一、程序使用步骤：

1. 点击菜单“精密星历”后，在下拉菜单中分别点击“读取精密星历数据(15min)”和“读取精密星历数据结果(5min)”

2. 点击菜单“内插和拟合算法”后，在下拉菜单中分别点击“Lagrange 插值”、“Neville 插值”、“Chebyshev 拟合”和“Legendre 拟合”，获取四种算法内插或拟合成 5min 间隔的卫星轨道结果文件。

3. 点击菜单“精度评定”后，在下拉菜单中分别点击“中误差”、“最大误差”和“最小误差”获取与“精密星历数据结果(5min)”进行对比后的精度结果。

4. 点击菜单“帮助”栏，可查看四种算法的数学原理及程序使用步骤。

5. 点击菜单“退出”栏，直接退出程序。

二、插值和拟合算法数学原理

1. Lagrange 插值

设有 $n+1$ 个节点时刻 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 对应的精密星历坐标(或钟差)某项为：$y_0, y_1, \cdots y_n$，则计算任意时刻卫星坐标(或钟差)的 n 阶插值多项式为：

$$y(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-t_0)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}y_i \tag{1}$$

利用上式分别对卫星坐标的三个分量(X,Y,Z)和钟差进行内插计算，便得到采样时刻卫星的坐标和钟差。

2. Neville 插值

设有 $n+1$ 个节点时刻 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 对应的精密星历坐标(或钟差)某项为：$y_0, y_1, \cdots y_n$，令 $T_{i,0}=y_i\,(i=0,1,2\cdots n)$，则有：

$$T_{i,j}=\frac{(t-t_i)T_{i-1,j-1}-(t-t_{i-j})T_{i,j-1}}{t_{i-j}-t_i}\qquad(i,j=1,2,\cdots n) \tag{2}$$

其算法的详细流程如表1所示：

表1. Neville算法流程表

历元时刻	第一步	第二步	第三步	…	第n步
t_0	$T_{0,0}$				
t_1	$T_{1,0}$	$T_{1,1}$			
t_2	$T_{2,0}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
t_n	$T_{n,0}$	$T_{n,1}$	$T_{n,2}$		$T_{n,n}$

3. Chebyshev拟合

由于Chebyshev多项式只适用于自变量区间为$\left[-1,1\right]$的情况，假设插值的初始时间为t_0，在时间段$\left[t_0,t_0+\Delta t\right]$的区间内采用$n$阶切比雪夫多项式逼近时，首先需要利用以下公式

$$\tau=\frac{2}{\Delta t}(t-t_0)-1 \tag{3}$$

将变量t的区间归化到$\left[-1,1\right]$上。则卫星坐标的Chebyshev拟合多项式可表示为下式

$$y(\tau)=\sum_{i=0}^{n}C_{y_i}T_i(\tau) \tag{4}$$

其中，n为多项式阶数；C_{y_i}为多项式系数；$T_i(\tau)$为第i阶 Chebyshev 多项式，可通过下列递推关系求出：

$$T_0(\tau)=1,T_1(\tau)=t,T_{n+1}(\tau)=2\tau T_n(\tau)-T_{n-1}(\tau)\qquad (n=1,2,3\cdots) \tag{5}$$

在时间段$\left[t_0,t_0+\Delta t\right]$选取$m$ ($m>n+1$)个节点历元，根据每个历元对应的卫星坐标，可列出误差方程

$$V=BC-l \tag{6}$$

其中：V 为残差向量；B 为Chebyshev多项式矩阵；C 为待求的未知数向量，即多项式系数；l为节点历元对应的卫星坐标。以上各符号写成矩阵的形式为：

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_m\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}T_0(\tau_1)&T_1(\tau_1)&\cdots&T_n(\tau_1)\\T_0(\tau_2)&T_1(\tau_2)&\cdots&T_n(\tau_2)\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\T_0(\tau_m)&T_1(\tau_m)&\cdots&T_n(\tau_m)\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}C_{y_0}\\C_{y_1}\\\vdots\\C_{y_n}\end{bmatrix},\quad l=\begin{bmatrix}Y(\tau_1)\\Y(\tau_2)\\\vdots\\Y(\tau_m)\end{bmatrix}$$

根据最小二乘准则，可以得出 $C=(B^TPB)^{-1}B^TPl$。由于各卫星轨道观测为等权观测，所以P为单位阵，因此C可改写为$C=(B^TB)^{-1}B^Tl$，将C回代入式(4)，并结合式(5)便可求解相应区间内任意时刻的卫星坐标。

4. Legendre拟合

该算法与Chebyshev多项式拟合类似，归化时间t的区间后，GPS卫星坐标的Legendre拟合多项式可表示为

$$y(\tau)=\sum_{i=0}^{n}C_{y_i}P_i(\tau) \tag{7}$$

上式中，$P_i(\tau)$为第i阶Legendre多项式，其它系数与Chebyshev多项式相同，$P_i(\tau)$通过下列递推关系求出：

$$P_0(\tau)=1,P_1(\tau)=\tau,P_{n+1}(\tau)=\frac{2n+1}{n+1}\tau P_n(\tau)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(\tau)\qquad (n=1,2,3\cdots) \tag{8}$$

求解Legendre多项式拟合系数矩阵的原理与Chebyshev多项式相同，只需将矩阵B中的各阶Chebyshev多项式换成同阶的Legendre多项式即可。