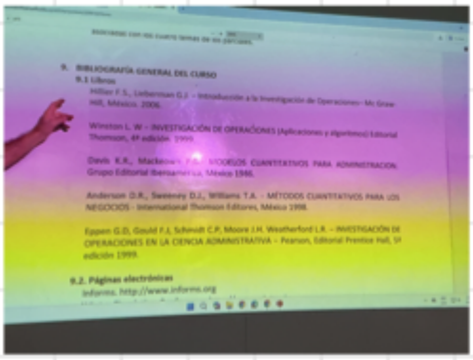
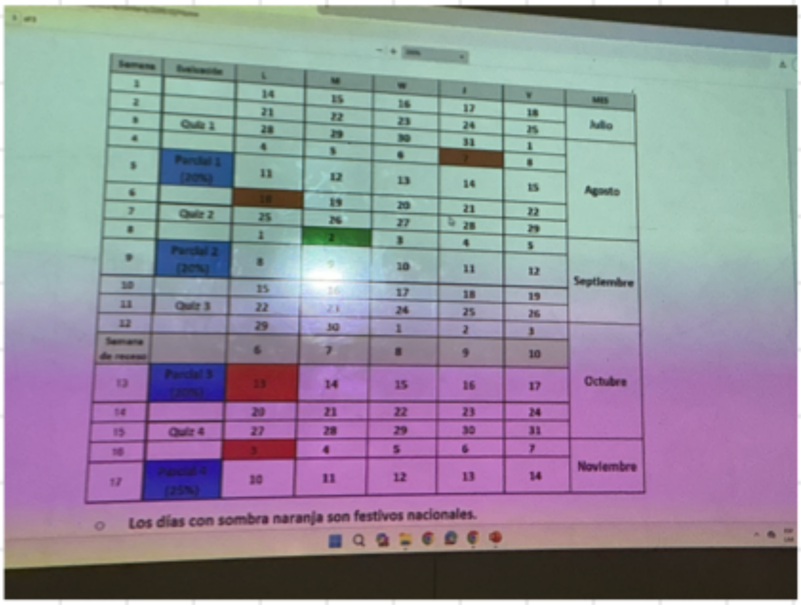
Métodos cuantitativos



página web
informs
Winter simulation conference



Primer parcial
↳ Formulación de PPL
15 de agosto 20%

Segundo parcial
↳ Análisis de sensibilidad
12 de septiembre 20%

Tercer parcial
↳ Toma de decisiones
17 de octubre 20%

Cuarto parcial
↳ Simulación
12 de noviembre 25%

Asesorías Jueves 10:30 - 11:30
Oficina 19-636

Escribir por teams
↳ Apoyo en cita virtual

Quices al final de la clase

Clasificación de modelos

Abstrae elementos importantes frente a algún problema ignorando elementos de menor importancia que puedan reducir la complejidad

Modelo matemático

Proceso para pasar lo previamente dicho a expresiones matemáticas

Clasificación de modelos matemáticos

Modelo estático

Como está el comportamiento del sistema en un instante

Modelo dinámico

Representa sus fases a través del tiempo

Determinísticos

No existe probabilidad
Se sabe el comportamiento exacto

Estocásticos

Variables y sistemas sujetos a la incertidumbre

Lineal

Relación de proporción en variables

No lineal

No hay relación de proporción causa - efecto

Analíticos

El análisis matemático calcula el sistema

Heurísticos

Modelos heurísticos: Son los que buscan una solución aproximada al sistema. Por ejemplo, usando la técnica de descenso de gradiente.

Modelos continuos

Modelos representado en los numeros $\mathbb{R}$

Modelos discretos

Modelo representado con enteros $\mathbb{Z}$

Descriptivos

Describir el comportamiento del sistema

Predictivos

Hechos para predecir el comportamiento del sistema

Normativo o prescriptivo

Se define una pauta de acción para el sistema

Formulación del Problema de PL

El objeto de la programación lineal es optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal de *n* variables sujeto a restricciones lineales de igualdad o desigualdad. Más formalmente, se dice que un problema de programación lineal consiste en encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal en un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de hiperplanos y semiespacios en R^n.

Forma de formular el PL.

Maximizar

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots c_nx_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \ [\leq, \geq, =]\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \ [\leq, \geq, =]\ b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \ [\leq, \geq, =]\ b_m$$
$$x_1, x_2, \dots\dots, x_n \geq 0$$

La forma más general del PPL consiste en minimizar o maximizar

$$Z = f(X) = \sum_{J=1}^{n} c_j x_j$$

Coeficiente de contribución

$$\text{Max (o min) } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$\text{SA: } \begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \end{aligned} \qquad X_i \geq 0 \ \}$$

Ecuaciones de no negatividad

Variables de decisión

a_{ij}: Coeficiente de sustitución

Pasos

Ejemplo de modelo de optimización

Una empresa panificadora elabora pan familiar, pan trenza y pan sencillo. El único recurso disponible es de 800 kilos de harina. Se sabe que el pan familiar requiere 160 gr de harina, el pan trenza 80 gr y el pan sencillo 40 gr. El pan familiar genera una utilidad de: $140, el pan trenza a $120 y el pan sencillo a $100. Encuentre el óptimo.

① Sobre qué decido? Meterse en el mundo del problema

Variables

X_1 = # de unidades de pan familiar a producir
X_2 = # " " trenza "
X_3 = # " " sencillo "

② Cuál es mi objetivo?

Panadero = Ganar $

$$Max\ Z = 140x_1 + 120x_2 + 100x_3$$

③ Qué me restringe?

800 k de harina = 800.000 gr

$$SA = 160X_1 + 80x_2 + 40x_3 \le 800.000\ gr$$

Solución

$$Max\ Z = 140\left[\frac{\$}{\cancel{Uf}}\right]X_1[\cancel{Uf}] + 120\left[\frac{\$}{\cancel{Ut}}\right]X_2[\cancel{Ut}] + 100\left[\frac{\$}{\cancel{Us}}\right]X_3[\cancel{Us}]$$

$$SA: 160\left[\frac{gr}{\cancel{Uf}}\right]x_1[\cancel{Uf}] + 80\left[\frac{gr}{\cancel{Ut}}\right]x_2[\cancel{Ut}] + 40\left[\frac{gr}{\cancel{Us}}\right]x_3[\cancel{Us}]$$

Pan familiar

$$\frac{14\cancel{0}\left[\frac{\$}{\cancel{Uf}}\right]}{16\cancel{0}\left[\frac{gr}{\cancel{Uf}}\right]} = 0,875\left[\frac{\$}{gr}\right]$$

Pan trenza

$$\frac{12\cancel{0}\left[\frac{\$}{\cancel{Ut}}\right]}{8\cancel{0}\left[\frac{gr}{\cancel{Ut}}\right]} = 1,5\left[\frac{\$}{gr}\right]$$

Pan simple

$$\frac{10\cancel{0}\left[\frac{\$}{\cancel{Us}}\right]}{4\cancel{0}\left[\frac{gr}{\cancel{Us}}\right]} = 2,5\left[\frac{\$}{gr}\right]$$

$$\frac{800.000\ gr}{40\ \frac{gr}{Us}} = 20.000\ [Us]$$

Ganancia

$$Z^* = 140(0) + 120(0) + 100(20.000) = \$\ 2'000.000$$

$$Z^* = 140(0) + 120(10.000) + 100(0) = \$\ 1'200.000$$

$$Z^* = 140(5000) + 120(0) + 100(0) = \$\ 700.000$$

Ejemplo de modelo de optimización

Una fábrica de carros vende automóviles y camperos, la compañía obtiene $300 de utilidad sobre cada automóvil que vende y $400 por cada campero. El fabricante no puede proveer más de 300 automóviles ni más de 400 camperos por mes. El tiempo de preparación para los distribuidores es de 2 horas por cada automóvil y de 3 horas por cada campero. La compañía cuenta con 900 horas de tiempo de taller disponible cada mes para la preparación de automóviles nuevos. Plantee el problema de P.L para determinar cuántos automóviles y cuantos camperos deben ordenarse.

Solución

1. Sobre qué decido?
2. Cuáles son mis objetivos?
3. Qué me restringe?

1. Variables

X_1 = Cantidad de automóviles a vender

X_2 = Cantidad de camperos a vender

2. Objetivo: Ganar $

$$\text{Max } z = 300x_1 + 400x_2$$

3. SA: $2x_1 + 3x_2 \leq 900$

↳ restricciones

$$X_1 \leq 300$$

$$X_2 \leq 400$$

$$x_i \geq 0$$

Modelos de optimización:

Ej.1. Un carpintero tiene 6 unidades de madera y 28 horas de tiempo disponible, en el cual él puede hacer algunos muebles. Él ha vendido bien dos modelos en el pasado. Estima que el modelo 1 requiere 2 unidades de madera y 7 horas de su tiempo, mientras que el modelo 2 requiere 1 unidad de madera y 8 h de su tiempo. La utilidad de los modelos son $120 y $ 80 respectivamente. ¿Qué tanto debe producir de cada modelo para optimizar sus ingresos?

Solución

1. Variables

X_1 = # modelo 1 a fabricar

X_2 = # modelo 2 a fabricar

2. Objetivo

$$\text{Max } z = 120x_1 + 120x_2$$ → UTILIDAD

3. Restricciones

$$\text{SA: } 2x_1 + X_2 \leq 6$$

$$7x_1 + 8x_2 \leq 28$$

$$x_i \geq 0$$

Formulación del Problema de PL

Ej.3. La compañía ER fabrica tres productos de última moda, a los cuales el departamento de mercadotecnia ha denominado: X1, X2 y X3. Estos tres productos se fabrican a partir de tres ingredientes los cuales, por razones de seguridad, se han designado con nombres en código que son: A, B y C. los kilos de cada ingrediente que se requieren para fabricar un kilo de producto final se dan en la tabla.

	Ingrediente		
Producto	A	B	C
X1	4	7	8
X2	3	9	7
X3	2	2	12

La empresa cuenta con 400 kilos de A, 800 de B y 1000 de C. En las condiciones actuales las contribuciones para el beneficio de los productos son: $18 para X1, $10 para x2 y $10 para x3. Plantee un problema de PL para determinar la cantidad de cada uno de los productos que deben fabricarse.

Solución

① Variables

X_1 : # producto x_1 a fabricar

X_2 : # producto x_2 a fabricar

X_3 : # modelo x_3 a fabricar

② Objetivo

$$\text{Max } z: 18x_1 + 10x_2 + 10X_3$$

③ Restricción

$$SA: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 400$$
$$7x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 800$$
$$8x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 1000$$
$$X_1 \geq 0$$

Formulación del Problema de PL

Ej.4. En una granja de cerdos se está tratando de decidir sobre la alimentación de los mismos. Se está considerando una combinación de alimento para cerdos disponible. Los costos, el contenido de calorías y el contenido de vitaminas para cada alimento esta dado en la siguiente tabla.

Contenidos	Alimento tipo A	Alimento tipo B
Calorias (por libra)	800	1000
Vitaminas (por libra)	140 unidades	70 unidades
Costo (por libra)	$0.40	$0.80

Cada cerdo requiere al menos 8000 calorías al día y al menos 700 unidades de vitamina. Una restricción adicional es que no más de una tercera parte del alimento pueda consistir del alimento de tipo A, dado que este contiene un elemento toxico si se consume una cantidad mayor. Plantee el problema de P.L.

Solución

① Variables

X_1 = Cantidad de alimento a a comprar

X_2 = Cantidad de alimento b a comprar

② Objetivo

$$\text{Min } Z: 0{,}40\,x_1 + 0{,}80\,x_2$$

③ Restricciones

$$SA: 800x_1 + 1000x_2 \geq 8000$$
$$140x_1 + 70x_2 \geq 700$$
$$X_1 \leq 1/3\,(x_2)$$
$$X_i \geq 0$$

Ej.5. En su consumo diario de alimento de un animal de rapiña necesita 10 unidades de alimento A, 12 de alimento B y 12 de alimento C. Estos requerimientos se satisfacen cazando dos especies de presas. Una presa de la especie I suministra 5, 2 y 1 unidades de alimentos A, B y C respectivamente. Una presa de la especie II suministra 1, 2 y 4 unidades de alimentos A, B, C respectivamente. Capturar y digerir una pieza de la especie I requiere 3 unidades de energía en promedio, mientras que el gasto de energía correspondiente para la especie II es de 2 unidades. ¿Cuántas presas de cada especie deberá capturar el depredador para satisfacer sus necesidades alimenticias?.

Solución

① Variables

X_1 : Cantidad de presa 1 a cazar

X_2 : Cantidad de presa 2 a cazar

	A	B	C	Gasto energético
X_1	5	2	1	3
X_2	1	2	4	2
	10	12	12	

② Objetivo

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$$

③ Restricciones

$$S.A: 5x_1 + X_2 \geq 10$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_i \geq 0$$

yeezus

Ejemplo de modelo de optimización

Problema de Agroquímicos. Se fabrican dos tipos de fertilizantes: la 5-5-10 y la 5-10-5. que tiene componentes de nitrato, fosfato y potasio. El comprador pagaría $71.5 por tonelada de 5-5-10 y $69 de 5-10-5. La disponibilidad y el costo de materia prima es de 1100 toneladas de nitrato a $200 tonelada, de 1800 toneladas de fosfato a $80 tonelada y 2000 de potasio a $160 la tonelada. El relleno está en cantidades ilimitadas a $10 la tonelada. Se tiene un costo de $15 por concepto de mezclado de los fertilizantes. Plantee el P.L.

Solución

① Variables

X_1 = Cantidad de ferti 1 a fabricar

X_2 = Cantidad de ferti 2 a fabricar

②

	A	F	K
X_1			
X_2			

		X_1	X_2
		5 - 5 - 10	5 - 10 - 5
	PV =	71.5	69
nitrato	CN =	10	10
fosfato	CF =	4	8
potasio	CK =	16	8
Relleno	CR =	8	8
Mezcla	CM	15	15
		18,5	20

Por tonelada %

Solución problemas PL en 2d

Fundamento teórico

La ecuación lineal

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_mx_m = b$ parte a R^m en tres subconjuntos:

Los puntos que satisfacen la ecuación dada. **Hiperplano**

Aquellos puntos que satisfacen la desigualdad. **Semiespacio abierto**

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_mx_m > b$

aquellos puntos que satisfacen la desigualdad. **Semiespacio abierto**

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_mx_m < b$

Inspira Crea Transforma

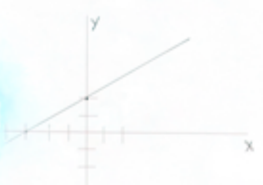
UNIVERSIDAD EAFIT

$3y - 2x = 6$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0; 2)$

Si $y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3; 0$

$3y - 2x >= 6$



Algún punto que cumpla la inecuación

$x_1 + 2x_2 = 4$

Si $x_1 = 6 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow (0;2)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4;0)$

$x_1 - x_2 = 4$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \Rightarrow (0;-4)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4;0)$

Se coge el punto 0,0

Si lo contiene $\swarrow\swarrow\swarrow$

si no $\nwarrow\nwarrow\nwarrow$

1 $(4) + 2(-4) < 4$

$-4 < 4$

Ejercicio

X_2

$Max Z = f(x,y) = 3x_1 + 4x_2$

S.A: $2x_1 + x_2 <= 18$ (1)

$2x_1 + 3x_2 <= 42$ (2)

$3x_1 + x_2 <= 24$ (3)

$x_1 >= 0, x_2 >= 0$

1

(1) $2x_1 + x_2 = 18$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 18 \rightarrow (0; 18)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 9 \rightarrow (9; 0)$

(2) $2x_1 + 3x_2 = 42$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 14 \Rightarrow (0, 14)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 21 \Rightarrow (21, 0)$

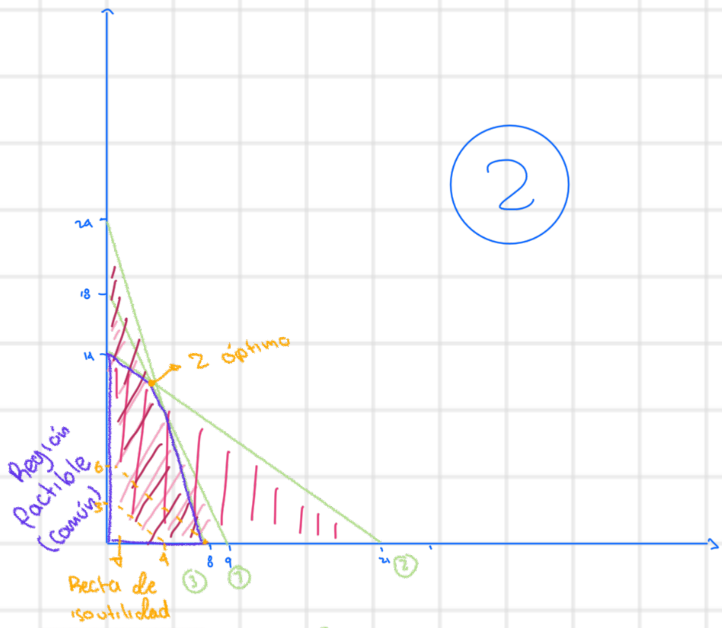
(3) $3x_1 + x_2 = 24$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 24 \quad (0, 24)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \quad (8, 0)$

Gráfica

2



- Ecuaciones
- Regiones
- Plano
- Región factible (intersección de todas las regiones demarcadas)
- Recta de isoutilidad
  - Me gano Z unidades monetarias

Supongo que me gano un $Z_1 = 12$

SIEMPRE

$3x_1 + 4x_2 = 12$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow (0, 3)$

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4, 0)$

3

(1) $2x_1 + x_2 = 18$

(2) $2x_1 + 3x_2 = 42$

$0 + 2x_2 = 24/2$

$\boxed{x_2 = 12}$

Ahora x_2 en 1

$2x_1 + 12 = 18 \rightarrow (18 - 12/2)$

$\boxed{x_1 = 3}$

$\boxed{z^* = 3(3) + 4(12) = 57}$

Utilidad óptima

NO región acotada = NO SOLUCIÓN

Primer Quiz

① Una empresa produce pintura (x_1) y estuco (x_2) por canecas. Para producir una caneca de pintura requiere 3 lts del ingrediente A, 6 litros del ingrediente B y 5 litros del ingrediente C, para producir una caneca de estuco requiere 1 lt del ingrediente A, 4 lt del ingrediente B y 8 lts del ingrediente C. La empresa cuenta con 9 lts del ing A, 23 lt B y 40 lt del C. Actualmente la utilidad por la pintura es \$8 (Max x_1) y estuco \$4 (Max x_2)

A B C

Plantee el problema de P.L y resuelva por método gráfico

① Variables: x_1: Cantidad de pintura a producir
x_2: Cantidad de estuco a producir

② Objetivo → Ganar \$

$\text{Max}Z = 8x_1 + 4x_2$

③ Restricciones

SA: ① $3x_1 + 1x_2 \leq 9$

② $6x_1 + 4x_2 \leq 24$

③ $5x_1 + 8x_2 \leq 40$

④ $x_1, x_2 \geq 0$

	A	B	C	\$
Pin	3	6	5	8
Est	1	4	8	4
T	9	23	40	

Método gráfico

① $3x_1 + 1x_2 = 9$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9$ $(0, 9)$ (x y)

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ $(3, 0)$

② $6x_1 + 4x_2 = 24$

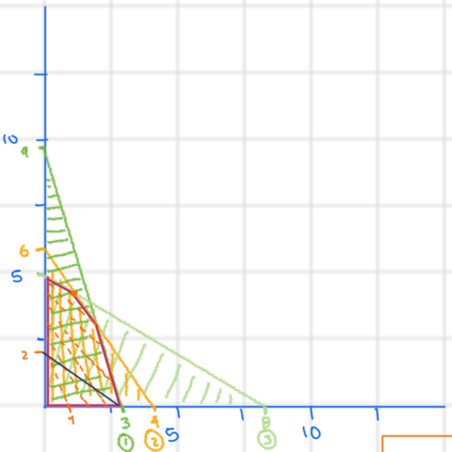
Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$ $(0, 6)$ (x y)

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ $(4, 0)$

③ $5x_1 + 8x_2 = 40$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$ $(0, 5)$ (x y)

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$ $(8, 0)$



•1 •2 •3 Región & ecuación

• Región factible

• Región de isoutilidad & punto óptimo

• utilidad óptima

Supongo que me gano un $Z_1 = 8$

$8x_1 + \boxed{4x_2} = 8$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$ $(0, 2)$ (x y)

Si $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ $(1, 0)$

① $3x_1 + 1x_2 = 9$

② $6x_1 + 4x_2 = 24$

→ Resta

↘ Pero primero: Multiplicamos 1 x 4

$4(3x_1 + 1x_2 = 9)$

$12x_1 + \cancel{4x_2} = 36$

$-\ 6x_1 + \cancel{4x_2} = 24$

$6x_1 = 12 / 6$

$x_1 = 2$

→ Sustituimos x_1 en 1

$3(2) + 1x_2 = 9$

$6 + x_2 = 9 - 6$

$x_2 = 3$

$8(2) + 4(3) = 16 + 12$

28

alcanzado en el punto (2,3)

Una empresa de confecciones fabrica camisas y blusas para tiendas de ropa, la cual acepta toda la producción de la fábrica. En el proceso de producción intervienen el corte, la costura y el empacado. La fábrica emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el departamento de costura y 5 en el departamento de empaque. La fábrica trabaja un turno de 8 horas diarias durante 5 días a la semana. En la siguiente tabla se muestran las horas y la utilidad unitaria por prenda. Plantee el P.L.

	Minutos por unidad			
Prenda	Corte	Costura	Empaque	Utilidad unitaria ($)
Camisas	20	70	12	8
Blusas	60	60	4	12
Recursos	60.000	84000	12000	

Una empresa de electrónica fabrica aisladores de aplicación general, de aplicación especial y de alto voltaje. Cada producto pasa a través de tres operaciones de producción en la planta: Horneado, lavado y laminado y finalmente pulimiento. Solo se cuenta con una maquina en cada una de las respectivas operaciones. En la tabla se muestra la tasa de producción en aisladores por hora, para cada tipo de aislador y en cada operación. Los costos de las materias primas asociados con la fabricación de los aisladores son de $5 (para aplicación general), $6 (aplicación especial) y $10 (alto voltaje). Los costos por hora de las respectivas operaciones de producción son: $250 Horneado, $200 (Lavado y laminado) y $100 (pulimento). Los precios unitarios de venta son: $25, $39.75 y $67,50 para los tres productos respectivamente. A la compañía le gustaría asignar el tiempo utilizado en las diferentes operaciones.

Tipo de aislador	Horneado	Lavado y laminado	Pulimento
De aplicación general	50	40	25
De aplicación especial	40	20	20
De alto voltaje	25	10	10

① Variables

X_1 = Cantidad de aisladores de aplicación general a fabricar

X_2 = " " especial "

X_3 = " " alto voltaje a fabricar

② Objetivo Ganar $

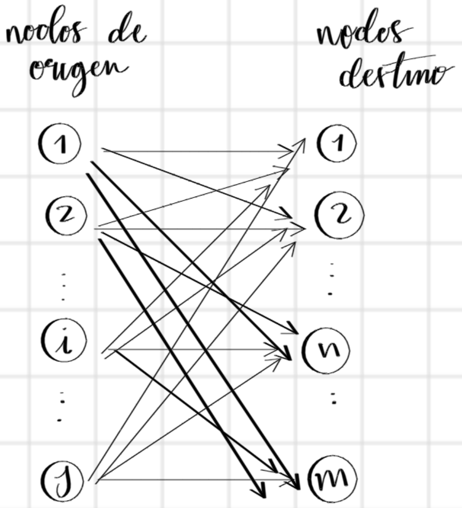
$$Max\ Z: 25x_1 + 39{,}75x_2 + 67{,}50x_3$$

③ Restricciones

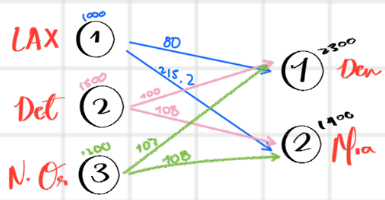
S.A: ①

Modelos de redes

Modelos de transporte



Variable
de autos a transportar de la planta "i" al mercado j



Objetivo Min costos

$$Min\ Z = 80x_{11} + 215.2x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

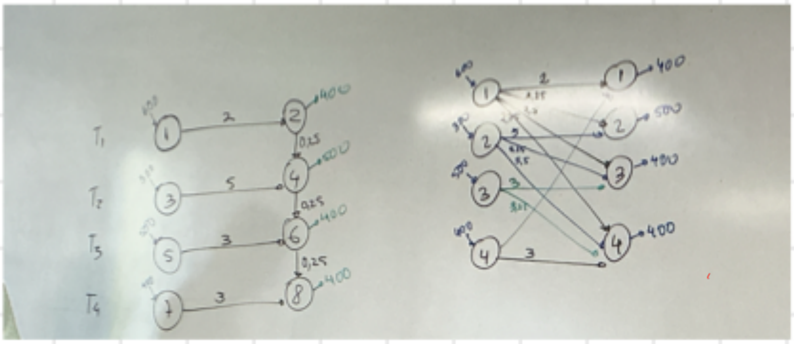
Restricciones

$$
\begin{aligned}
SA:\ x_{11} + x_{12} &\le 1000 \\
x_{21} + x_{22} &\le 1500 \\
x_{31} + x_{32} &\le 1200 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\ge 2300 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\ge 1400 \\
x_{ij} &\ge 0
\end{aligned}
$$

Se puede reemplazar por =

Ejercicio de inventario

Trimestre	Capacidad de producción	Demanda (m^3)	\$ de producción	\$ inventario
1	600	400	2	0,25
2	300	500	5	0,25
3	500	400	3	0,25
4	400	400	3	0,25



$$Min Z =$$

$$2x_{12} + 0{,}25x_{24} + 5x_{34} + 0{,}25x_{46} + 3x_{56} + 0{,}25x_{68} + 3x_{78}$$

$$
\begin{aligned}
SA:\quad & X_{12} \leq 600 \\
& X_{12} - X_{24} \geq 400 \\
& X_{34} \leq 300 \\
& X_{24} + X_{34} - X_{46} \geq 500 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

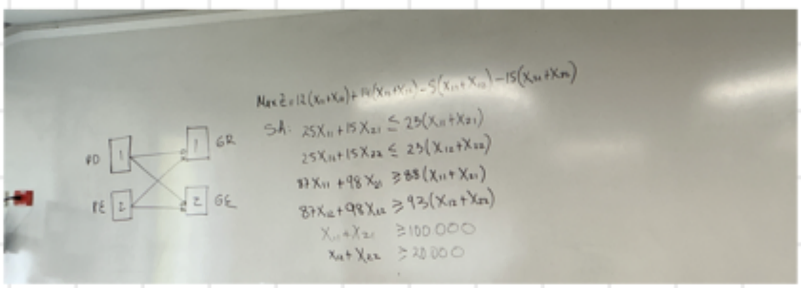
La refinería Arauca produce dos tipos de gasolina sin plomo: regular y Premium. La cual vende en su cadena de estaciones por \$12 y \$14 por barril. Ambos tipos son mezclas de los inventarios de Arauca de petróleo domestico refinado y petróleo extranjero refinado y deben tener las siguientes especificaciones.

	Máxima presión de vapor	Porcentaje máximo de octanaje	Demanda Máxima Barriles/semana	Despachos mínimos Barriles/semana
[illegible]	[illegible]	[illegible]	100000	50000
[illegible]	[illegible]	[illegible]	20000	5000

Las características de los inventarios de petróleo refinado son los siguientes:

	Máxima presión de vapor	Porcentaje máximo de octanaje	Demanda Máxima Barriles/semana	Costo \$/Barriles
Doméstico	25	87	40.000	8
Extranjero	15	98	60.000	15

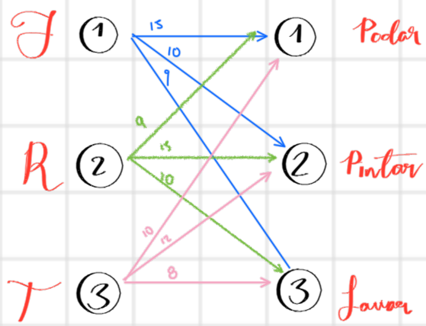
¿Qué cantidades de los dos tipos de petróleo podría mezclar Arauca en orden a obtener el óptimo en las gasolinas?
Sea:



Problemas de asignación

Ejercicio de Pedro

	Podar	Pintar	Lavar
Juan	15	10	9
Rosa	9	15	10
Tulio	10	12	8



Variable El hijo i asignado a la tarea j

Objetivo

$$\text{Min } Z \;\; 15x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 15x_{22} + 10x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33}$$

Restricciones

$$
\begin{aligned}
\text{Sa:}\quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1 \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1 \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1 \\
& X_{11} + X_{21} + X_{21} = 1 \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1 \\
& X_{13} \quad X_{32} + X_{37} \quad 1 \\
& X_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Un banco está desarrollando una política de préstamos por un máximo de 12 millones. La tabla muestra los datos pertinentes acerca de los distintos tipos de préstamo.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deuda impagable
Personal	0.14	0.1
Automóvil	0.13	0.07
Casa o Familiar	0.12	0.03
Agrícola	0.125	0.05
Comercial	0.1	0.02

Las deudas impagables no se recuperan y no producen ingresos por intereses. Para competir con otras instituciones financieras se necesita que el banco asigne un mínimo de 40% de los fondos a préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de su región, los préstamos para casa deben ser iguales cuando menos al 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa. También el banco tiene una política explicita que no permite que la relación general de préstamos impagables entre todos los prestamos sea mayor que 4%.

nodo de salida

nodo de llegada

Cantidad de dinero a asignar a la linea de crédito i

1

2

Una compañía fábrica tres tipos de combinaciones energéticas de semillas que se venden a mayoristas los cuales a su vez los venden a expendios al menudeo. Los tres tipos son normal, especial y extra y se venden a \$1.5, \$2.2 y \$3.5 por libra respectivamente. Cada mezcla requiere los mismos ingredientes, maní, pasas y algarrobo. Los costos de estos ingredientes son: maní \$0.9 por libra, pasas \$1.6 por libra y algarrobo \$1.5 por libra. Los requerimientos de las mezclas son: Normal: cuando menos 5% de cada ingrediente. Especial: cuando menos 20% de cada ingrediente y no más de 50% de cualquiera de ellos. Extra: cuando menos 25% de pasas y no más de 25% de maní. La instalación de producción hace que haya disponibles por semana como máximo 1000 libras de maní, 2000 de pasas y 3000 de algarrobo. Plantee el P.L.

Solución

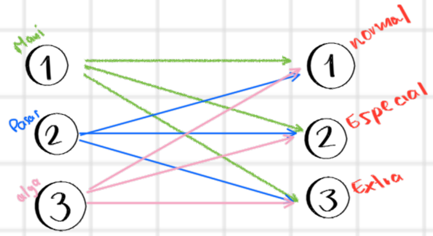
① Variables

x_{ij}

$$\text{Max } Z = 1{,}5(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 2{,}2(x_{12}+x_{22}+x_{32}) + 3{,}5(x_{13}+x_{23}+x_{33}) - 0{,}9(x_{11}+x_{12}+x_{13}) - 1{,}6(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

nodos de salida

nodo de llegada



Restricciones

S.A.

$$x_{11} \geq 0{,}05(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$

$$x_{21} \geq \text{"}$$

$$x_{31} \geq \text{"}$$

$$x_{12} \geq 0{,}2(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$x_{22} \geq \text{"}$$

$$x_{32} \geq \text{"}$$

$$x_{23} \geq 0{,}25(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$x_{13} \leq 0{,}25(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 1000$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 2000$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 3000$$

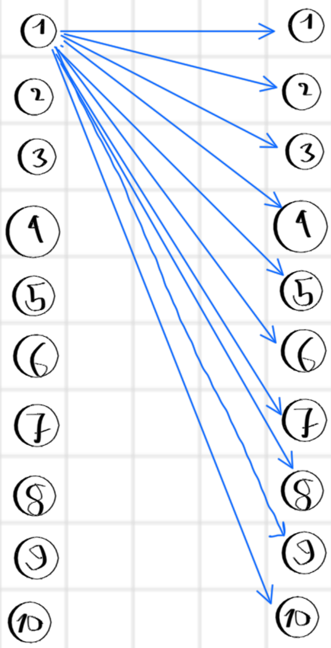
$$x_{ij} \geq 0$$

Una empresa fabricante de zapatos ubicado en la región del medio oeste en los EEUU. Se especializa en la fabricación de botas vaqueras y no vende en forma directa al público, sino que vende a través de expendios al menudeo. Según las fluctuaciones en los costos de los diversos componentes, la compañía ha observado que el costo de producción varia de mes a mes. Debido a estas variaciones en los costos y al bajo costo de almacenamiento (se calcula en $1 por mes y por par de botas) la compañía considera que puede fabricar pares de botas en exceso en algunos meses y venderlos en meses posteriores. Los administradores han pronosticado la demanda y los costos para los siguientes siete meses como se muestra en la tabla. La compañía desea programar la producción para optimizar los costos totales de producción y manejo.

Mes	Demanda pronosticada	Costo proyectado (por par)
1	150000	36
2	110000	42
3	180000	38
4	100000	40
5	200000	35
6	180000	39
7	110000	37

1 Variables

X_{ij}



(Problema de horarios de trabajo). Una oficina de correos requiere distintas cantidades de empleados de tiempo completo en diferentes días de la semana. La cantidad de empleados de tiempo completo que se requieren cada día se da en la tabla. Las reglas del sindicato establecen que cada empleado de tiempo completo debe trabajar cinco días consecutivos y descansar dos días. Por ejemplo, un empleado que trabaja de lunes a viernes, debe descansar sábado y domingo. La oficina de correos quiere cumplir con sus exigencias diarias solo por medio de empleados de tiempo completo. Plantee el problema de P.L. para minimizar la cantidad de empleado de tiempo completo que tengan que ser contratados.

Día	Número de empleados de tiempo completo que se necesitan
1= lunes	17
2= martes	13
3= miércoles	15
4= jueves	19
5= viernes	14
6= sábado	16
7= domingo	11

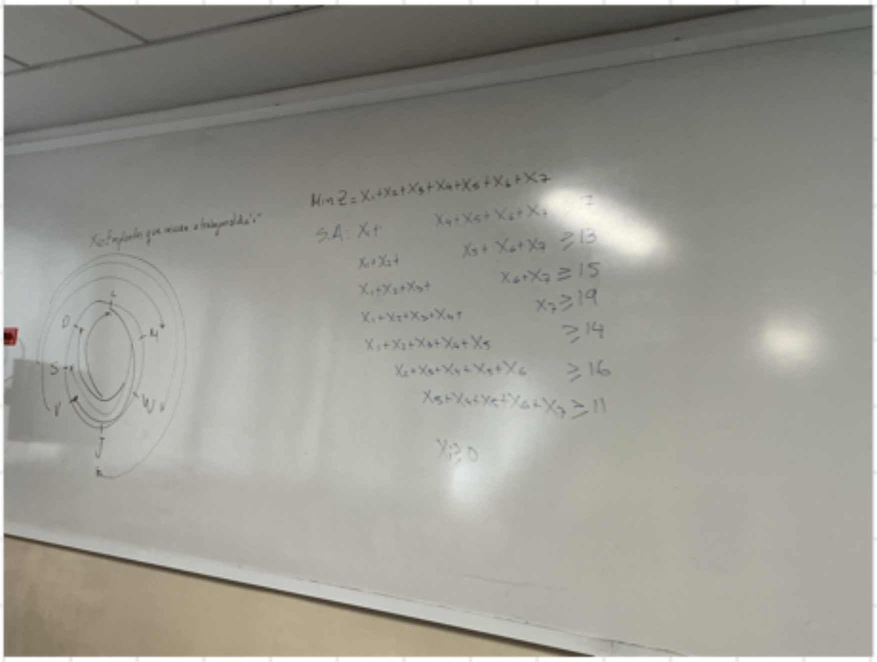
X_1 = Empleados del lunes
X_2 Martes
X_3 Miércoles
X_4 Jueves
X_5 Viernes
X_6
X_7

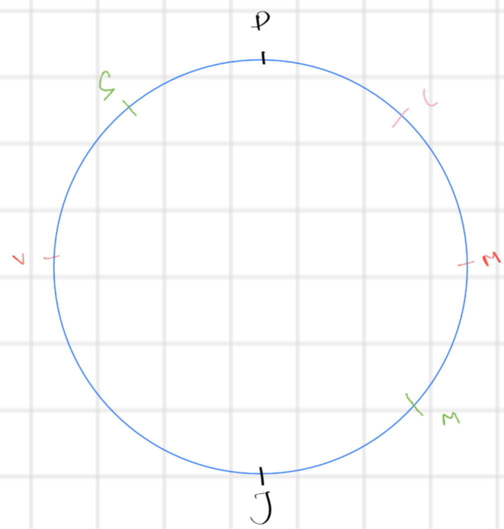
Minimizar la cantidad de trabajadores

Min Z $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 X X_6+X_7$

SA: $X_1 \geq 17$
$X_2 \geq 13$
$X_3 \geq 15$
$X_4 \geq 19$
$X_5 \geq 14$
$X_6 \geq 16$
$X_7 \geq 11$

1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7





Mi dieta requiere que todos los alimentos que ingiera pertenezcan a uno de los cuatro grupos básicos de alimentos. Por ahora hay los siguientes cuatro alimentos: barras de chocolate, helado de crema de chocolate, bebida de cola y pastel de queso con piña. Cada barra de chocolate cuesta 50 cvs, cada bola de helado de crema de chocolate cuesta 20 cvs, cada botella de bebida de cola cuesta 30 cvs y cada rebanada de pastel de queso con piña cuesta 80 cvs. Todos los días debo ingerir por lo menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutricional de cada alimento está en la tabla.

Tipo de alimento	Calorías	Chocolate (onzas)	Azúcar (onzas)	Grasa (onzas)
Barra de chocolate	400	3	2	2
[illegible] de [illegible] 1 [illegible]	200	2	2	4
Bebida de cola	150	0	4	5
Pastel de queso	500	0	4	5

1

2

3

4

5

Método Simplex

• Resta

	cj		18,5	20	0	0	0
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
0	S_1	1100	0,05	0,05	1	0	0
0	S_2	1800	0,05	0,1	0	1	0
0	S_3	2000	0,1	0,05	0	0	1
	zj	0	0	0	0	0	0
	cj-zj		18,5	20	0	0	0

	cj						
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
	zj						
	cj-zj						

	cj						
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
	zj						
	cj-zj						

Ejercicio de abonos

Max Z $18,5\,x_1 + 20\,x_2$

SA: $0,05\,x_1 + 0,05\,x_2 \leq 1100$

$0,05\,x_1 + 0,1\,x_2 \leq 1800$

$0,1\,x_1 + 0,05\,x_2 \leq 2000$

sistema de balanzas

$0,05\,x_1 + 0,05\,x_2 + S_1 + 0S_2 = 1100$

$0,05\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0S_1 = 1800$

Formulación P.I.
& Análisis
Dimensional

Primer
Parcial

① UNIVERSIDAD EAFIT

Métodos Cuantitativos CM0245
Primer parcial

Nombre: María Valeria Ramírez G. Código: 1000410136 Nota: 4.45
Profesor(a): Luis Antonio Quintero Grupo:

Nota 1: Escriba su nombre y código con tinta en todas las páginas del tema. No se permite el uso del celular o Tablet ni de ningún dispositivo que permita la transmisión de datos. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

1. (25%) Una universidad agropecuaria tiene un campo de siembra de prueba el cual tiene un área de 600 hectáreas. Donde puede sembrar: yuca, zanahoria y repollo. Los siguientes son los datos correspondientes a los tres tipos de cultivos:

Cultivo	rendimiento (ton/ha)	Precio de venta ($/ton)	Costo de siembra ($/ha)	Demanda del mercado (tons)
Yuca	7	$1.60	$3.5	2000
Zanahoria	15	$1.30	$10	3500
Repollo	10	$1.75	$8	3000

Plantee el problema de programación lineal.

X_1 = ha (Yuca)
X_2 = ha (Zanahoria)
X_3 = ha (Repollo)

① Variables

Mayor cantidad de vegetales a sembrar

x_1 = Yuca
x_2 Zanahoria
x_3 Repollo

② Objetivo Ganar $

$$\text{Max } Z \; \left(1{,}60\left[\tfrac{\$}{\cancel{ton}}\right]\cdot 7\left[\tfrac{\cancel{ton}}{ha}\right]\cdot x_1[\cancel{ha}]\right) - \left(3{,}5\left[\tfrac{\$}{\cancel{ha}}\right]\cdot x_1[\cancel{ha}]\right) + (1{,}30\cdot 15\cdot x_2) - (10\cdot x_2) + (1{,}75\cdot 10\cdot x_3) - (8\cdot x_3)$$

$$\to (7{,}7x_1) + (9{,}5x_2) + (9{,}5x_3)$$

$\boxed{26{,}7\,?}$

③ Restricciones

S.A.:

$7x_1 \geq 2000$
$15x_2 \geq 3500$
$10x_3 \geq 3000$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$
$x_i \geq 0$

②

2. (25%) Una empresa produce tres tipos de productos: jabón liquido para baño, gel desinfectante y lavalozas. Se tienen tres maquinas que pueden hacer tres procesos por hora y para los diferentes tipos de productos así:

$30/h $50/h $40/h

Producto (en litros/hora)	Máquina de mezcla	Máquina de coloración	Máquina de empacado
Jabón liquido	3 L/h	6	5
Gel desinfectante	2	4	5
Lavalozas	2	3	2

El costo operativo por hora de cada máquina es: $30 para la Máquina de mezcla, $50 Máquina de coloración y $40 en la máquina de empacado. Los costos de la materia prima para cada litro de producto son: $20 para el jabón liquido, $30 para gel y $25 para el lavaloza. Los precios de venta de cada litro de producto son: $50 jabón liquido, $60 el gel y $45 el lavaloza. Plantee el problema de programación lineal.

X_1 = Litros jabón L.
X_2 = litros Gel
X_3 = litros lavalozas

maximizar utilidades

① Variables

Cantidad de producto a producir

x_1 Jabón líquido
x_2 Gel desinfectante
x_3 Lavalozas

② Objetivo

$$\text{Max } Z: \left(50\left[\tfrac{\$}{L}\right]\cdot X_1(L)\right) - \left(20\left[\tfrac{\$}{L}\right] X_1(L)\right) - \left(\tfrac{30}{3}\left[\tfrac{\$}{L}\right] X_1[L]\right) - \left(\tfrac{50}{6}\cdot X_1\right) - \left(\tfrac{40}{5}\cdot X_1\right) + 60\cdot X_2 - 30x_2$$

$$-30x_2 - \tfrac{30}{2}x_2 \left(\tfrac{50}{4}x_2\right) - \left(\tfrac{40}{5}\cdot X_2\right) + (45\cdot X_3) - (25\cdot X_3) - \left(\tfrac{30}{2}X_3\right) - \left(\tfrac{50}{3}\cdot X_3\right) - \left(\tfrac{40}{2}\cdot X_3\right)$$

③ Restricciones

S.A.:

$3x_1 \leq 30$	$6x_1 \leq 30$	$5x_1 \leq 40$	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$
$2X_2 \leq 30$	$4x_2 \leq 30$	$5x_2 \leq 40$	
$2X_3 \leq 30$	$3x_3 \leq 30$	$2x_3 \leq 40$	

(3)

Primer parcial: Métodos Cuantitativos

3. (40%) Una fábrica de chaquetas ha visto el aumento en la demanda de su producto, debido al clima más lluvioso. Las chaquetas pueden ser producidas en dos plantas con las siguientes características:

Planta	Capacidad de producción (Unidades)	Costo de producción ($/chaqueta)
A	2600	1300
B	1800	1500

La empresa tiene tres distribuidores en diferentes ciudades quienes están interesados en adquirir las chaquetas y tienen las siguientes características de mercado y opciones de precios de venta.

Distribuidor Ciudad	Precio de venta estimado en cada ciudad ($/Chaqueta)
1	3900
2	3700
3	4000

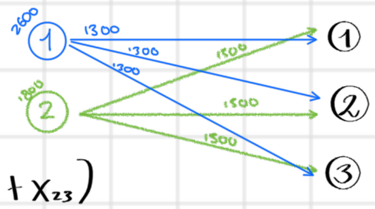
... de programación lineal.

$\max z: 3900(x_{11}+x_{21}) + 3700(x_{12}+x_{22}$

Problema por nodos

nodos salida

nodos llegada



$$\text{Max } Z = 3900\,(x_{11}+x_{21}) + 3700\,(x_{12}+x_{22}) + 4000\,(x_{13}+x_{23})$$
$$\underbrace{-\,1300\,(x_1+x_2+x_3) - 1500\,(x_{21}+x_{22}+x_{23})}_{\text{Costo de producción}}$$

$3900\left[\frac{\$}{C}\right][C] - 1300\frac{\$}{C}[C]$

$\boxed{2600}$

Restricciones

$$\text{Sd}: \quad x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 2600$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 1800$$
$$x_{ij} \ge 0$$

(utilidad)

4. (10%) Una empresa busca asignar 3 tareas (T1, T2 y T3) a 3 empleados (E1, E2 y E3), se calificó a los empleados a partir de valoraciones de desempeño donde se tiene que 0 es un mal desempeño y 10 es un desempeño excelente. Estos valores se presentan en la siguiente tabla.

Empleados	Tareas por asignar		
	T1	T2	T3
E1	x_{11} 6	x_{12} 8	x_{13} 9
E2	x_{21} 5	x_{22} 6	x_{23} 8
E3	x_{31} 7	x_{32} 8	x_{33} 6

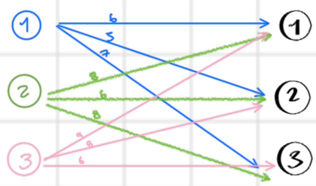
maximizar desempeño

A los empleados solo se les puede asignar una tarea. Plantee el problema de programación lineal asociado.

Tareas $\max z: 6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 6x_{22} +$

nodo salida

nodo llegada



$$\text{Max } Z = 6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 5x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23} + 7x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Empleados}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Tarea}$$

①

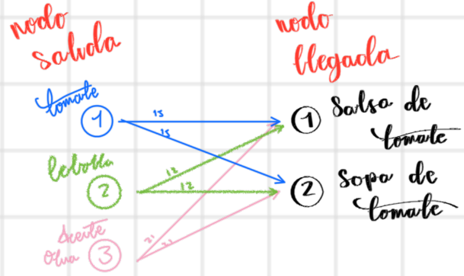
1. **(Valor 30 %)** Se tienen 2 tipos de productos que son: salsa de tomate y sopa de tomate el cual se vende por libras, ellos se producen a partir de: tomate, cebolla y aceite de oliva. A continuación se da la información sobre los insumos:

Insumo	Costo por libra	Libras disponibles
tomate	15	20.000
cebolla	12	25.000
aceite de oliva	21	15.000

Las características de los productos a comercializar son:

producido	Precio de venta ($/libra)	Demanda (libras)
salsa de tomate	42	35.000
sopa de tomate	37	25.000

Plantee el problema de programación lineal asociado a las cantidades optimas de café a producir y dadas las restricciones planteadas.



$$\text{Max } Z = 42(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 37(x_{12}+x_{22}+x_{32}) - 15(x_{11}+x_{21}) - 12(x_{21}+x_{22})$$
$$21(x_{31}+x_{32})$$

x_{ij}: Libras del ingrediente i para hacer libras del producto j

Restricciones Sa:

$$x_{11}+x_{12} \le 20.000$$
$$x_{21}+x_{22} \le 25000$$
$$x_{31}+x_{32} \le 15000$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \ge 35000$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{23} \ge 25000$$

$$x_{11} \ge 0{,}5(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$
$$x_{21} \le 0{,}1(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$
$$x_{12} \le 0{,}35(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$
$$x_{32} \le 0{,}15(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$
$$x_{ij} \ge 0$$

②

2. **(Valor 25 %)** En un fabrica de muebles se fabrican: sillas, mesas y gabinetes. En la tabla se muestra el numero de unidades que se pueden fabricar por hora en cada paso o estado del proceso. Se tiene que el costo por hora de secado al horno es de $5500, el costo para ensamble es de $6700 y para tallado y decoración es de $7200. El costo de la materia prima por unidad de producto es de $750 para las sillas, de $670 para las mesas y de $800 gabinetes. El precio de venta que se tiene es de $30000 para las sillas, de $55000 para las mesas y de $46000 para los gabinetes. Formule el modelo de programación lineal.

Producto	Secado al horno (Unids/hora)	Ensamble (Unids/hora)	Tallado y decoración (Unids/hora)
sillas	3	4	5
mesas	2	2	5
gabinetes	4	5	4

① Variables

x_1 Cantidad de sillas a fabricar

x_2 Cantidad de mesas a fabricar

x_3 Cantidad de gabinetes a fabricar

② Objetivo

$$\text{Max } Z = 30000x_1 + 55000x_2 + 46000x_3 - 750x_1 - 670x_2 - 800x_3 - \frac{5500}{3}x_1 - \frac{5500}{2}x_2 - \frac{5500}{4}x_3$$
$$- \frac{6700}{4}x_1 - \frac{6700}{2}x_2 - \frac{6700}{5}x_3 - \frac{7200}{5}x_1 - \frac{7200}{5}x_2 - \frac{7200}{4}x_3$$

③ Restricciones Sa:

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} \le 1$$
$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{5} \le 1$$
$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} \le 1$$
$$x_{ij} \ge 0$$

③ 3. (Valor 30 %) Un agricultor cultiva: zanahorias, rábanos y berenjenas y cuenta con 2 hectareas de tierra para producir (1 ha = 10.000 metros cuadrados). Se tienen los siguientes valores de productividad, demanda y precio por producto. ~~Se tiene como dato adicional que la disponibilidad de agua para el tiempo del cultivo es de aproximadamente 2.000 metros cúbicos.~~

Producto	Productividad (kg/m²)	Precio de venta	Demanda en kg
Zanahoria	1.5 kg/ m²	$4750 x kg	3000
Rabano	0.8 kg/ m²	$4050 x kg	4500
Berenjena	3 kg/ m²	$6900 x kg	6200

① Variables

x_1 Cuantas hectareas de zanahoria a cultivar

x_2 " " rábano "

x_3 " " berenjena "

② Objetivo → Ganar $

$$\text{Max } Z: 4750\, x_1 \left[\frac{\$}{\cancel{kg}}\right] \cdot 1.5 \left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^2}}\right] \cdot X_1 [\cancel{m^2}] + 4750 \left[\frac{\$}{\cancel{kg}}\right] \cdot 0.8 \left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^2}}\right] \cdot X_1 [\cancel{m^2}] + 6900 \left[\frac{\$}{\cancel{kg}}\right] \cdot 3 \left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m^2}}\right] \cdot X_3 [\cancel{m^2}]$$

③ Restricciones

$$S.A: X_1 + X_2 + X_3 \leq 2 \text{ hectareas} = 20000 \; m^2$$

$$1.5 \frac{kg}{\cancel{m^2}} X_1 [\cancel{m^2}] \geq 3000 [kg]$$

$$0{,}8 \frac{kg}{\cancel{m^2}} X_2 [\cancel{m^2}] \geq 4500 [kg]$$

$$3 \frac{kg}{\cancel{m^2}} X_3 [\cancel{m^2}] \geq 6200 [kg]$$

$$X_{ij} \geq 0$$

	cj						
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
	zj						
	cj-zj						

	cj						
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
	zj						
	cj-zj						

	cj						
cb	variables en la base	Segundo Termino (solucion)	X1	X2	S1	S2	S3
	zj						
	cj-zj						