(x)} \cdot 2q(x) = \frac{x\left(3x^6 - 5x^4 - 18x^3 + 3x^2 + 30x - 5\right)}{2\left(x^4 - x^2 + 2\right)}$$

Finalmente, en cada uno de los polinomios resultantes, evaluar en 0, -2 y 2

Pregunta 7

Dividir

- $x^7 - x^5 + x^2 - 3$ entre $x^4 + x^3 + x^2 + x$

```
result = "(x^7-x^5+x^2-3) / (x^4+x^3+x^2+x)"

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$\frac{x^7 - x^5 + x^2 - 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{x^7 - x^5 + x^2 - 3}{(x^3 + x^2 + x + 1)\,x}$$

- $x^8 + x^7 - 3x^6 + x^5 + 2x^4 + -3x^3 + x^2 - x - 10$ entre $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$

```
result = "(x^8+x^7-3*x^6+x^5+2*x^4+-3*x^3+x^2-x-10)/(x^4+x^3-x^2+x+1)"

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$\frac{x^8 + x^7 - 3x^6 + x^5 + 2x^4 + -3x^3 + x^2 - x - 10}{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1} = \frac{x^8 + x^7 - 3x^6 + x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10}{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}$$

- $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ entre $x + 1$

```
result = "(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)/(x+1)"

x = result %>% y_fn("Simplify") %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
```

$$\frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x + 1}$$

Finalmente, en cada uno de los polinomios resultantes, evaluar en 1, 2 y 3