内 容 简 介

本书记录了作者在山大数院的三年所学的数学知识，简明扼要地列举出每个学科所必须掌握的定理等重要知识点。此书不宜作为初学某一科目的参考资料，而适合已学完部分内容者查漏补缺。

根据山大本科开课顺序以及个人自学进度，大致收录下列学科：

大一上：数学分析 1，高等代数 1，解析几何

大一下：数学分析 2，高等代数 2

大二上：数学分析 3，复变函数，常微分方程

大二下：实变函数，偏微分方程，概率论

大三上：机器学习、数字图像处理、数值优化方法、矩阵论

大三下：时间序列分析、数据库系统、数据结构

目　录

第一章　数学分析

Mathematical Analysis

数学分析是大一新生所修的重要学科基础课, 相比非数学专业更强调证明, 对收敛性的讨论篇幅较大, 与大二的实变函数课程联系紧密. 数分是今后多门专业课的先修课程: 积分学应用于概率论对随机变量的研究; 对积分的进一步研究 (Lebesgue 积分) 是实变函数的重要内容; Fourier 变换和多元函数积分学是偏微分方程必不可少的工具... 山大主选教材为陈纪修的《数学分析》(第三版), 在此基础上结合卓里奇的数学分析教程, 对共计三个学期的数分课程进行完整的内容回顾.

数分 1 的重点: 极限与连续概念, 一元函数微分学, 微分中值定理

数分 2 的重点: 一元函数积分学, 数项级数和函数项级数, 广义积分

数分 3 的重点: 多元函数微分学, 含参变量积分, 多元函数积分学 (重积分, 曲线与曲面积分)

1.1 集合与函数概念

这部分内容不多且不难, 可以认为是从高中数学到数分的过渡, 更可以认为是数学各个分支的基石.

集合论是高等数学的核心, 由此衍生出基 (tu) 础 (tou) 数学和计算机科学的区别: 一个研究连续集合, 比如实数域, 复数域等具有连续势集合上的映射, 另一个更偏向离散集合, 也就是有穷集和可列集上的映射. 从前者开始诞生实分析, 复分析, 傅里叶分析, 泛函分析等各大分析, 后者则衍生出图论, 组合数学, 数据结构等计算机科学分支. 认清这一点后, 我们便可以用一句话概括数学分析干了啥: 研究实数域或 n 维欧氏空间到实数域上的映射. 同时, 集合论又是各大学科的基础 (笔者在数分, 实变, 离散数学三门课上过三遍集合论...), 故不可轻敌.

映射就是数学分析的研究主体. 注意到我们只研究欧氏空间到实数域的映射, 也就是实变量函数, 我们可以归纳出这一类函数的表示方法和基本性质, 同时温习一下高中数学内容.

1.1.1 集合论

1. 集合的定义: 具有特定性质的一些对象总体, 集合内的对象称为元素.

定义解析

这一句话概括了集合的很多隐含属性: 首先, 元素有" 特定" 的性质, 那么该性质直接决定某一对象是否属于集合, 即对象完全由性质确定; 第二, " 总体" 告诉我们, 研究集合要从整体上把握, 切勿以偏概全, 给集合下的结论应对集合内任一元素成立; 最后, 集合表示了对象是否具有某性质, 那么同一对象不会多次出现在一个集合内.

2. 集合关系: (1) 从属关系: 若对象 x 在集合 A 内, 则称 x 属于 A, 记作 $x \in A$.
(2) 包含关系: 若 $\forall x \in A, x \in B$, 则称 B 包含 A, 记作 $A \subset B$.

3. 集合运算: (1) 交运算: $A \cap B = \{x|x \in A, x \in B\}$

(2) 并运算: $A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$

(3) 补运算: $\overline{A} = \{x|x \notin A\}$

(4) De Morgan 定律: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

定理 1.1: 德摩根定律

只证前一部分, 后一部分证法类似.

对 $\forall x \in \overline{A \cap B}$, $x \notin A \cap B$, 即 $x \notin A$ 或 $x \notin B$. 若 $x \notin A$, 则 $x \in \overline{A}$; 若 $x \notin B$, 则 $x \in \overline{B}$. 总之, 必有 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

反之, 对 $\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, $x \notin A$ 或 $x \notin B$, 即 $x \notin A \cap B$. 立得 $x \in \overline{A \cap B}$.

(5) 笛卡尔积: $A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$.

小窍门

观察德摩根定律的证明, 证两个集合 A 和 B 相等就是证 A 含于 B 且 B 含于 A. 事实上, 证集合相等就这一种办法, 遇到此类题, 这么构思准没错.

4. 可列集: 能按某规律排列所有元素的集合.

注意事项

可列集合的直观理解是离散无穷, 深入学下去可知道离散无穷" 远小于" 连续无穷. 常见的整数集和有理数集是可列集, 但是实数集不是可列集, 这导致无理数远远多于有理数, 或表述为实数轴几乎处处是无理数.

1.1.2 映射

1. 定义: 在两个集合 A, B 间定义对应关系 $f: A \to B$, 使得 $\forall x \in A, \exists y \in B$, $y = f(x)$. 其中 A 称为定义域, B 称为值域, f 称为 A 到 B 的映射.

2. 特殊映射: (1) 单射: $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) 满射: $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$.

(3) 双射: $\forall x \in A, \exists! y \in B, y = f(x)$. 双射等价于单射 + 满射.

(4) 逆映射: 令 $f: A \to B$ 为双射, 定义 $f^{-1}: B \to A$, 使得 $x = f^{-1}(y)$ 等价于 $y = f(x)$.

3. 函数: 数学分析中研究的函数特指实数 (欧氏空间) 到实数的映射. 定义域指定为 $\mathbb{R}$ 时, f 称为一元实函数; 定义域指定为 $\mathbb{R}^n$ 时, f 称为多元实 (变) 函数.

4. 一元函数的表示方式: (1) 解析式: 将因变量 y 用自变量 x 表示为 $y = f(x)$.

(2) 参数方程: $\begin{cases} y = & \phi(t) \\ x = & \psi(t) \end{cases}$, 其中 t 称为参数.

(3) 隐函数: $F(x, y) = 0$, 通常从中解不出显式解析式 $y = f(x)$.

5. 函数特性: (1) 单调性. $\forall x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 单增; $\forall x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 单减;

(2) 奇偶性. $f(x) = f(-x)$ 为偶函数, $f(x) = -f(-x)$ 为奇函数.

(3) 周期性. $\exists T > 0, f(x + T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 以 T 为周期.

(4) 有界性. $\exists M > 0, |f(x)| < M$ 恒成立, $f(x)$ 为有界函数.

注意事项

这部分内容看起来头疼, 一般也不会让你证是不是满射之类的, 很多都无关紧要. 出镜率高的概念有: 逆映射, 参数方程, 隐函数, 单调性和有界性.

1.2 极限

极限是分析理论的基石, 是把微积分概念严谨化不可或缺的概念. 学习极限的最主要目的是熟悉 $\varepsilon - N$ 语言, 并能熟练用这种语言证明.

什么是极限? 直观上讲就是一列数能够任意逼近某个值. 这个任意性可以用 ε 概括, 即某项以后, 所有数与该值的距离小于任意正数 ϵ. 用数学语言写出来, 就是极限的 $\varepsilon - N$ 定义.

怎么用极限概念证明问题? 首先熟悉实数系五大基本定理, 再取定适当的 ε 和 N, 使用 $\varepsilon - N$ 语言证明或推翻结论.

1.2.1 实数系的连续性

1. 确界: 最小上界称为上确界; 最大下界称为下确界. 数学语言描述:
$\sup S = \min\{M|\forall x \in S, x \leq M\}, \inf S = \max\{m|\forall x \in S, x \geq m\}$.

小窍门

这个定义平时不怎么用, 用得更多的是另一种描述 (以上确界为例):
(1) M 为上界, 即 $\forall x \in S, s \leq M$;
(2) $M - \varepsilon$ 都不是上界, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S, x_0 > M - \varepsilon$.

2. 确界存在性定理: 非空有上界的数集必有上确界; 非空有下界的数集必有下确界.

注意事项

为什么把确界存在性定理单列? 因为此处把这个定理作为出发点证明其它定理. 证明确界存在性定理的方法是十进制小数逼近, 感觉不那么严谨.

1.2.2 数列极限

1. 定义: 对数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, n > N$ 时, 恒有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 则数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.