Hjemmeeksamen FYS2140

Vår 2018

Kandidatnr. 15130

Oppgave 1. Partikkel-bølge dualitet

a) Fotoners partikkelnatur

a1)

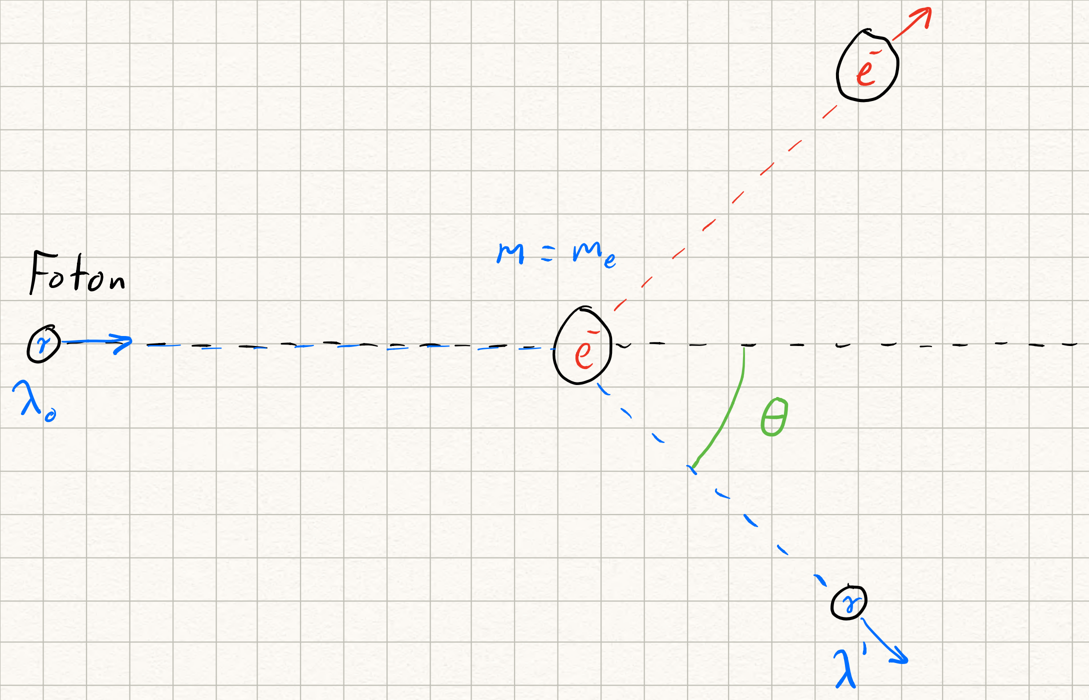
Comptons formel:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)}$$

der λ_0 er bølgelengden til den innkommende strålingen, λ' for den spredte strålingen, $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ kalles Compton-bølgelengden, og θ er vinkelen mellom fartsretningen til fotonet før og etter støtet.



For å regne ut compton-bølgelengden for elektroner setter vi inn $m = m_e$:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{h}{m_e c} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9.109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 2.998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}$$

$$= 2.426 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$\approx 2.426 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{nm}$$

a2)

$$\Delta\lambda = 0.0749 - 0.0709 = 0.0040\ \mathrm{nm}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_c} = 1 - \cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\Delta \lambda}{\lambda_c}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{0.0040}{2.426 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$\theta = 130.5^\circ$$

Dermed målte sannsynligvis Compton $\lambda' = 0.0749$ ved $\theta = 135°$.

a3) Den første toppen til venstre i spektrene med tilsynelatende uendret bølgelengde skyldes at vi i disse utregningene antar at virkningen skjer mellom et foton med høy nok energi, og de svakest bundne elektronene. Dersom EM-strålingen har for stor bølgelengde (for lav energi til å overgå den kvantiserte energien) eller dersom elektronet som inngår i kollisjonen er sterkt bundet til atomet, vil kollisjonen måtte regnes som mellom fotonet og hele atomet. Den enorme endringen i masse i utregningen for Comton-bølgelengden vil føre til at endringen i bølgelengde knapt blir merkbar.

Grunnen til at det ikke blir brukt synlig lys er som nevnt ovenfor at bølgelengden er for stor (energien for liten) til å løsrive et elektron.

b) – Nøytroners bølgenatur

b1)

Gjennomsnittlig energi for nøytronet

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$T = 25\,^\circ C = 298.15\ K$$

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} \cdot 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 298.15$$

$$= \underline{0{,}039\ eV}$$

Ettersom energien er kinetisk energi og vi har

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad m = 9{,}396 \cdot 10^8\ eV/c^2$$

Får vi:

$$\langle p \rangle = \sqrt{\langle E \rangle \cdot 2m}$$

$$= \sqrt{0{,}039 \cdot 2 \cdot 9{,}396 \cdot 10^8}$$

$$= \underline{8561\ eV/c}$$

Videre har vi at

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

så

$$\langle\lambda\rangle = \frac{h}{\langle p\rangle} = \frac{4.136 \cdot 10^{-15}}{8561}$$

$$= 4.831 \cdot c \cdot s \; [\tfrac{m}{s} \cdot s]$$

$$= 1.449 \cdot 10^{-10} \, m$$

$$\underline{= 1{,}449 \, Å}$$

b2)

$d = 2.82 \, Å$

$\lambda = 1{,}85 \, Å$

Braggs lov: $2d \sin\theta = m\lambda$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2d}\right)$$

Ettersom vi skal finne vinkelen som gir høyest intensitet bruker vi første orden, $m = 1$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1.85}{2 \cdot 2{,}82}\right)$$

$$\simeq \underline{19{,}1°}$$

For å finne området i vinklen som kreves for å få spredning under $\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} = 10\%$;

$$\Delta\lambda = 1{,}85\,Å \cdot 0.1 = 0{,}185\,Å$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{min} = 1{,}665\,Å$$
$$\lambda_{max} = 2{,}035\,Å$$

som igjen gir

$$\theta_{min} = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}665}{2 \cdot 2{,}82}\right) = 17{,}2°$$

$$\theta_{max} = \sin^{-1}\left(\frac{2{,}035}{2 \cdot 2{,}82}\right) = 21{,}2°$$

<u>Området som kreves er da [17.2°, 21.2°]</u>

Oppgave 2. Radioaktivt α-henfall

a)

α-partikkelen tilnærmet ved:

$$\psi(x,0) = A e^{-(x-x_0)^2/4a^2} e^{ikx}$$

Normaliserer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = 1$$

$$|\psi(x,0)|^2 = \psi \cdot \psi^*$$
$$= A^2 e^{-2(x-x_0)^2/4a^2}$$
$$= A^2 e^{-(x-x_0)^2/2a^2}$$
$$= A^2 e^{-(x^2-2x_0x+x_0^2)/2a^2}$$
$$= A^2 e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2 - \frac{x_0}{a^2}x + \frac{x_0^2}{2a^2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2 - \frac{x_0}{a^2}x + \frac{x_0^2}{2a^2}\right)} dx = 1$$

Rottmann s. 155 lign. 51

$$a = \frac{1}{2a^2}$$

$$b = -\frac{x_0}{2a^2}$$

$$c = \frac{x_0^2}{2a^2}$$

$$= A^2 \sqrt{2\pi a^2}\, e^{\overbrace{\left(\frac{x_0^2}{4a^4} - \frac{x_0^2}{4a^4}\right)\frac{1}{2a^2}}^{0}}$$

$$= A^2 \sqrt{2\pi a^2}$$

For at dette skal bli lik 1 må:

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}$$

$$A^2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi a^2}}$$

$$A = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Energien til α-partikkelen

$$\Psi(x,0) = A e^{-(x-x_0)^2/4a^2} e^{ikx}$$

$$= A e^{-\frac{1}{4a^2}x^2 + \frac{x_0}{2a^2}x - \frac{x_0^2}{4a^2} + ikx}$$

$$\boxed{\frac{d\Psi}{dx}:}$$

$$u = -\frac{1}{4a^2}x^2 + \frac{x_0}{2a^2}x - \frac{x_0^2}{4a^2} + ikx$$

$$\frac{d\Psi}{du} = A e^{u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2a^2}x + \frac{x_0}{2a^2} + ik$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = \underbrace{A\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}x + \frac{x_0}{2a^2} + ik\right)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4a^2}x^2 + \frac{x_0}{2a^2}x - \frac{x_0^2}{4a^2} + ikx}}_{v}$$

$$\boxed{\frac{d\psi^2}{dx}} :$$

$$A\left(\left(-\frac{1}{2a^2}x+\frac{x_0}{2a^2}+ik\right)^2 e^{-\frac{1}{4a^2}x^2+\frac{x_0}{2a^2}x-\frac{x_0^2}{4a^2}+ikx}+\left(-\frac{1}{2a^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4a^2}x^2+\frac{x_0}{2a^2}x-\frac{x_0^2}{4a^2}+ikx}\right)$$

$$u\cdot v' \qquad\qquad + \quad u'\cdot v$$

$$A\cdot e^{-\frac{1}{4a^2}x^2+\frac{x_0}{2a^2}x-\frac{x_0^2}{4a^2}+ikx}\left(\left(-\frac{1}{2a^2}x+\frac{x_0}{2a^2}+ik\right)^2-\frac{1}{2a^2}\right)$$

$$A\cdot e^{-\frac{1}{4a^2}x^2+\frac{x_0}{2a^2}x-\frac{x_0^2}{4a^2}+ikx}\left(\frac{x_0^2}{4a^4}-\frac{x_0x}{2a^4}+\frac{x^2}{4a^4}+\frac{ix_0k}{a^2}-\frac{ikx}{a^2}-k^2-\frac{1}{2a^2}\right)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cancel{\psi}\left(\frac{x_0^2-2x_0x+x^2+4a^2ix_0k-4a^2ikx-4a^4k^2-2a^2}{4a^4}\right)=E\cancel{\psi}$$

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{x_0^2-2x_0x+x^2+4a^2ix_0k-4a^2ikx-4a^4k^2-2a^2}{4a^4}\right)$$

$$\langle E\rangle=\int\psi\,\hat{E}\,\psi^*\,dx$$

$$=A^2\int e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{2a^2}\right)}\cdot\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{x_0^2-2x_0x+x^2+4a^2ix_0k-4a^2ikx-4a^4k^2-2a^2}{4a^4}\right)$$

$$=A^2\frac{\hbar^2}{8ma^4}\int\underbrace{e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{2a^2}\right)}}_{f(x)}\cdot\left(x_0^2-2x_0x+x^2+4a^2ix_0k-4a^2ikx-4a^4k^2-2a^2\right)$$

$$-A^2\frac{\hbar^2}{8ma^4}\Bigg(\boxed{\int f(x)\cdot x_0^2\,dx}-\overset{*1}{\boxed{\int f(x)\cdot 2x_0x\,dx}}+\overset{*}{\boxed{\int f(x)\cdot x^2\,dx}}+\boxed{\int f(x)4\cdot a^2ix_0k\,dx}$$

$$\underset{*2}{\boxed{-\int f(x)4a^2ikx\,dx}}-\boxed{\int f(x)\cdot 4a^4k^2\,dx}-\boxed{\int f(x)\cdot 2a^2\,dx}\Bigg)$$

Integralene i grønt er de samme som integralet tidligere i oppgaven med andre konstanter.

*1 og *2 er det samme ganget med x, og * med x^2. Alle finnes i Rottmann s. 155.
(Alle integralene er også fra $-\infty$ til ∞...)

$\boxed{*1}$

$$2x_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{2a^2}\right)}x\,dx$$

$$=x_0\sqrt{2\pi a^2}\,e^{\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{4a^4}-\frac{x_0^2}{4a^4}\right)\frac{1}{2a^2}}_{0}}$$

$$=2x_0^2\sqrt{2\pi a^2}$$

$a=\frac{1}{2a^2}$

$b=-\frac{x_0}{2a^2}$

$c=\frac{x_0^2}{2a^2}$

$\boxed{*2}$

$$4a^2ik\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0^2}{2a^2}\right)}x\,dx$$

$$=4a^2ikx_0\sqrt{2\pi a^2}$$

$$\boxed{*}\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2a^2}x^2 - \frac{x_0}{a^2}x + \frac{x_0^2}{2a^2}\right)} x^2\, dx$$

$$= \frac{\frac{1}{2a^2} + \cancel{2}\cdot\frac{x_0^2}{\cancel{4a^4}}}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4a^4}}}\sqrt{2\pi a^2}$$

$$= (a^2 + x_0^2)\sqrt{2\pi a^2}$$

$$-A^2\frac{\hbar^2}{8ma^4}\Big(x_0^2\sqrt{2\pi a^2} - 2x_0^2\sqrt{2\pi a^2} + (a^2+x_0^2)\sqrt{2\pi a^2} + \cancel{4a^2 i x_0 k\sqrt{2\pi a^2}}$$

$$\cancel{-4a^2 i x_0 k\sqrt{2\pi a^2}} - 4a^4k^2\sqrt{2\pi a^2} - 2a^2\sqrt{2\pi a^2}\Big)$$

$$-A^2\frac{\hbar^2}{8ma^4}\sqrt{2\pi a^2}\left(\cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0^2} + a^2 + \cancel{x_0^2} - 4a^4k^2 - 2a^2\right)$$

$$-A^2\frac{\hbar^2}{8ma^4}\sqrt{2\pi a^2}\left(-4a^4k^2 - a^2\right)$$

$$-A^2\frac{\hbar^2}{8ma^2}\sqrt{2\pi a^2}\left(-4a^2k^2 - 1\right)$$

$$A^2\frac{\hbar^2}{8ma^2}\sqrt{2\pi a^2}\left(4a^2k^2 + 1\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi a^2}}\;\frac{\hbar^2}{8ma^2}\sqrt{2\pi a^2}\left(4a^2k^2 + 1\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{8ma^2}\left(4a^2k^2 + 1\right)$$

Altså er forventningsverdien

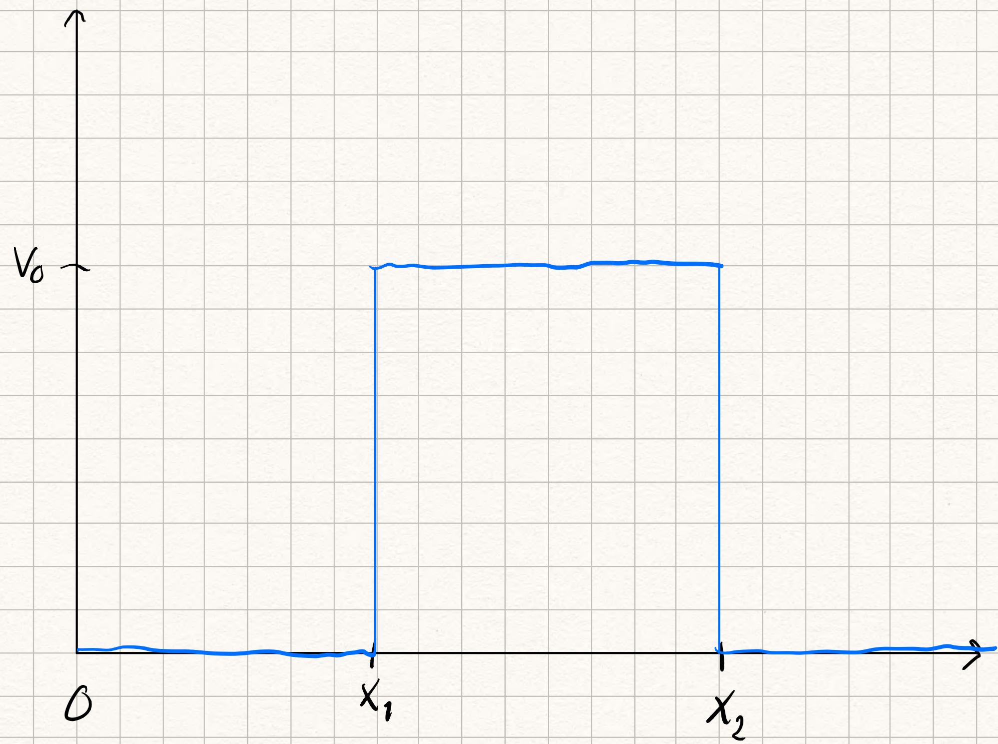
$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{8ma^2}\left(4a^2k^2 + 1\right)$$

som med innsatte verdier gir

$$\underline{\underline{\langle E \rangle = 11.18 \text{ MeV}}}$$

b)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1 \\ V_0, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x > x_2 \end{cases}$$



$$\boxed{0 \leq x < x_1}$$

S.L:

$$\frac{d\psi^2}{dx^2} = -k^2\psi \quad , \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Gir løsningen:

$$\underline{\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}}$$

$$\boxed{x_1 \leq x < x_2}$$

S.L:

$$\frac{d\psi^2}{dx^2} = \ell^2 \psi \quad , \quad \ell = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\underline{\psi(x) = C e^{\ell x} + D e^{-\ell x}}$$

$$\boxed{x > x_2}$$

Samme S.L. som den første, gir igjen

$$\psi(x) = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$$

Vi antar at det ikke kommer noen bølger inn fra høyre, og kan dermed fjerne andre ledd.

$$\underline{\psi(x) = F e^{ikx}}$$

$0 \leq x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$A e^{ikx} + B e^{-ikx}$	$C e^{\ell x} + D e^{-\ell x}$	$F e^{ikx}$

c) Gitt den samme potensialbarrieren:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_1 \\ V_0, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x > x_2 \end{cases}$$

Bruk grensebetingelsene for ψ og $\frac{d\psi}{dx}$ til å finne $T(E)$:

$V(x)$ er endelig overalt, så ψ og ψ' er kontinuerlige overalt

<u>kontinuitet ved x_1:</u>

I ψ gir: $Ae^{ikx_1} + Be^{-ikx_1} = Ce^{\ell x_1} + De^{-\ell x_1}$

II $\frac{d\psi}{dx}$ gir: $ik(Ae^{ikx_1} - Be^{-ikx_1}) = \ell(Ce^{\ell x_1} - De^{-\ell x_1})$

I $Ae^{ikx_1} = Ce^{\ell x_1} + De^{-\ell x_1} - Be^{-ikx_1}$

II $ikBe^{-ikx_1} = ikAe^{ikx_1} - \ell Ce^{\ell x_1} + \ell De^{-\ell x_1}$

$$Be^{-ikx_1} = \frac{ikAe^{ikx_1} - \ell Ce^{\ell x_1} + De^{-\ell x_1}}{ik}$$

I $Ae^{ikx_1} = Ce^{\ell x_1} + De^{-\ell x_1} - Ae^{ikx_1} + \frac{\ell Ce^{\ell x_1}}{ik} - \frac{\ell De^{-\ell x_1}}{ik}$

$$\boxed{(*)\ 2Ae^{ikx_1} = Ce^{\ell x_1}\left(1 + \frac{\ell}{ik}\right) + De^{-\ell x_1}\left(1 - \frac{\ell}{ik}\right)}$$

Har nå brukt de to ligningene gitt fra grense-betingelsene for x_1 til å finne A uttrykt ved C og D.

Videre kan vi nå bruke grensebetingelsene for x_2 til å finne C og D uttrykt ved F.

Da ender vi opp med en ligning som bare inneholder A og F, og kan bruke den til å finne $T^{-1} = \left|\frac{A}{F}\right|^2$.

$\boxed{\text{Kontinuitet ved } x_2:}$

$$\text{III} \quad \psi: \quad Ce^{\ell x_2} + De^{-\ell x_2} = Fe^{ikx_2}$$

$$\text{IV} \quad \frac{d\psi}{dx}: \quad \ell\left(Ce^{\ell x_2} - De^{-\ell x_2}\right) = ikFe^{ikx_2}$$

$$\text{III} \quad De^{-\ell x_2} = Fe^{ikx_2} - Ce^{\ell x_2}$$

$$\text{IV} \quad Ce^{\ell x_2} = \frac{ikFe^{ikx_2}}{\ell} + De^{-\ell x_2}$$

$$Ce^{\ell x_2} = \frac{ikFe^{ikx_2}}{\ell} + Fe^{ikx_2} - Ce^{\ell x_2}$$

$$2Ce^{\ell x_2} = Fe^{ikx_2}\left(\frac{ik}{\ell} + 1\right)$$

$$\boxed{\circledast \quad C = \frac{Fe^{ikx_2}\left(1 + \frac{ik}{\ell}\right)}{2e^{\ell x_2}}}$$

III $$De^{-lx_2} = Fe^{ikx_2} - \frac{\frac{ik}{l}Fe^{ikx_2} - Fe^{ikx_2}}{2}$$

$$2De^{-lx_2} = 2Fe^{ikx_2} - Fe^{ikx_2} - \frac{ik}{l}Fe^{ikx_2}$$

$$2De^{-lx_2} = Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{l}\right)$$

$$\boxed{\circledast \quad D = \frac{Fe^{ikx_2}\left(1 - \frac{ik}{l}\right)}{2e^{-lx_2}}}$$

Setter inn $\circledast$ og $\circledast$ i $\circledast$

$$2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2 + lx_1 - lx_2}\left(1 + \frac{ik}{l}\right)\left(1 + \frac{l}{ik}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}Fe^{ikx_2 - lx_1 + lx_2}\left(1 - \frac{ik}{l}\right)\left(1 - \frac{l}{ik}\right)$$

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(e^{l\Delta x}\left(1 + \frac{ik}{l}\right)\left(1 + \frac{l}{ik}\right) + e^{-l\Delta x}\left(1 - \frac{ik}{l}\right)\left(1 - \frac{l}{ik}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(e^{l\Delta x}\left(2 + \frac{l}{ik} + \frac{ik}{l}\right) + e^{-l\Delta x}\left(2 - \frac{l}{ik} - \frac{ik}{l}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(e^{l\Delta x}\left(2 + i\left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l}\right)\right) + e^{-l\Delta x}\left(2 - i\left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(2e^{l\Delta x} + ie^{l\Delta x}\left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l}\right) + 2e^{-l\Delta x} - ie^{-l\Delta x}\left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(2e^{l\Delta x} + 2e^{-l\Delta x} + ie^{l\Delta x}\left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l}\right) + ie^{-l\Delta x}\left(\frac{l}{k} - \frac{k}{l}\right)\right)$$

$$2Ae^{ikx_1} = \frac{1}{2}Fe^{ikx_2}\left(2\left(e^{l\Delta x}+e^{-l\Delta x}\right)+i\left(e^{l\Delta x}+e^{-l\Delta x}\right)\left(\frac{l}{k}-\frac{k}{l}\right)\right)$$

$$= Fe^{ikx_2}\,\frac{1}{2}\left(e^{l\Delta x}+e^{-l\Delta x}\right)\left(2+i\left(\frac{l}{k}-\frac{k}{l}\right)\right)$$

$$= Fe^{ikx_2}\left(e^{l\Delta x}+e^{-l\Delta x}\right)\left(1+i\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)\right)$$

$$\boxed{\text{siden} \quad \cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{har vi:}}$$

$$\cancel{2}Ae^{ikx_1} = Fe^{ikx_2}\,\cancel{2}\cosh(l\Delta x)\left(1+i\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)\right)$$

$$\frac{A}{F} = e^{ikx_2-ikx_1}\cosh(l\Delta x)\left(1+i\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)\right)$$

$$\left|\frac{A}{F}\right|^2 = \cosh^2(l\Delta x)\left(1+i\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)\right)\left(1-i\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)\right)$$

$$\boxed{\cosh^2(x) = 1+\sinh^2(x)}$$

$$= 1+\sinh^2(l\Delta x)\underbrace{\left(1+\left(\frac{l^2-k^2}{2kl}\right)^2\right)}$$

$$1+\frac{(l^2-k^2)^2}{4k^2l^2} = 1+\frac{l^4-2l^2k^2+k^4}{4k^2l^2}$$

$$= \frac{4k^2l^2+l^4-2l^2k^2+k^4}{4k^2l^2}$$

$$= \frac{(l^2+k^2)^2}{4k^2l^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\cancel{-\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}}\right)^2}{4\cdot\frac{2mE}{\hbar^2}\cdot\frac{(2mV_0-2mE)}{\hbar^2}}$$

$$l = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$= \frac{\frac{4\cancel{m^2}V_0^2}{\cancel{\hbar^4}}}{4 \cdot \frac{2\cancel{m}E}{\cancel{\hbar^2}} \cdot \frac{2\cancel{m}(V_0-E)}{\cancel{\hbar^2}}} = \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}$$

$$\sinh^2(l\Delta x) = \sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)$$

Nå sitter vi igjen med:

$$T^{-1} = \left|\frac{A}{F}\right|^2 = 1 + \left(\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\right)\sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)$$

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\right)\sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)}$$

som er det som skulle vises.

d)

Forholdet mellom halveringstid for ^{232}Th og ^{218}Th:

$$\frac{1{,}4 \cdot 10^{19} \text{ år}}{3.71 \cdot 10^{-15} \text{ år}} = 3.77 \cdot 10^{33}$$

Forholdet mellom $T(E)$ for de tilsvarende energinivåene:

$$\frac{8{,}18 \cdot 10^{-36}}{6.17 \cdot 10^{-32}} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$$

Disse forholdene er ikke i nærheten av å være like, noe som kan skyldes at bokspotensialet vi bruker for å tilnærme α-henfallet er lite realistisk.

e)

$$T(E) = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\right) \sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\right)}$$

Med energien for α-partikkelen som sendes ut ved ^{226}Ra som henfaller, $E_\alpha = 4.8\,MeV$, får vi:

$$\underline{T(4,8) = 2,5 \cdot 10^{-35}}$$

Dermed kan vi gjøre et overslag på omtrent hvor mange ganger α-partikkelen må treffe barrieren i gjennomsnitt før den kommer ut:

$$\frac{1}{T(4,8)} = \underline{4 \cdot 10^{34}}$$

Hvis α-partikkelen har en hastighet på $v = 0.073c$ og atomkjernen har en radius på $R = 7.3\,fm$, vet vi at partikkelen må gå en avstand $2R$ mellom hvert treff av barrieren, og tiden mellom hvert treff blir

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2R}{v} = \frac{14.6\,fm}{0.073 \cdot 2.998 \cdot 10^{23} \frac{fm}{s}} = 6,67 \cdot 10^{-22}\,s$$

Dermed vil den gjennomsnittlige tiden det tar å komme ut være

$$6.67 \cdot 10^{-22}\,s \cdot 4 \cdot 10^{34} = 2{,}7 \cdot 10^{13}\,s$$

$$= 846\,017 \text{ år}$$

Dette er ikke i nærheten av den oppgitte halveringstiden for ^{226}Ra ($T_{1/2} = 1600$ år), noe som igjen kan skyldes den lite realistiske beskrivelsen av potensialet.