

# **Ekonomia stosowana: projektowanie rynków**

---

Joanna Franaszek

wiosna 2020

Szkoła Główna Handlowa

# **Wprowadzenie**

# Projektowanie rynków

- tradycyjna ekonomia = rynki zdecentralizowane
  - mechanizm 'czyszczący': cena
  - kontrahent 'obojętny'
- rynki scentralizowane
  - tam gdzie zdecentralizowany rynek nieefektywny
  - albo generuje niepożądane efekty zewnętrzne

# Rynki dopasowań

*A matching market is a market in which prices don't do all the work," Roth details, "So matching markets are markets in which you can't just choose what you want even if you can afford it – you also have to be chosen.*

*(Alvin E. Roth)*

Rynki dopasowań (*matching markets*):

- rynek pracy (w szczególności: rynek rezydentur dla przyszłych lekarzy)
- rekrutacja do liceum/na studia
- dopasowanie dawców i biorców nerek
- alokacja mieszkań komunalnych

# "Ekonomiczne Noble" z TG

2012: Roth, Shapley "for the theory of stable allocations and the practice of market design"



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Alvin E. Roth



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Lloyd S. Shapley

# Plan działania

## Dziś: **prosty mechanizm rekrutacji**

- Mechanizm bostoński - czyli co nie działało
- Teoria - jak to powinno działać
- Algorytm Gale'a-Shapleya
- Wizualizacja

## Za tydzień: **trochę 'rzeczywistych' komplikacji**

- Rynek rezydentów
- Konsekwencje dla teorii
- Algorytm Rotha
- (jeśli zdążymy) Top Trading Cycles

## Do poczytania

- Abdulkadiroglu, Sonmez, "School Choice: A Mechanism Design Approach", American Economic Review, 2003.
- Gale, Shapley, "College Admission and the Stability of Marriage", 1962
- Roth, "The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory", 1984
- Roth, Peranson, „The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design”, 1999
- Roth, „The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics”, 2002

## **Prosty mechanizm rekrutacji**

---



# Rekrutacja

## Zdecentralizowana rekrutacja:

- Z punktu widzenia uczelni:
  - wieloosobowy Dylemat Więźnia
  - Każdej uczelni zależy na tym, żeby data składania dokumentów była późna
  - ... ale wcześniejsza niż u konkurencji
  - ⇒ wczesne kontraktowanie (czasem absurdalnie wczesne)
- Z punktu widzenia kandydatów:
  - niepełna informacja
  - koszty transakcyjne
  - ryzyko związane z niepewnością przyjęcia do bardziej preferowanego miejsca
  - awersja do ryzyka ⇒ gorsza alokacja

# Prosty model rekrutacji na studia – założenia

- $S$  -- zbiór kandydatów,  $U$  -- zbiór uczelni;  $u \in U$  dysponuje  $q_u$  miejscami
- $\succeq_s, \succeq_u$  – relacje preferencji, wyznaczające częściowe porządki na (pod)zbiorach uczelni/studentów.
  - Podzbiory  $S_u, U_s$  – podzbiory na których jest określony porządek to zbiór kandydatów/uczelni *akceptowalnych*
- Kandydaci są rozpatrywani indywidualnie
  - Kandydaci nie aplikują grupowo
  - Uczelnie nie poszukuje "zespołów"
  - Lub preferencje wobec zespołów są zgodne z preferencjami wobec indywidualnych kandydatów:

$$\forall_{G: |G| < q_u} \forall_{s, s' \notin G} (s \succeq_u s' \Leftrightarrow G \cup s \succeq_u G \cup s') \wedge (G \cup s \succeq_u G \Leftrightarrow s \in S_u)$$

# Mechanizm bostoński

Mechanizm natychmiastowego przyjęcia *immediate acceptance*, *Boston school mechanism*:

- używany w szkołach publicznych w Bostonie w latach 1999-2005 (zanim wkroczyli ekonomiści...)
- mechanizm nadal popularny w wielu zastosowaniach
- oparty na idei zaspokajania priorytetów

Schemat:

runda 0: tworzony jest porządek na studentach (losowy lub wg priorytetu)

runda 1: rozważane są tylko pierwsze wybory uczniów; każdy uczeń, który wybrał uczelnię  $u$  jako pierwszą jest do niej przypisany, jeśli tylko jest tam wolne miejsce;

# Mechanizm bostoński

Schemat c.d.:

runda 2: rozważamy wyłącznie uczniów jeszcze nie przypisanych do żadnej szkoły; rozważamy drugie wybory i przypisujemy każdego ucznia do wybranej szkoły, jeśli tylko jest tam wolne miejsce;

runda  $k$ : rozważamy tylko uczniów jeszcze nie przypisanych i ich  $k$ -te wybory...

koniec: gdy wszyscy uczniowie przypisani lub skończyły się listy preferencji

# Mechanizm bostoński - najprostszy przykład

- Rozważmy 3 maturzystów składających podanie na 3 uczelnie (każda ma 1 miejsce)
- dla uproszczenia: każda uczelnia ma preferencje

$$S_1 \succ_u S_2 \succ_u S_3$$

- uczniowie mają następujące preferencje:

$$S_1 : u_1 > u_2 > u_3$$

$$S_2 : u_1 > u_2 > u_3$$

$$S_3 : u_2 > u_1 > u_3$$

- kto gdzie trafia wg mechanizmu?
- kto może zyskać, kłamiąc nt. preferencji?

# Mechanizm bostoński

## Zalety:

- stosunkowo prosty
- ważny aspekt dobrobytowy: nadaje priorytet preferencjom

## Wady:

- daje duże bodźce do manipulacji (*not strategy-proof*)
  - empirycznie: jako, że 'strategizacja' jest skorelowana z wyższym SES, mechanizm krzywdzi uczniów o niższym SES
- może dawać 'niestabilne' dopasowania (definicja za chwilę) - takie, w których część uczestników chciałaby się 'wymienić'
- wyniki Pareto-nieefektywne

## 'Dobry' mechanizm

- funkcja (*matching*)  $\mu : S \rightarrow U \cup S$ , taka że:

$$\mu(s) = \begin{cases} u & \text{jeśli kandydat został przyjęty do uczelni } u \\ s & \text{jeśli kandydat nie został przyjęty do żadnej uczelni} \end{cases}$$

- Dopasowanie stabilne:
  - racjonalne indywidualnie:  $\forall_s \mu(s) \in S_u$  (uwaga: dopasowanie  $\mu(s) = s$  jest z założenia zawsze akceptowalne)
  - Stabilne parami tzn.

$$\neg(\exists_{s,u} : u \succ_s \mu(s) \exists_{s' \in \mu^{-1}(u)} : s \succ_u s') \wedge \neg(\exists_{s,u} |\mu^{-1}(u)| < q_u \wedge s \in S_u)$$

- przy założeniach jw. jest to rdzeń gry

# 'Dobry' mechanizm

- dopasowanie optymalne
  - optymalność kandydatów: każdy kandydat został przyjęty do co najmniej tak dobrej (preferowanej) uczelni, jak w dowolnym innym dopasowaniu stabilnym
  - optymalność uczelni: każda uczelnia ma co najmniej tak dobrych (preferowanych) kandydatów jak w dowolnym innym dopasowaniu stabilnym



# Algorytm odroczonego przyjęcia

*Deferred acceptance*, DA algorytm Gale'a-Shapleya:

- po raz pierwszy zaproponowany w 1962 r. (sic!) przez Davida Gale'a i Lloyd Shapleya
- oryginalnie tzw. *problem stabilnych małżeństw*
- następnie uogólniony na matching 1 – to –  $n$

## Twierdzenie

Gale, Shapley 1962 Algorytm Gale'a-Shapleya prowadzi do alokacji stabilnej i optymalnej (w wyżej podanym sensie).

# Algorytm odroczonego przyjęcia

## Algorytm (wersja „kandydaci proponują”)

krok 1: Każdy z kandydatów składa podanie do pierwszej uczelni na jego liście

- Uczelnia wybiera  $q_u$  najlepszych kandydatów. Pozostałych od razu odrzuca, wybranych wpisuje na 'listę oczekujących'.

krok  $k$ : Kandydat składa podanie do pierwszej uczelni na liście, przez którą nie został jeszcze odrzucony.

- Uczelnia wybiera  $q_u$  najlepszych **do czasu  $k$**  kandydatów i odrzuca pozostałych.
- Stop: jeśli żaden kandydat nie składa już podania.

# Algorytm odroczonego przyjęcia

## Algorytm (wersja „uczelnie proponują”)

- Każda z uczelni składa propozycję kandydatom w kolejności od najbardziej pożądanego do najmniej
- Kandydat "warunkowo" przyjmuje ofertę jeśli jest najlepsza z tych, które dotychczas otrzymał, pozostałe odrzuca.
- Stop: jeśli żadne oferty nie są już przedstawiane

## DA – teoria c.d.

**Twierdzenie (McVitie, Wilson, 197; Roth, 1984, 1986)**

W każdym stabilnym dopasowaniu przyjmowani są ci sami kandydaci, a na uczelniach zapełniane są te same miejsca. Ponadto, uczelnia, która nie zapełniła wszystkich miejsc, przyjmie tych samych studentów w każdym stabilnym dopasowaniu.

## DA - teoria c.d.

### Twierdzenie (Roth, 1982)

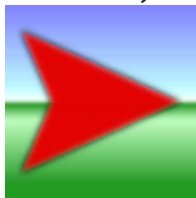
Jeśli użyty jest algorytm „kandydaci proponują”, strategią dominującą dla każdego kandydata jest ujawnienie swoich prawdziwych preferencji (*strategy-proofness*). NIE jest tak dla algorytmu „uczelnie proponują”

### Twierdzenie (Roth, 1982)

Nie istnieje algorytm, w którym dla wszystkich agentów (tj. kandydatów oraz uczelni) strategią dominującą jest ujawnienie prawdziwych preferencji.

# Implementacja

Wizualizacja w NetLogo:



Kliknij tu dla (uproszczonej) wersji on-line  
Na ćwiczeniach: prosty przykład w R.



# Podsumowując

## Rynki dopasowań:

- często wymagają centralizacji
- zagadnienie projektowania 'izby rozrachunkowej'
- dziesiątki zastosowań: rekrutacja do szkół, rezydentury, przeszczepy nerek, mieszkania socjalne

## Prosty rynek rekrutacji:

- pożądane własności mechanizmu: stabilne dopasowanie, optymalność, *strategy-proofness*
- algorytm Gale'a-Shapleya i jego implementacja