Oblig 9 - FYS2140

Joakim Flatby

a) De første tre er av typen egenverdiligninger og den siste er et ortonormalitetsintegral.

b) $\hat{H}_0$ representerer energi,

$\hat{L}^2$ representerer kvadratet av angulærmoment,

og $\hat{L}_z$ er angulærmomentet i z-retning.

c) Disse fysiske størrelsene, $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ har skarpe verdier i tilstanden $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$, ettersom de kommuterer.

d) Bruker den tidsavhengige schrödingerligningen:

$$\hat{H}_0 \Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t)$$

som har generell løsning

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}) \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \qquad [1]$$

setter vi $t=0$ får vi

$$\Psi(\vec{r},0) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r})\, e^0 = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r})$$

Fra oppgaveteksten vet vi at tilstanden er beskrevet ved $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ ved $t=0$.

Altså er

$$\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r})$$

setter vi inn for $\sum_n c_n \psi_n(\vec{r})$ i ligning [1]

får vi $\underline{\Psi(\vec{r},t) = \psi_{nlm_l}(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}}$

e)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sum_{m_l=-l}^{l} \psi_{nlm_l}(\vec{r})$$

normerer:

$$1 = \int |\phi(\vec{r})|^2 d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \int \psi^*_{nlm_l}(\vec{r})\, \psi_{nlm_l'}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

her har vi kronecker-delta, så

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \delta_{nlm_l,nlm_l'}$$

$\delta_{mn} = 1$ når $m = n$, så setter

$m_l = m_l'$

$$1 = \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} 1$$

der summen blir $(2l+1)$, så

$$\underline{1 = 1}$$

og ϕ er altså normert.

f) Bruker ligning [1] fra oppg. d):

$$\psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \psi_{nlm_l}(\vec{r})}_{\phi(\vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

$\phi(\vec{r})$, fra forrige oppgave.

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

9) $$\Psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t)\, \hat{H}_0\, \Psi(\vec{r},t)\, dr$$

den konjugerte av Ψ gir $\phi^* \cdot \phi$

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = \int \phi^*(\vec{r})\, \hat{H}_0\, \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \sum_{m_\ell'=-\ell}^{\ell} \int \psi^*_{n\ell m_\ell}(\vec{r})\, \hat{H}_0\, \psi_{n\ell m_\ell'}(\vec{r})\, dr$$

vet fra oppgaven at

$$\hat{H}_0 \psi_{n\ell m_\ell}(\vec{r}) = E_n \psi_{n\ell m_\ell},$$ så:

$$= \frac{E_n}{2\ell+1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \sum_{m_\ell'=-\ell}^{\ell} \int \psi_{n\ell m_\ell}(\vec{r})\, \psi_{n\ell m_\ell'}(\vec{r})\, dr$$

Dette er det samme vi hadde for å normere bortsett fra E_n

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = E_n$$

For $\langle \hat{L}^2 \rangle$ får vi helt samme utregning bare med ligning (2) fra oppgaven istedenfor (1):

$$\langle \hat{L}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\langle L_z \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t)\, \hat{L}_z\, \Psi(\vec{r},t)\, d\vec{r}$$

$$= \int \phi^*(\vec{r})\, \hat{L}_z\, \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \int \Psi^*_{nlm_l} \Psi_{nlm_l'}\, m_l \hbar\, dr$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \delta_{m_l m_l'}\, m_l \hbar \qquad [2]$$

summen fra $-l$ til l over m_l blir 0:

$$\langle L_z \rangle = 0$$

h)

$$\sigma_{\hat{H}_0} = \sqrt{\langle \hat{H}_0^2 \rangle - \langle \hat{H}_0 \rangle^2} = \sqrt{E_n^2 - E_n^2} = 0$$

$$\sigma_{\hat{L}^2} = \sqrt{\langle \hat{L}^{2\,2} \rangle - \langle \hat{L}^2 \rangle^2} = \sqrt{\hbar^4 l^2 (l+1)^2 - \hbar^4 l^2 (l+1)^2} = 0$$

$\sigma_{\hat{L}_z}$: For å finne $\langle \hat{L}_z^2 \rangle$ får vi det samme som [2] bare med $(m_\ell \hbar)^2$

$$\langle \hat{L}_z^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \delta_{m_\ell, m_\ell'} m_\ell^2 \hbar^2$$

$$\langle \hat{L}_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2\ell+1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} m_\ell^2$$

formel for endelige summer s, 111 i rottmann gir

$$\langle \hat{L}_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2\ell+1} \left(\frac{2\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} \right) = \frac{2\hbar^2 \ell(\ell+1)}{6}$$

da får vi:

$$\sigma_{\hat{L}_z} = \sqrt{\langle \hat{L}_z^2 \rangle - \langle \hat{L}_z \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{3} - 0} = \hbar \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{3}}$$

i) Sannsynligheten gitt ved $|c_{n\ell m_\ell}|^2$

$$c_{n\ell m_\ell} = \sqrt{\frac{1}{2\ell+1}}$$

$$\underline{|c_{n\ell m_\ell}|^2 = \frac{1}{2\ell+1}}$$

j) Nei sannsynligheten er ikke avhengig av tiden, fordi vi eliminerer t fra uttrykket når vi konjugerer $|c_{nlm_l}|^2$

k) Bruker den første egenverdi-ligningen gitt i oppgaven:

$$\hat{H}\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = E\,\psi_{nlm_l}(\vec{r})$$

$$E = \hat{H}$$
$$= \hat{H}_0 + \frac{e}{2m}B\hat{L}_z$$

$$E = E_0 + \frac{e}{2m}B m_l \hbar$$

l) Sjekker om $\phi(\vec{r})$ er en egenfunksjon for den nye hamilton-operatoren:

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) = \left(\hat{H}_0 + \frac{e}{2m}B\hat{L}_z\right)\phi$$

$$= \frac{1}{2l+1}\sum_{m_l=-l}^{l}\left(\hat{H}_0 + \frac{e}{2m}m_l\hat{L}_z\right)\psi_{nlm_l}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2l+1}\sum_{m_l=-l}^{l}\left(E_n + \frac{e\hbar}{2m}Bm_l\right)\psi_{nlm_l}(\vec{r})$$

$$= E_n\phi(\vec{r}) + \frac{1}{2l+1}\sum_{m_l=-l}^{l}\frac{e\hbar}{2m}Bm_l\,\psi_{nlm_l}(\vec{r})$$

For at ϕ skulle vært en egentilstand måtte dette blitt lik $\lambda \phi(\vec{r})$, der λ er en konstant.

Dermed er $\phi(\vec{r})$ ikke en egenfunksjon for $\hat{H}$

m)

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \phi^*(\vec{r})\, \hat{H}\, \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \int \psi^*_{nlm_l}(\vec{r})\, \hat{H}\, \psi_{nlm_l}(\vec{r})\, dr$$

$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_l'=-l}^{l} \left(E_n + \frac{\hbar e}{2m} B m_l\right) \delta_{m_l, m_l'}$$

$$= E_n + \frac{1}{2l+1} \frac{\hbar e}{2m} B \sum_{m_l=-l}^{l} m_l$$

$$= E_n$$

Forventningsverdien er altså:

$$\underline{\langle \hat{H} \rangle = E_n}$$