TALLER MODELADO

Flujo en la linea.

2.1 Una forma geometrica de pensar

2.1.1 Puntos fijos del flujo

$\dot{x} = \sin x$

$f(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0$

el seno de x es cero cuando $x = (2n)\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.1.2 mayor velocidad hacia la derecha

$\dot{x} = \sin x$

$\ddot{x} = \cos x \rightarrow \cos x = 0$

coseno de x es 1 (maxima velocidad)

cuando $x = \left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi$

2.1.3 aceleracion x del flujo

a. $\frac{dx(\dot{x})}{dt} = \frac{d}{dt}\sin x \longrightarrow \ddot{x} = \cos(x)\,\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \sin(x)$

$\ddot{x} = \cos(x)\sin(x)$

b. encuentre puntos donde el flujo tiene una maxima aceleracion positiva

- utilizamos la siguiente identidad

$\frac{1}{2}\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) \longrightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2}\sin(2x)$

tiene maxima aceleracion cuando

$\sin(2x) = 1 \longrightarrow x = (n + \frac{1}{4})\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.1.4

a. demuestre que $t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$ se puede invertir con $x_0 = \frac{\pi}{2}$ para obtener

$x(t) = 2\tan^{-1}\left(\frac{e^t}{1+\sqrt{2}}\right)$

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|\Bigg|_{x_0 = \pi/4} \longrightarrow t = \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\csc x + \cot x}\right|$$

$$\frac{e^t}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\csc x + \cot x} \rightarrow \frac{e^t}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \rightarrow \frac{e^t}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

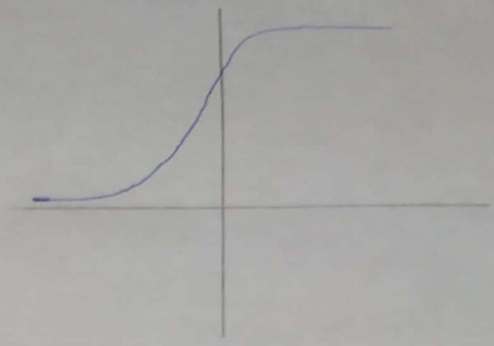
$$\frac{e^t}{\sqrt{2}+1} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{e^t}{\sqrt{2}+1} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow x = 2\tan^{-1}\left(\frac{e^t}{1+\sqrt{2}}\right)$$

b. intente encontrar una solucion analitica para $x(t)$

$x(t) = 2\tan^{-1}\left(\frac{e^{x_0}}{1+\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow x(t) = 2\cot^{-1}\left(e^{-x_0 t}\right)$

cuando $t = 1$ tenemos la siguiente grafica →



2.1.5 Un mecanismo analogo

a. Un mecanismo aproximado por $\dot{x} = \sin x$

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ → su grafica es similar a la de $\sin x$

ecuacion Pendulo simple

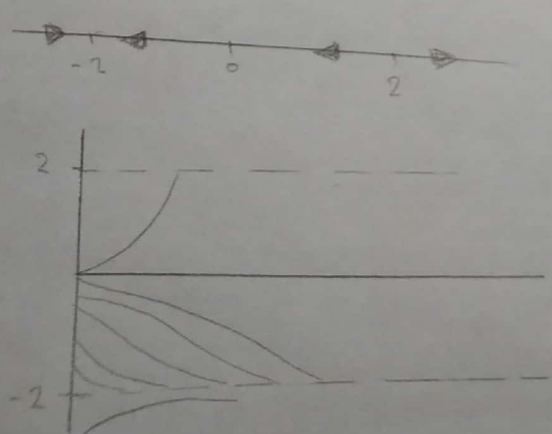
b. explique porque es obvio que $x^* = 0$ es un punto fijo inestable y $x^* = \pi$ es estable

2.2 Puntos fijos y estabilidad.

2.2.1 $\dot{x} = 4x^2 - 16$

- $f(x) = 0 \rightarrow 4x^2 - 16 = 0$
  $x^2 = 4 \rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{matrix}\right\}$ puntos fijos

- $f_x = 8x \Big|_{\substack{x_1 \\ x_2}} \rightarrow f_{x_1} = 8(2) = 16$ — inestable
  $f_{x_2} = 8(-2) = -16$ — estable



solucion analitica

$\frac{dx}{dt} = 4x^2 - 16$

$4dt = x^2 - 4\, dx$

$\int 4dt = \int \frac{dx}{x^2-4}$

$4t + c = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

$x = 2\left(\frac{1 + c_2 e^{16t}}{1 - c_2 e^{16t}}\right)$

$c_2(t=0) = \frac{x-2}{x+2}$

2.2.3 $\dot{x} = x - x^3$

- $f(x) = 0 \longrightarrow x - x^3 = 0 \longrightarrow x(1-x^2) = 0$

  $x(x+1)(x-1) = 0$

  $x_1 = 0$

  $x_2 = 1$

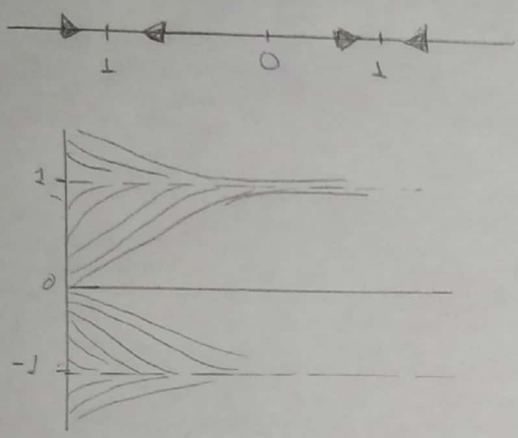
  $x_3 = -1$

- $f_x = 1 - 3x^2 \Big|_{x_1, x_2, x_3} \Rightarrow$

  $f_{x_1} = 1$ inestable

  $f_{x_2} = -2$ estable

  $f_{x_3} = -2$ estable



solucion analitica.

$\dot{x} = x - x^3$

$\frac{dx}{dt} = x - x^3$

$dt = \frac{dx}{x - x^3}$

$\int dt = \int \frac{dx}{x - x^3}$

$x = \pm \frac{Ce^t}{\sqrt{1 + C^2 e^{2t}}}$

$C(t=0) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

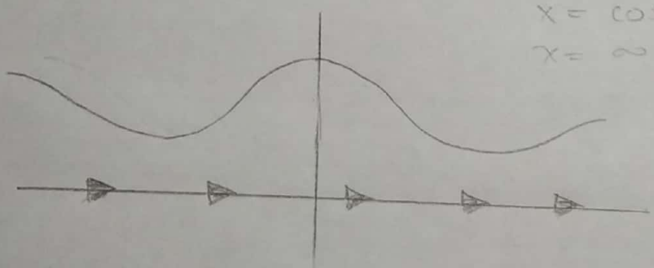
2.2.5 $\dot{x} = 1 + \frac{1}{2}\cos x$

$f(x) = 0$

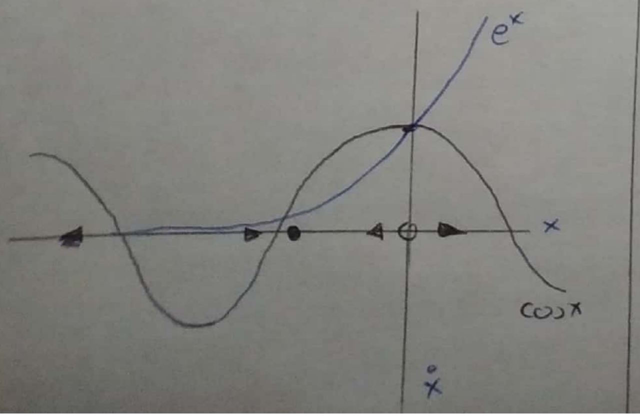
$1 + \frac{1}{2}\cos x = 0 \rightarrow \cos x = -2$

$x = \cos^{-1}(-2)$

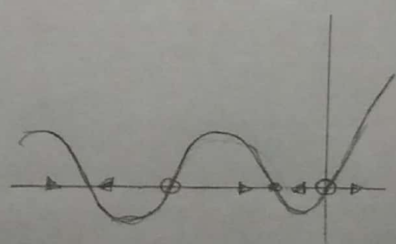
$x = \infty$



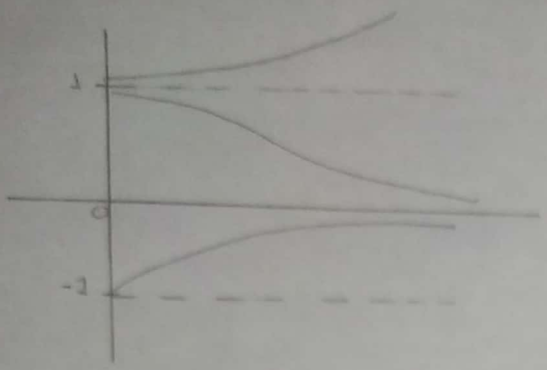
2.2.7. $\dot{x} = e^x - \cos x$

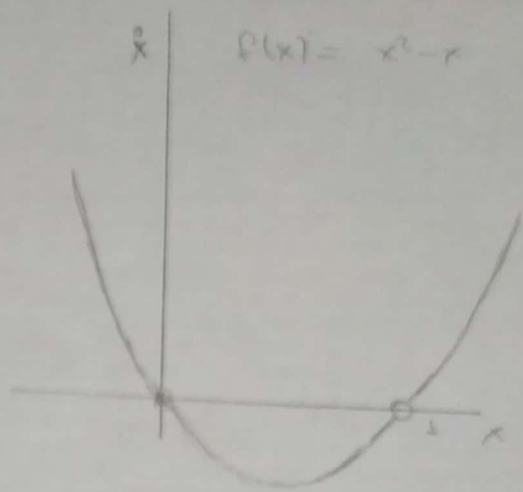


$\longrightarrow x \approx (\frac{1}{2} - n)\pi, \; n \in N \text{ y } x = 0$



2.2.4 encuentre una ecuacion $\dot{x} = f(x)$ cuya solucion sea consistente con lo que se muestra en la figura 2





$x_1 = 0$
$x_2 = 1$ $\Big\}$ $x(x-1)$

2.2.11 analice la solucion para el cambio en el capacitor. Obtenga la solucion analitica para el problema de valor inicial $\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}$, con $Q(0) = 0$

$\dot{Q} - \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R}$

=> multiplicamos a ambos lados por un factor de integracion $e^{\frac{t}{RC}}$

$\Rightarrow \dot{Q} e^{\frac{t}{RC}} - Q e^{\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R}\left(e^{\frac{t}{RC}}\right)$

$= \frac{d}{dt}\left(Q e^{\frac{t}{RC}}\right) = \frac{V_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$

$\int \frac{d}{dt}\left(Q e^{\frac{t}{RC}}\right) = \int \frac{V_0}{R} e^{\frac{t}{RC}} dt$

$Q e^{\frac{t}{RC}} = V_0 C e^{\frac{t}{RC}} + D \equiv Q(t) = V_0 C + D e^{-\frac{t}{RC}}$

como $Q(0) = 0$

$= V_0 C + D = 0$

$D = -V_0 C$

$Q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

2.2.13 la velocidad $v(t)$ de un paracaidista que cae al suelo esta definida por $m\dot{v} = mg - kv^2$, donde m es la masa del paracaidista g es la aceleracion de la gravedad y $k>0$ es una constante relacionada a la resistencia

a. encontrar la solucion analitica para $v(t)$, asumiendo que $v(0)=0$

$$m\dot{v} = mg - kv^2$$

separamos las variables e integramos usando

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$$

$$m\dot{v} = mg - kv^2 \longrightarrow -\frac{m}{v} \int \frac{dx}{v^2 - \frac{m}{k}g} = \int dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \ln\left(\frac{v-\sqrt{mgk}}{v+\sqrt{mgk}}\right) = t + c$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(\frac{1 + c_2 e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 - c_2 e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right)$$

Utilizando condiciones iniciales

$v(0) = 0$

$$\rightarrow c_2 = -1 \longrightarrow v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(\frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right)$$

como $\tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ entonces tenemos

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right)$$

b. encuentre el limite de $v(t)$ cuando $t \to \infty$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right) \rightarrow t \to \infty$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh(\infty) \rightarrow \tanh(\infty) = 1$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

c. analisis grafico

$$m\dot{v} = mg - kv^2$$

$$\dot{v} = \frac{mg}{m} - \frac{kv^2}{m} \rightarrow \dot{v} = g - \frac{kv^2}{m}$$

$$f(x) = 0$$

$$\Rightarrow g - \frac{kv^2}{m} = 0$$

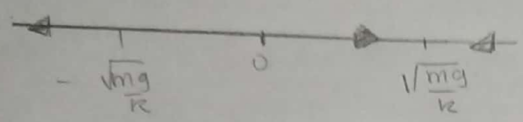
$$\frac{kv^2}{m} = g \rightarrow v^2 = \frac{mg}{k} \rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{mg}{k}} \longrightarrow \begin{matrix} v_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \\ v_2 = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \end{matrix}$$

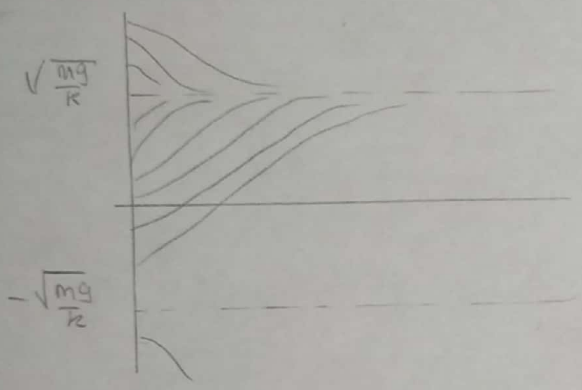
$$f(v) = g - \frac{kv^2}{m}$$

$$f'v = -\frac{2kv}{m}\Big|_{v_1, v_2}$$

$$\Rightarrow f'v\Big|_{v_1} = -\frac{2k\sqrt{\frac{mg}{k}}}{m} \rightarrow \text{estable}$$

$$f'v\Big|_{v_2} = \frac{2k\sqrt{\frac{mg}{k}}}{m} \rightarrow \text{inestable}$$





d. Velocidad Promedio

$$V = \frac{31.400 - 2.100\,ft}{116\,s} = 253\ ft/s$$

e. estime la Velocidad terminal y el valor de la constante de arrastre

$$s(t) = \frac{m}{k}\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)\right)$$

Usando $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ entonces

$$s(t) = \frac{v^2}{g}\ln\left(\cosh\left(\frac{g}{v}t\right)\right)$$ Usando los valores del texto

$s = 116\,s$, $g = 32{,}2\,\frac{ft}{s^2}$, $s(t) = 29.300\ ft$

$$29.300\,ft = \frac{v^2}{32{,}2\,\frac{ft}{s^2}}\ln\left(\cosh\left(\frac{32{,}2\,\frac{ft}{s^2}}{v}t\right)\right) \Rightarrow v \approx 266\,\frac{ft}{sec}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \rightarrow k = \left(\frac{v^2}{mg}\right)^{-1} \Rightarrow k = \frac{mg}{v^2} \Rightarrow k = \frac{(261{,}2)(32{,}2)}{(266)^2} = \boxed{0{,}118}$$

2.3 Crecimiento de poblacion.

2.3.2. (autocatalisis)

$$\dot{x} = k_1 a x - k_{-1} x^2$$

donde k_1 y k_{-1} son parametros positivos llamados tarifa constante

a) encuentre los puntos fijos y clasifique su estabilidad

- puntos fijos

$f(x) = 0 \rightarrow k_1 a x + k_{-1} x^2 = 0$

$x(k_1 a + k_{-1} x) = 0$

$k_1 a + k_{-1} x = 0$

$x = -\frac{k_1 a}{k_{-1}} \rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{k_1 a}{k_{-1}}$

- estabilidad

$f_x(k_1 a x + k_{-1} x^2) \rightarrow f_x = k_1 a + 2k_{-1} x \Big|_{x_1, x_2}$

$f_{x_1} = k_1 a \longrightarrow f_{x_1} \rightarrow$ inestable

$f_{x_2} = k_1 a + 2\cancel{k_{-1}}\frac{(-k_1 a)}{\cancel{k_{-1}}}$

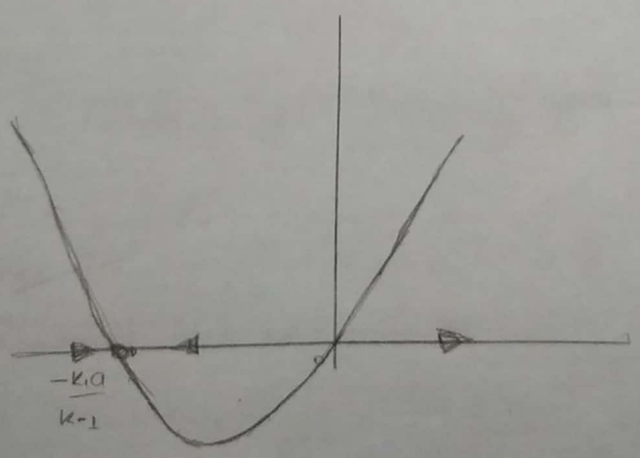
$f_{x_2} = k_1 a - 2k_1 a$

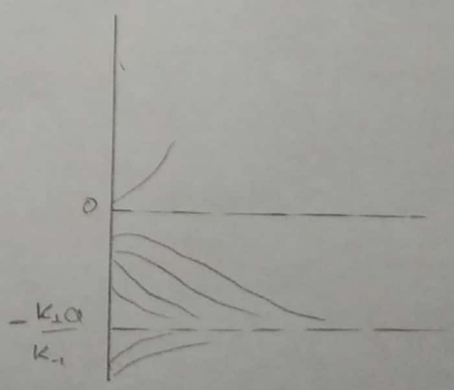
$= -k_1 a$

$\longrightarrow f_{x_2} \rightarrow$ estable

b. dibuje el grafico de $x(t)$ para valores iniciales x_0

$x(t) = k_1 a x_0 - k_{-1}(x_0)^2$





2.4 Analisis de estabilidad lineal

Utilize el analisis de estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas, si el analisis de estabilidad lineal falla porque $f'(x^*)=0$, utilice un argumento grafico para decir la estabilidad.

2.4.1 $\dot{x} = x(1-x)$

- $f(x)=0 \rightarrow x(1-x)=0$
  $1-x=0$
  $x=1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}\right\}$ puntos fijos

- $f_x(x-x^2) \rightarrow f_x = 1-2x \Big|_{x_1, x_2} \rightarrow f_{x_1} = 1 \rightarrow$ estable
  $f_{x_2} = 1-2(1)$
  $= -1 \rightarrow$ inestable

2.4.2 $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$

- $f(x)=0 \rightarrow x(1-x)(2-x)=0$
  $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=2 \end{array}\right\}$ puntos fijos

- $f_x(x^3-3x^2+2x) \rightarrow f_x = 3x^2-6x+2 \Big|_{x_1, x_2, x_3} \rightarrow f_{x_1} = 3(0)^2-6(0)+2 = 2$
  $f_{x_2} = 3(1)^2-6(1)+2 = -1$
  $f_{x_3} = 3(2)^2-6(2)+2 = 2$

$f_{x_1} \rightarrow$ inestable
$f_{x_2} \rightarrow$ estable
$f_{x_3} \rightarrow$ inestable

2.4.3 $\dot{x} = \tan x$

- $f(x)=0 \rightarrow \tan x = 0$
  $x = \tan^{-1}(0)$
  $x=0$

- $f_x(\tan x) = f_x = \sec^2 x \Big|_0 \Rightarrow 1 \rightarrow$ inestable

2.4.4 $\dot{x} = x^2(6-x)$

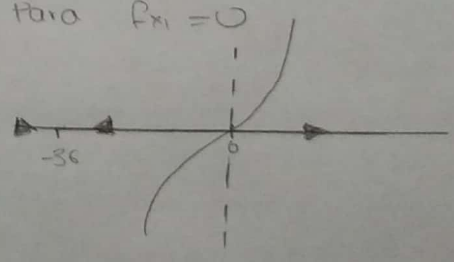
- $f(x)=0 \rightarrow x^2(6-x)=0 \rightarrow x_1=0$
  $x_2=6$

- $f_x(x^2(6-x)) \rightarrow f_x = 12x-3x^2 \Big|_{x_1, x_2}$

$\Rightarrow f_{x_1} = 12(0)-3(0)$
$= 0$

$\rightarrow f_{x_2} = 12(6)-3(6)^2$
$= -36 \rightarrow$ estable

Para $f_{x_1}=0$



Inestable

2.4.5 $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

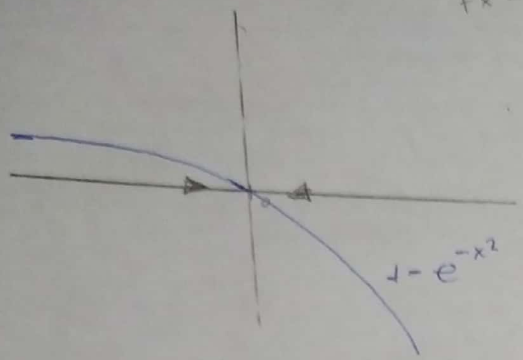
- $f(x) = 0 \rightarrow 1 - e^{-x^2} = 0 \rightarrow e^{-x^2} = 1$

  $-x^2 = 0$

  $x = 0 \rightarrow$ Punto de equilibrio

- $f_x = -e^{x^2} \cdot 2x \Big|_{x=0} \longrightarrow f_x = -e^0 \cdot 2(0)$

  $f_x = 0$



Punto estable

2.4.6 $\dot{x} = \ln x$

$f(x) = 0 \rightarrow \ln x = 0$

$e^{\ln x} = e^0$

$x = 1 \rightarrow$ Punto de equilibrio

$f_x = \frac{1}{x}\Big|_1 = f_{x_1} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow$ inestable

2.4.7 $\dot{x} = ax - x^3$

$f(x) = 0 \rightarrow ax - x^3 = 0$

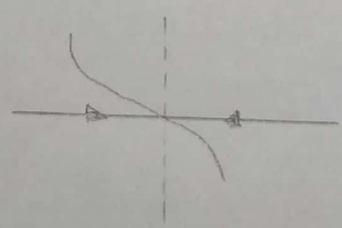
$x(a - x^2) = 0$

$a - x^2 = \pm\sqrt{a} \rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{a}$, $x_3 = -\sqrt{a}$

$f_x = a - 3x^2 \Big|_{x_1, x_2, x_3} \rightarrow f_{x_1} = a$

Para $x_2 = \sqrt{a}$

- $a = 0 \Rightarrow f_x = 0 \rightarrow$



Punto estable

- $a > 0 \Rightarrow f_x = a - 3(\sqrt{a})^2$

  $= a - 3a$

  $= -2a \rightarrow$ Punto estable

- $a < a \Rightarrow f_x = -a - 3(\sqrt{a}\,i)^2 \rightarrow$ Punto estable

Para $x_3 = -\sqrt{a}$

- $a = 0 \rightarrow$ estable
- $a > 0 \rightarrow f_x = a - 3a = -2a \rightarrow$ Punto estable
- $a < 0 \rightarrow f_x = a - 3(\sqrt{a}\,i)^2 \rightarrow$ inestable Parte real $\rightarrow$ estable Parte imaginaria

Escaneado con CamScanner

2.4.8 modelo de Gompertz

$\dot{N} = -aN\ln(bN)$

$f(x) = 0 \rightarrow -aN\ln(bN) = 0$

$\ln(bN) = 0 \rightarrow N_1 = 0$

$bN = 1 \quad N_2 = \frac{1}{b}$

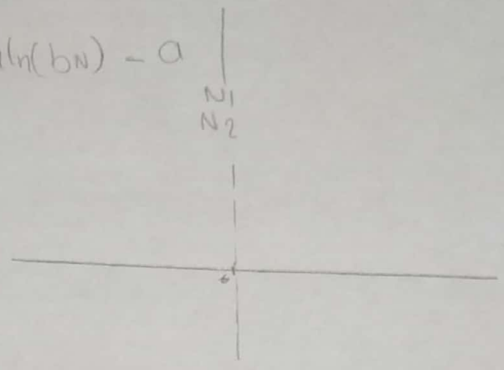
$N = \frac{1}{b}$

$f_N = -a\ln(bN) - aN\left(\frac{1}{bN}\right)b \Rightarrow a\ln(bN) - a \Big|_{N_1, N_2}$

$f_{N_1} = a\ln(b(0)) - a$

$f_{N_1} = a - a$

$= 0 \longrightarrow$



$f_{N_2} = a\ln\left(\frac{b}{b}\right) - a$

$f_{N_2} = -a \rightarrow$ estable

2.4.9 Ralentización crítica

a. obtener la solución analítica a $\dot{x} = -x^3$ para una condición inicial arbitraria

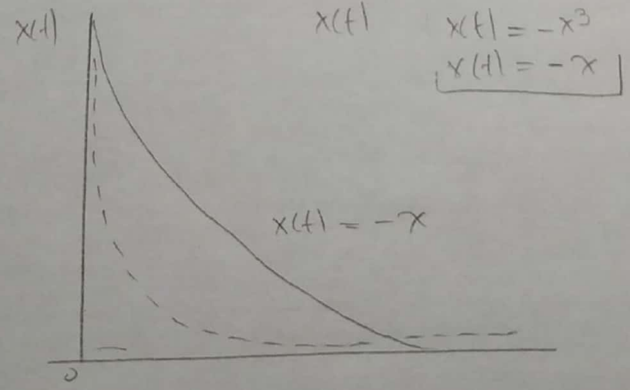
$\frac{dx}{dt} = -x^3 \rightarrow dt = -\frac{dx}{x^3} \rightarrow \int dt = \int -\frac{dx}{x^3}$ para $x(0) = x_0$

$t + c = \frac{1}{2x^2} + c$

$t = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} + 2t}}$

dependiendo de la condición inicial $\longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \rightarrow \frac{\pm 1}{\sqrt{2t}} \rightarrow 0$

b.



2.8.7 Estimacion de error para el metodo de euler

a. metodo de Euler

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n)$$

$$\Rightarrow \quad x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t \dot{x}(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{x} \cdot (t - t_0)^2$$

$$x(t_1) = x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t_0)\Delta t^2}{2}$$

$$= x_0 + \Delta t f(x_0) + \frac{\Delta t^2}{2} F'(x_0)$$

b. $|x(t_1) - x_1| = |x_0 + \Delta t f(x_0) + \frac{\Delta t^2}{2} f(x_n) - (x_0 + \Delta t f(x_0))|$

$$= \frac{\Delta t^2 |f'(x_0)|}{2.}$$