TP 2.2 - GENERADORES PSEUDOALEATORIOS

Galarza Karen
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
karengalarza94.kg@gmail.com

Gonzalez Aquino Yoana
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
yoanakim1@gmail.com

Grancelli Eliseo
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
eliseograncelli@gmail.com

Soto Matias Francisco
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
matiasfranciscosoto@gmail.com

Petrelli Juan Franco
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
jfpetrelli@gmail.com

Agustina Monti
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
agusmonti10@gmail.com

29 de mayo de 2023

ABSTRACT

En el siguiente documento haremos un estudio de las distintas distribuciones de probabilidad, construyendo generadores de números pseudoaleatorios con disintos tipos de probabilidades. Veremos que las distribuciones de probabilidad teóricas son útiles ya que si la distribución real de un conjunto de datos dado es razonablemente cercana a la de una distribución de probabilidad teórica, muchos de los cálculos se pueden realizar en los datos reales utilizando hipótesis extraídas de la distribución teórica.

1. Introducción

Una Distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento, si este se llevase a cabo. Es decir, describe la probabilidad de que un evento se realice. Cuando abordamos el estudio de distribuciones de probabilidad, no solo lo hacemos a través de las definiciones teóricas, sino que también lo hacemos mediante algún método, formula o algoritmo que nos permita obtener valores que sigan el comportamiento de tales distribuciones de probabilidad.

2. Distribuciones de Probabilidad

2.1. Distribución Continua

Una distribución continua describe las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (conocido como el rango) que es infinito y no se puede contar (1.8, 2.5, 135.36).

2.1.1. Función de Densidad

Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que su función de densidad fx de probabilidad asociada a X es cuando se cumple:

- $f_x(x) \leq 0$ para todo xϵ R
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) \int_a^b f_x(x)dx$

2.1.2. Función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria continua y fx su densidad de probabilidad. Se denomina Función de distribución acumulada de la variable X a:

$F_x : R \rightarrow [0, 1]$
$X \rightarrow F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_t dt$

Propiedades:

- $F_x = P(X \leq x)$
- F_x es no decreciente
- $F_x^{'} = f_x(x)$en los puntos de continuidad de f_x

2.1.3. Esperanza matemática de una variable continua

Sea X una variable aleatoria continua y fx su función de densidad de probabilidad.La esperanza matemática o media poblacional de X, que se nota E(X) o X es siempre que la integral sea finita:

- $E(X) = \mu X = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx$

2.1.4. Varianza de una variable continua

Sea X una variable aleatoria continua y fx su función de densidad de probabilidad. La varianza de X que se nota V(X) y es el numero no negativo de:

- $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu x)^2 f_x(x)dx$

Las distribuciones que tienen este tipo de variable son:

- Distribución Uniforme
- Distribución Exponencial
- Distribución Gamma
- Distribución Normal

2.2. Distribucion Discreta

Una distribución discreta describe la probabilidad de ocurrencia de cada valor de una variable aleatoria discreta. Una variable aleatoria discreta es una variable aleatoria que tiene valores contables, tales como una lista de enteros no negativos (1,5,9,12).

2.2.1. Función de probabilidad puntual

En ciertas ocasiones, resulta necesario calcular la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor menor o igual a un cierto valor dado. Por lo tanto, consideremos X como una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathbb{R}_x$ y una función de probabilidad p_X. La función F_X se define como:

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

El símbolo $P(X = x)$ se lee como "probabilidad de que la variable aleatoria X asuma el valor x". Si p_x es una función de probabilidad, entonces cumple con las siguientes propiedades:

- $p_x(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_x$
- $\sum_{x \in \mathbb{R}_x} p(x) = 1$

2.2.2. Función de probabilidad acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathbb{R}_x$ y función de probabilidad p_x. La función F_x se define como:

$$F_x : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad x \mapsto F_x(x) = P(X \leq x)$$

Es decir, F_x representa la probabilidad de que la variable X asuma un valor menor o igual a $x \in \mathbb{R}_x$. Se observa que:

$$P(X \leq x) = \forall_{t \leq x; t \in \mathbb{R}_x}$$

Cualquiera sea la variable aleatoria X, se cumple que su función de probabilidad acumulada F_x tiene las siguientes propiedades:

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- F_x es no decreciente en $\mathbb{R}$
- F_x es discontinua en cada punto x donde $P(X = x) > 0$

2.2.3. Esperanza matemática de una variable discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathbb{R}_x$ y p_x su función de probabilidad asociada. Definimos la esperanza matemática de la variable aleatoria X, también conocida como media poblacional de X y se denota como $E(X)$ o μ, de la siguiente manera:

- $E(X) = \mu_X = \sum_{x \in \mathbb{R}_x} x p_x(x)$

2.2.4. Varianza de una variable discreta

Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathbb{R}_x$ y p_x su función de probabilidad asociada. Se define la varianza de la variable aleatoria X y se denota como $V(X)$ de la siguiente manera:

- $V(X) = \sum_{x \forall \mathbb{R}_x} (x - \mu_X)^2 p_x(x)$

Las distribuciones que tienen este tipo de variable son:

- Distribución Pascal
- Distribución Binomial
- Distribución Hipergeométrica
- Distribución Poisson
- Distribución Empírica

3. Desarrollo

3.1. Distribución Uniforme

La distribución uniforme continua es una familia de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas, tales que para cada miembro de la familia, todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros, a y b, que son sus valores mínimo y máximo respectivamente.
Función de densidad:

- $F(x) = \frac{1}{ba}$ si $a \leq x \leq b$
- $F(x) = 0$

La Esperanza E(x) se calcula de la siguiente manera: $E(x) = \frac{b+a}{2}$

La Varianza V(x) se calcula de la siguiente manera: $V(x) = \frac{b-a}{2}$

Función inversa: $x = a + (ba)r$ si $0 \leq r \leq 1$

3.2. Distribución Exponencial

La distribución exponencial es la distribución de probabilidad del tiempo o espacio entre dos eventos en un proceso de Poisson, donde los eventos ocurren de manera continua e independiente a una tasa constante λ . Como en toda distribución, es importante conocer su función de densidad de probabilidad, su función de distribución y su función cuantil. Sea $X \sim Exp(\lambda)$, es decir, x una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro , entonces: La función de densidad de x es

$F(x) = \lambda\epsilon - \lambda x$ si $x \geq 0$
$F(x) = 0$ en caso contrario
La función de distribución acumulada es $F(x) = P(X \leq x) = 1 - \epsilon^{-\lambda x}$ si $x \leq 0$ o 0 en caso contrario.
La esperanza y la varianza de x son $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ y $V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$ respectivamente.

3.3. Distribución Gamma

Este tipo de probabilidad es adecuada para modelizar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva y/o los experimentos en donde está involucrado el tiempo. La Formula esta dada por:

- $p(x; a, b) = \frac{a^b x^{b-1} \epsilon^{-ax}}{\Gamma(b)}$

En dónde los parámetros a y b y la variable x son números reales positivos y (b) es la función gamma. La Distribución Gamma comienza en el origen de coordenadas y tiene una forma bastante flexible.
Cabe aclarar, que no existe una forma explícita para describir la función acumulativa de la distribución gamma. Respectos de la media y su varianza, sus correspondientes expresiones están dadas por:

- EsperanzaVarianza:$E(x) = \frac{k}{\alpha}$
- Varianza:$V(x) = \frac{k}{\alpha^2}$

Función inversa: por no tener función de densidad se recurre a otro método de obtención de los valores, tomando la suma de k valores de distribución exponencial con parámetro .