Álgebra Lineal
Ejercicios sobre vectores

1. Para los vectores dados realizar la operación indicada:

   a) Para $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -3, -5)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular $3\vec{u} + (2\vec{v} - \vec{w})$
   b) Para $\vec{u} = (-3, 4, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $w = (0, -1, 2)$, calcular $4\vec{v} - (\vec{u} - 2\vec{w})$
   c) Para $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 7)$ y $w = (0, 1, 1)$, calcular $-2\vec{w} + (\vec{v} - 4\vec{u})$

2. Expresar el vector $\vec{u} = (1, 4)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de cada pareja de vectores dados.

   a) $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (-1, -3)$
   b) $\vec{v} = (-2, 4)$ y $\vec{w} = (2, 4)$
   c) $\vec{v} = (4, 1)$ y $\vec{w} = (2, 3)$

3. Para los vectores dados realizar la operación indicada:

   a) Para $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -3, -5)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular $3\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w})$
   b) Para $\vec{u} = (-3, 4, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $w = (0, -1, 2)$, calcular $4\vec{v} \cdot (\vec{u} + 2\vec{w})$
   c) Para $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 7)$ y $w = (0, 1, 1)$, calcular $-2\vec{w} \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

4. Determinar, si es posible, todos los números $k \in \mathbb{R}$ tales que la pareja de vectores sea ortogonal:

   a) $\vec{u} = (k, 2, -1)$ y $\vec{w} = (k, -k, 3)$
   b) $\vec{u} = (4, k, 3)$ y $\vec{w} = (-1, k, -k)$
   c) $\vec{u} = (k, 1, k)$ y $\vec{w} = (k, k, -2)$

5. Verificar que las siguientes proposiciones para las parejas de vectores de $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^3$, indicados en cada caso. Usando el producto punto (o escalar) y la norma.

   a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y de norma igual a 1, entonces $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

      Verificar con los vectores $\vec{u} = (\sqrt{5}/5,\ 2\sqrt{5}/5)$ y $\vec{v} = (2\sqrt{5}/5,\ -\sqrt{5}/5)$ de $\mathbb{R}^2$ y con los vectores $\vec{u} = (\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3)$ y $\vec{v} = (\sqrt{2}/2,\ 0,\ -\sqrt{2}/2)$ de $\mathbb{R}^3$

   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

      Verificar con los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$ y con los vectores $\vec{u} = (-2, 5, -1)$ y $\vec{v} = (4, -7, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

   c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.

      Verificar con los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 5)$ de $\mathbb{R}^2$ y con los vectores $\vec{u} = (-1, 5, -4)$ y $\vec{v} = (6, -7, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.

6. En cada caso, determinar todas las constantes k tales que se satisfaga la igualdad:

   a) $\|(-2,4,k)\| = 6$
   b) $\|(1,2k,1)\| = 2$
   c) $\|(3k,0,-4)\| = 5$

7. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y θ el ángulo entre ellos, usar las igualdades

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) + \|\vec{v}\|^2$$

   en la solución de los siguientes ejercicios:

   a) Hallar $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ y $\|\vec{u}-\vec{v}\|$, si $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\theta = 60°$.
   b) Hallar $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, si se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ son ortogonales y que $\|\vec{u}\| = 6$ y $\|\vec{v}\| = 10$.
   c) Hallar el ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se sabe que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 10$ y $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$.

8. Mostrar con un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ que la siguiente proposición es falsa:
   Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ y $\vec{u} \neq \vec{o}$ entonces $\vec{v} = \vec{w}$

9. Usando la teoría del producto escalar en $\mathbb{R}^3$, y conocimientos de geometría, resolver los siguientes problemas:

   a) Hallar los cosenos de los ángulos del triángulo con vértices $A(2,-1,1)$, $B(1,-3,5)$ y $C(3,-4,-4)$.
   b) Mostrar que el triángulo de vértices $A(2,3,-4)$, $B(3,1,2)$ y $C(7,0,1)$ es rectángulo.
   c) Sean $A(1,1,-4)$ y $B(7,0,1)$ puntos en el espacio, hallar un punto C, de la forma $(0,0,z)$, tal que A, B y C sean los vértices de un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.
   d) Mostrar que el triángulo de vértices $A(-1,0,-2)$, $B(-1,5,2)$ y $C(-3,-1,1)$ es isósceles.

10. Usando el concepto de proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

   a) Sean $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{w} = (-1,4,3)$, hallar $Pr(\vec{w}/\vec{u})$ y $Pr(\vec{u}/\vec{w})$.
   b) Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,-1,2)$, hallar dos vectores $\vec{w}$ y $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que se cumplan las siguientes condiciones: $\vec{u} = \vec{w} + \vec{h}$, $\vec{w}$ paralelo a $\vec{v}$ y $\vec{h}$ ortogonal a $\vec{v}$.
   c) Dados los vectores $\vec{u} = (1,3,2)$ y $\vec{v} = (4,5,-5)$, hallar dos vectores $\vec{w}$ y $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que se cumplan las siguientes condiciones: $\vec{u} = \vec{w} + \vec{h}$, $\vec{w}$ paralelo a $\vec{v}$ y $\vec{h}$ ortogonal a $\vec{v}$.

11. En cada caso, hallar las ecuaciones paramétricas de la recta

   a) La recta que pasa por los puntos $A = (-1,5,3)$ y $B = (2,-1,7)$
   b) La recta que pasa por el punto $(-1,4,-3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$
   c) La recta que pasa por el punto $(2,1,2)$ y es paralela a la recta

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

d) La recta que pasa por el punto $(2,3,4)$ y es perpendicular al plano dado por $x-4y-3z=6$

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos dados:

    a) $A=(3,3,4)$ $B=(0,-1,0)$ y $C=(-2,-2,0)$
    b) $A=(1,2,-4)$ $B=(2,3,7)$ y $C=(4,-1,3)$

13. Usar el producto vectorial para hallar el área del triángulo con vértices en los puntos dados

    a) $A=(2,-7,3)$, $B=(-1,5,8)$ y $C=(4,6,-1)$
    b) $A=(1,2,0)$, $B=(-2,1,0)$ y $C=(0,0,0)$

14. En cada caso hallar la ecuación del plano que satisfaga las condiciones dadas.

    a) El plano que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralelo al plano yz
    b) El plano que pasa por el punto $(2,2,1)$ y contiene a la recta
    $$L: x=2t;\ y=-t+4;\ z=t, \quad t\in\mathbb{R}$$
    c) El plano que contiene a las rectas dadas por $L_1: x=-2t+1;\ y=t+4;\ z=t,\ \ t\in\mathbb{R}$ y $L_2: x=-3s+2;\ y=4s+1;\ z=-s+2,\ \ s\in\mathbb{R}$
    d) El plano que pasa por los puntos $(2,2,1)$ y $(-1,1,-1)$ y es perpendicular al plano determinado por la ecuación $2x-3y+z=3$
    e) El plano que pasa por el punto de corte de las rectas $L_1: x=2-3t;\ y=3+2t;\ z=4+2t,\ \ t\in\mathbb{R}$ y $L_2: x=5+2s;\ y=1-3s;\ z=2+s,\ \ s\in\mathbb{R}$ y es paralelo al plano determinado por la ecuación $x-2y+3z=1$

15. Verificar las siguientes igualdades para cada uno de los conjuntos de vectores dado :

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$	**Triple producto vectorial**
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$	**Triple producto escalar**
$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}+(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}+(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v}=\vec{o}$	**Identidad de Jacobi**

    a) $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ $\quad\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ $\quad\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}$
    b) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ $\quad\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ $\quad\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$
    c) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$ $\quad\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ $\quad\vec{w}=\vec{i}+2\vec{k}$

Referencias

[1] Asmar, A. (1995). Tópicos en Teoría de Matrices. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

[2] García, O., Villegas, J.A. y Castaño, J.I. (2012) Álgebra lineal. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín.

[3] Grossman, S. (1996). Álgebra Lineal con Aplicaciones. 5ta. Ed. McGraw-Hill. México.

[4] Hill, R. (1996). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. Prentice Hall. México.

[5] Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. 6ta. Ed. Prentice Hall. México.

[6] Lay, D. (1999). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. 2a. Ed. Prentice Hall, México.