内 容 简 介

本书记录了作者在山大数院的三年所学的数学知识，简明扼要地列举出每个学科所必须掌握的定理等重要知识点。此书不宜作为初学某一科目的参考资料，而适合已学完部分内容者查漏补缺。

根据山大本科开课顺序以及个人自学进度，大致收录下列学科：

大一上；数学分析 1，高等代数 1，解析几何

大一下：数学分析 2，高等代数 2

大二上：数学分析 3，复变函数，常微分方程

大二下：实变函数，偏微分方程，概率论

大三上：机器学习、数字图像处理、数值优化方法、矩阵论

大三下：时间序列分析、数据库系统、数据结构

目　录

第一章　高等代数

Advanced Algebra

高等代数同为大一新生必修的数院基础课, 与数分一样, 是多门后继学科最基本的理论基础. 山大的高代分为两个学期讲授: 第一个学期主要学习线性代数基础, 第二个学期主要学习线性变换和矩阵分析. 高代 2 被称为挂科神课不无道理, 相比前一学期内容跨度相当大, 瞬间抽象起来, 引入的线性空间和线性映射等抽象概念很难理解. 但是学得深入又会感觉非常有趣, 只要满足八大性质的集合, 就能用一组基和常见的欧氏空间和坐标联系起来, 充分体现了数学的抽象之美.

学习高等代数, 不需要任何先修知识, 但是要学会将复杂的事物抽象化描述 (最好的例子: 线性方程组改写为 **Ax=b**). 初学阶段, 多思考, 多举例子, 多做题对提高很有帮助.

高代 1 的重点: 多项式, 行列式, 矩阵, 线性方程组, 二次型

高代 2 的重点: 线性空间, 线性映射与线性变换, 特征值与特征向量, λ 矩阵与 Jordan 标准形, 欧氏空间, 正交变换

1.1　线性空间与线性变换

这一部分从理论层次上揭示了线性代数的本质. 要学好这一章, 首先要认清向量, 矩阵等概念的本质属性, 再思考抽象定义与直观定义的联系与不同, 并熟悉一些看似玄幻却很实用的写法.

线性空间是什么? 就是把" 线性" 这一最基本的性质剥离出来: 保持加法和数乘运算, 并以此定义一类集合, 把集合中的元素称为向量.

为什么把线性空间的元素称为向量? 仅用加法, 数乘保持性, 就可以把向量的线性相关性这些概念平行推到线性空间的元素上, 也就是说这么定义实际上保留了向量的本质属性 (线性相关和线性表示), 去掉了直观因素.

这么定义的向量和之前定义的有啥区别? 按照往常定义, 向量是按顺序排列的 n 个数, 或是 n 维空间的一点, 用这 n 个数以及 n 维坐标系便可完全确定其方位. 而在向量一章已经学过, 不仅仅坐标系能唯一确定一个向量, 任意一组线性无关的向量都能线性表示任意向量, 且表示方式唯一. 这就引入基和坐标的概念, 用一组线性无关的基再加坐标, 就能表示任一向量. 同时用两组不同的基表示一个点, 就是基变换和坐标变换的问题. 总之, 以" 向量的表示" 为主线, 就能串起线性空间的内容.

线性变换又是什么? 是数学分析中" 映射" 定义的扩充, 简单来说只是两个线性空间的映射, 而且这个映射还有加法, 数乘保持性. 线性变换就更简单了, 把线性空间自己映射到自己. 使用基和坐标表示, 就可以用矩阵唯一表示线性映射, 或方阵唯一表示线性变换, 这是对线性的高维映射来说十分有趣的结论. 学习线性空间和线性变换的乐趣, 就是把这么抽象的定义用直观的结论直接概括.

1.1.1　线性空间

1. 定义: 在数域 P 和集合 V 上定义加法和数乘两种运算: 加法满足交换律, 结合律, 零元 0 与逆元 1; 乘法有单位元 1, 满足结合律与两条分配律, 则称 V 是

数域 P 上的线性空间, 其中的元素称为向量.

定义解析

这么长的定义都是唬人的, 所以这里没 (lan) 有 (de) 写全. 最核心的也是用得最多的只有一句话: 对任意向量

2. 基: 若线性空间 V 内存在 n 个线性无关的向量 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 使得 $\forall x \in V, \exists k_1, k_2, \cdots, k_n \in P, x = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n$, z 则称向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 V 的一组基.

3. 维数: 线性空间 V 中任意一组基中的向量个数称为 V 的维数, 记作 dim V.

定义解析

这么定义有一个隐含结论: 同一线性空间的任意两组基有相同个数的向量. 可以从线性表示这一角度入手, 证明这一结论.

4. 向量的坐标: 选定一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 后, 任一向量 $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ 在基下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 又可写作

$$x = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

.

注意事项

可以直接看成 $1 \times n$ 分块矩阵和 $n \times 1$ 向量的乘积. 注意顺序最好不要颠倒, 习惯上把基写成行向量, 坐标写成列向量, 在学习线性变换时我们默认了此种写法.

5. 两组基之间的关系: 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为同一个线性空间的两组基, 则必存在矩阵 $\mathbf{A}$, 使得 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\mathbf{A}$, 称矩阵 $\mathbf{A}$ 为基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的过渡矩阵.

小窍门

如果觉得基很难理解, 就放在欧氏空间上看. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是两个满秩矩阵, 它们必定相抵, $\mathbf{A}$ 就可以理解为那个初等变换矩阵. 到后面就知道, 线性空间和同一维数的欧氏空间本来就是等价的.

6. 向量的坐标变换公式: 在线性空间 V 中, 某向量在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 在基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下的坐标为 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, 且 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的过渡矩阵为 $\mathbf{A}$, 则有

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1.1.2　线性子空间

1. 定义: 令 V 为线性空间. 若 $V_1 \in V$ 且加法, 数乘运算对 V_1 封闭, 则 V_1 称为 V 的一个线性子空间.

2. 生成子空间: 若 $x_1, x_2, \cdot x_m$ 为一组线性无关的向量, 则

$$V_1 = \{k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m | k_1, k_2, \cdots, k_m \in P\}$$

称为由向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 生成的子空间.

3. 基的扩张定理: 设 V_1 为 n 维线性空间 V 的子空间, 且 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为 V_1 的一组基, 则存在向量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$, 使得 $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n$ 为 V 的一组基.

注意事项

定理本身并不难证, 数学归纳就能证出. 这个定理在用于求解子空间问题时很方便, 经常会出现" 假设子空间的基, 扩张为原空间的基" 的证法. 下一个重要公式" 维数公式" 证法就是这类方法的重要例证.

4. 维数公式: $\dim(V_1\bigcup V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\bigcap V_2)$.

推论 1.1: 维数公式

令 $V_1\bigcap V_2$ 的一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_m$. 由基的扩张定理, 这组基既可以扩张为 V_1 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_r$, 也可以扩张为 V_2 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{r+1},\cdots,e_s$. 从线性表示和线性无关两个角度, 可证明 $e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_s$ 为 $V_1\bigcup V_2$ 的一组基. 此时 *dim* $(V_1\bigcup V_2)=s$, *dim* $(V_1\bigcap V_2)=m$, *dim* $V_1=r$, *dim* $V_1=m+s-r$, 维数公式成立.

5. 子空间的直和: 若 $V_1\bigcap V_2=0$, 则 $V_1\bigcup V_2$ 分解为 $x=x_1+x_2(x_1\in V_1,x_2\in V_2)$ 的分解形式唯一. 此时称 $V_1\bigcup V_2$ 为子空间 V_1,V_2 的直和, 记作 $V_1\oplus V_2$.

1.1.3 线性算子与线性变换

1. 线性算子: 若 M 与 N 为两个集合, 且 $\forall x\in M,\exists! y\in N, y=\mathscr{A}x$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 $M\to N$ 的算子. 若 $\forall x,y\in M$ 且 $\lambda_1,\lambda_2\in P$, 有 $\mathscr{A}(\lambda_1x_1\lambda_2x_2)=\lambda_1\mathscr{A}x_1+\lambda_2\mathscr{A}x_2$, 则称 $\mathscr{A}$ 为线性算子.

2. 同构算子: 若 $\mathscr{A}$ 是可逆算子, 即 $\forall y\in N,\exists! x\in M,\mathscr{A}x=y$, 则称 $\mathscr{A}$ 为同构算子.

3. 同构定理: $\dim M=\dim N\Leftrightarrow\exists A:M\to N$ 为同构算子.

4. 线性算子矩阵表示: 令 $\mathscr{A}:V^n\to V^m$, 取 V^n 一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 与 V^m 一组基 $e_1',e_2',\cdots,e_m'$, 则 $\mathscr{A}e_i=a_{i1}e_1'+\cdots+a_{im}e_m'$, 即

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n)=(e_1',\cdots,e_m')A.$$

其中矩阵 A 称为基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 与 $(e_1',\cdots,e_m')$ 下 $\mathscr{A}$ 的矩阵表示.

5. 像的坐标: 令 $x=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_m)A$, 则 $\mathscr{A}x$ 在 $(y_1,\cdots,y_n)$ 下的坐标为 $A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

6. 线性变换: 由线性空间 V 到其自身的线性算子 $\mathscr{A}$ 称为 V 上的线性变换.

7. 相似矩阵: 若线性空间 V 的两组基为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_n)$, 且 $(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_n)P$, $\mathscr{A}(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A$, $\mathscr{A}(y_1,\cdots,y_n)=(y_1,\cdots,y_n)B$, 则 $A=P^{-1}BP$. 定义矩阵 A 与 B 相似, 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$.