

内 容 简 介

本书记录了作者在山大数院的三年所学的数学知识，简明扼要地列举出每个学科所必须掌握的定理等重要知识点。此书不宜作为初学某一科目的参考资料，而适合已学完部分内容者查漏补缺。

根据山大本科开课顺序以及个人自学进度，大致收录下列学科：

大一上：数学分析 1，高等代数 1，解析几何

大一下：数学分析 2，高等代数 2

大二上：数学分析 3，复变函数，常微分方程

大二下：实变函数，偏微分方程，概率论

大三上：机器学习、数字图像处理、数值优化方法、矩阵论

大三下：时间序列分析、数据库系统、数据结构

目 录

| | |
|---------------------------|---|
| 第一章 高等代数 | 1 |
| 1.1 线性空间与线性变换 | 2 |
| 1.1.1 线性空间 | 2 |
| 1.1.2 线性子空间 | 3 |
| 1.1.3 线性算子与线性变换 | 4 |

第一章 高等代数

Advanced Algebra

高等代数同为大一新生必修的数院基础课,与数分一样,是多门后继学科最基本的理论基础. 山大的高代分为两个学期讲授: 第一个学期主要学习线性代数基础, 第二个学期主要学习线性变换和矩阵分析. 高代 2 被称为挂科神课不无道理, 相比前一学期内容跨度相当大, 瞬间抽象起来, 引入的线性空间和线性映射等抽象概念很难理解. 但是学得深入又会感觉非常有趣, 只要满足八大性质的集合, 就能用一组基和常见的欧氏空间和坐标联系起来, 充分体现了数学的抽象之美.

学习高等代数, 不需要任何先修知识, 但是要学会将复杂的事物抽象化描述 (最好的例子: 线性方程组改写为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$). 初学阶段, 多思考, 多举例子, 多做题对提高很有帮助.

高代 1 的重点: 多项式, 行列式, 矩阵, 线性方程组, 二次型

高代 2 的重点: 线性空间, 线性映射与线性变换, 特征值与特征向量, λ 矩阵与 Jordan 标准形, 欧氏空间, 正交变换

1.1 线性空间与线性变换

1.1.1 线性空间

1. 定义: 在数域 P 和集合 V 上定义加法和数乘两种运算: 加法满足交换律, 结合律, 零元 0 与逆元 1 ; 乘法有单位元 1 , 满足结合律与两条分配律, 则称 V 是数域 P 上的线性空间, 其中的元素称为向量.

2. 基: 若线性空间 V 内存在 n 个线性无关的向量 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得 $\forall x \in V, \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in P, x = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$, 则称向量 x_1, x_2, \dots, x_n 为 V 的一组基.

3. 维数: 线性空间 V 中任意一组基中的向量个数称为 V 的维数, 记作 $\dim V$.

定义解析

这么定义有一个隐含结论: 同一线性空间的任意两组基有相同个数的向量. 可以从线性表示这一角度入手, 证明这一结论.

4. 向量的坐标: 选定一组基 e_1, e_2, \dots, e_n 后, 任一向量 $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ 在基下的坐标为 (x_1, x_2, \dots, x_n) . 又可写作

$$x = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

注意事项

可以直接看成 $1 \times n$ 分块矩阵和 $n \times 1$ 向量的乘积. 注意顺序最好不要颠倒, 习惯上把基写成行向量, 坐标写成列向量, 在学习线性变换时我们默认了此种写法.

5. 两组基之间的关系: 令 x_1, x_2, \dots, x_n 与 y_1, y_2, \dots, y_n 为同一个线性空间

的两组基, 则必存在矩阵 \mathbf{A} , 使得 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)\mathbf{A}$, 称矩阵 \mathbf{A} 为基 y_1, y_2, \dots, y_n 到 x_1, x_2, \dots, x_n 的过渡矩阵.

小窍门

如果觉得基很难理解, 就放在欧氏空间上看. (x_1, x_2, \dots, x_n) 与 (y_1, y_2, \dots, y_n) 是两个满秩矩阵, 它们必定相抵, \mathbf{A} 就可以理解为那个初等变换矩阵. 到后面就知道, 线性空间和同一维数的欧氏空间本来就是等价的.

6. 向量的坐标变换公式: 在线性空间 V 中, 某向量在基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的坐标为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 在基 y_1, y_2, \dots, y_n 下的坐标为 $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 且 y_1, y_2, \dots, y_n 到 x_1, x_2, \dots, x_n 的过渡矩阵为 \mathbf{A} , 则有

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1.1.2 线性子空间

1. 定义: 令 V 为线性空间. 若 $V_1 \in V$ 且加法, 数乘运算对 V_1 封闭, 则 V_1 称为 V 的一个线性子空间.

2. 生成子空间: 若 x_1, x_2, \dots, x_m 为一组线性无关的向量, 则

$$V_1 = \{k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m | k_1, k_2, \dots, k_m \in P\}$$

称为由向量 x_1, x_2, \dots, x_m 生成的子空间.

3. 基的扩张定理: 设 V_1 为 n 维线性空间 V 的子空间, 且 x_1, x_2, \dots, x_m 为 V_1 的一组基, 则存在向量 x_{m+1}, \dots, x_n , 使得 $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ 为 V 的一组基.

注意事项

定理本身并不难证, 数学归纳就能证出. 这个定理在用于求解子空间问题时很方便, 经常会出现“假设子空间的基, 扩张为原空间的基”的证法. 下一个重要公式“维数公式”证法就是这类方法的重要例证.

4. 维数公式: $\dim(V_1 \cup V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

推论 1.1: 维数公式

令 $V_1 \cap V_2$ 的一组基为 e_1, e_2, \dots, e_m . 由基的扩张定理, 这组基既可以扩张为 V_1 的基 $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_r$, 也可以扩张为 V_2 的一组基 $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{r+1}, \dots, e_s$. 从线性表示和线性无关两个角度, 可证明 $e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_s$ 为 $V_1 \cup V_2$ 的一组基. 此时 $\dim(V_1 \cup V_2) = s$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$, $\dim V_1 = r$, $\dim V_2 = s - m + m = r$, 维数公式成立.

5. 子空间的直和: 若 $V_1 \cap V_2 = 0$, 则 $V_1 \cup V_2$ 分解为 $x = x_1 + x_2 (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$ 的分解形式唯一. 此时称 $V_1 \cup V_2$ 为子空间 V_1, V_2 的直和, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

1.1.3 线性算子与线性变换

1. 线性算子: 若 M 与 N 为两个集合, 且 $\forall x \in M, \exists! y \in N, y = \mathcal{A}x$, 则称 \mathcal{A} 为 $M \rightarrow N$ 的算子. 若 $\forall x, y \in M$ 且 $\lambda_1, \lambda_2 \in P$, 有 $\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \lambda_2 \mathcal{A}x_2$, 则称 \mathcal{A} 为线性算子.

2. 同构算子: 若 \mathcal{A} 是可逆算子, 即 $\forall y \in N, \exists! x \in M, \mathcal{A}x = y$, 则称 \mathcal{A} 为同构算子.

3. 同构定理: $\dim M = \dim N \Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : M \rightarrow N$ 为同构算子.

4. 线性算子矩阵表示: 令 $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^m$, 取 V^n 一组基 e_1, e_2, \dots, e_n , 与 V^m 一组基 e'_1, e'_2, \dots, e'_m , 则 $\mathcal{A}e_i = a_{i1}e'_1 + \dots + a_{im}e'_m$, 即

$$\mathcal{A}(e_1, \dots, e_n) = (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)A.$$

其中矩阵 A 称为基 (e_1, \dots, e_n) 与 (e'_1, \dots, e'_m) 下 \mathcal{A} 的矩阵表示.