Wstęp do teorii gier

Joanna Franaszek

semestr zimowy 2019/20

Szkoła Główna Handlowa

Warunki zaliczenia

Sylabus:

- egzamin tradycyjny-pisemny 80%
- ćwiczenia 20%

Powszechna praktyka na WTG:

- możliwość zaliczenia bez egzaminu

Moja propozycja

- dwie ”duże” prace domowe (pod koniec października i listopada)
- kolokwium/zerówka ’pod koniec’ zajęć (styczeń 2019)
- z powyższych wystawiam ocenę...
- ...komu się nie podoba, przystępuje do egzaminu

Wprowadzenie do teorii gier

Plan na dziś

- co to jest teoria gier...
- ...i dlaczego jest fajna
- definicja gry
- definicja równowagi Nasha
- przegląd klasycznych gier

Teoria gier

- nauka o strategicznym działaniu w warunkach konfliktu (i kooperacji)
- matematyczne modele sytuacji strategicznych i analiza wyborów osób, firm, *graczy*
- formalny język opisu zjawisk i rozważań ekonomicznych, społecznych, politycznych
- narzędzia do analizy strategicznych sytuacji

Ękonomiczne Nobleź TG

1994: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi ”for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative

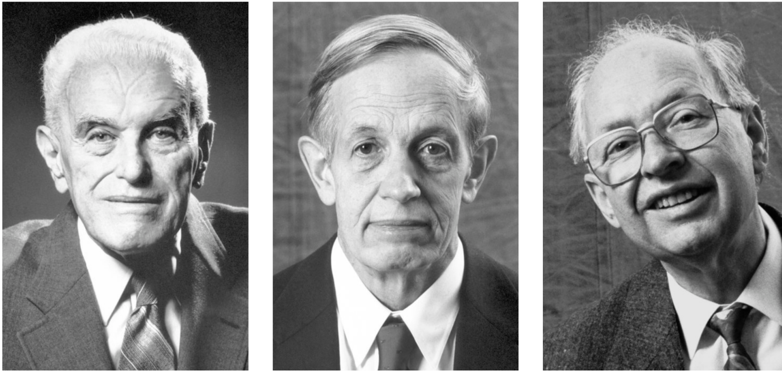


Photo from the Nobel Foundation archive.
John C. Harsanyi

Photo from the Nobel Foundation archive.
John F. Nash Jr.

Photo from the Nobel Foundation archive.
Reinhard Selten

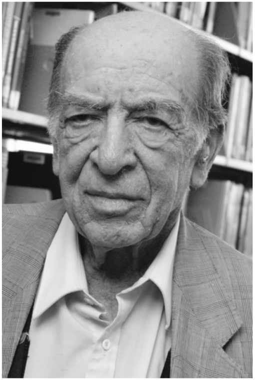
games.”

2005: Aumann, Schelling ”for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis”

Photo: D. Porges
Robert J. Aumann

Photo: T. Zadig
Thomas C. Schelling

2007: Hurwicz, Maskin, Myerson ”for having laid the foundations of mechanism design theory”



© University of Minnesota Photo: E. Ayoubzadeh
Leonid Hurwicz

© The Nobel Foundation Photo: U. Montan
Eric S. Maskin

© The Nobel Foundation Photo: U Montan
Roger B. Myerson

2012: Roth, Shapley ”for the theory of stable allocations and the practice of market design”

© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Alvin E. Roth

© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Lloyd S. Shapley

Poza Noblami

- teoria alokacji: alokacja rezydentur medycznych w USA, nabór do liceum, matching nerek do transplantacji (Shapley, Shubik, potem Roth, Yaariv)
- predykcje polityczne (Mesquita & Roundell)
- aukcje:
    - częstotliwości radiowe (Milgrom)
    - uprawnień do emisji CO2
    - reklam Google
- decyzje biznesowe/strategiczne, zwłaszcza w warunkach niedoskonałej konkurencji (oligopole, fuzje, przejęcia)

Proste przykłady gier

Gra - definicja

Gra (w ujęciu formalnym) to:

1. gracze: strategiczni lub niestrategiczny gracz losowy tzw. Natura
2. strategie: zbiór możliwych dróg postępowania *w całej grze*
3. informacje dostępne graczom: (ważne zwłaszcza w grach sekwencyjnych)
4. wypłaty: monetarny lub 'użytecznościowy' wynik wyboru określonych strategii

Gra w postaci normalnej

Grą Γ (w postaci normalnej) nazwiemy zbiór:

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ zbiór graczy
2. $a_i \in A_i \neq \emptyset$ strategie gracza i
   $a = (a_1, \ldots, a_N)$ - profil strategii wszystkich graczy
   $A = A_1 \times \ldots A_N$ - zbiór strategii wszystkich graczy
   notacja: $a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_N)$ - profil strategii *wszystkich graczy poza i*
3. $u_i : A \to \mathbb{R}$ - funkcja wypłat
4. tradycyjnie wypłaty gry w postaci normalnej zapisujemy w macierzy (przykład zaraz)

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.
- *jak możemy opisać formalnie tę grę?*

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	R	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	R	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

- uwaga: w grze o sumie zerowej wystarczy podać wypłaty gracza 1:

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	1	-1
	R	-1	1

Dylemat więźnia

- Dwaj wspólnicy w przestępstwie są oddzielnie przesłuchiwani
- Jeśli żaden nie sypnie, obaj: niski wyroki
- Jeśli jeden sypnie: program ochrony świadków; drugi: wysoka kara
- jeśli obaj sypną: obaj wysokie kary

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- *czy potrafimy przewidzieć co się tu stanie?*

Strategie zdominowane

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- Strategia 'Sypać' jest lepsza niż 'Milczeć' dla każdego wyboru przeciwnika!
- formalnie: (dla gracza i) a_i' jest **ściśle zdominowana** przez a_i jeśli:

$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \forall a_{-i}$$

- intuicyjnie: strategie zdominowane nie są wybierane

Wojna płci/Bach i Strawinski

- Mąż i żona chcą razem wyjść
- mąż woli iść do (O)pery, żona na (M)ecz
- ...ale przede wszystkim: chcą iść razem

		Mąż: Opera	Mąż: Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- *brak strategii zdominowanych... co się stanie?*

Równowaga Nasha

- John ”Piękny umysłŃash, 1951
- równowagą Nasha (NE) jest **profil strategii** taki, że żadnemu graczowi nie opłaca się indywidualnie zmienić swojej strategii *pod warunkiem, że inni nie zmieniają swoich*
- ’punkt stały’, warunek stabilności
- najbardziej wpływowa koncepcja w teorii gier – będziemy wracać wielokrotnie!

Definicja (NE)
$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*)$ *jest równowagą Nasha (w strategiach czystych) jeśli:*

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \; \forall a_i \in A_i$$

Wojna płci recap

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1,2)$	$(0,0)$
	Mecz	$(0,0)$	$(2,1)$

- jakie są tu równowagi Nasha (w strategiach czystych)?

Polowanie na jelenia

- Artemis i Kalliope idą na polowanie
- każda z nich może polować na zająca (łatwa zdobycz) albo na jelenia (wymaga współpracy)
- jeśli obie wybiorą jelenia, dostają dużą wypłatę
- jeśli tylko jedna z nich, nie uda jej się upolować (wypłata 0).
- zając jest bezpieczną opcją

		Kalliope	
		Jeleń	Zając
Artemis	Jeleń	$(9, 9)$	$(0, 7)$
	Zając	$(7, 0)$	$(6, 6)$

Polowanie na jelenia

- jakie są równowagi Nasha tej gry?
- pomyśl o przykładach gier koorydnacji:
    - wspólne wiosłowanie (albo współpraca dwóch firm)
    - wspólne podanie do dziekana o zmianę wykładowcy z WTG
    - kto przyjdzie pierwszy na przyjęcie

Dylemat więźnia - powracamy!

- projekt z WTG robiony w parach
- student może podjąć Duży lub Mały wysiłek

		Bartosz	
		Duży	Mały
Anna	Duży	$(3,3)$	$(0,4)$
	Mały	$(4,0)$	$(1,1)$

- jakie są równowagi Nasha?

Dylemat więźnia

- prawdopodobnie najważniejsza gra dzisiejszego wykładu
- ważne własności: **dominacja**, jedyna (i ’mocna’) równowaga
- ważne wyjaśnienie obserwowanych fenomenów:
    - zanieczyszczenie powietrza
    - katastrofa klimatyczna
    - ’tragedia wspólnego pastwiska’ – wrócimy do tego!

Dominacja a NE

- ściśle zdominowane strategie *nigdy nie wchodzą* do równowag Nasha
- dlaczego?
  - srategia a_i^* w NE są *optymalna* (przy zadanym profilu a_{-i}^* tj. jest nie gorsza od *każdej innej*
  - jeśli a_i^* by była ściśle zdominowana przez pewne a_i, to dominacja zachodziłaby dla dowolnego profilu a_{-i}, w szczególności a_{-i}^*
  - to przeczy optymalności w NE
- uwaga: to dotyczy wyłącznie *ścisłej* dominacji. Istnieje też słaba dominacja - te strategie mogę być częścią NE!

Gra w cykora

- dwaj kierowcy jadą 'na siebie' prostą drogą
- jeśli żaden nie ustąpi – zderzą się; jeśli ustąpi jeden – zostanie on ochrzczony 'cykorem' (strata wizerunku); jeśli ustąpią obaj – żaden nie okaże się gorszy

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	$(0, 0)$	$(-4, 4)$
	Jechać prosto	$(4, -4)$	$(-10, -10)$

- gra antykoordynacyjna
- jakie są równowagi Nasha?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{2} \\
 & & \text{Gołąb} & \text{Jastrząb} \\
\cline{3-4}
\multirow{2}{*}{2} & \text{Gołąb} & (\frac{V}{2}, \frac{V}{2}) & (0, V) \\
\cline{3-4}
 & \text{Jastrząb} & (V, 0) & (\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}) \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

$$
\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & \multicolumn{3}{c}{2} \\
 & & \text{Gołąb} & \text{Jastrząb} \\
\cline{3-4}
\multirow{2}{*}{2} & \text{Gołąb} & (\frac{V}{2}, \frac{V}{2}) & (0, V) \\
\cline{3-4}
 & \text{Jastrząb} & (V, 0) & (\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}) \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?

Duopole

Duopol Cournota

- dwie firmy wybierają jednocześnie ilość produktu wprowadzanego na rynek q_i dla $i = 1, 2$; produkcja jednej jednostki produktu kosztuje c
- odwrócona funkcja popytu: $p(Q)$ malejąca
- przyjmiemy $p(Q) = a - bQ$, gdzie Q to całkowita ilość produktu na rynku
- zysk firmy i:
$$\pi(q_i) = p(Q) \cdot q_i - cq_i$$
- firmy biorą pod uwagę swój wpływ na cenę
- jaka jest NE?

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a-c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a - c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a - c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?
- produkcja monopolisty:

$$Q = \frac{a - c}{2b}$$

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a-c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?
- produkcja monopolisty:

$$Q = \frac{a-c}{2b}$$

- w modelu Cournota firmy produkują *więcej* niż monopolista, ale mają *mniejszy* zysk

Duopol Stackelberga

- dwie firmy wybierają wielkość produkcji...
- ...ale tym razem sekwencyjnie!
- pierwsza to przywódca, druga to naśladowca
- weźmy identyczne oznaczenia: c to koszt produkcji jednostki, $p(Q) = a - bQ$ to (liniowa) odwrócona funkcja popytu
- czym się różni ta sytuacja od poprzedniej?
- jakie są teraz **strategie** gracza nr 2?

Duopol Stackelberga: NE

- optymalny wybór lidera:

$$q_1 = \frac{a - c}{2b}$$

- optymalny wybór naśladowcy:

$$q_2 = \frac{a - c}{4b}$$

- lider produkuje tyle, co monopolista, ale ze względu na naśladowcę zarabia mniej niż monopolista (cena i zysk są niższe)
- naśladowca produkuje mniej niż lider (w modelu liniowym dwukrotnie mniej) i mniej niż w równowadze Cournota

Trochę drobiazgów formalnych

- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna?

Trochę drobiazgów formalnych

- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna? *tak*
- czy znaleziona NE w modelu Stackelberga jest jedyna?

Trochę drobiazgów formalnych

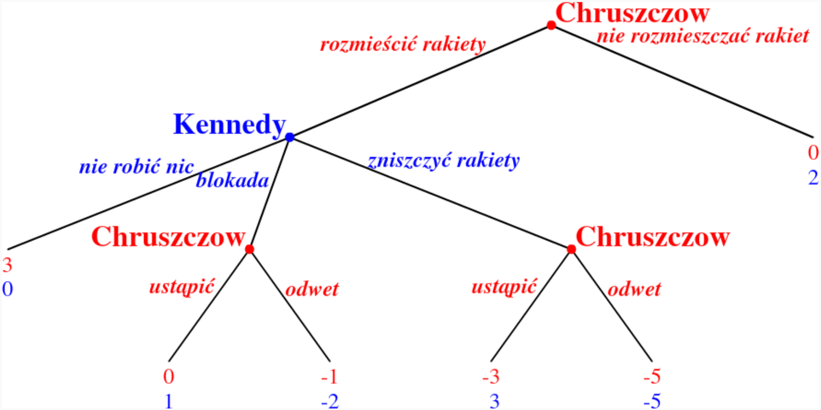
- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna? *tak*
- czy znaleziona NE w modelu Stackelberga jest jedyna? *nie* ale jest jedyną o ”dobrych własnościach” (SPNE)
    - inna NE (ale nie SPNE): firma 1 produkuje wielkość Cournota, firma 2 produkuje wielkość Cournota *bez względu na produkcję firmy 1*

Postać strategiczna i rozwinięta gry

Uproszczony Kubański kryzys rakietowy z 1963 r. (przykład zaadaptowany z ”Teorii gierŚtraffina)

- gracze: USA pod prezydenturą Kennedy’ego vs. ZSRR w reprezentacji Chruszczowa
- Chruszczow decyduje, czy zamieścić na Kubie pociski rakietowe
- Jeśli to się stanie, Kennedy może (1) nie robić nic, (2) ogłosić blokadę Kuby, (3) zniszczyć rakiety
- Chruszczow może następnie (1) ustąpić albo (2) przeprowadzić odwet

(Gra zaadaptowana z ”Teorii gierŚtraffina)



Rozwiązanie - indukcja wsteczna

- rozwiązujemy grę ”od tyłu”, wybierając optymalnie
- ostateczny wynik: *jednoznaczny*
- ...”zupełnie przypadkiem” jest to NE
- a konkretniej: **doskonała równowaga Nasha** w podgrach

Doskonała równowaga Nasha w podgrach (SPNE)

Definicja (SPNE)
Doskonałą równowagą Nasha w podgrach nazwiemy profil, który wyznacza równowagę Nasha w każdej podgrze pierwotnej gry.

Doskonała równowaga Nasha w podgrach (SPNE)

Definicja (SPNE)
Doskonałą równowagą Nasha w podgrach nazwiemy profil, który wyznacza równowagę Nasha w każdej podgrze pierwotnej gry.

A co to jest podgra?

- wycinek drzewa, którego wierzchołek w jednopunktowym zbiorze informacyjnym
- wszyscy 'potomkowie' danego wierzchołka z podgry należą do podgry
- podgra nie 'przecina' zbiorów informacyjnych

Metoda zapisu

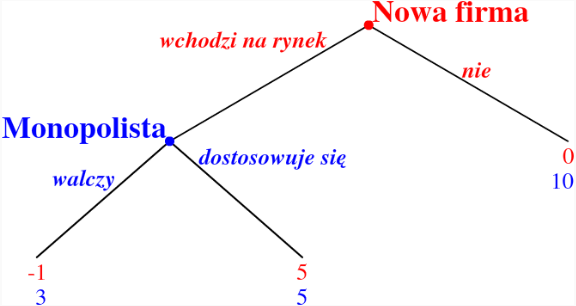
- tzw. postać rozwinięta (drzewko) gry
- służy nie tylko do gier sekwencyjnych! (trzeba tylko pooznaczać *zbiory informacyjne*)

Metoda zapisu

- tzw. postać rozwinięta (drzewko) gry
- służy nie tylko do gier sekwencyjnych! (trzeba tylko pooznaczać *zbiory informacyjne*)
- można (i trzeba umieć!) przechodzić z macierzy na "drzewka" i odwrotnie
- ...więc dla sportu to zrobimy

Prostszy przykład

Wejście nowej firmy na dotychczas zmonopolizowany rynek



- jaka jest macierz gry?
- jakie są wszystkie NE?
- jaka jest SPNE?

Strategie mieszane

Wróćmy do podstaw...

Strzelanie karnych (wersja uproszczona)

- Strzelec celuje w prawą stronę bramki lub lewą.
- Bramkarz rzuca się na prawą stronę lub lewą. Dla uproszczenia przyjmiemy, że jeśli rzuci się 'we właściwą', zawsze złapie piłkę.

		Bramkarz	
		P	L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- jaka to gra? (już była na tym wykładzie...)
- jaką strategię tu grać?

Zapytajmy piłkarzy!

- `thestatszone.com` kliknij tu do oryginalnego artykułu
- strategia bramkarza:

Choice of Direction			Choice of Direction vs Right Footed			Choice of Direction vs Left Footed		
L	C	R	L	C	R	L	C	R
49.3%	3.0%	47.7%	52.2%	2.9%	44.9%	38.2%	3.4%	58.4%

- strategia strzelca:

Overall Shooting Heat Map				Right Footed Shooting Heat Map				Left Footed Shooting Heat Map			
5.5%	4.4%	3.9%	5.3%	6.4%	4.9%	4.1%	5.5%	2.2%	2.2%	3.4%	4.5%
10.4%	7.1%	6.5%	11.1%	10.1%	6.7%	7.0%	11.0%	11.2%	9.0%	4.5%	11.2%
16.4%	7.8%	8.8%	12.9%	17.7%	6.4%	8.7%	11.6%	11.2%	13.5%	9.0%	18.0%

Overall Shooting Heat Map					Right Footed Shooting Heat Map					Left Footed Shooting Heat Map				
3.5%	5.3%	3.5%	3.5%	3.2%	3.8%	6.4%	4.1%	3.2%	3.2%	2.2%	1.1%	1.1%	4.5%	3.4%
6.9%	8.8%	4.1%	8.8%	6.7%	5.8%	9.6%	4.1%	8.4%	7.2%	11.2%	5.6%	4.5%	10.1%	4.5%
11.5%	11.8%	2.1%	12.7%	7.8%	13.6%	9.3%	2.0%	12.5%	7.0%	3.4%	21.3%	2.2%	13.5%	11.2%

Matching pennies c.d.

		Bramkarz	
		P	L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- strategia 'rzuć monetą, a potem zagraj L jeśli O i P jeśli R' jest całkiem niezła przeciwko racjonalnemu przeciwnikowi – daje średnią wypłatę 0.
- jak taką strategię zapisać?

Strategia mieszana

- Strategia mieszana to rozkład prawdpodobienstwa na zbiorze strategii czystych.
- jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ to strategie czyste, to strategię mieszaną możemy zapisać jako $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0,1]^k$, gdzie $p_i = P(\text{gracz wybiera strategię} a_i)$ (oczywiście $\sum_i p_i = 1$)
- w szczególności, każda strategia czysta może być zapisana jako mieszana, np. a_1 może być zapisana jako $(1, 0, \ldots, 0)$.
- zbiór strategii mieszanych oznacza się (najczęściej) $\Delta(A)$

Uwaga – silne założenia!

- w analizie strategii mieszanych przyjmujemy ”średnią” wypłatę z danej strategii
- …formalniej: wartość oczekiwaną
- to ”nie wprost” zakłada pewną formę neutralności względem ryzyka
- …chociaż nie jest aż tak silne, jak się wydaje – przy założeniu racjonalności przeciwnika

Uwaga – silne założenia!

- w analizie strategii mieszanych przyjmujemy ”średnią” wypłatę z danej strategii
- ...formalniej: wartość oczekiwaną
- innymi słowy, przyjmujemy tu (znaną z mikroekonomii) teorię oczekiwanej użyteczności

Formalna definicja

Definicja
Niech $(N, (A_i), (u_i))$ *będzie grą. Rozszerzeniem tej gry o mieszane strategie będzie* $(N, \Delta(A_i), (U_i))$*, gdzie dla zadanego profilu strategii mieszanych* $\alpha \in \times_j \Delta(A_j)$ *funkcja* U_i *wyznacza wartość oczekiwaną z* u_i *indukowaną przez* α

Definicja
Równowagą Nasha w strategiach mieszanych gry w postaci strategicznej jest jest równowaga Nasha rozszerzenia tej gry.

Ważne twierdzenie

Twierdzenie
Każda skończona gra strategiczna ma (co najmniej jedną) równowagę Nasha (być może w strategiach mieszanych).

Matching pennies - MSNE

		Bramkarz P	Bramkarz L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Strzelec	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Profil $(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)$ jest (jedyną) równowagą Nasha tej gry.

Strategie mieszane w innych klasycznych grach

- Wojna płci

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- jakie były NE w czystych?
- czy jest jakaś mieszana?

Strategie mieszane w innych klasycznych grach

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1,2)$	$(0,0)$
	Mecz	$(0,0)$	$(2,1)$

Efektywność: załóżmy, że gracze grają strategię mieszaną:

- jak często się spotykają?
- jaka jest ich oczekiwana wypłata?

Strategie mieszane c.s.

- Polowanie na jelenia

		Kalliope	
		Jeleń	Zając
Artemis	Jeleń	$(9, 9)$	$(0, 7)$
	Zając	$(7, 0)$	$(6, 6)$

- jaka jest równowaga w strategiach mieszanych?

Równowagi mieszane c.d.

- Dylemat więźnia (wersja z projektem w parach)

		Bartosz	
		Duży	Mały
Anna	Duży	$(3, 3)$	$(0, 4)$
	Mały	$(4, 0)$	$(1, 1)$

- jaka jest równowaga w strategiach mieszanych?

Równowagi mieszane c.d.

- Gra w cykora

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	$(0, 0)$	$(-4, 4)$
	Jechać prosto	$(4, -4)$	$(-10, -10)$

- jakie są równowagi w strategiach mieszanych?

Równowagi – ogólny algorytm (dla gier 2x2)

- w grze 2-osobowej o 2 strategich arbitralną strategię gracza 1 da się zapisać z użyciem $p \in [0, 1]$ (prawdopodobieństwo wyboru pierwszej strategii); dla gracza 2 q
- w układzie współrzędnych p, q rysujemy funkcje najlepszych odpowiedzi obu graczy
  - na ogół są to 'schodki'
  - ważne: kierunek rysowania!
- punkty przecięcia $BR_1(q)$ i $BR_2(p)$ to – z definicji – równowaga Nasha
  - Równowaga Nasha - profil strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie

Mieszana dominacja

- rozważmy poniższą grę

		2	
		A	B
1	A	1, 1	1, 0
	B	3, 0	0, 3
	C	0, 1	4, 1

- co możemy powiedzieć o strategii A?

Mieszana dominacja

- rozważmy poniższą grę

1 \ 2	A	B
A	$1, 1$	$1, 0$
B	$3, 0$	$0, 3$
C	$0, 1$	$4, 1$

- co możemy powiedzieć o strategii A?
- jak to sformalizować?

Mieszana dominacja

- rozważmy poniższą grę

		2	
		A	B
1	A	1, 1	1, 0
	B	3, 0	0, 3
	C	0, 1	4, 1

- co możemy powiedzieć o strategii A?
- jak to sformalizować? przypomnienie: ściśle zdominowane strategie nie wchodzą w skład NE.

Gry z niepewnością

Niepewność w grze

- gry jednoczesne (gry z niedoskonałą, ale kompletną informacją) np. poker, bitwa płci
- posunięcia losowe (gry ”przeciwko Naturze”)
- … potem: gry z niekompletną informacją

Najprostsza gra przeciwko naturze

Rybacy na Jamajce (Straffin)

- załogi rybaków na Jamajce muszą zdecydować o ustawieniu koszy do łowienia
- na łowiskach zewnętrznych można złowić węcej ryb…
- …ale bywają tam silne prądy, które niszczą sieci (nieobserwowalne z poziomu wody)
- …dodatkowo, na łowiska zewnętrzne potrzebne są lepsze łodzie
- są trzy strategie: ustawić wszystkie kosze na łowiskach wewętrznych, wszystkie na zewnętrznych albo część na wewnętrznych, część na zewnętrznych

Rybacy - analiza teoriogrowa

- Wypłaty (wynikające z analizy ekonomicznej)

		Natura	
		aktywne	nieaktywne
Rybacy	wewnętrzna	17.3	11.5
	pośrednia	5.2	17
	zewnętrzna	-4.4	20.6

- jaką strategię powinni zastosować rybacy?

Rybacy - analiza c.d.

- obserwacje Davenporta: prądy morskie są aktywne przez 1/4 roku
- Rybacy *nigdy* nie stosowali strategii zewnętrznej: w 69% stosowali strategię wewnętrzną, w 31% pośrednią
- czy jest to zgodne z podejściem maksymalizacji oczekiwanej tj. (średniej) wypłaty?
- jak to wytłumaczyć?

Rybacy - analiza c.d.

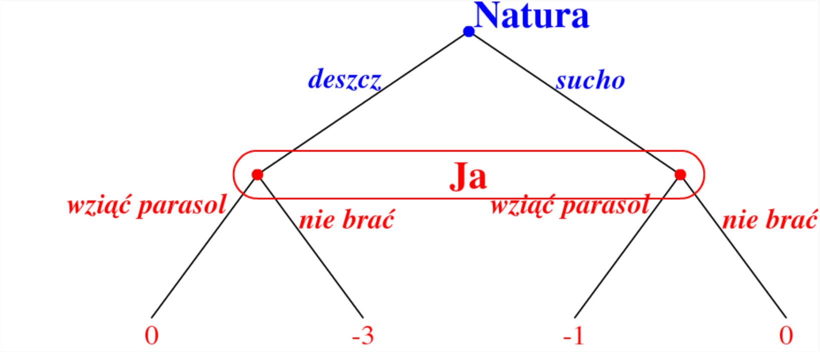
- obserwacje Davenporta: prądy morskie są aktywne przez 1/4 roku
- Rybacy *nigdy* nie stosowali strategii zewnętrznej: w 69% stosowali strategię wewnętrzną, w 31% pośrednią
- czy jest to zgodne z podejściem maksymalizacji oczekiwanej tj. (średniej) wypłaty?
- jak to wytłumaczyć?
- ogólnie: duży dział teorii gier zajmujący się *tylko tym zagadnieniem* (strategie minimaksowe, maksimaksowe, SEU)
- …ale my (na WTG) zostaniemy przy EU!

Gry z posunięciem losowym

Rozszerzenie gry o *niestrategicznego* ”gracza” zwanego Naturą

- Natura nie wybiera strategii…
- … ale zadaje rozkład prawdopodobieństwa na wypłatach
- … w analizie - średnia wypłata

Czy wziąć parasol?



Biznesowa gra z niepewnością

Rynek muzyczny

- Zeus Music jest liderem rynku w produkcji sprzętu audio
- Athena Acoustics jest firmą mniejszą, ale cenioną za jakość produktów
- Firmy opracowały nowy ”heksafoniczny” dźwiękowy; czynnikiem niepewności jest wielkość rynku na nowy system
    - rynek mały (24 mln zysku)
    - rynek duży (40 mln zysku)
- Firmy muszą zdecydować, czy wypuścić produkt najwyższej jakości dla audiofilów (lepszy na mały rynek), czy też wyprodukować prpdukt tańszy, dla szerokiego odbiorcy

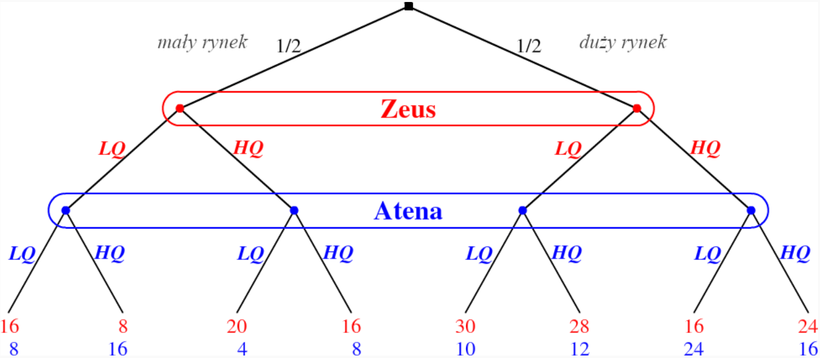
Biznesowa gra z niepewnością

Rynek muzyczny

- Zeus Music jest liderem rynku w produkcji sprzętu audio
- Atena Acoustics jest firmą mniejszą, ale cenioną za jakość produktów
- Firmy opracowały nowy ”heksafoniczny” dźwiękowy; czynnikiem niepewności jest wielkość rynku na nowy system
    - rynek mały (24 mln zysku)
    - rynek duży (40 mln zysku)
- Firmy muszą zdecydować, czy wypuścić produkt najwyższej jakości dla audiofilów (na mały rynek), czy też wyprodukować produkt tańszy, dla szerokiego odbiorcy

Informacja - wersja 1

- Zeus Music i Atena Acoustics podejmują decyzje równocześnie (lub: ukrywają swoje decyzje)

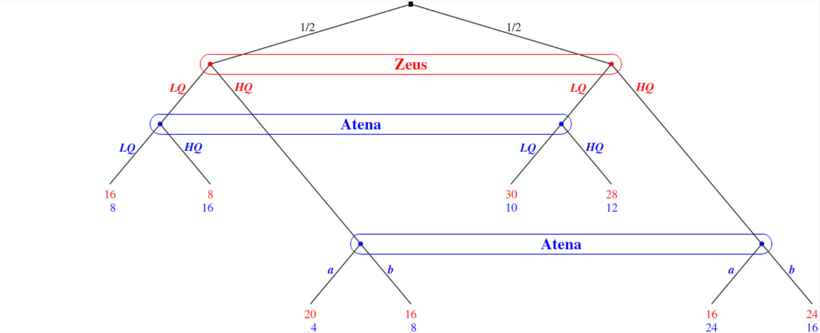


Zeus \ Atena	LQ	HQ
LQ	23, 9	18, 14
HQ	18, 14	20, 12

- jakie są NE tej gry?

Informacja - wersja 2

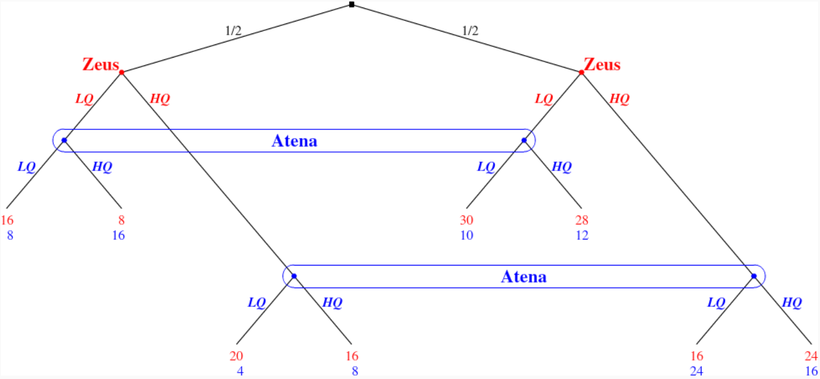
- Zeus Music jako lider podejmuje decyzję pierwszy; Atena się dostosowuje



Zeus \ Atena	LQ,LQ	LQ,HQ	HQ,LQ	HQ,HQ
LQ	9 23	9 23	14 18	14 18
HQ	14 18	12 20	14 18	12 20

- jakie są NE tej gry?

- Zeus Music przeprowadza badanie rynku



Jak zapisać grę w postaci macierzowej?

- Natura zadaje rozkłady prawdopodobieństwa…
- …więc liczymy wartość oczekiwaną zgodną z rozkładem
- *ważne:* punkt widzenia **ex-ante** tj. Zeus i Atena patrzą na hipotetyczne (oczekiwane) wypłaty zanim podejmą jakiekolwiek decyzje!

Jak zapisać grę w postaci macierzowej? c.d.

- Zeus rozważa strategię LQ, LQ
    - ...robi to przed badaniem rynku!
    - jak już zbada, będzie znał wypłaty...
    - ...ale na moment definiowania strategii bierze wartość oczekiwaną (strategia = 'podręcznik użytkownika' tj. opis działania w każdej sytuacji)

Postać macierzowa

Zeus \ Atena	LQ,LQ	LQ,HQ	HQ,LQ	HQ,HQ
LQ,LQ	9 23	9 23	14 18	14 18
LQ,HQ	16 16	12 20	20 12	16 16
HQ,LQ	7 25	9 23	8 24	10 22
HQ,HQ	14 18	12 20	14 18	12 20

- jaka jest optymalna strategia Ateny?
- czemu się zmieniła?

Recap

Gry z prawdopodobieństwem:

- Analizujemy wypłaty w każdym z możliwych stanów świata
- liczymy wartosć oczekiwaną
- **z punktu widzenia "momentu zero"**, a więc przed rozwiązaniem jakiejkolwiek niepewności!

Gry bayesowskie

Zmodyfikowana wojna płci

Mąż i żona wybierają Mecz lub Operę

- niepewność: mąż mógł mieć normalny lub stresujący dzień w pracy
- jeśli normalny – chce spędzić wieczór z żoną
- jeśli stresujący – woli go spędzić sam
- żona nie wie, jaki mąż miał dzień (nie ma komórek...)

Zmodyfikowana wojna płci

Mąż i żona wybierają Mecz lub Operę

- niepewność: mąż mógł mieć normalny lub stresujący dzień w pracy
- jeśli normalny – chce spędzić wieczór z żoną
- jeśli stresujący – woli go spędzić sam
- żona nie wie, jaki mąż miał dzień (nie ma komórek...)
- czy to nadal gra?

Koncepcyjnie

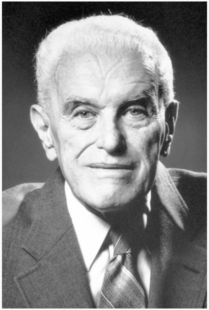
Naruszamy podstawowe założenie analizy gier:

- kompletna informacja: gracze znają wypłaty (bodźce) innych graczy
- tu: niespełnione
- jak sobie z tym poradzić?

Gry z niekompletną informacją

Pomysł Johna Harsanyiego (Nobel 1994):

- skonstruować ”podobną” grę
- gracze mogą być różnych typów (np. typ 1: zrelaksowany mąż, typ 2: zestresowany mąż)
- każdy typ to osobny strategiczny ”gracz” (który gra optymalnie)
- Typ gracza jest losowy – wybiera go na początku Natura
- gra z niekompletną informacją $\sim$ gra z kompletną informacją



Gra bayesowska formalnie

Definicja
Bayesowską grą nazwiemy $(N, \{S_i\}, \{\Theta_i\}, \{u_i\}, p)$*, takie, że:*

- N *to zbiór graczy*
- S_i *to zbiór strategii gracza i*
- $t_i \in \Theta_i$ *to typy gracza i*
- $u_i(s_1, \ldots, s_N, t_1, \ldots, t_N)$ *to wypłata gracza i*
- $P(t_1, ..., t_N)$ *to rozkład prawdopodobieństwa (a priori) możliwych typów graczy*

Skąd ten Bayes?

- rozkład możliwych typów P jest znany wszystkim graczom (*common knowledge*)
- w szczególności, typy mogą być dowolnie (nie)skorelowane
- jeśli gracz i jest typu t_i, to potrafi wyznaczyć rozkład warunkowy $P(.|t_i)$ - tzw. przekonanie (*belief*
- rozkład ten jest liczony zgodnie z regułą Bayesa

Bayesowska równowaga Nasha

Profil strategii *dla każdego typu gracza*, taki, że:

- żaden z (typów) graczy nie chce zmienić swojej strategii…
- …pod warunkiem swoich przekonań nt. typów innych graczy i ich optymalnych strategii

BNE formalnie

Bayesowską równowagą Nasha (w strategiach czystych(nazwiemy profil strategii s taki, że dla każdego gracza i oraz typu t_i zachodzi:

$$s_i(t_i) \in \arg\max_{s_i' \in S_i} \sum P(t_{-i}|t_i) u_i(s_i', s_{-i}, t_i, t_{-i}).$$

BNE formalnie

Bayesowską równowagą Nasha (w strategiach czystych(nazwiemy profil strategii s taki, że dla każdego gracza i oraz typu t_i zachodzi:

$$s_i(t_i) \in \arg\max_{s'_i \in S_i} \sum P(t_{-i}|t_i) u_i(s'_i, s_{-i}, t_i, t_{-i}).$$

Bayesowska wojna płci

- z prawdopodobieństwem 1/2 gracze grają w klasyczną BoS

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

-
- z prawdopodobieństwem 1/2 gracze grają przesuniętą BoS

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 0)$	$(0, 1)$
	Mecz	$(0, 2)$	$(2, 0)$

Bayesowska wojna płci

- Mąż ma 2 typy, a więc 4 strategie: $(O, O), (O, M), (M, O), (M, M)$

		Mąż			
		OO	OM	MO	MM
Żona	O	$(1, 1)$	$(1/2, 3/2)$	$(1/2, 0)$	$(0, 1/2)$
	M	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 3/2)$	$(2, 1/2)$

- jaka jest NE tej gry?

Najprostsza aukcja z niekompletną informacją

- *gra z continuum typów*
- dwóch graczy chce kupić produkt
- każdy z nich wycenia ten produkt na pewne $v_i \sim Unif[0,1]$ (wycena = typ gracza)
- strategia to pewne p_i (cena ofertowa)
- wypłata: $v_i - p_i$ jeśli gracz i wygrał aukcję, 0 w p.p.

Mechanizm aukcyjny nr 1

- aukcja drugiej ceny:
  - dla uproszczenia: załóżmy, że maksymalne oferty składane są w kopertach
  - aukcję wygrywa gracz z najwyższym s_i
  - ale płaci drugie co do wielkości s_j
    (uwaga: tu jest to również ostatnie, ale przy N graczy jest nadal *drugie*)
  - Allegro, eBay itd.
- jak tu wyglądają strategie (ex-ante)?
- czy potrafimy zgadnąć optymalną strategię?

Mechanizm aukcyjny nr 1

- rozważmy strategię ”licytuję moją wycenę” $s_i(v_i) = v_i$
- strategia $s_i = v_i$ (słabo) dominuje nad innymi:
  - jeśli przegrywam: (słabo) nie chcę licytować mniej, bo i tak nie wygram; nie chcę licytować więcej, bo dostanę ujemny zysk;
  - jeśli wygrywam: nie chcę licytować więcej, bo zysk będzie mniejszy; nie chcę licytować mniej, bo istnieje dodatnie prawd., że przegram;

Mechanizm aukcyjny nr 1

- rozważmy strategię ”licytuję moją wycenę” $s_i(v_i) = v_i$
- strategia $s_i = v_i$ (słabo) dominuje nad innymi:
  - jeśli przegrywam: (słabo) nie chcę licytować mniej, bo i tak nie wygram; nie chcę licytować więcej, bo dostanę ujemny zysk;
  - jeśli wygrywam: nie chcę licytować więcej, bo zysk będzie mniejszy; nie chcę licytować mniej, bo istnieje dodatnie prawd., że przegram;
- w aukcji II ceny strategia $s_i = v_i$ (słabo) dominuje nad innymi
- profil $(s_1, s_2) = (v_1, v_2)$ jest Bayesowską równowagą Nasha

Mechanizm aukcyjny nr 2

- aukcja pierwszej ceny:
    - dla uproszczenia: załóżmy, że maksymalne oferty składane są w kopertach
    - aukcję wygrywa gracz z najwyższym s_i
    - …i płaci tyle, ile wylicytował
- czy potrafimy zgadnąć optymalną strategię?

Mechanizm aukcyjny nr 2

- rozważmy strategię ”licytuję moją wycenę” $s_i = v_i$
- ta strategia przynosi zerowy zysk...
- ...więc wolę licytować $s_i < v_i$...
- ...ale ile dokładnie, by zrównoważyć potencjalne zyski i ryzyko niewygrania?

Aukcja pierwszej ceny

- generalnie dużo trudniejsza analiza!
- ograniczymy się do równowag symetrycznych (a więc każdy z graczy *dla danego* v_i wybiera *to samo* s_i
- co więcej, ograniczymy się do strategii liniowych $s_i(v_i) = \theta v_i$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$

Aukcja pierwszej ceny - rozwiązanie

- założmy, że gracz 1 wierzy, że gracz 2 wybiera $s_2 = \theta v_2$ dla pewnego θ
- gracz 1 wybiera s_1^* (jako funkcję v_1) optymalizując:

$$\mathbb{E}zysk(s_1) = (v_1 - s_1) \cdot \mathbb{P}(wygrana)$$

$$\mathbb{P}(wygrana) = \mathbb{P}(s_2 \leq s_1) = \mathbb{P}(\theta v_2 \leq s_1) = \mathbb{P}\left(v_2 \leq \frac{s_1}{\theta}\right) = \frac{s_1}{\theta}$$

$$\mathbb{E}zysk(s_1) = (v_1 - s_1) \cdot \frac{s_1}{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{s^* = \frac{1}{2} v_1} \quad \left(\text{ogólniej: } s^* = \frac{N-1}{N} v_1\right)$$

- profil $\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_1}{2}\right)$ jest BNE!

Gry powtarzane

Dylemat więźnia

		Bartek	
		D	M
Ania	D	$(3, 3)$	$(1, 4)$
	M	$(4, 1)$	$(2, 2)$

- recap: jedyna NE jest nieefektywna
- wiele sytuacji społecznych wygląda podobnie…
- …czemu nie zawsze jest tak źle?

Pokonanie ”Dylematu więźnia”

- rozszerzenia, meta–gry
- eksperymenty, ograniczona racjonalność
- powtarzanie $\leftarrow$ temat na dziś

Dylemat więźnia powtarzany

- założmy, że gracze grają w DW dwukrotnie
- jakie są równowagi (SPNE)?

Dylemat więźnia powtarzany

- założmy, że gracze grają w DW dwukrotnie
- jakie są równowagi (SPNE)?
- co się dzieje dla gry powtarzanej N razy?

Dylemat więźnia powtarzany

- założmy, że gracze grają w DW dwukrotnie
- jakie są równowagi (SPNE)?
- co się dzieje dla gry powtarzanej N razy?
- efekt domina

Alternatywa

- gra powtarzana w nieskończoność…
- …lub niepewność co do liczby gier
- *brak możliwości indukcji wstecznej*
- $\rightarrow$ możliwe nowe równowagi
- trzeba doprecyzować definicje!

Wypłaty w grach nieskończonych

		Bartek D	Bartek M
Ania	D	$(3, 3)$	$(1, 4)$
Ania	M	$(4, 1)$	$(2, 2)$

- założmy, że Ania gra zawsze D, a Bartek zawsze M. Jaka jest ich wypłata z nieskończenie wielu gier?

Wypłaty w grach nieskończonych

		Bartek	
		D	M
Ania	D	$(3, 3)$	$(1, 4)$
	M	$(4, 1)$	$(2, 2)$

- załóżmy, że Ania gra zawsze D, a Bartek zawsze M. Jaka jest ich wypłata z nieskończenie wielu gier?
- wprowadzamy **stopę dyskonta** $\delta < 1$
- szereg geometryczny o **skończonej** sumie $\Rightarrow$ można porównywać wypłaty
- *alternatywnie:* $\delta =$*prawdopodobieństwo zagrania kolejnej gry*

Równowagi w grach nieskończonych

- dla gier skończonych mamy dobrze określone SPNE
- jak tu je badać?
    - nieskończenie wiele strategii i podgier
    - analiza w ogólnym przypadku niemożliwa

Równowagi w grach nieskończonych

- dla gier skończonych mamy dobrze określone SPNE
- jak tu je badać?
    - nieskończenie wiele strategii i podgier
    - analiza w ogólnym przypadku niemożliwa
- na szczęście (dzięki dyskontowaniu): spełnione są założenia *zasady jednorazowego odstępstwa*

Zasada jednorazowego odstępstwa

- **jednorazowe odstępstwo** (*one-shot deviation*) od strategii s w podgrze jest strategią, która różni się od s tylko jedną akcją dla początkowego wierzchołka tej podgry
- **zasada jednorazowego odstępstwa** (*one-shot deviation principle*): (w grze spełniającej pewne założenia) Profil strategii jest SPNE wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z graczy nie posiada zyskownego dla siebie jednorazowego odstępstwa w żadnej podgrze.
- zasada ta nie zachodzi w ogólnych nieskończonych grach
- ale w prostych grach iterowanych z $\delta < 1$ tak!

Zasada jednorazowego odstępstwa

- **jednorazowe odstępstwo** (*one-shot deviation*) od strategii s w podgrze jest strategią, która różni się od s tylko jedną akcją dla początkowego wierzchołka tej podgry
- **zasada jednorazowego odstępstwa** (*one-shot deviation principle*) profil strategii jest SPNE wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z graczy nie posiada zyskownego dla siebie jednorazowego odstępstwa w żadnej podgrze.
- zasada ta nie zachodzi w ogólnych nieskończonych grach
- ale w prostych grach iterowanych z $\delta < 1$ tak!
- zasada pomaga nam sprawdzić, czy różne (ciekawe) profile są SPNE w grach iterowanych

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia ”kara za zdradę”
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia ”kara za zdradę”
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**
- obserwacja: najlepszą odpowiedzią na D jest D
- najlepszą odpowiedzią na M jest M
- to zachodzi w każdej podgrze

Strategia odwetu - c.d.

-
- utrzymanie strategii ”odwet” da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3\frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo da (optymalnie) wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia ”kara za zdradę”
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia "kara za zdradę"
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**
- obserwacja: najlepszą odpowiedzią na D jest D
- najlepszą odpowiedzią na M jest M
- to zachodzi w każdej podgrze

Strategia odwetu - c.d.

-
- utrzymanie strategii ”odwet” da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3\frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo da (optymalnie) wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$
- profil $(odwet, odwet)$ jest SPNE (i ma ”dobre” wypłaty!)

Przykład - strategia wet-za-wet

- Tit-for-Tat (TFT)
- rozważmy strategię: D w 1. rundzie; w n-tej rundzie **to co przeciwnik zagrał w** $n-1$ rundzie

Przykład - strategia wet-za-wet

- Tit-for-Tat (TFT)
- rozważmy strategię: D w 1. rundzie; w n-tej rundzie **to co przeciwnik zagrał w** $n-1$ rundzie
- strategia ”ukaraj za zdradę raz, ale wróć do współpracy, jeśli okaże skruchę”
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**

Strategia wet-za-wet - c.d.

- utrzymanie strategii "wet-za-wet" da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3 \frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo - dalsze *M* da wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2 \frac{\delta}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo i "skrucha" da wypłatę:

$$4 + \delta 1 + + \delta^2 3 + \ldots = 4 + \delta + 3 \frac{\delta^2}{1-\delta}$$

Strategia wet-za-wet - c.d.

- utrzymanie strategii ”wet-za-wet” da wypłatę:

$$3+\delta 3+\delta^2 3+\ldots=3\frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo - dalsze M da wypłatę:

$$4+\delta 2+\delta^2 2+\ldots=4+2\frac{\delta}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo i ”skrucha” da wypłatę:

$$4+\delta 1++\delta^2 3+\ldots=4+\delta+3\frac{\delta^2}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$
- profil $(wet-za-wet, wet-za-wet)$ jest SPNE (i ma ”dobre” wypłaty!)

Strategia wet-za-wet - c.d.

- Dobre cechy wet-za-wet:
  - Przyjazna – zaczyna od kooperacji i nie zdradza jako pierwsza
  - Odwetowa – powinna zdecydowanie karać zdradę
  - Przebaczająca – po ukaraniu powinna być skłonna do dalszej kooperacji
  - Przejrzysta – jej decyzje spójne i łatwe do przewidzenia
- behawioralnie:
  - turniej Axelroda (1984)
  - Zwycięzca – Anatol Rapoport z wet-za-wet (TFT)
  - Axelrod opublikował wyniki i ogłosił drugi turniej (z próbą ’obalenia’ TFT)
  - W drugiej rundzie udział wzięło 62 specjalistów
  - … i znowu wygrał Rapoport z niezmienionym programem

Inne strategie

- czy (odwet,odwet) i (wet-za-wet, wet-za-wet) to jedyne SPNE?
- oczywiście nie!
- **ogólnie: w iterowanych grach jest mnóstwo SPNE**
- jedna z mniej intuicyjnych:
    - strategia s: D w nieparzystych i M w parzystych dopóki przeciwnik gra tak samo; stale M w p.p.
    - dla jakiego δ (s, s) to SPNE?