Wstęp do teorii gier

Joanna Franaszek

semestr zimowy 2019/20

Szkoła Główna Handlowa

Warunki zaliczenia

Sylabus:

- egzamin tradycyjny-pisemny 70%
- ćwiczenia 30%

Powszechna praktyka na WTG:

- możliwość zaliczenia bez egzaminu

Moja propozycja

- dwie ”duże” prace domowe (pod koniec października i listopada)
- kolokwium/zerówka ’pod koniec’ zajęć (styczeń 2019)
- z powyższych wystawiam ocenę...
- ...komu się nie podoba, przystępuje do egzaminu

Wprowadzenie do teorii gier

Plan na dziś

- co to jest teoria gier…
- …i dlaczego jest fajna
- definicja gry
- definicja równowagi Nasha
- przegląd klasycznych gier

Teoria gier

- nauka o strategicznym działaniu w warunkach konfliktu (i kooperacji)
- matematyczne modele sytuacji strategicznych i analiza wyborów osób, firm, *graczy*
- formalny język opisu zjawisk i rozważań ekonomicznych, społecznych, politycznych
- narzędzia do analizy strategicznych sytuacji

”Ekonomiczne Noble” z TG

1994: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi ”for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games.”

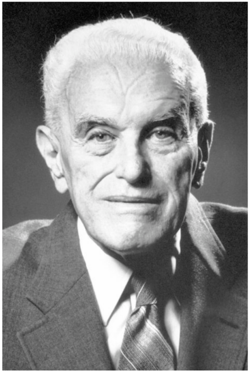


Photo from the Nobel Foundation archive.
John C. Harsanyi

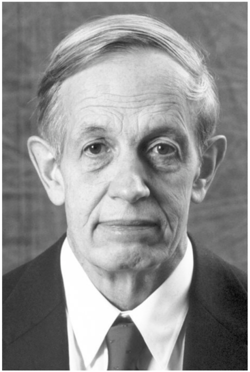


Photo from the Nobel Foundation archive.
John F. Nash Jr.

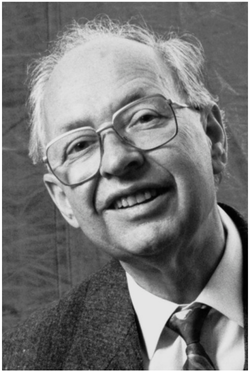


Photo from the Nobel Foundation archive.
Reinhard Selten

”Ekonomiczne Noble” z TG

2005: Aumann, Schelling ”for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis”

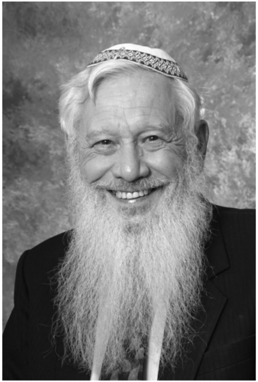


Photo: D. Porges
Robert J. Aumann

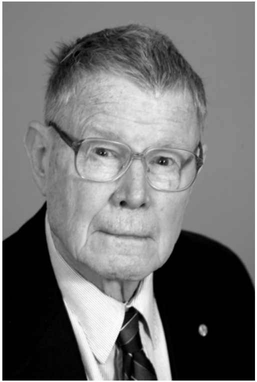
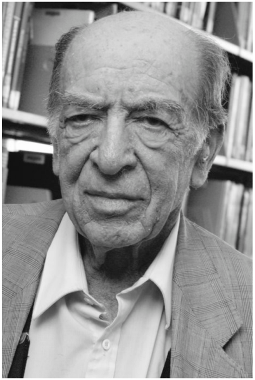


Photo: T. Zadig
Thomas C. Schelling

”Ekonomiczne Noble” z TG

2007: Hurwicz, Maskin, Myerson ”for having laid the foundations of mechanism design theory”



© University of Minnesota Photo: E. Ayoubzadeh

Leonid Hurwicz

© The Nobel Foundation Photo: U. Montan

Eric S. Maskin

© The Nobel Foundation Photo: U. Montan

Roger B. Myerson

”Ekonomiczne Noble” z TG

2012: Roth, Shapley ”for the theory of stable allocations and the practice of market design”

Alvin E. Roth

Lloyd S. Shapley

Poza Noblami

- teoria alokacji: alokacja rezydentur medycznych w USA, nabór do liceum, matching nerek do transplantacji (Shapley, Shubik, potem Roth, Yaariv)
- predykcje polityczne (Mesquita & Roundell)
- aukcje:
    - częstotliwości radiowe (Milgrom)
    - uprawnień do emisji CO2
    - reklam Google
- decyzje biznesowe/strategiczne, zwłaszcza w warunkach niedoskonałej konkurencji (oligopole, fuzje, przejęcia)

Proste przykłady gier

Gra - definicja

Gra (w ujęciu formalnym) to:

1. gracze: strategiczni lub niestrategiczny gracz losowy tzw. Natura
2. strategie: zbiór możliwych dróg postępowania *w całej grze*
3. informacje dostępne graczom: (ważne zwłaszcza w grach sekwencyjnych)
4. wypłaty: monetarny lub ’użytecznościowy’ wynik wyboru określonych strategii

Gra w postaci normalnej

Grą Γ (w postaci normalnej) nazwiemy zbiór:

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ zbiór graczy
2. $a_i \in A_i \neq \emptyset$ strategie gracza i
   $a = (a_1, \ldots, a_N)$ - profil strategii wszystkich graczy
   $A = A_1 \times \ldots A_N$ - zbiór strategii wszystkich graczy
   notacja: $a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_N)$ - profil strategii *wszystkich graczy poza i*
3. $u_i : A \to \mathbb{R}$ - funkcja wypłat
4. tradycyjnie wypłaty gry w postaci normalnej zapisujemy w macierzy (przykład zaraz)

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.
- *jak możemy opisać formalnie tę grę?*

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	R	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

Gracz 2

Gracz 1		O	R
	O	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	R	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

- uwaga: w grze o sumie zerowej wystarczy podać wypłaty gracza 1:

Gracz 2

Gracz 1		O	R
	O	1	-1
	R	-1	1

Dylemat więźnia

- Dwaj wspólnicy w przestępstwie są oddzielnie przesłuchiwani
- Jeśli żaden nie sypnie, obaj: niski wyroki
- Jeśli jeden sypnie: program ochrony świadków; drugi: wysoka kara
- jeśli obaj sypną: obaj wysokie kary

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- *czy potrafimy przewidzieć co się tu stanie?*

Strategie zdominowane

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- Strategia 'Sypać' jest lepsza niż 'Milczeć' dla każdego wyboru przeciwnika!
- formalnie: (dla gracza i) a_i' jest **ściśle zdominowana** przez a_i jeśli:

$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \forall a_{-i}$$

- intuicyjnie: strategie zdominowane nie są wybierane

Wojna płci/Bach i Strawinski

- Mąż i żona chcą razem wyjść
- mąż woli iść do (O)pery, żona na (M)ecz
- ...ale przede wszystkim: chcą iść razem

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1,2)$	$(0,0)$
	Mecz	$(0,0)$	$(2,1)$

- *brak strategii zdominowanych... co się stanie?*

Równowaga Nasha

- John ”Piękny umysł” Nash, 1951
- równowagą Nasha (NE) jest **profil strategii** taki, że żadnemu graczowi nie opłaca się indywidualnie zmienić swojej strategii *pod warunkiem, że inni nie zmieniają swoich*
- ’punkt stały’, warunek stabilności
- najbardziej wpływowa koncepcja w teorii gier – będziemy wracać wielokrotnie!

Definition
$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*)$ jest równowagą Nasha (w strategiach czystych) jeśli:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \; \forall a_i \in A_i$$

Wojna płci recap

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- jakie są tu równowagi Nasha (w strategiach czystych)?

Polowanie na jelenia

- Artemis i Kalliope idą na polowanie
- każda z nich może polować na zająca (łatwa zdobycz) albo na jelenia (wymaga współpracy)
- jeśli obie wybiorą jelenia, dostają dużą wypłatę
- jeśli tylko jedna z nich, nie uda jej się upolować (wypłata 0).
- zając jest bezpieczną opcją

		Kalliope	
		Jeleń	Zając
Artemis	Jeleń	$(9, 9)$	$(0, 7)$
	Zając	$(7, 0)$	$(6, 6)$

Polowanie na jelenia

- jakie są równowagi Nasha tej gry?
- pomyśl o przykładach gier koorydnacji:
    - wspólne wiosłowanie (albo współpraca dwóch firm)
    - wspólne podanie do dziekana o zmianę wykładowcy z WTG
    - kto przyjdzie pierwszy na przyjęcie

Dylemat więźnia - powracamy!

- projekt z WTG robiony w parach
- student może podjąć Duży lub Mały wysiłek

		Bartosz: Duży	Bartosz: Mały
Anna	Duży	$(3, 3)$	$(0, 4)$
	Mały	$(4, 0)$	$(1, 1)$

- jakie są równowagi Nasha?

Dylemat więźnia

- prawdopodobnie najważniejsza gra dzisiejszego wykładu
- ważne własności: **dominacja**, jedyna (i 'mocna') równowaga
- ważne wyjaśnienie obserwowanych fenomenów:
  - zanieczyszczenie powietrza
  - katastrofa klimatyczna
  - 'tragedia wspólnego pastwiska' – wrócimy do tego!

Dominacja a NE

- ściśle zdominowane strategie *nigdy nie wchodzą* do równowag Nasha
- dlaczego?
  - srategia a_i^* w NE są *optymalna* (przy zadanym profilu a_{-i}^* tj. jest nie gorsza od *każdej innej*
  - jeśli a_i^* by była ściśle zdominowana przez pewne a_i, to dominacja zachodziłaby dla dowolnego profilu a_{-i}, w szczególności a_{-i}^*
  - to przeczy optymalności w NE
- uwaga: to dotyczy wyłącznie *ścisłej* dominacji. Istnieje też słaba dominacja - te strategie mogę być częścią NE!

Gra w cykora

- dwaj kierowcy jadą 'na siebie' prostą drogą
- jeśli żaden nie ustąpi – zderzą się; jeśli ustąpi jeden – zostanie on ochrzczony 'cykorem' (strata wizerunku); jeśli ustąpią obaj – żaden nie okaże się gorszy

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	$(0, 0)$	$(-4, 4)$
	Jechać prosto	$(4, -4)$	$(-10, -10)$

- gra antykoordynacyjna
- jakie są równowagi Nasha?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2: Gołąb	2: Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2: Gołąb	2: Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
2	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?