Oblig 5 - FYS2140

Joakim Flatby

1.

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-i(n^2\pi^2\hbar/2ma^2)t}$$

Finn $\langle x \rangle$ for den n-te stasjonære tilstanden for en vendelig dyp, kvadratisk brønn:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi_n(x,t)|^2 \, dx$$

$$\overbrace{|\Psi_n(x,t)|^2}^{\text{Imaginærdelen kanselleres bort}} = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx,$$ (der 0 og a er kantene på "brønnen")

$$= \int_0^{n\pi} \frac{u\cancel{a}}{n\pi} \cdot \frac{2}{\cancel{a}} \sin^2(u) \frac{a}{n\pi} \, du$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \sin^2(u) \, du$$

$$u = \frac{n\pi}{a} x \Rightarrow x = \frac{ua}{n\pi}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow dx = \frac{a}{n\pi} du$$

grensen:

$$u = \frac{n\pi}{a} \cdot 0 = 0 \qquad u = \frac{n\pi}{a} \cdot a = n\pi$$

trig. identitet:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\left(\frac{1-\cos(2u)}{2}\right) du$$

$$= \frac{a}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u - u\cos(2u) \; du$$

$$= \frac{a}{n^2\pi^2}\left(-\int_0^{n\pi} u\cos(2u)du + \int_0^{n\pi} u \, du\right)$$

$$\int u\cos(2u)\,du$$

$$f = u \qquad dg = \cos(2u)$$

$$df = du \qquad g = \frac{1}{2}\sin(2u)$$

$$= fg - \int g \, df$$

$$= \frac{1}{2}u\sin(2u) - \int \frac{1}{2}\sin(2u)\,du \Rightarrow$$

$$z = 2u$$

$$\frac{dz}{du} = 2 \qquad du = \frac{1}{2}dz$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin(z)\,dz$$

$$-\frac{1}{4}\cos(z)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2u)$$

$$= \frac{1}{2}u\sin(2u) + \frac{1}{4}\cos(2u) \Leftarrow$$

og $\left(\int u\,du = \frac{1}{2}u^2\right)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{n^2\pi^2}\left(-\int_0^{n\pi} u\cos(2u)du + \int_0^{n\pi} u \, du\right)$$

$$= \frac{a}{n^2\pi^2}\left[-\frac{1}{2}u\sin(2u) - \frac{1}{4}\cos(2u) + \frac{1}{2}u^2\right]_0^{n\pi}$$

$$\frac{a}{n^2\pi^2}\left(-\frac{1}{2}n\pi \underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} + \frac{1}{2}n^2\pi^2 - \left(0 - \frac{1}{4} + 0\right)\right)$$

$$= \frac{a}{n^2\pi^2}\left(-\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}n^2\pi^2 + \cancel{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{a}{\cancel{n^2\pi^2}} \cdot \frac{\cancel{n^2\pi^2}}{2}$$

$$= \frac{a}{2}$$

(Beklager at dette ble så uoversiktlig...)

$\langle x^2 \rangle$:

$$\int_0^a x^2 \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Velger å ikke skrive hele utregningen denne gangen ettersom prosessen er veldig lik, og obligen ville blitt så lang..

- Variabelskifte: $u = \frac{n\pi}{a}x$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2a^2}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi} u^2 \sin^2 u \, du$$

samme trigonometriske identitet

$$\Downarrow$$

$$\frac{a^2}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi} u^2 - \underbrace{u^2\cos(2u)}\, du$$

Bruker rottmann (ubestemt integral nr. 124)

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2}{a^2}x\cos(ax) - \frac{2-a^2x^2}{a^3}\sin(ax) + C$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a^2}{n^3\pi^3}\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u\cos(2u) + \frac{1}{4}\sin(2u)\left(1-2u^2\right)\right]_0^{n\pi}$$

$$\frac{a^2}{n^3\pi^3}\left(\frac{1}{3}n^3\pi^3 - \frac{1}{2}n\pi - 0\right)$$

$$\underline{\underline{\frac{a^2}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{3}n^2\pi^2 - \frac{1}{2}\right)}}$$

$\langle p\rangle$: $\langle p\rangle = \int \psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\,dx$

Men vi vet også at $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$, og ettersom $\langle x\rangle$ ikke inneholder noen t så er $\underline{\underline{\langle p\rangle = 0}}$

$\langle p^2 \rangle$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right)^2 \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* - \hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \, dx$$

Her har vi nesten den tidsuavhengige schrödingerligningen $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi$

Vi vet fra definisjonen av brønnen at potensialet er 0.

Ganger derfor med $\frac{2m}{2m}$ og får:

$$2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$= 2m \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* E \psi \, dx$$

$$= 2mE \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx$$

$$= 2mE \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx$$

Vi vet at partikkelen må befinne seg et sted, så $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$

$$= 2mE$$

Videre har vi at energien er gitt ved

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

og svaret blir dermed:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2} = \underline{\underline{\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2}}$$

σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{3}n^2\pi^2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)}$$

σ_p :

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2 - 0}$$

$$= \underline{\frac{n\pi\hbar}{a}}$$

For å sjekke om Heisenbergs uskarphetsrelasjon gjelder tester vi:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\sigma_x \sigma_p = \sqrt{\cancel{a}^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)} \cdot \frac{n\pi\hbar}{\cancel{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{2}} \cdot \hbar$$

$$= \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2} \cdot \frac{\hbar}{2}$$

Ettersom $\pi^2 \approx 9{,}9$ og n^2 alltid vil være et positivt tall, vil $\frac{n^2\pi^2}{3} - 2$ alltid være større enn 1, og dermed er Heisenbergs uskarphetsprinsipp oppfylt ettersom dette tallet ganges med $\frac{\hbar}{2}$ og svaret dermed blir større enn $\frac{\hbar}{2}$.

Tilstanden $n=1$ vil altså også være den som kommer nærmest grensen.

2.

Hvis det ved $t=0$ er like stor sjanse for å finne partikkelen ved alle posisjoner i venstre halvdel (mellom $x=0$ og $x=\frac{a}{2}$) må $\psi(x,0)$ ha uniform fordeling i dette intervallet:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{resten} \end{cases}$$

Normaliserer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = 1$$

$$\int_{0}^{\frac{a}{2}} A^2 dx = 1$$

$$\left[x A^2 \right]_0^{\frac{a}{2}} = 1$$

$$\frac{a}{2} A^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

b) Energien finnes ved $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, så

$\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ er energien ved den første stasjonære tilstanden.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Ganger dette med funksjonen vi fant i a).

For å finne sannsynligheten har vi da (Fouriers triks)

$$c_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2}{a}\left(-\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{a}{\pi}\cos 0\right)$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{a}{\pi}$$

$$= \underline{\frac{2}{\pi}}$$

Sannsynligheten blir da:

$$|c_1|^2 = \underline{\underline{\frac{4}{\pi^2}}}$$