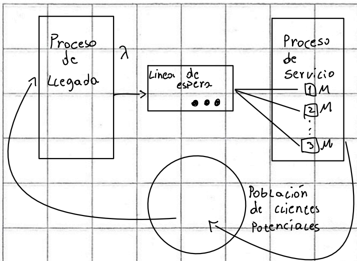
Sistemas de espera

08/07/2025



λ: Tasa de llegada

μ: Tasa de servicios

S: Número de servidores

n: número de clientes $n = 0, 1, 2, \ldots$ en sistema

Formulas de Little

$L = \lambda W$

$L_q = \lambda W_q$

Medidas de desempeño

L: Número promedio clientes en el sistema

Lq: Número clientes en cola

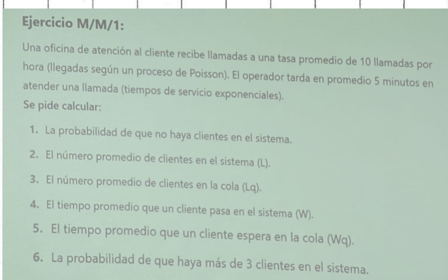
W: Tiempo promedio de un cliente en el sistema

Wq: Tiempo promedio de un cliente en la cola

1.- Sistema M/M/1

λ: $\boxed{}\ \boxed{}\ \mu$

- Para que sistema funcione, $\lambda < \mu$, $\rho < 1$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- formulas en PPT



Ejercicio M/M/1:

Una oficina de atención al cliente recibe llamadas a una tasa promedio de 10 llamadas por hora (llegadas según un proceso de Poisson). El operador tarda en promedio 5 minutos en atender una llamada (tiempos de servicio exponenciales).
Se pide calcular:

1. La probabilidad de que no haya clientes en el sistema.
2. El número promedio de clientes en el sistema (L).
3. El número promedio de clientes en la cola (Lq).
4. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema (W).
5. El tiempo promedio que un cliente espera en la cola (Wq).
6. La probabilidad de que haya más de 3 clientes en el sistema.

λ: 10 Llegada/hora

μ: 12 salidas/hora $\left(\frac{60 \text{ minutos}}{5 \text{ minutos}}\right)$

P_0: Probabilidad sistema vacío

$\rho: \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} < 1$ El sistema es estable

1.- $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12} = 0{,}16$

2.- $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10}{2} = 5$ Llamadas $\boxed{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}\ \boxed{\cdot}$ 4 clientes esperan, 1 se atiende

3.- $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{100}{12(2)} = \frac{100}{24} \approx 4{,}16$ Llamadas

4.- $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$ Hr $= 30$ minutos

5.- $W_q = \frac{4{,}16}{10} = 0.416$ Hr. ⤳ Se puede usar formula de little o de formulario (Moddle)

6.- $P(n > 3) = P_4 + P_5 + P_6 + \ldots$

supuesto M/M/1, capacidad infinita

$P(n > 3) = 1 - P(n \leq 3)$

$= 1 - [P_0 + P_1 + P_2 + P_3]$

$P_0 = 0.1600$

$P_1 = \rho \cdot P_0 = (0{,}84) \cdot (0{,}16) = 0{,}1344$ ($\frac{10}{12}$)

$P_2 = \rho^2 \cdot P_0 = (0{,}84)^2 (0{,}16) = 0{,}1128$

$P_3 = \rho^3 \cdot P_0 = (0{,}84)^3 (0{,}16) = 0{,}0948$

$P(n > 3) = 1 - 0{,}5021$

$= 0{,}4979$

ARTEL

Ejercicio: M/M/1 (deducción de parámetros)

En un centro de atención técnica se sabe que, en promedio:

- Un cliente pasa **18 minutos en el sistema** desde que llega hasta que se retira.
- Hay en promedio **3 clientes en el sistema** (esperando o siendo atendidos).

Asumiendo que el sistema sigue un modelo M/M/1, determinar:

1. La tasa de llegada λ (clientes por hora)
2. La tasa de servicio μ (clientes por hora)
3. El número promedio de clientes en la cola L_q
4. El tiempo promedio que un cliente espera **en la cola** W_q
5. La probabilidad de que no haya ningún cliente en el sistema P_0

1-. $W = 18 = 0{,}3\,Hr$ segun Little $L = \lambda W$

$L = 3$ $\therefore \lambda = \frac{L}{W} = \frac{3}{18} = \frac{3}{0.3} = 10$ clientes/hora

min.

Hr

2: $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$3 = \frac{10}{\mu - 10} \Rightarrow 3\mu - 30 = 10$, $\mu = \frac{40}{3} = 13{,}3$

3.-

4.-

5.-

Ejercicio: Deducción de tasas en un sistema M/M/1

En una sucursal bancaria, se observa que:

- En promedio hay **4 clientes en la cola** esperando atención.
- El tiempo promedio que un cliente pasa **esperando en la cola** antes de ser atendido es de **6 minutos**.

Suponiendo un modelo M/M/1:

1. Determina la tasa de llegada λ (en clientes por hora).
2. Determina la tasa de servicio μ (en clientes por hora).
3. Calcula el factor de utilización del sistema ρ.
4. ¿Cuál es el tiempo total promedio que un cliente pasa en el sistema (espera + atención)?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya clientes en el sistema?

1-. $L_q = 4$

$W_q = 6$

$\lambda = \frac{4}{0{,}1} = 40$ cliente/hora

2-. $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.1$

$\lambda = 0.1\mu(\mu - \lambda)$

$40 = 0.1\mu(\mu - 40)$

$40 = 0.1\mu^2 - 4\mu$

$0.1\mu^2 - 4\mu - 40 = 0$

$\rightarrow \mu^2 - 40\mu - 400 = 0$

$\mu = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 1600}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{3200}}{2}$

$= \frac{40 \pm 56{,}56}{2} \rightarrow \frac{40 + 56{,}56}{2} = 48{,}28$

$\mu = 48{,}28$ cliente/hora

M/M/S

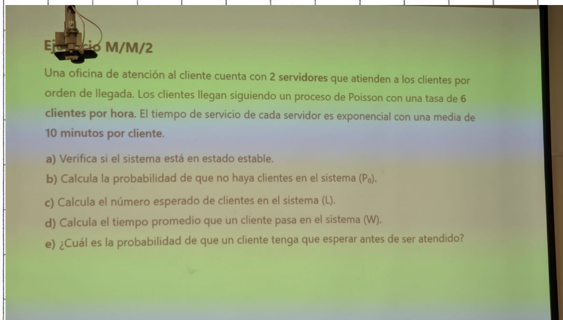
*Existe un formulario distinto en multiples servidores

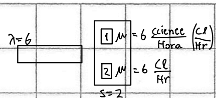
14/07/2025

S = número de servidores

ejem: M/M/2

*Supuesto, pueden llegar infinitos clientes





a) $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{6}{2(6)} = \frac{6}{12} = 0.5 < 1$ ⇝ sistema es estable

b) $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!(1-\rho)}\right]^{-1}$ → Sumatoria Loma saco este termino

$P_0 = \left[1+1+\frac{1}{2(1/2)}\right]^{-1}$

$= (3)^{-1} = 1/3$

c) $L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{1/3 \cdot 1^2 \cdot 1/2}{2!(1-1/2)^2} = \frac{1/6}{2\cdot 1/4} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1} = \frac{1}{3}$

$L = L_q + \lambda/\mu$

$L = 1/3 + 1 = 4/3$

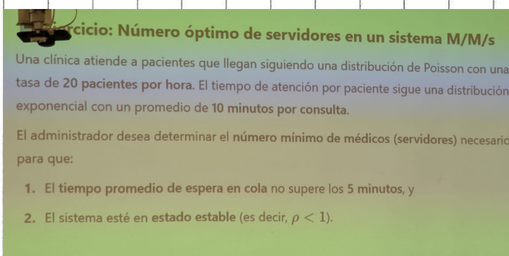
d) $W = \frac{4/3}{6} = \frac{2}{9} \approx 13.3$ minutos

e) P(espera) = P(sis. ocupado)

$= P_2 + P_3$

$= 1 - P_0 - P_1$

$= 1 - 1/3 - 1/3 => 1/3$



S	λ	μ	ρ	estable?	P_0	W_q	L_q
1	20	6	20/6 > 1	no	-		
2	20	6	20/12 > 1	no	-		
3	20	6	20/18 > 1	no	-		
4	20	6	20/24 < 1	si	0.052		
⋮							

λ = 20

μ = 6

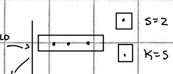
$L_q = \frac{0.052(20/24)^4 \cdot 20/24}{4!(1-20/24)^2}$

Sistema M/M/S/K

K = capacidad del sistema

*capacidad limitida

ejemplo



Tasa de llegada efectiva

$\lambda_{ef} = (1-\lambda)P_K$

Como K es la capacidad total. La probabilidad que haya mas de K clientes es 0

PROBLEMA 1

Una pequeña tienda tiene un solo cajero y espacio para un máximo de 4 clientes (incluyendo al que está siendo atendido). Los clientes llegan a razón de **2 por minuto** y el cajero atiende a razón de **3 por minuto**.

Preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté vacío, P_0?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente nuevo no pueda entrar al sistema (rechazado)?
3. ¿Cuál es el número promedio de clientes en el sistema, L?
4. ¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, W?

M/M/1/K

21/07/2025

$S=1$, $K=4$

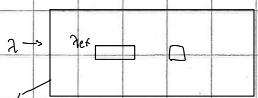
$K=$ N° de cientes en cola + N° de cientes que estan siendo atendidos.

Si $K=4$ $\boxed{x \ x \ x}$ $\boxed{x}$

OBS: i) Los sistemas con capacidades finita no colapsan - se "llenan" pero colapsan, no es necesario verificar condición de estabilidad

ii) Si el sistema esta lleno el ciente que llega, abandona el sistema, no espera

iii) En sistema M/M/1/K se calcula la tasa efectiva de llegada



$\lambda - \lambda_{ef} = \lambda(1-P_K)$

iv) Tambien existen los sistemas M/M/S/K

ejercicio de arriba

$S=1$

$K=4$

$\lambda = 2$ cientes/minuto

$M = 3$ cientes/min.

$\rho = 2/3$

a) $P_0 = \frac{1-2/3}{1-(2/3)^5} = 0,384$

b) $P_4 = 0,384 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0,075$

c) $L = \frac{2/3\,(1-(5)\cdot(2/3)^4 + 4(2/3)^5}{(1-2/3)(1-(2/3)^5)} = 1,24$

d) $W = \frac{1.24}{1.85} = 0,67$ minutos

$\lambda_{ef} = 2(1-0,075) = 1,85$

ARTEL

Formula general del costo total por unidad de tiempo

Costo Total $= C_s + C_e$

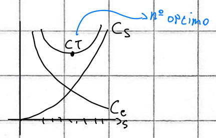
C_s = Costo del servidor por unidad de tiempo

C_e = Costo de espera de los clientes por unidad de tiempo

$C_s = C_s \cdot s$

$C_e = C_e \cdot L$ ó $C_e \cdot L_q$

$CT = C_s \cdot s + C_e \cdot L$



Ejercicio 1: Minimización de costos totales

Una empresa de mensajería atiende a los clientes en una ventanilla. Los clientes llegan a razón de $\lambda = 8$ clientes por hora y un empleado puede atender a razón de $\mu = 12$ clientes por hora.

Los costos son:

- Costo por hora del servidor: **\$60/hora**
- Costo por hora por cliente en espera: **\$15 por cliente por hora**

Preguntas:

1. ¿Cuál es el número promedio de clientes en espera, L_q?
2. ¿Cuál es el costo total por hora del sistema?
3. ¿Sería conveniente contratar a un servidor con mayor velocidad de atención $\mu = 15$ que cuesta \$90/hora?

$S = 1$

$\lambda = 8$

$\mu = 12$

$C_s = 60\$/hora$

$C_e: 15\$/hora$

1.- $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} - P_0$

$= \frac{8^2}{12(4)} \cdot \left(1 - \frac{8}{12}\right) = 0{,}44$ clientes

2.- $C_T = 60 + 15 \cdot (0.44)$

$= 66{,}6$ US\$/hora

3.- $\mu = 15$, $L_q = \frac{8^2}{15(7)} \times \left(1 - \frac{8}{15}\right) = 0{,}284$ clientes

$C_T = 90 + 15(0{,}284)$

$= 94{,}26$ US\$/hora $\longrightarrow$ no conviene

Ejercicio: Comparación de dos sistemas M/M/1 con costos

Una empresa está evaluando **dos alternativas** para implementar un sistema de atención a

Datos comunes:

- **Tasa de llegada** de clientes: $\lambda = 20$ clientes por hora.
- Los tiempos entre llegadas y tiempos de servicio son **exponenciales**.

Sistema A:

- Capacidad de atención: $\mu_A = 30$ clientes por hora.
- Costo del sistema (fijo): \$150 por hora.
- Costo por cliente en el sistema (esperando o siendo atendido): \$8 por hora.

Sistema B:

- Capacidad de atención: $\mu_B = 25$ clientes por hora.
- Costo del sistema (fijo): \$100 por hora.
- Costo por cliente en el sistema: \$10 por hora.

¿Cuál de los dos sistemas tiene **menor costo total** p[...] de espera.

	A	B
λ	20	20
μ	30	25
ρ	2/3	4/5
C_e	8	10
C_s	150	100
L	20/10 = 2	20/5 = 4
C_T	150 + 2(8) = 166 US\$/Hr	100 + 4(10) = 140 US\$/hora

$\therefore$ Se escoge sistema B

EJERCICIO (DETERMINAR NUMERO ÓPTIMO DE CAJEROS)

Un banco pequeño trata de determinar cuántos cajeros debe emplear. El costo total de emplear un cajero es 100 dólares diarios y un cajero puede atender a un promedio de 60 clientes por día. Al banco llega un promedio de 50 clientes por día y los tiempos de servicio y los tiempos entre llegadas son exponenciales. Si el costo de demora por cliente y día [en el sistema] es de 100 dólares, ¿cuántos cajeros debe contratar el banco

se refiere a costo total

S	λ	μ	ρ	P_0	L	C =
1	50	60	5/6	0,16	5	600 US\$/Hr.
2			5/12	0.41	4.27	300,03
3				0.43		385
4				0.43		

$C_s = 100$ US\$/dia

$C_e = 100$ US\$/dia

* Profe proporcionara P_0 en certamen

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$

Para servidor 1

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 5$, $C = 100 + 100(5) = 600$

Para servidor 2

$L = L_q + \lambda/\mu$

$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$

$L_q = \frac{0.41(50/60)^2 \cdot 5/12}{2(1 - 5/12)^2} = 0{,}17$

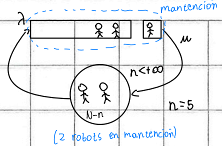
$L = 0{,}17 + \frac{50}{60} = 1{,}003$

$C = 100 \cdot 2 + 100 \cdot (1{,}003)$

Sistema M/M/1/N

▶ Población de clientes finita (3 robots en mantención)

▶ Reconocer tipo de sistema



OBS: Este sistema tiene aplicación en la mantención de equipos.

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$L=\sum_{n=0}^{N} nP_n$$

$$P_n=P_0\binom{N}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad n=0,1,2,\dots,n$$

donde $\binom{N}{n}=\frac{N!}{(N-n)!\,n!}$

🛠 **Problema: Mantenimiento de robots en una línea automatizada**

En una planta de ensamblaje automatizada, operan **5 robots idénticos** que trabajan de forma continua. Eventualmente, cada robot puede requerir **mantenimiento correctivo**, que es realizado por un **único técnico especializado** (un servidor).

- Un robot que está **en operación y sin fallas** tiene una probabilidad constante de fallar e ingresar a mantenimiento. En promedio, **cada robot entra a mantención cada 30 minutos.**
- El técnico tarda en promedio **20 minutos** en reparar un robot.
- Si el técnico está ocupado, los robots **esperan en cola**, ya que todos los robots comparten la misma estación de mantenimiento.

> Se asume que los **tiempos entre fallas** y los **tiempos de reparación** siguen distribuciones **exponenciales.**

$\lambda=1/30$

$\mu=1/20$

$\frac{\lambda}{\mu}=2/3$

cálculo de P_0

$$P_0=\Big[\underbrace{\binom{5}{0}\left(\tfrac{2}{3}\right)^0}_{1}+\underbrace{\binom{5}{1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^1}_{5}+\underbrace{\binom{5}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}_{10}+\underbrace{\binom{5}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^3}_{10}+\underbrace{\binom{5}{4}\left(\tfrac{2}{3}\right)^4}_{5}+\underbrace{\binom{5}{5}\left(\tfrac{2}{3}\right)^5}_{1}\Big]^{-1}$$

$P_0=0{,}078$

n	P_n
0	0.078
1	0,260
2	0,346
3	0,231
4	0,077
5	0,103

$P_1=(0{,}078)\binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)=0{,}260$

$P_2=(0{,}078)\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=0{,}347$

siempre hay que calcular para este tipo de problema

Medidas de desempeño

a) $L=\sum_{n=0}^{N} n\cdot P_n=\cancel{0\cdot P_0}+1\cdot P_1+2\cdot P_2+3\cdot P_3+4\cdot P_4+5\cdot P_5$

$=0{,}260+0{,}692+0{,}693+0{,}308+0{,}515$

$=2{,}468$

b) $L_q=L-(1-P_0)$

$=2-(1-0{,}078)\approx 1.1$

Corregir en formulario

c) Tasa efectiva

$$\lambda_e=\lambda\left[\sum_{n=0}^{N}(N-n)P_n\right]=(5)\cdot P_0+(4)P_1+(3)\cdot P_2+(2)P_3+(1)P_4$$

≈ 0.1

d) $W=L/\lambda_e=\frac{2}{0.1}=20$ min

$W_q=L_q/\lambda_e=\frac{1.1}{0.1}\approx 1.1$ min

* Todos los problemas se les puede preguntar por costos