

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

MP-273: Sliding Mode Control

Exercício Computacional 1

Prof. Davi Antônio dos Santos

4 de maio de 2021

Considere um multicóptero subatuado, representado na prática por drones ou aeronaves eVTOL de rotores fixos (não vetoráveis e de passo constante). Esses veículos têm as dinâmicas de translação e de rotação em cascata, de tal forma que a translação é afetada pela rotação, mas não o contrário. Sua característica de subatuação refere-se ao fato de que têm, por um lado, um movimento em seis graus de liberdade (posição e atitude tridimensionais) e, por outro, apenas quatro esforços de controle independentes (magnitude do empuxo resultante e torque em três eixos). Como reportado na literatura [1], uma forma simples de lidar com essa característica dinâmica dos multicópteros subatuados é através de uma estrutura de controle hierárquica em que a malha de controle de atitude é posta internamente à malha controle de posição. Assim, desde que se possa na prática fazer com que as dinâmicas de rotação sejam bem mais rápidas do que as dinâmicas de translação, ambas em malha fechada, torna-se possível projetar satisfatoriamente as leis de controle de translação e de rotação de forma separada.

No presente trabalho, vamos nos ater apenas ao projeto da lei de controle de translação de um multicóptero subatuado. Para tal, consideremos inicialmente dois sistemas de coordenadas Cartesianas (SCC). Vide ilustração na Figura 1. O SCC do corpo $\mathcal{S}_b \triangleq \{B; \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b\}$ é fixo à estrutura (suposta rígida) do veículo, com a origem no seu centro de massa denotado por B , o eixo \vec{x}_b apontado para frente, o eixo \vec{z}_b normal à estrutura e com o sentido para cima e o eixo \vec{y}_b completando uma base ortonormal dextrógira do espaço tridimensional. O sistema da Terra (ou global) $\mathcal{S}_g \triangleq \{G; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g\}$ é fixo ao solo, em um ponto conhecido G , com o eixo \vec{z}_g apontado verticalmente para cima e os demais eixos orientados arbitrariamente, exceto pela suposição de que também constituam uma base ortonormal dextrógira do espaço tridimensional. A Figura 1 também ilustra o vetor posição $\vec{r}^{b/g}$ do multicóptero, representado aqui como a posição de \mathcal{S}_b em relação a \mathcal{S}_g .

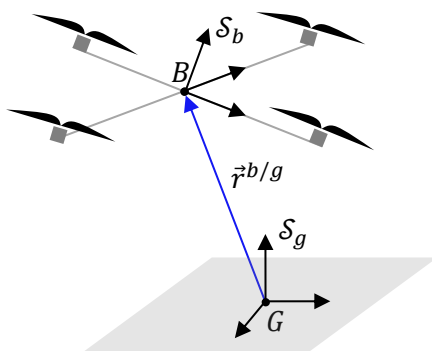


Figura 1: Ilustração esquemática de um multicóptero subatuado.

Considerando que o veículo tenha uma massa m constante e supondo que \mathcal{S}_g represente um referencial inercial, a Segunda de Lei de Newton nos fornece imediatamente:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}^{b/g} = \vec{f}^g + \vec{f}^c + \vec{f}^d, \quad (1)$$

onde \vec{f}^g , \vec{f}^c e \vec{f}^d denotam os vetores de força da gravidade, de controle e de distúrbio, respectivamente, e o super-índice g à esquerda da derivada temporal indica que a mesma é tal como percebida por um observador fixo em \mathcal{S}_g .

No projeto do controlador de translação, ao invés de usarmos diretamente a equação de movimento (1), que está expressa em termos de vetores de Euclides, é conveniente usarmos uma forma algébrica que a represente. Nesse sentido, representando (ou projetando) cada vetor geométrico de (1) na base de \mathcal{S}_g , obtemos:

$$m \ddot{\mathbf{r}}_g^{b/g} = \mathbf{f}_g^g + \mathbf{f}_g^c + \mathbf{f}_g^d, \quad (2)$$

onde $\mathbf{r}_g^{b/g} \in \mathbb{R}^3$ representa $\vec{r}^{b/g}$, enquanto $\mathbf{f}_g^g \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}_g^c \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{f}_g^d \in \mathbb{R}^3$ representam \vec{f}^g , \vec{f}^c e \vec{f}^d , respectivamente.

Por fim, adotando o modelo de gravidade $\mathbf{f}_g^g = -mg\mathbf{e}_3$, onde g (à direita da igualdade!) denota a magnitude da aceleração da gravidade e $\mathbf{e}_3 \triangleq (0, 0, 1)$, obtemos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_g^{b/g} = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{f}_g^c + \frac{1}{m}\mathbf{f}_g^d. \quad (3)$$

Questão 1. Adotando as definições $\mathbf{x}_1 \triangleq \mathbf{r}_g^{b/g}$, $\mathbf{x}_2 \triangleq \dot{\mathbf{r}}_g^{b/g}$, $\mathbf{u} \triangleq \mathbf{f}_g^c$ e $\mathbf{d} \triangleq \mathbf{f}_g^d$, escreva a equação de movimento (3) em espaço de estados, na forma regular:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{u} + \mathbf{d}). \quad (5)$$

Questão 2. Defina os erros de rastreo $\tilde{\mathbf{x}}_1 \triangleq \mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{r}}_g^{b/g}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_2 \triangleq \mathbf{x}_2 - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_g^{b/g}$, onde $\bar{\mathbf{r}}_g^{b/g}$ representa uma trajetória de posição suave desejada. Usando as equações (4)–(5) obtidas na Questão 1, obtenha um modelo em espaço de estados na forma regular para o erro de rastreo $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)$.

Questão 3. Suponha que os componentes de \mathbf{d} sejam desconhecidos, mas satisfaçam $|d_i| \leq \rho_i$, com ρ_i conhecido, para $i = 1, 2, 3$. Sob essa condição, projete uma lei de controle por modos deslizantes multivariável do tipo *unit vector* que faça $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ assintoticamente estável no sentido global.

Aqui cabe uma reflexão a respeito dos limitantes de \mathbf{d} . Note inicialmente que $|d_i| \leq \rho_i, \forall i$, equivale a $|d_i/\rho_i| \leq 1, \forall i$, que por vez implica em

$$\max_i |d_i/\rho_i| \leq 1. \quad (6)$$

Por definição da norma infinita, (6) equivale a

$$\|\mathbf{\Gamma}\mathbf{d}\|_\infty \leq 1, \quad (7)$$

onde $\mathbf{\Gamma} \triangleq \text{diag}(1/\rho_1, 1/\rho_2, 1/\rho_3)$. Olhando no sentido inverso, note também que se \mathbf{d} satisfaz (7), obrigatoriamente satisfaz os requisitos originais $|d_i| \leq \rho_i, \forall i$.

Sabemos que para projetarmos um controlador do tipo *unit vector* precisamos especificar o conjunto limitante do distúrbio em termos da norma 2, não da infinita. Nitidamente, não existe um conjunto na norma 2 que seja igual a $\mathcal{D}_\infty \triangleq \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{d}\|_\infty \leq 1\}$. Neste caso, ao definir um novo conjunto \mathcal{D}_2 em

termos da norma 2, precisamos ser conservadores, fazendo uma escolha tal que $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_2$. Assim, se o controlador projetado for robusto a um distúrbio que pertença a \mathcal{D}_2 , também o será para um distúrbio em \mathcal{D}_∞ , atendendo assim os requisitos originais $|d_i| \leq \rho_i, \forall i$.

Visando minimizar o inevitável conservadorismo mencionado acima, vamos definir \mathcal{D}_2 como sendo a bola na norma 2 em que o conjunto \mathcal{D}_∞ está inscrito, *i.e.*,

$$\mathcal{D}_2 \triangleq \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{d}\|_2 \leq \sqrt{3} \right\}, \quad (8)$$

que, por construção, satisfaz $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_2$, como desejado.

Defina a matriz simétrica e positiva definida $\mathbf{P} \triangleq \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}$. Recorrendo à desigualdade de Rayleigh, temos:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{d}\|_2^2 \leq \mathbf{d}^T \mathbf{P} \mathbf{d} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{d}\|_2^2, \quad (9)$$

onde $\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) \in \mathbb{R}_+$ são, respectivamente, o mínimo e o máximo autovalores de \mathbf{P} . Extraíndo a raiz quadrada de (9), obtemos imediatamente ¹:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma})\|\mathbf{d}\|_2 \leq \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{d}\|_2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma})\|\mathbf{d}\|_2, \quad (10)$$

Aumentando um pouco mais o conservadorismo discutido acima, podemos definir um outro conjunto $\mathcal{D}_3 \supset \mathcal{D}_2$ a partir de (8) e (10) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &\triangleq \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma})\|\mathbf{d}\|_2 \leq \sqrt{3} \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{d}\|_2 \leq \sqrt{3}/\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}) \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_{\max} \sqrt{3} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

onde $\rho_{\max} \triangleq \max_i \rho_i$.

Logo, de (11), obtemos imediatamente a seguinte especificação para os limitantes do distúrbio \mathbf{d} em termos da norma 2:

$$\|\mathbf{d}\|_2 \leq \rho_{\max} \sqrt{3}. \quad (12)$$

Questão 4. Simule o sistema de controle projetado usando um script MATLAB e considerando $m = 1$ kg, $g = 9,81$ m/s², condições iniciais nulas e um distúrbio senoidal

$$\mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} 0,3 \sin(\pi t/4) \\ 0,4 \sin(\pi t/4 + \pi/2) \\ 0,5 \sin(\pi t/4 + \pi) \end{bmatrix} N.$$

Adote o seguinte comando de posição helicoidal:

$$\mathbf{r}_g^{b/g}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi t/2) \\ \sin(\pi t/2 + \pi/2) \\ t/4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

de $t = 0$ a $t = 16$ s. Plote gráficos de:

- $\mathbf{r}_g^{b/g}$ sobreposto a $\mathbf{r}_g^{b/g}$, ambos ao longo do tempo;

¹Note que de fato a raiz quadrada não altera a desigualdade em questão, já que a mesma tem todos os membros positivos e a função raiz quadrada é monotônica crescente em $[0, \infty)$.

- $\dot{\mathbf{r}}_g^{b/g}$ sobreposto a $\dot{\mathbf{r}}_g^{b/g}$, ambos ao longo do tempo;
- \mathbf{u} ao longo do tempo; e
- \mathbf{s} ao longo do tempo;

Analise os gráfico obtidos verificando se condizem com a teoria.

Referências

- [1] Silva, A. L.; Santos, D. A. Fast Nonsingular Terminal Sliding Mode Flight Control for Multirotor Aerial Vehicles. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 56(6), 2020.