

Ekonomia stosowana: projektowanie rynków

Joanna Franaszek

wiosna 2020

Szkoła Główna Handlowa

Wprowadzenie

Projektowanie rynków

- tradycyjna ekonomia = rynki zdecentralizowane
 - mechanizm 'czyszczący': cena
 - kontrahent 'obojętny'
- rynki scentralizowane
 - tam gdzie zdecentralizowany rynek nieefektywny
 - albo generuje niepożądane efekty zewnętrzne

Rynki dopasowań

A matching market is a market in which prices don't do all the work," Roth details, "So matching markets are markets in which you can't just choose what you want even if you can afford it – you also have to be chosen.

(Alvin E. Roth)

Rynki dopasowań (*matching markets*):

- rynek pracy (w szczególności: rynek rezydentur dla przyszłych lekarzy)
- rekrutacja do liceum/na studia
- dopasowanie dawców i biorców nerek
- alokacja mieszkań komunalnych

"Ekonomiczne Noble" z TG

2012: Roth, Shapley "for the theory of stable allocations and the practice of market design"



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Alvin E. Roth



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Lloyd S. Shapley

Plan działania

Dziś: prosty mechanizm rekrutacji

- Mechanizm bostoński - czyli co nie działało
- Teoria - jak to powinno działać
- Algorytm Gale'a-Shapleya
- Wizualizacja

Za dwa tygodnie: trochę 'rzeczywistych' komplikacji

- Rynek rezydentów
- Konsekwencje dla teorii
- Algorytm Rotha
- (jeśli zdążymy) Top Trading Cycles

Do poczytania

- Abdulkadiroglu, Sonmez, "School Choice: A Mechanism Design Approach", American Economic Review, 2003.
- Gale, Shapley, "College Admission and the Stability of Marriage", 1962
- Roth, "The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory", 1984
- Roth, Peranson, „The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design”, 1999
- Roth, „The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics”, 2002

Prosty mechanizm rekrutacji

Rekrutacja

Zdecentralizowana rekrutacja:

- Z punktu widzenia uczelni:
 - wieloosobowy Dylemat Więźnia
 - Każdej uczelni zależy na tym, żeby data składania dokumentów była późna
 - ... ale wcześniejsza niż u konkurencji
 - ⇒ wczesne kontraktowanie (czasem absurdalnie wczesne)
- Z punktu widzenia kandydatów:
 - niepełna informacja
 - koszty transakcyjne
 - ryzyko związane z niepewnością przyjęcia do bardziej preferowanego miejsca
 - awersja do ryzyka ⇒ gorsza alokacja

Prosty model rekrutacji na studia – założenia

- S -- zbiór kandydatów, U -- zbiór uczelni; $u \in U$ dysponuje q_u miejscami
- \succeq_s, \succeq_u – relacje preferencji, wyznaczające częściowe porządki na (pod)zbiorach uczelni/studentów.
 - Podzbiory S_u, U_s – podzbiory na których jest określony porządek to zbiór kandydatów/uczelni *akceptowalnych*
- Kandydaci są rozpatrywani indywidualnie
 - Kandydaci nie aplikują grupowo
 - Uczelnie nie poszukuje "zespołów"
 - Lub preferencje wobec zespołów są zgodne z preferencjami wobec indywidualnych kandydatów:

$$\forall_{G: |G| < q_u} \forall_{s, s' \notin G} (s \succeq_u s' \Leftrightarrow G \cup s \succeq_u G \cup s') \wedge (G \cup s \succeq_u G \Leftrightarrow s \in S_u)$$

Mechanizm bostoński

Mechanizm natychmiastowego przyjęcia *immediate acceptance*, *Boston school mechanism*:

- używany w szkołach publicznych w Bostonie w latach 1999-2005 (zanim wkroczyli ekonomiści...)
- mechanizm nadal popularny w wielu zastosowaniach
- oparty na idei zaspokajania priorytetów

Schemat:

runda 0: tworzony jest porządek na studentach (losowy lub wg priorytetu)

runda 1: rozważane są tylko pierwsze wybory uczniów; każdy uczeń, który wybrał uczelnię *u* jako pierwszą jest do niej przypisany, jeśli tylko jest tam wolne miejsce;

Mechanizm bostoński

Schemat c.d.:

runda 2: rozważamy wyłącznie uczniów jeszcze nie przypisanych do żadnej szkoły; rozważamy drugie wybory i przypisujemy każdego ucznia do wybranej szkoły, jeśli tylko jest tam wolne miejsce;

runda k : rozważamy tylko uczniów jeszcze nie przypisanych i ich k -te wybory...

koniec: gdy wszyscy uczniowie przypisani lub skończyły się listy preferencji

Mechanizm bostoński - najprostszy przykład

- Rozważmy 3 maturzystów składających podanie na 3 uczelnie (każda ma 1 miejsce)
- dla uproszczenia: każda uczelnia ma preferencje
$$s_1 \succ_u s_2 \succ_u s_3$$
- uczniowie mają następujące preferencje:

$$s_1 : u_1 > u_2 > u_3$$

$$s_2 : u_1 > u_2 > u_3$$

$$s_3 : u_2 > u_1 > u_3$$

- kto gdzie trafia wg mechanizmu?
- kto może zyskać, kłamiąc nt. preferencji?

Mechanizm bostoński

Zalety:

- stosunkowo prosty
- ważny aspekt dobrobytowy: nadaje priorytet preferencjom

Wady:

- daje duże bodźce do manipulacji (*not strategy-proof*)
 - empirycznie: jako, że 'strategizacja' jest skorelowana z wyższym SES, mechanizm krzywdzi uczniów o niższym SES
- może dawać 'niestabilne' dopasowania (definicja za chwilę) - takie, w których część uczestników chciałaby się 'wymienić'
- wyniki Pareto-nieefektywne

'Dobry' mechanizm

- funkcja (*matching*) $\mu : S \rightarrow U \cup S$, taka że:

$$\mu(s) = \begin{cases} u & \text{jeśli kandydat został przyjęty do uczelni } u \\ s & \text{jeśli kandydat nie został przyjęty do żadnej uczelni} \end{cases}$$

- Dopasowanie stabilne:
 - racjonalne indywidualnie: $\forall_s \mu(s) \in S_u$ (uwaga: dopasowanie $\mu(s) = s$ jest z założenia zawsze akceptowalne)
 - Stabilne parami tzn.

$$\neg(\exists_{s,u} : u \succ_s \mu(s) \exists_{s' \in \mu^{-1}(u)} : s \succ_u s') \wedge \neg(\exists_{s,u} |\mu^{-1}(u)| < q_u \wedge s \in S_u)$$

- przy założeniach jw. jest to rdzeń gry

'Dobry' mechanizm

- dopasowanie optymalne
 - optymalność kandydatów: każdy kandydat został przyjęty do co najmniej tak dobrej (preferowanej) uczelni, jak w dowolnym innym dopasowaniu stabilnym
 - optymalność uczelni: każda uczelnia ma co najmniej tak dobrych (preferowanych) kandydatów jak w dowolnym innym dopasowaniu stabilnym

Algorytm odroczonego przyjęcia

Deferred acceptance, DA algorytm Gale'a-Shapleya:

- po raz pierwszy zaproponowany w 1962 r. (sic!) przez Davida Gale'a i Lloyd'a Shapleya
- oryginalnie tzw. *problem stabilnych małżeństw*
- następnie uogólniony na matching 1 – to – n

Twierdzenie

Gale, Shapley 1962 Algorytm Gale'a-Shapleya prowadzi do alokacji stabilnej i optymalnej (w wyżej podanym sensie).

Algorytm odroczonego przyjęcia

Algorytm (wersja „kandydaci proponują”)

krok 1: Każdy z kandydatów składa podanie do pierwszej uczelni na jego liście

- Uczelnia wybiera q_u najlepszych kandydatów. Pozostałych od razu odrzuca, wybranych wpisuje na 'listę oczekujących'.

krok k : Kandydat składa podanie do pierwszej uczelni na liście, przez którą nie został jeszcze odrzucony.

- Uczelnia wybiera q_u najlepszych **do czasu k** kandydatów i odrzuca pozostałych.
- Stop: jeśli żaden kandydat nie składa już podania.

Algorytm odroczonego przyjęcia

Algorytm (wersja „uczelnie proponują”)

- Każda z uczelni składa propozycję kandydatom w kolejności od najbardziej pożądanego do najmniej
- Kandydat "warunkowo" przyjmuje ofertę jeśli jest najlepsza z tych, które dotychczas otrzymał, pozostałe odrzuca.
- Stop: jeśli żadne oferty nie są już przedstawiane

DA – teoria c.d.

Twierdzenie (McVitie, Wilson, 197; Roth, 1984, 1986)

W każdym stabilnym dopasowaniu przyjmowani są ci sami kandydaci, a na uczelniach zapełniane są te same miejsca. Ponadto, uczelnia, która nie zapełniła wszystkich miejsc, przyjmie tych samych studentów w każdym stabilnym dopasowaniu.

DA - teoria c.d.

Twierdzenie (Roth, 1982)

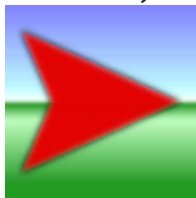
Jeśli użyty jest algorytm „kandydaci proponują”, strategią dominującą dla każdego kandydata jest ujawnienie swoich prawdziwych preferencji (*strategy-proofness*). NIE jest tak dla algorytmu „uczelnie proponują”

Twierdzenie (Roth, 1982)

Nie istnieje algorytm, w którym dla wszystkich agentów (tj. kandydatów oraz uczelni) strategią dominującą jest ujawnienie prawdziwych preferencji.

Implementacja

Wizualizacja w NetLogo:



Kliknij tu dla (uproszczonej) wersji on-line
Na ćwiczeniach: prosty przykład w R.



Podsumowując

Rynki dopasowań:

- często wymagają centralizacji
- zagadnienie projektowania 'izby rozrachunkowej'
- dziesiątki zastosowań: rekrutacja do szkół, rezydentury, przeszczepy nerek, mieszkania socjalne

Prosty rynek rekrutacji:

- pożądane własności mechanizmu: stabilne dopasowanie, optymalność, *strategy-proofness*
- algorytm Gale'a-Shapleya i jego implementacja

Komplikacje

Recap (2 tygodnie temu)

Rynki dopasowań:

- centralizacja \Rightarrow projektowanie mechanizmów
- dziesiątki zastosowań: rekrutacja do szkół, rezydentury, przeszczepy nerek, mieszkania socjalne
- ważne własności: stabilność, *strategy-proofness*

Rekrutacja do szkół:

- algorytm bostoński - ładny, ale problematyczny
- algorytm Gale'a-Shapleya (deferred-acceptance, DA)

Dzisiaj:

Trochę 'rzeczywistych' komplikacji

- Rynek rezydentów w USA
 - większe przestrzenie preferencji
 - komplementarności
 - założenia przestają działać
- 'Koniec teorii'
- Algorytm Rotha
 - testy na danych historycznych
 - symulacje
- (jeśli zdążymy) Top Trading Cycles
 - Pareto-nieefektywność DA (zob. praca domowa)
 - trade-off pomiędzy dopasowaniem stabilnym (albo *envy-free*) a efektywnym

Komplikacje czas zacząć!

Dlaczego prosty model nie wystarczy?

- rynek programów rezydenckich w USA
 - Kandydaci: preferencje par (zniesienie założenia o indywidualnym charakterze preferencji)
 - Kandydaci: preferencje wobec komplementarnych programów np. do rocznego programu z neurologii wymagany jest wcześniejszy staż na internie
 - Szpitale: elastyczna liczba kandydatów na komplementarnych programach
 - Szpitale: chęć przyjęcia np. parzystej liczby kandydatów;

Rynek programów rezydenckich - historia

- ang. residency - program praktyk zawodowych dla absolwentów medycyny
- Historia:
 - 1900-1945: rynek zdecentralizowany;
 - Rekrutacja wypaczona na skutek konkurencji między uczelniami
 - Wieloosobowy Dylemat Więźnia.
 - Lata 40-te: rekrutacja dwa lata przed zakończeniem studiów
 - Wniosek: mało informacji
 - 1945: pierwsze próby centralizacji
 - Umowa uczelni dot. terminu
 - Problem z nieefektywnością nadal nierozwiązany: co zrobić, gdy się dostało na mniej preferowany program, ale ma się szansę na bardziej preferowany?

Rynek programów rezydenckich - historia

- Historia c.d.:
 - 1951: pierwszy udany scentralizowany algorytm
 - Algorytm równoważny prostemu algorytmowi Gale'a-Shapleya w wersji „uczelnie proponującą”
 - 95% miejsc było zapelnianych na drodze scentralizowanej rekrutacji
 - Lata 70-te: spadek popularności systemu, głównie wśród małżeństw
 - Lata 90-te: poważny kryzys zaufania do systemu
 - Wątpliwości, czy system służy studentom
 - Jak ”oszukać” system? Problem ujawnionych preferencji
 - Potrzeba zaprojektowania nowego systemu: Alvin Roth!
 - 1997: nowy system, oparty na algorytmie ”studenci proponują”, ale uwzględniający komplikacje

Bolesne konsekwencje zawierania związków

Komplikacja 1:

- pewna część studentów medycyny tworzy pary. Pary mają preferencje nie na U , ale na $U \times U$.

Komplikacja 2:

- Podobnie na zbiorze $U \times U$ mają preferencje osoby, które chcą iść na programy komplementarne.

Jak temu zaradzić?

Twierdzenie

Roth, 1984 Jeśli w systemie występują pary, zbiór dopasowań stabilnych może być pusty.

Twierdzenie

Roth, 1985; Aljosa Feldin, 1999 Jeśli w systemie występują komplementarności, nie istnieje algorytm, który za każdym razem znajdowałby dopasowanie stabilne (o ile takie istnieje) i w którym dominującą strategią wszystkich graczy jest ujawnienie prawdziwych preferencji.

Koniec teorii



W rzeczywistości...

Pary/programy komplementarne powodują problem w teorii...
...ale w praktyce par i programów jest mało!

- jeśli nie ma dopasowania stabilnego, to go nie uzyskamy
- ...ale analiza historyczna wskazała, że w latach 1970-1996 co roku istniało co najmniej jedno stabilne dopasowanie
- nie ma doskonałego (tj. wyszukiującego dopasowania stabilne i optymalnego) algorytmu
- ...ale możemy znaleźć algorytm 'najlepszy z możliwych'

Rynek z komplikacjami

Pierwsza próba:

- przyszli lekarze składają preferencje na U
- wybór 'osoby wiodącej' w parze, której preferencje są zaspokajane w pierwszej kolejności
- lista drugiej osoby obcięta do szpitali w okolicy tego, gdzie dostała się osoba wiodąca
- \Rightarrow dopasowania niestabilne

Przykład

Preferencje pary: $(A1, A2) > (B1, B2) > (A1, A3)$ (pierwsza osoba wiodąca). Jeśli osoba 2 nie zostanie przyjęta do $A2$, to zostanie osiągnięte co najwyżej $(A1, A3)$, podczas gdy $(B1, B2)$ jest preferowane.

Algorytm Rotha

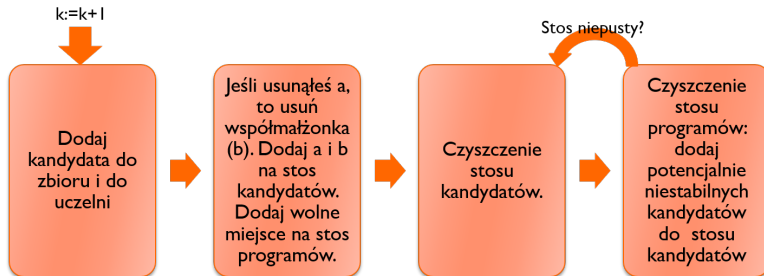
Pary przedstawiają listę preferencji na $U \times U$

- szansa uzyskania stabilnego dopasowania rośnie
- Należy jeszcze znaleźć algorytm, który możliwie często znajdzie dopasowanie stabilne
- Cel w k -tym kroku: podzbiór $A(k) \subset S \times U$ i dopasowanie $\mu(k)$ takie, że:
 - $A(k)$ zamknięty (tzn. nikt z $A(k)$ nie jest dopasowany do kogoś spoza $A(k)$)
 - $\mu(k)$ stabilne Na początku: $A(0) = U$,
 $\mu(0) = \{\text{wszystkie miejsca wolne}\}$

Algorytm Rotha c.d.

- Algorytm zakończy się, kiedy nie da się już dodać żadnego kandydata ani uczelni (np. kiedy doda się wszystkich kandydatów).
- *Uwaga: algorytm teoretycznie może wpaść w pętlę – w tym celu został dodany 'detektor pętli'*
- Algorytm w wersji „kandydaci proponują” na bieżąco uwzględnia komplikacje ze strony kandydatów (problem par i problem komplementarnych programów). Na końcu dodawane się poprawki uwzględniające komplikacje ze strony uczelni (wymogi dot. liczby miejsc).

Rynek z parami - algorytm



Szukanie algorytmu – metody obliczeniowe

- Projektowanie algorytmu
 - W jakiej kolejności dodawać kandydatów?
- Testowanie algorytmu
 - Jak algorytm zachowuje się na danych historycznych?
- Dalsze badania własności rynku
 - Jak charakterystyki rynku wpływają na prawdopodobieństwo znalezienia stabilnego dopasowania?

Projektowanie algorytmu

- Jak dobrać kolejność dodawania kandydatów?
 - Czy zmiana kolejności daje systematyczne i istotne różnice?
 - Czy zmiana kolejności wpływa na prawdopodobieństwo znalezienia stabilnego dopasowania?
 - Czy zmiana algorytmu wpływa na tempo zbieżności?
- Kto ma być stroną proponującą?
 - Czy na rzeczywistym rynku jest różnica między systemem 'kandydaci proponują' a systemem 'szpitale proponują'?
 - Kto traci, a kto zyskuje na zmianie algorytmu?
- Eksperyment: analiza na 'żywych danych' nt. rekrutacji z lat 1993-1995

Analiza na danych historycznych

- Czy zmiana kolejności daje systematyczne i istotne różnice?

Efekt istnieje, ale jest niesystematyczny i rzędu 1 na 10000.

- Czy zmiana kolejności wpływa na prawdopodobieństwo znalezienia stabilnego dopasowania?

We wszystkich próbach stabilne dopasowanie zostało znalezione.

Pytania testowe c.d.

- Czy zmiana algorytmu wpływa na tempo zbieżności?
TAK! Najszybszy algorytm: najpierw single, potem pary.
- Czy na rzeczywistym rynku są bodźce do "gry strategiczne" przeciwko systemowi?
Tak – dla 20 z 20.000 graczy.
- Kto traci, a kto zyskuje na zmianie algorytmu?
Różnie, choć częściej zyskuje strona proponująca.

Dalsze testy - dane historyczne

Czy zaobserwowane przy okazji projektowania własności znajdują potwierdzenie na (większych) danych historycznych?

- Czy sytuacje, gdy nie da się znaleźć dopasowania stabilnego są często?

W każdym przeprowadzonym eksperymencie dało się znaleźć dopasowanie stabilne.

- Czy na większych danych jest możliwość 'ogrania systemu'?

Oddzielny eksperyment na historycznych listach preferencji: liczba osób, które mogą zyskać na zmianie preferencji jest zbliżona do 0,1% (przy założeniu, że zatwierdzone listy preferencji reprezentują prawdziwe preferencje).

Dalsze badania – własności rynku

Badania symulacyjne na losowo generowanych preferencjach:

- Jak rozmiar rynku wpływa na rozmiar zbioru dopasowań stabilnych?

Jeśli preferencje są silnie skorelowane, to zbiór dopasowań stabilnych jest mały. Jeśli są nieskorelowane, to zbiór dopasowań rośnie wraz ze wzrostem rynku i wydłużaniem listy dopasowań możliwych.

Jeśli listy preferencji są krótkie (jak na rynku medycznym), zbiór dopasowań stabilnych jest mały – ale rzadko pusty.

Wnioski

Projektowanie rynków:

- teoria ekonomii + poprawka na rzeczywistość
- metody formalne + metody obliczeniowe
- nietrywialny i ważny temat!

Dodatki

Przykład z Abdulkadiroglu, Sonmez

W PD lekko zmodyfikowany; s oznacza tu uczelnie, a i -

$$\begin{array}{ll} s_1 : i_1 - i_3 - i_2 & i_1 : s_2 \ s_1 \ s_3 \\ s_2 : i_2 - i_1 - i_3 & i_2 : s_1 \ s_2 \ s_3 \\ s_3 : i_2 - i_1 - i_3 & i_3 : s_1 \ s_2 \ s_3 \end{array}$$

uczniów.

- **jedno** dopasowanie stabilne
- ale nie jest Pareto-optymalne

Mechanizm top trading cycles

Idea:

- zaczynamy od studentów o wysokim priorytecie
- studenci 'o tym samym priorytecie' mogą się 'wymieniać' dopasowaniami
- następnie studenci są usuwani i przechodzimy do następnego kroku

Algorytm top trading cycles

Krok 1: zdefiniuj licznik, który określa, ile miejsc pozostało jeszcze na uczelniach; każdy student wskazuje swoją najbardziej preferowaną uczelnię, a każda uczelnia - najbardziej preferowanego kandydata

- Ponieważ liczba studentów i uczelni jest skończona, istnieje co najmniej jeden **cykl**
- cykl: lista $(u_{n_1}, s_{n_1}, u_{n_2}, s_{n_2}, \dots, u_{n_k}, s_{n_k})$, taka, że uczelnia u_{n_i} wskazuje na studenta s_{n_i} , a student s_{n_i} wskazuje na uczelnię $u_{n_{i+1}}$.
- w danym cyklu każdy student zostaje przypisany do swojej wybranej uczelni i usunięty ze stosu, a licznik miejsc w uczelniach z cyklu - zredukowany o 1.

Algorytm top trading cycles

Krok k : każdy student wskazuje swoją najbardziej preferowaną uczelnię z tych, które mają jeszcze miejsca, a każda uczelnia - najbardziej preferowanego kandydata

- Ponieważ liczba studentów i uczelni jest skończona, istnieje co najmniej jeden cykl
- w danym cyklu każdy student zostaje przypisany do swojej wybranej uczelni i usunięty ze stosu, a licznik miejsc w uczelniach z cyklu - zredukowany o 1. Jeśli licznik wynosi 0, uczelnia jest usuwana z listy.

Max liczba kroków = liczba studentów.

Algorytm TTC

Algorytm o wielu dobrych własnościach:

- *strategy-proof* (intuicja: łatwa)
- **zawsze** daje dopasowanie optymalne w sensie Pareto
...niestety, kosztem stabilności

Zastosowanie TTC

'Podręcznikowe' zastosowanie:

- rozmieszczenie studentów w dormitoriach
- key: można rozmieścić wszystkich naraz :)

Prawdopodobnie najważniejsze rzeczywiste zastosowanie:

- dopasowanie dawców i biorców nerek
- key: proces dynamiczny \Rightarrow modyfikacje

'Wymiana nerek'

- Mamy chorego i_1 z niewydolnością nerek
 - rodzina szuka dawcy
 - niestety, nerka nie może być 'dowolna', musi być kompatybilna z medycznego punktu widzenia
 - być może członek rodziny jest niekompatybilnym dawcą
- ..ale: mamy drugiego chorego i_2 z niewydolnością nerek
 - z potencjalnie podobną sytuacją
- \Rightarrow możliwa 'wymiana dawców'
- inna możliwość: 'oddanie' swojego dawcy w zamian za wzrost priorytetu na liście biorców od zmarłych dawców

\Rightarrow Top Trading Cycles with Chains

Ciekawe?

Strona Alvina Rotha:

<https://web.stanford.edu/~alroth/alroth.html>

Młodzi badacze (hardkorowa teoria):

- M. Akbarpour <http://web.stanford.edu/~mohamwad/>
- S. Li: <https://www.shengwu.li/>
- L. Doval: <http://www.laura-doval.com/>