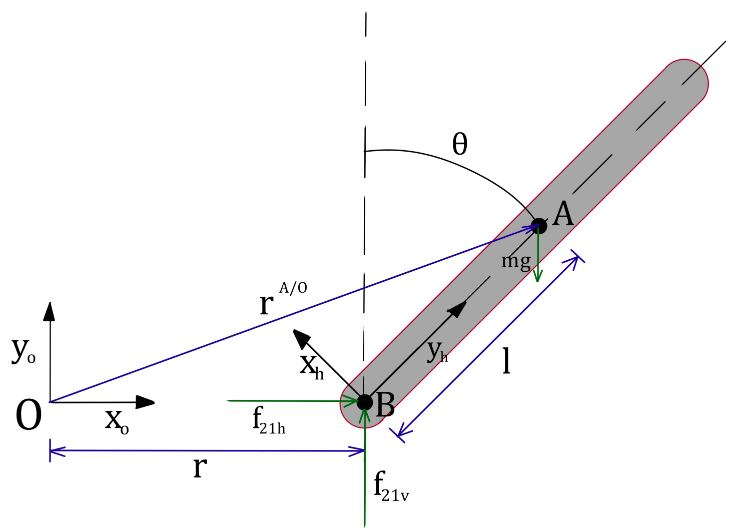
# Relatório Final de AA-600 - Estágio de Docência
# Memorial de Cálculo

João Filipe Renó Peixoto de Azevedo Silva

2 de dezembro de 2020

## 1 Equações de Movimento

### 1.1 Dinâmica de Translação da Haste




Do somatório das forças, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_{21h} + \vec{f}_{21v} + mg &= m\ddot{r}^{A/O} \\
f_{21h}\hat{x}_o + f_{21v}\hat{y}_o - mg\hat{y}_o &= m\ddot{r}^{A/O}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sendo H um sistema de coordenadas girante centrado em B, o lado direito da equação pode ser desenvolvido da forma:

$$
\begin{aligned}
\ddot{r}^{A/O} &= \frac{d^o}{dt}\left(\frac{d^o}{dt}\left(r^{B/O}+r^{A/B}\right)\right) = \frac{d^o}{dt}\left(\frac{d^o}{dt}\left(x\hat{x}_o\right)+\left(\cancelto{0}{\frac{d^h}{dt}r^{A/B}}+\omega^{h/O}\times r^{A/B}\right)\right)\\
&= \frac{d^o}{dt}\left(\dot{r}\hat{x}_o+\omega^{h/O}\times r^{A/B}\right) = \ddot{r}\hat{x}_o+\frac{d^o}{dt}\left(\dot{\theta}(-\hat{z}_0)\times l\hat{y}_h\right)\\
&= \ddot{r}\hat{x}_o+\frac{d^o}{dt}\left(\dot{\theta}(-\hat{z}_0)\times l(cos\theta\hat{y}_o+sen\theta\hat{x}_o)\right)\\
&= \ddot{r}\hat{x}_o+\frac{d^o}{dt}\left(l\dot{\theta}cos\theta\hat{x}_o-l\dot{\theta}sen\theta\hat{y}_o\right)\\
\ddot{r}^{A/O} &= \ddot{r}\hat{x}_o+l\ddot{\theta}cos\theta\hat{x}_o-l\dot{\theta}^2sen\theta\hat{x}_o-l\ddot{\theta}sen\theta\hat{y}_o-l\dot{\theta}^2cos\theta\hat{y}_o \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$$
m\ddot{r}+ml\ddot{\theta}cos\theta-ml\dot{\theta}^2sen\theta = f_{21h} \qquad (3)
$$

$$
-ml\ddot{\theta}sen\theta-ml\dot{\theta}^2cos\theta+mg = f_{21v} \qquad (4)
$$

## 1.2 Dinâmica de Rotação da Haste

Da equação de momento angular da haste, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}h^{haste/A} &= \sum Torques\ (em\ \hat{z}_o)\\
\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) &= lsen\theta f_{21v}-lcos\theta f_{21h}\\
\therefore I\ddot{\theta} &= lsen\theta f_{21v}-lcos\theta f_{21h} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

De (3) e (4), (5) se torna:

$$
I\ddot{\theta} = lsen\theta\left(-ml\ddot{\theta}sen\theta-ml\dot{\theta}^2cos\theta+mg\right)-lcos\theta\left(m\ddot{r}+ml\ddot{\theta}cos\theta-ml\dot{\theta}^2sen\theta\right)
$$

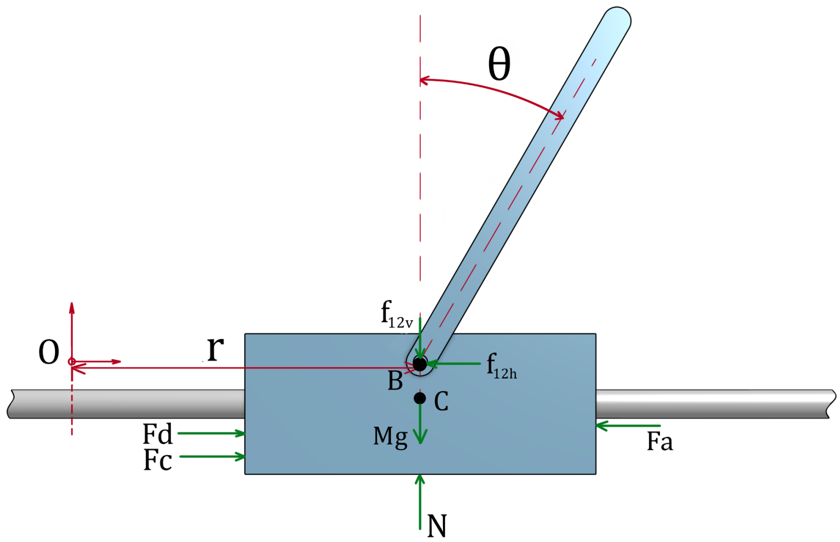
$$
\left(I+ml^2sen^2\theta+ml^2cos^2\theta\right)\ddot{\theta}-\cancel{\left(ml^2sen\theta cos\theta-ml^2sen\theta cos\theta\right)\dot{\theta}^2} = mglsen\theta-mlcos\theta\ddot{r}
$$

$$
\left(I+ml^2\right)\ddot{\theta}+mlcos\theta\ddot{r} = mglsen\theta \qquad (6)
$$

## 1.3 Dinâmica de Translação do Carro

Do somatório das forças, sabendo que o vetor $\vec{r}^{C/B}$ é constante para um observador em O tem-se:

$$
\begin{gathered}
\sum F = M\frac{{}^od}{dt}\left(\frac{{}^od}{dt}\left(\vec{r}^{C/O}\right)\right) = M\frac{{}^od^2}{dt^2}\left(r^{B/O}+r^{C/B}\right) = M\frac{{}^od^2}{dt^2}\left(r^{B/O}\right)\\
\vec{f}_{12h}+\vec{f}_{12v}+Mg+\vec{F}c+\vec{F}a+\vec{F}d+N = M\ddot{r}\\
-f_{21h}\hat{x}_o-f_{21v}\hat{y}_o-MG\hat{y}_o+Fc\hat{x}_o+Fd\hat{x}_o-Fa\hat{x}_o+N\hat{y}_o = M\ddot{r}\hat{x}_o
\end{gathered}
$$




$$M\ddot{r} = Fc + Fd - Fa - f_{21h} \tag{7}$$
$$N - Mg - f_{21v} = 0 \tag{8}$$

De (7) e (8), (3) e (4) se tornam:

$$(M+m)\,\ddot{r} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sen\theta + Fa = Fc + Fd \tag{9}$$
$$ml\ddot{\theta}sen\theta + ml\dot{\theta}^2 cos\theta = (M+m)\,g - N \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9) e $Fa$ por $\mu N$:

$$\begin{aligned}
(M+m)\,\ddot{r} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sen\theta + \mu\left(-ml\ddot{\theta}sen\theta - ml\dot{\theta}^2 cos\theta + (M+m)\,g\right) &= Fc + Fd \\
(M+m)\,\ddot{r} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sen\theta + \mu\,(M+m)\,g - \mu ml\ddot{\theta}sen\theta - \mu ml\dot{\theta}^2 cos\theta &= Fc + Fd \\
(M+m)\,\ddot{r} + ml\,(cos\theta - \mu sen\theta)\,\ddot{\theta} - ml\,(sen\theta + \mu cos\theta)\,\dot{\theta}^2 + \mu\,(M+m)\,g &= Fc + Fd
\end{aligned} \tag{11}$$

De (6) e (11) e sabendo que $-\mu(M+m)g$ é a força de atrito da planta completa, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+m & ml(cos\theta - \mu sen\theta) \\ lmcos\theta & I + ml^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ml(sen\theta + \mu cos\theta)\dot{\theta}^2 + Fa + Fc + Fd \\ mlgsen\theta \end{bmatrix} \tag{12}$$

# 2 Representação em Espaço de Estados

A fim de linearizar as equações (6) e (11), as seguintes aproximações para pequenos ângulos e para a força de atrito foram adotadas:

- $cos\theta \approx 1$
- $sen\theta \approx \theta$;
- $\dot{\theta}^2 \approx 0$;
- $\mu\theta \approx 0$;
- $Fa \approx \mu\dot{r}$

Sendo assim, as equações supracitadas se tornam:

$$\left(M+m\right)\ddot{r} + ml\ddot{\theta} + \mu\dot{r} = Fc + Fd \tag{13}$$
$$\left(I+ml^2\right)\ddot{\theta} + ml\ddot{r} = mgl\theta \tag{14}$$

Adotemos como $u$ a denominação da soma dos esforços externos sobre a planta. Manipulando as equações (13) e (14), a fim de isolar os estados $\ddot{r}$ e $\ddot{\theta}$, temos:

$$\ddot{r} = \left(\left(M+m\right)\left(I+ml^2\right) - \left(ml\right)^2\right)^{-1}\left(\left(I+ml^2\right)u - m^2l^2g\theta - \left(I+ml^2\right)\mu\dot{r}\right) \tag{15}$$
$$\ddot{\theta} = \left(\left(ml\right)^2 - \left(M+m\right)\left(I+ml^2\right)\right)^{-1}\left(mlu - ml\mu\dot{r} - \left(M+m\right)mlg\theta\right) \tag{16}$$

Adotando as seguintes nomenclaturas:

$$p = \left(M+m\right)\left(I+ml^2\right) - \left(ml\right)^2$$
$$q = \left(ml\right)^2 - \left(M+m\right)\left(I+ml^2\right)$$

A representação das equações (15) e (16) em Espaço de Estados fica da forma:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{r}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-m^2l^2g^2}{p} & \frac{-(I+ml^2)\mu}{p} & 0\\ 0 & \frac{-(M+m)mlg}{q} & \frac{-ml\mu}{q} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\ \theta\\ \dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{I+ml^2}{p}\\ \frac{ml}{q}\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\ \theta\\ \dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u\end{aligned} \tag{17}$$