Oblig 11 · FYS2140

Joakim Flatby

1

a) Dispersjonsrelasjonen for fri, ikke relativistisk part.:

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

For fasehastigheten har vi

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

For gruppehastigheten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$$

fra de Broglies relasjoner har vi $p = \hbar k$

$$\frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

, som svarer til partikkeleas hastighet.

b)

De tillatte verdiene er

$m_s = -\frac{1}{2}$ og $m_s = \frac{1}{2}$

Da får vi:

$$\Psi(x) = A\left(\frac{1}{2}\psi_{s,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\psi_{s,-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\hat{S}^2\Psi(x) = \hat{S}^2 A\left(\frac{1}{2}\psi_{s,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\psi_{s,-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\hat{S}^2\Psi(x) = \hbar^2 s(s+1) A\left(\frac{1}{2}\psi_{s,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\psi_{s,-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\hat{S}^2\Psi(x) = \hbar^2 s(s+1)\,\Psi(x)$$

altså er Ψ en egenfunksjon for $\hat{S}^2$

$$\hat{S}_z\Psi(x) = A\left(\frac{1}{2}\Psi(x)\cdot(\hbar m_s) - \frac{1}{2}\Psi(x)\cdot(\hbar m_s)\right)$$

$$= A\left(\frac{1}{4}\hbar\,\Psi(x) + \frac{1}{4}\hbar\,\Psi(x)\right)$$

$$\neq \hbar m_s \Psi(x)$$

altså er $\Psi(x)$ ikke en egenfunksjon for $\hat{S}_z$

$$\sigma_x = 5\,fm$$

c)

Uskarphetsrelasjonen gir

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2\sigma_x}$$

$$\sigma_p \geq \hbar \cdot 10^{14}$$

Ut fra dette kan vi estimere en verdi for v ved å sette inn for p

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar \cdot 10^{14}}{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg} = 6.3 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

d)

Hamilton-operatoren:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Ettersom potensialet til en fri partikkel er null overalt, kan man se på dette som et sentralsymmetrisk potensiale.
Dermed kommuterer $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ med $\hat{H}$ og vi har derfor skarpt angularmoment.

2.

a) $L_z = M v R = p R \Rightarrow p = \frac{L_z}{R}$

$$E_k = \frac{p^2}{2M} = \frac{L_z^{\,2}}{2MR^2}$$

$$L_z \to \hat{L}_z = -i\hbar \frac{d}{d\phi}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{d^2}{d\phi^2} = \hat{H}$$

b)

$$E\,\psi_k(\phi) = \hat{H}\,\psi_k(\phi)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2MR^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\psi_k(\phi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2\psi_k}{d\phi^2} &= i^2k^2\psi_k \\ &= -k^2\psi_k\end{aligned}}$$

$$E\,\psi_k(\phi) = \frac{\hbar^2k^2}{2MR^2}\psi_k(\phi)$$

$$E = \frac{\hbar^2k^2}{2MR^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H}\psi_k(\phi) = \frac{\hbar^2k^2}{2MR^2}\psi_k(\phi) = E\,\psi_k(\phi)$$

Ved normalisering finner vi

$$\int_0^{2\pi} \psi_k^*(\phi)\, \psi_k(\phi)\, d\phi$$

(imaginærdelen nulles ut)

$$= \int_0^{2\pi} N_k^2\, d\phi = N_k^2 \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= N_k^2\, 2\pi$$

For at dette skal bli lik 1 må

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

c)

Entydighetskravet kan vi skrive som

$$\psi_k(\phi) = \psi_k(\phi + 2\pi)$$

Løser vi denne får vi

$$\cancel{N_k}\, e^{\cancel{-i}k\phi} = \cancel{N_k}\, e^{\cancel{-i}k(\phi + 2\pi)}$$

$$\phi = \phi + 2\pi$$

og den gir altså ingen begrensning på k.

$$L_z = \hbar k$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2MR^2}$$

Ettersom E_k er proporsonal med k^2, vil E_k gi lik energi for alle $+k$ og $-k$.

Dermed er degenerasjonsgraden 1 ved $k=0$ og 2 for $k \neq 0$.