MAT1110 - Oblig 1

Joakim Flatby

8. mars 2017

1

a)

$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Finn matrise A slik at $T_x = A_x$

$$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+c\\2b+d\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$$

$$2a + c = -2$$
$$2b + d = 1$$

$$a + c = 1$$
$$b + d = 1$$

løser likningssett:

$$a = 1 - c$$
$$2(1-c) + c = -2$$
$$2 - c = -2$$
$$c = 4$$

$$a + 4 = 1$$
$$a = -3$$

$$b = 1 - d$$
$$2(1-d) + d = 1$$
$$2 - d = 1$$
$$d = 1$$

$$b + 1 = 1$$
$$b = 0$$

putter verdiene for a, b, c og d inn i $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\lambda I_2 \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

For å finne egenverdiene tar vi identitetsmatrisen λI_2, trekker fra A, og tar determinanten av resultatet:

$$det(\lambda - A) = det \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda + 3)(\lambda - 1)$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$$

$$Av_1 = 3v_1$$

$$-3x + 4y = -3x$$
$$\Downarrow$$
$$x = 1$$

$$y = -3y$$
$$\Downarrow$$
$$y = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = v_2$$

$$-3x + 4y = x$$
$$\Downarrow$$
$$y = x$$

$$y = y$$
$$\Downarrow$$
$$x = 1, y = 1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + A^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det jeg gjør her er å skrive om $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ til

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Og skriver om A med egenverdiene funnet i oppgave b, så

$$A^5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + A^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kan skrives om til:

$$\lambda_1^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og dermed blir verdiene som skal opphøyes skalare og oppgaven mye lettere å løse.

$$-3^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -243 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -270 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2

a)

$$s(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$s'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Normalvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$a + 2xb = 0$$

Velger b = -1

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$b = -1$$

$$\vec{n}(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 + (-1)^2}}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{4x^2+1}} \right)$$

b)

X og Y som funksjon av x:

Først finner jeg vektoren fra berøringspunktet til sentrum av sirkelen ved å gange enhetsnormalvektoren fra oppg $2a$ med $-\frac{1}{2}$

($\frac{1}{2}$ er radiusen i sirkelen, og ganger med -1 fordi normalvektoren fra oppgave 2a har negativ andrekonponent, mens vi nå trenger vektoren med positiv andrekomponent som peker inn i parabelen.)

$\rho = 1/2$

$(-n(x))\rho = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{4x^2+1}} \right) * -\frac{1}{2} = \left(-\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}, \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \right)$

Nå som vi har vektoren fra berøringspunktet til sentrum, kan vi addere dette med $s(x) = (x, x^2)$

$XY(x) = s(x) + (-n(x))\rho$

$$X(x) = x - \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$Y(x) = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}$$

c)

Posisjonen til sentrum av kula er gitt ved X(x) og Y(x).

For å finne $\vec{v}(t)$ setter vi $x(t) = 2cos(t)$ inn i $X(x)$ og $Y(x)$ og deriverer med hensyn på t.

Tilsvarende for $\vec{a}(t)$, med dobbel derivasjon.

d)

Formel for buelengde:

$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'(t)^2 + ... + x_n'(t)^2} dt$

s(t) gir:

$$x_1 = t \Rightarrow x_1' = 1$$

$$x_2 = t^2 \Rightarrow x_2' = 2t$$

Bruker formelen for buelengde fra 0 til x, og setter $t = \xi$

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 4\xi^2} d\xi$$

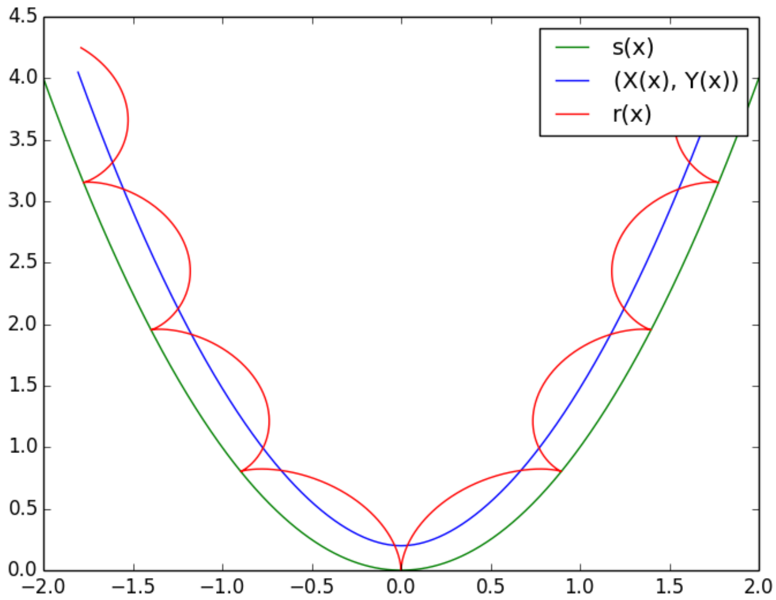
e)

$m(x) = r(x) - (X(x), Y(x))$.

Dette er en vektor som har lengde og retning fra sentrum av disken til punktet $r(x)$. Punktet $r(x)$ roterer med klokka(relativt til sentrum av disken) når x går i positiv retning. Vi kan forklare $m(x)$ med en rotasjonsmatrise der vi bruker vinkelen mellom vektoren som peker fra sentrum av kula til $r(x)$, og normalvektoren fra oppgave $2a$. Dermed har vi enhetsvektoren til $m(x)$, ganget med ρ for å skalere med riktig lengde, som gjør at vi sitter igjen med en vektor som peker fra origo, i retningen til $r(x) - (X(x), Y(x))$, akkurat som oppgaven ba om.

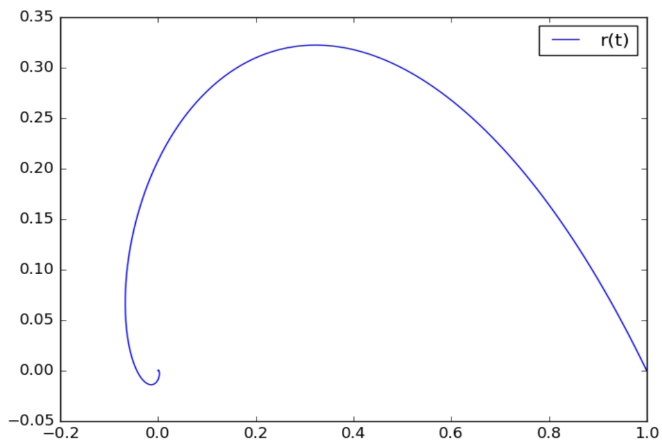
f)

```
import matplotlib.pylab as plt
import numpy as np

n = 1000
x = np.linspace(-2, 2, n)
rho = 1.0/5

X = np.zeros(n)
Y = np.zeros(n)
mx = np.zeros(n)
my = np.zeros(n)
nx = np.zeros(n)
ny = np.zeros(n)
rx = np.zeros(n)
ry = np.zeros(n)

def sigma(x):
    return 0.25 * (2 * x * (np.sqrt(4 * x**2 + 1)) + np.arcsinh(2*x))

for i in range(n):
    nx[i] = (2*x[i]/np.sqrt(4*x[i]**2 + 1))
    ny[i] = (-1/np.sqrt(4*x[i]**2 + 1))

    X[i] = x[i] + rho*(-2*x[i])/(np.sqrt(4*x[i]**2 + 1))
    Y[i] = x[i]**2 + rho/np.sqrt(4*x[i]**2 + 1)

    mx[i] = rho*(np.cos(sigma(x[i])/rho)*2*x[i] + np.sin(sigma(x[i])/rho)*-1)/np.sqrt(4*x[i]**2 + 1)
    my[i] = rho*(-np.sin(sigma(x[i])/rho)*2*x[i] + np.cos(sigma(x[i])/rho)*-1)/np.sqrt(4*x[i]**2 + 1)

    rx[i] = mx[i] + X[i]
    ry[i] = my[i] + Y[i]

plt.plot(x, x**2, "g-")
plt.plot(X, Y, "b-")
plt.plot(rx, ry, "r")
plt.legend(["s(x)", "(X(x), Y(x))", "r(x)"])
plt.savefig("oppg_f.png")
plt.show()
```



3

a)



Figur 1: graphing r(t)

b)

r(t) er gitt ved $r(t) = (e^{-t}cos(t), e^{-t}sin(t))$
Ved å derivere hvert komponent får vi:
$x'(t) = -e^{-t}cos(t) - e^{-t}sin(t)$
$y'(t) = -e^{-t}sin(t) + e^{-t}cos(t)$
Vet fra oppgave 2 d) at buelengden er:
$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'(t)^2 + ... + x_n'(t)^2}dt$
Dermed får vi:
$L(0, \infty) = \int_0^\infty \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

$$L(0, \infty) = \int_0^\infty \sqrt{(-e^{-t}cos(t) - e^{-t}sin(t))^2 + (-e^{-t}sin(t) + e^{-t}cos(t))^2}dt$$

$$L(0, \infty) = \int_0^\infty \sqrt{2e^{-2t}(cos^2(t) + sin^2(t)}dt$$

$$L(0, \infty) = \int_0^\infty \sqrt{2e^{-2t}}dt$$

$$L(0, \infty) = \sqrt{2} \int_0^\infty \sqrt{e^{-t}}dt$$

$$L(0, \infty) = \sqrt{2}\Bigg(- e^{-\infty} + e^0\Bigg)$$

$$L(0, \infty) = \sqrt{2}$$

c)

Har fra oppgave b:
$x'(t) = -e^{-t}cos(t) - e^{-t}sin(t)$
$y'(t) = -e^{-t}sin(t) + e^{-t}cos(t)$
Ved å skrive på vektorform får vi:
$\begin{pmatrix} -e^{-t}cos(t) & -e^{-t}sin(t) \\ e^{-t}cos(t) & -e^{-t}sin(t) \end{pmatrix}$
Så kan vi trekke ut $r(t)$ og får:
$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * e^{-t}(cos(t) * \vec{i} + sin(t) * \vec{j})$
Dermed har vi svart på oppgaven ettersom dette kan skrives som:
$-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * r(t)$

4

a)

Vis at F er konservativt.

Må vise at funksjonen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ finnes, slik at $\nabla\phi = \mathbf{F}$

Siden f bare avhenger av $|x|$, så antar vi at ϕ også gjør det, og kan skrive: $\phi(x) = g(|x|)$

Dermed har vi at:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} g(|x|) = g'(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = g'(|x|) \cdot 2x_i \cdot \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{g'(|x|)}{|x|}x_i$$

for $i = 1, \ldots, n$

så,

$$\nabla\phi = \frac{g'(|x|)}{|x|}x.$$

Ettersom f er kontinuerlig, så vet vi at det finnes en deriverbar funksjon:

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

slik at

$g'(r) = rf(r)$

Vi vet også at $f'(r) \to 0$ når $r \to 0$, så dermed er $\lim_{r\to 0} f(r)$ veldefinert.

Dermad har vi:

$$\lim_{r\to 0} g'(r) = \lim_{r\to 0} rf(r) = 0$$

så:

$$\nabla\phi = \frac{g'(|x|)}{|x|}x$$

er veldefinert for $x = 0$, og dermed er det bevist at F er konservativt.

b)

$$\nabla\phi(x) = \nabla h(|x|)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h(|x|) e_i$$

hvor e_i er enhetsvektoren til x_i

$$= \sum_{i=1}^{n} h'(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} e_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} |x| f(|x|)\ 2x_i\ \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x| f(|x|) \frac{1}{|x|} x_i e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(|x|) x_i e_i \\
&= f(|x|) x \\
&= \mathbf{F}(x)
\end{aligned}
$$

som er det som skule vises.