

Przykładowe zadania na kolokwium

Poniższe zadania są pomyślane na 30 minut. Proszę włączyć timer i przetestować.

1. Oblicz granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3 - 3n^2 + 4}{1 - 4n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

2. Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

3. Wyznaczyć maksimum i minimum

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{4} \text{ w przedziale } x \in [-1, 2]$$

4. Oblicz pochodne:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

$$f(t) = \sin t \sqrt{1 + t^2}$$

4. Określ, gdzie funkcja $f(x) = x + e^{-x}$ jest rosnąca/malejąca. Jakie jest nachylenie stycznej do wykresu funkcji w $x = 0$?
5. Określ, gdzie funkcja $f(x) = x + e^{-x}$ jest rosnąca/malejąca. Jakie jest nachylenie stycznej do wykresu funkcji w $x = 0$?
6. Określ dziedzinę funkcji i wyznacz, gdzie funkcja jest wypukła/wklęsła (hint: funkcja jest malejąca)

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x \ln x$$

Odpowiedzi:

1. $-\frac{1}{4}, \frac{1}{e^2}$

2. $-2, e$ (tę drugą wypada uzasadnić)

3. Mimo, iż funkcja ma maksimum lokalne w 0 (równe $f(0) = -\frac{1}{4}$), to najmniejszą wartość na tym przedziale przyjmuje w jego końcu $f(2) = \frac{29}{12}$. Podobnie, choć funkcja ma minimum lokalne w 1, to minimum na przedziale jest na (drugim) końcu przedziału: $f(-1) = -\frac{4}{3}$.

4. $f'(x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$

$$f'(t) = \cos(t) \cdot \sqrt{1 + t^2} + \frac{t \sin(t)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

5. Funkcja jest ściśle rosnąca dla $x > 0$ i ściśle malejąca dla $x < 0$. Nachylenie stycznej w 0 wynosi 0, tzn. styczna jest funkcją stałą. Uwaga: przedziały monotoniczności mogą być i zamknięte i otwarte, byle spójnie.
6. $D_f = [0, +\infty)$; funkcja jest wypukła dla $x \in [0, 1]$ i wklęsła dla $x \in [1, +\infty]$.