

Wstęp do teorii gier

Joanna Franaszek

semestr zimowy 2019/20

Szkoła Główna Handlowa

Warunki zaliczenia

Sylabus:

- egzamin tradycyjny-pisemny 70%
- ćwiczenia 30%

Powszechna praktyka na WTG:

- możliwość zaliczenia bez egzaminu

Moja propozycja

- dwie "duże" prace domowe (pod koniec października i listopada)
- kolokwium/zerówka 'pod koniec' zajęć (styczeń 2019)
- z powyższych wystawiam ocenę...
- ...komu się nie podoba, przystępuje do egzaminu

Wprowadzenie do teorii gier

Plan na dziś

- co to jest teoria gier...
- ...i dlaczego jest fajna
- definicja gry
- definicja równowagi Nasha
- przegląd klasycznych gier

Teoria gier

- nauka o strategicznym działaniu w warunkach konfliktu (i kooperacji)
- matematyczne modele sytuacji strategicznych i analiza wyborów osób, firm, graczy
- formalny język opisu zjawisk i rozważań ekonomicznych, społecznych, politycznych
- narzędzia do analizy strategicznych sytuacji

"Ekonomiczne Noble" z TG

1994: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games."

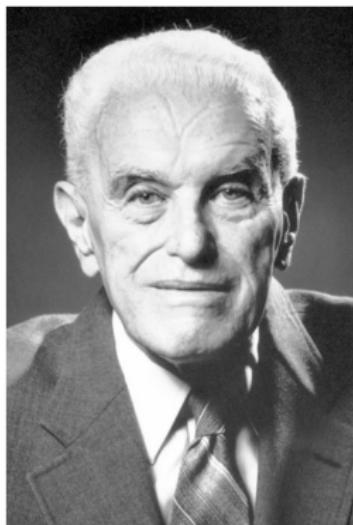


Photo from the Nobel Foundation archive.

John C. Harsanyi

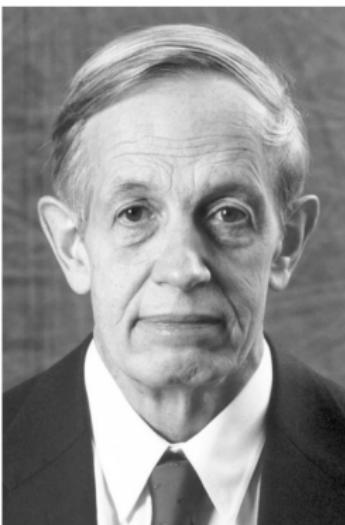


Photo from the Nobel Foundation archive.

John F. Nash Jr.



Photo from the Nobel Foundation archive.

Reinhard Selten

"Ekonomiczne Noble" z TG

2005: Aumann, Schelling "for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis"

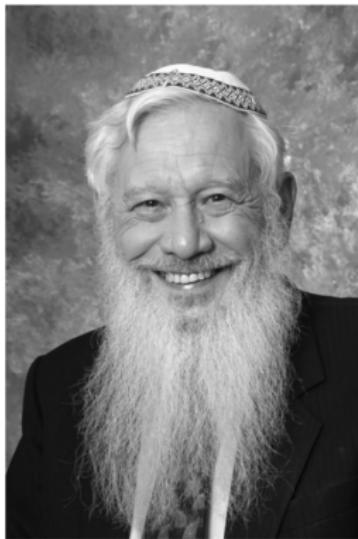


Photo: D. Porges

Robert J. Aumann

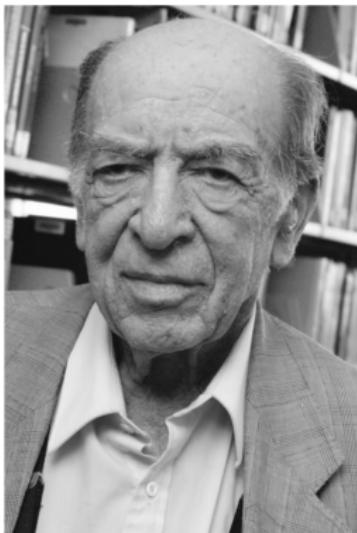


Photo: T. Zadig

Thomas C. Schelling

"Ekonomiczne Noble" z TG

2007: Hurwicz, Maskin, Myerson "for having laid the foundations of mechanism design theory"



© University of Minnesota Photo:
E. Ayoubzadeh

Leonid Hurwicz



© The Nobel Foundation Photo: U.
Montan

Eric S. Maskin

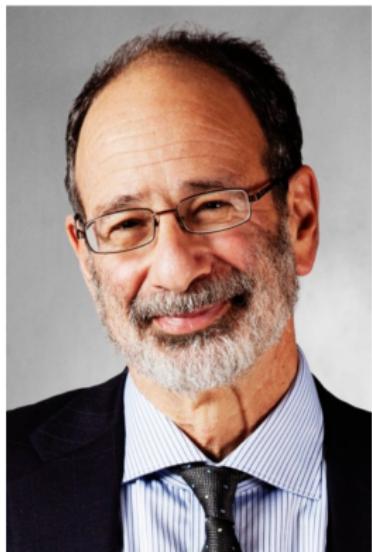


© The Nobel Foundation Photo: U.
Montan

Roger B. Myerson

"Ekonomiczne Noble" z TG

2012: Roth, Shapley "for the theory of stable allocations and the practice of market design"



© The Nobel Foundation. Photo: U.
Montan

Alvin E. Roth



© The Nobel Foundation. Photo: U.
Montan

Lloyd S. Shapley

- teoria alokacji: alokacja rezydentur medycznych w USA, nabór do liceum, matching nerek do transplantacji (Shapley, Shubik, potem Roth, Yaari)
- predykcje polityczne (Mesquita & Roundell)
- aukcje:
 - częstotliwości radiowe (Milgrom)
 - uprawnień do emisji CO₂
 - reklam Google
- decyzje biznesowe/strategiczne, zwłaszcza w warunkach niedoskonałej konkurencji (oligopole, fuzje, przejęcia)

Proste przykłady gier

Gra - definicja

Gra (w ujęciu formalnym) to:

1. gracze: strategiczni lub niestategiczny gracz losowy tzw. Natura
2. strategie: zbiór możliwych dróg postępowania w *całej grze*
3. informacje dostępne graczom: (ważne zwłaszcza w grach sekwencyjnych)
4. wypłaty: monetarny lub 'użytecznościowy' wynik wyboru określonych strategii

Gra w postaci normalnej

Grą Γ (w postaci normalnej) nazwiemy zbiór:

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ zbiór graczy

2. $a_i \in A_i \neq \emptyset$ strategie gracza i

$a = (a_1, \dots, a_N)$ - profil strategii wszystkich graczy

$A = A_1 \times \dots \times A_N$ - zbiór strategii wszystkich graczy

notacja: $a_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N)$ - profil strategii wszystkich graczy poza i

3. $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja wypłat

4. tradycyjnie wypłaty gry w postaci normalnej zapisujemy w macierzy (przykład zaraz)

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety "pasują" (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli "nie pasują" wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.
- *jak możemy opisać formalnie tę grę?*

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety "pasują" (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli "nie pasują" wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	(1, -1)	(-1, 1)
	R	(-1, 1)	(1, -1)

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety "pasują" (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli "nie pasują" wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	(1, -1)	(-1, 1)
	R	(-1, 1)	(1, -1)

- uwaga: w grze o sumie zerowej wystarczy podać wypłaty gracza 1:

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	1	-1
	R	-1	1

Dylemat więźnia

- Dwaj wspólnicy w przestępstwie są oddzielnie przesłuchiwani
- Jeśli żaden nie sypnie, obaj: niski wyroki
- Jeśli jeden sypnie: program ochrony świadków; drugi: wysoka kara
- jeśli obaj sypią: obaj wysokie kary

	Więzień 2	
	Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	(-1, -1) (-8, 0)

	Milczeć	(-1, -1) (-8, 0)
	Sypać	(0, -8) (-5, -5)

- czy potrafimy przewidzieć co się tu stanie?

Strategie zdominowane

	Więzień 2	
	Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	(-1, -1)
	Sypać	(-8, 0)
		(0, -8)
		(-5, -5)

- Strategia 'Sypać' jest lepsza niż 'Milczeć' dla każdego wyboru przeciwnika!
- formalnie: (dla gracza i) a'_i jest **ściśle zdominowana** przez a_i jeśli:
$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i}) \forall a_{-i}$$
- intuicyjnie: strategie zdominowane nie są wybierane

Wojna płci/Bach i Strawinski

- Mąż i żona chcą razem wyjść
- mąż woli iść do (O)pery, żona na (M)ecz
- ...ale przede wszystkim: chcą iść razem

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	(1, 2)	(0, 0)
	Mecz	(0, 0)	(2, 1)

- brak strategii zdominowanych... co się stanie?

Równowaga Nasha

- John "Piękny umysł" Nash, 1951
- równowagą Nasha (NE) jest **profil strategii** taki, że żadnemu graczowi nie opłaca się indywidualnie zmienić swojej strategii *pod warunkiem, że inni nie zmieniają swoich*
- 'punkt stały', warunek stabilności
- najbardziej wpływowa koncepcja w teorii gier – będziemy wracać wielokrotnie!

Definition

$(a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*)$ jest równowagą Nasha (w strategiach czystych)
jeśli:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \quad \forall a_i \in A_i$$

Wojna płci recap

	Mąż	
	Opera	Mecz
Żona	Opera	(1, 2)

 Mecz

	Opera	(1, 2)	(0, 0)
	Mecz	(0, 0)	(2, 1)

- jakie są tu równowagi Nasha (w strategiach czystych)?

Polowanie na jelenia

- Artemis i Kalliope idą na polowanie
- każda z nich może polować na zajęca (łatwa zdobycz) albo na jelenia (wymaga współpracy)
- jeśli obie wybiorą jelenia, dostają dużą wypłatę
- jeśli tylko jedna z nich, nie uda jej się upolować (wypłata 0).
- zajęc jest bezpieczną opcją

		Kalliope	
		Jeleń	Zając
Artemis	Jeleń	(9, 9)	(0, 7)
	Zając	(7, 0)	(6, 6)

Polowanie na jelenia

- jakie są równowagi Nasha tej gry?
- pomyśl o przykładach gier koorydnicji:
 - wspólne wiosłowanie (albo współpraca dwóch firm)
 - wspólne podanie do dziekana o zmianę wykładowcy z WTG
 - kto przyjdzie pierwszy na przyjęcie

Dylemat więźnia - powracamy!

- projekt z WTG robiony w parach
- student może podjąć Duży lub Mały wysiłek

		Bartosz	
		Duży	Mały
Anna	Duży	(3, 3)	(0, 4)
	Mały	(4, 0)	(1, 1)

- jakie są równowagi Nasha?

Dylemat więźnia

- prawdopodobnie najważniejsza gra dzisiejszego wykładu
- ważne własności: **dominacja**, jedyna (i 'mocna') równowaga
- ważne wyjaśnienie obserwowanych fenomenów:
 - zanieczyszczenie powietrza
 - katastrofa klimatyczna
 - 'tragedia wspólnego pastwiska' – wróćmy do tego!

Dominacja a NE

- ścisłe zdominowane strategie *nigdy nie wchodzą* do równowag Nasha
- dlaczego?
 - strategia a_i^* w NE są *optimalna* (przy zadanym profilu a_{-i} tj. jest nie gorsza od *każdej* innej)
 - jeśli a_i^* by była ścisłe zdominowana przez pewne a_i , to dominacja zachodziłaby dla dowolnego profilu a_{-i} , w szczególności a_{-i}^*
 - to przeczy optimalności w NE
- uwaga: to dotyczy wyłącznie *ścisłej* dominacji. Istnieje też słaba dominacja - te strategie mogą być częścią NE!

Gra w cykora

- dwaj kierowcy jadą 'na siebie' prostą drogą
- jeśli żaden nie ustąpi – zderzą się; jeśli ustąpi jeden – zostanie on ochrzczony 'cykorem' (strata wizerunku); jeśli ustąpią obaj – żaden nie okaże się gorszy

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	(0, 0)	(-4, 4)
	Jechać prosto	(4, -4)	(-10, -10)

- gra antykoordynacyjna
- jakie są równowagi Nasha?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2	
		Gołąb	Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- założymy, że $C < V$. Jaka to gra?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2	
		Gołąb	Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- założymy, że $C < V$. Jaka to gra?

Duopole

Duopol Cournota

- dwie firmy wybierają jednocześnie ilość produktu wprowadzanego na rynek q_i dla $i = 1, 2$; produkcja jednej jednostki produktu kosztuje c
- odwrócona funkcja popytu: $p(Q)$ malejąca
- przyjmiemy $p(Q) = a - bQ$, gdzie Q to całkowita ilość produktu na rynku
- zysk firmy i :

$$\pi(q_i) = p(Q) \cdot q_i - cq_i$$

- firmy biorą pod uwagę swój wpływ na cenę
- jaka jest NE?

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a - c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a - c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a - c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a - c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?
- produkcja monopolisty:

$$Q = \frac{a - c}{2b}$$

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a - c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a - c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?
- produkcja monopolisty:

$$Q = \frac{a - c}{2b}$$

- w modelu Cournota firmy produkują więcej niż monopolista, ale mają mniejszy zysk

Duopol Stackelberga

- dwie firmy wybierają wielkość produkcji...
- ...ale tym razem sekwencyjnie!
- pierwsza to przywódcza, druga to naśladowca
- weźmy identyczne oznaczenia: c to koszt produkcji jednostki, $p(Q) = a - bQ$ to (liniowa) odwrócona funkcja popytu
- czym się różni ta sytuacja od poprzedniej?
- jakie są teraz **strategie** gracza nr 2?

Duopol Stackelberga: NE

- optymalny wybór lidera:

$$q_1 = \frac{a - c}{2b}$$

- optymalny wybór naśladowcy:

$$q_2 = \frac{a - c}{4b}$$

- lider produkuje tyle, co monopolista, ale ze względu na naśladowcę zarabia mniej niż monopolista (cena i zysk są niższe)
- naśladowca produkuje mniej niż lider (w modelu liniowym dwukrotnie mniej) i mniej niż w równowadze Cournota

Trochę drobiazgów formalnych

- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna?

Trochę drobiazgów formalnych

- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna? *tak*
- czy znaleziona NE w modelu Stackelberga jest jedyna?

Trochę drobiazgów formalnych

- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna? *tak*
- czy znaleziona NE w modelu Stackelberga jest jedyna? *nie*
ale jest jedyną o "dobrych własnościach" (SPNE)
 - inna NE (ale nie SPNE): firma 1 produkuje wielkość Cournota, firma 2 produkuje wielkość Cournota *bez względu na produkcję firmy 1*

Postać strategiczna i rozwinięta gry

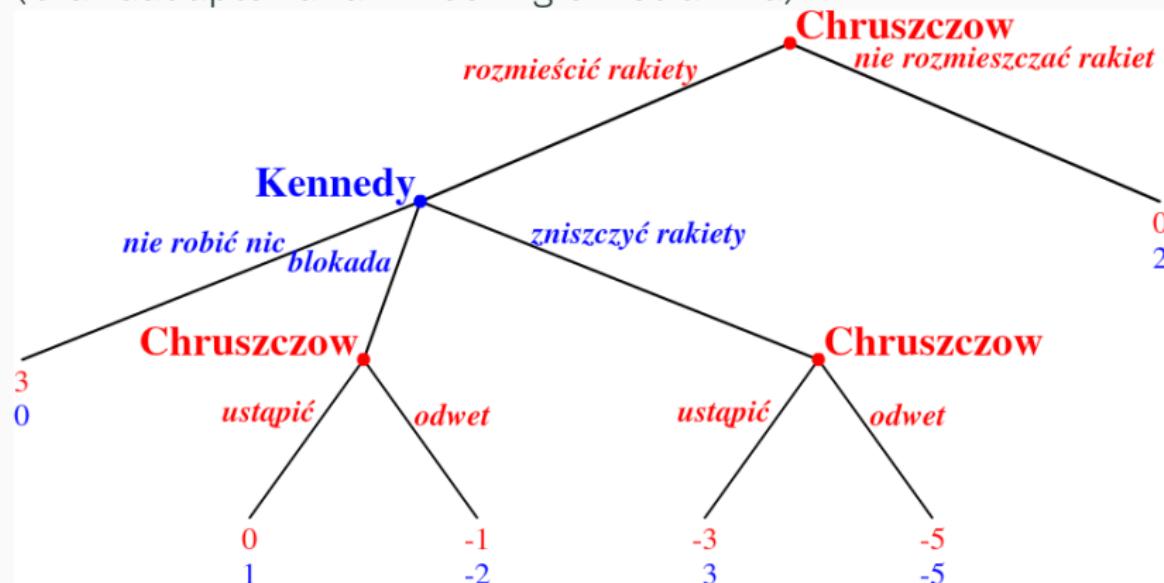
Gry sekwencyjne

Uproszczony Kubański kryzys rakietowy z 1963 r. (przykład zaadaptowany z "Teorii gier" Straffina)

- gracze: USA pod prezydenturą Kennedy'ego vs. ZSRR w reprezentacji Chruszczowa
- Chruszczow decyduje, czy zamieścić na Kubie pociski rakietowe
- Jeśli to się stanie, Kennedy może (1) nie robić nic, (2) ogłosić blokadę Kuby, (3) zniszczyć rakiety
- Chruszczow może następnie (1) ustąpić albo (2) przeprowadzić odwet

Gry sekwencyjne

(Gra zaadaptowana z "Teorii gier" Straffina)



Rozwiążanie - indukcja wsteczna

- rozwiązuje się grę "od tyłu", wybierając optymalnie
- ostateczny wynik: *jednoznaczny*
- ..."zupełnie przypadkiem" jest to NE
- a konkretniej: **doskonała równowaga Nasha** w podgrach

Metoda zapisu

- tzw. postać rozwinięta (drzewko) gry
- służy nie tylko do gier sekwencyjnych! (trzeba tylko oznaczać *zbiory informacyjne*)

Metoda zapisu

- tzw. postać rozwinięta (drzewko) gry
- służy nie tylko do gier sekwencyjnych! (trzeba tylko poznaczać *zbiory informacyjne*)
- można (i trzeba umieć!) przekształcać z macierzy na "drzewka" i odwrotnie
- ...więc dla sportu to zrobimy

Prostszy przykład

Wejście nowej firmy na dotychczas zmonopolizowany rynek



- jaka jest macierz gry?
- jakie są wszystkie NE?
- jaka jest SPNE?