Taller 1 Algebra

David Immanuel Trefftz Restrepo   Isaac Eli Ferrucho Maloof
Santiago Gómez Barbosa   Juan Camilo Franco Rojas

March 2023

1 Demuestre

1.1 Cualquier bola abierta es un conjunto abierto

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, Consideremos la definición de Bola abierta

$$B_X(x,r) := \{y \in x : d(x,y) < r\}$$

Además, consideraremos al conjunto A como abierto si es equivalente a su interior ($A = int(A)$). Es decir, si para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que

$$B_X(x, r_x) \subseteq A$$

Con esta información demostraremos que $B_X(x,r)$ es un conjunto abierto.

Sea $y \in B_X(x,r)$, por definición $d(x,y) < r$.

Definiremos un valor $\epsilon = r - d(x,y) > 0$. Ahora demostraremos que la bola abierta generada en $B_X(y,\epsilon)$ está contenida en la bola original.

Establecemos un valor $z \in B_X(y,\epsilon)$. La desigualdad del triangulo que genera el espacio métrico X permite establecer

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Recordando que tomamos z sobre el espacio $B_X(y,\epsilon)$, sabemos que su distancia con y será menor que ϵ, permitiendo expresar

$$d(x,z) \leq d(x,y) + \epsilon$$

Teniendo en cuenta la definición inicial de ϵ

$$d(x,z) \leq d(x,y) + r - d(x,y)$$

$$d(x,z) \leq r$$

Es decir, $z \in B_X(x, r)$. Esto implica que $B_X(y, \epsilon) \subseteq B_X(x, r)$, concluyendo que $B_X(x, r)$ es un conjunto abierto.

fuente: `https://www.youtube.com/watch?v=VgCDfh0co9I&ab_channel=MathPures`

1.2 La suma finita de métricas es una métrica. Será métrica la suma infinita de métricas?

Para verificar que la suma de infinitas métricas sea una métrica, debemos ver si cumple sus propiedades.
Definimos $(X, d_1, d_2, ...)$ siendo $d_1, d_2, ...$ métricas sobre X. La métrica que queremos evaluar estará dada por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,y)$$

Positividad: Considerando que cada métrica $d_i \geq 0$, por la propiedad de positividad, su suma también será igual o mayor a cero. Es decir, para cada $x, y \in X, d(x,y) \geq 0$

Propiedad idéntica: Supongamos que x=y. Si se cumple esta igualdad, para cada $d_i(x,y) = 0$, considerando que son métricas. por lo tanto

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$$

Simetría : Al ser cada elemento de la sumatória una métrica, cumple que cada una es simétrica

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(y,x) = d(y,x)$$

Desigualdad triangular: Expresamos la sumatoria por índice

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) + ...$$

Utilizamos la desigualdad triangular de cada elemento.

$$d_1(x,y) + d_2(x,y) + ... \leq [d_1(x,z) + d_1(z,y)] + [d_2(x,z) + d_2(z,y)] + ...$$

Agrupamos por distancia

$$[d_1(x,z)+d_1(z,y)]+[d_2(x,z)+d_2(z,y)]+... = d_1(x,z)+d_2(x,z)+...+d_1(z,y)+d_2(z,y)+...$$

Reescribimos

$$[d_1(x,z) + d_1(z,y)] + [d_2(x,z) + d_2(z,y) + ...] + ... = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,z) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i(z,y)$$

Recordando la desigualdad inicial comprobamos

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x,z) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i(z,y)$$

Con esto, concluimos que la suma de infinitas métricas también es métrica.

1.3 Una combinación lineal convexa de métricas es una métrica.

Para verificar que la combinación lineal convexa de métricas sea una métrica, debemos ver si cumple sus propiedades.
Definimos $(X, d_1, d_2, ..., d_n)$ siendo $d_1, d_2, ..., d_n$ métricas sobre X. Además definimos $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ donde cada $\alpha_i \geq 0$ y representa la proporción de cada coeficiente. La métrica que queremos evaluar estará dada por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y)$$

Positividad: Considerando que cada métrica $d_i \geq 0$, por la propiedad de positividad, y cada valor $\alpha_i \geq 0$ su multiplicación tendrá un valor igual o mayor a cero. Además, al realizar la sumatoria de estos valores también se tendrá un resultado igual o mayor a cero

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) \geq 0$$

Propiedad idéntica: Supongamos que x=y. Si se cumple esta igualdad, para cada $d_i(x,y) = 0$, considerando que son métricas. por lo tanto al ser multiplicadas por un escalar $\alpha_i d_i(x,y)$ también será igual a cero. por lo tanto.

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i d_i(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i * 0 = 0$$

Simetría : Al ser cada elemento de la sumatória una métrica, cumple que cada una es simétrica

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(y,x) = d(y,x)$$

Desigualdad triangular: Expresamos la sumatoria por índice

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) = \alpha_1 d_1(x,y) + \alpha_2 d_2(x,y) + ... + \alpha_n d_n(x,y)$$

Utilizamos la desigualdad triangular de cada elemento.

$$\alpha_1 d_1(x,y) + \alpha_2 d_2(x,y) + ... + \alpha_n d_n(x,y) \leq [\alpha_1 d_1(x,z) + \alpha_1 d_1(z,y)] + [\alpha_2 d_2(x,z) + \alpha_2 d_2(z,y)] + ... \quad (1)$$

$$+[\alpha_n d_n(x,z) + \alpha_n d_n(z,y)] \quad (2)$$

Agrupamos por distancia

$\alpha_1 d_1(x,z)+\alpha_2 d_2(x,z)+...+\alpha_n d_n(x,z)+\alpha_1 d_1(z,y)+\alpha_2 d_2(z,y)+...+\alpha_n d_n(z,y)$

Reescribimos

$$\sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(x,z) + \sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(z,y)$$

Recordando la desigualdad inicial comprobamos

$$\sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) \leq \sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(x,z) + \sum_{n=1}^{n} \alpha_i d_i(z,y)$$

Con esto, concluimos que la combinación convexa de métricas es métrica.

1.4 La distancia de Mahalanobis es una métrica

Para demostrar que la distancia de Mahalanobis es una métrica, hay que verificar que cumpla sus propiedades.
Definimos la distancia de mahalanobis como $d_m(x,y) = [(x-y)\Sigma^{-1}(x-y)^{'}]^{1/2}$.

Positividad: Al ser Σ^{-1} una matriz semidefinida positiva.

$$d_m(x,y) = [(x-y)\Sigma^{-1}(x-y)^{'}]^{1/2} \geq 0$$

Propiedad idéntica: Supongamos que x=y. esto implica que $x - y = 0$ lo que da como resultado

$$d_m(x,y) = [(x-y)\Sigma^{-1}(x-y)^{'}]^{1/2} = 0$$

Simetría: Como Σ es simétrico y semidefinido positivo, por propiedades de las matrices se tiene que $(x-y)\Sigma^{-1}(x-y)^{'}$ es simétrico

Por lo tanto $d_m(x,y) = d_m(y,x)$

Desigualdad del triángulo: Para demostrar la desigualdad del triángulo se defíne la norma de Mahalanobis como

$$||x||_m = \sqrt{\langle x, x\rangle_m}$$

Tenemos que $d_m(x,y) = ||x-y||_m$, esto sería equivalente a $||x-z+z-y||_m$ por reglas de las normas tenemos que

$$d_m(x,y) \leq ||x-z||_m + ||z-y||_m$$

$$d_m(x,y) \leq d_m(x,z) + d_m(z,y)$$

Aquí queda demostrada la desigualdad del triángulo, concluyendo que la distancia Mahalanobis es una métrica.

Fuente: `https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/25042/MatizAgudeloCamilo2020.pdf?sequence=1`

1.5 Si $d : X \times X \mapsto \Re$ es una métrica, entonces $\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ también lo es.

Para demostrar que $\bar{d}(x,y)$ es una métrica, tenemos que ver si cumple sus propiedades.

Positividad: Considerando que $d : X \times X \mapsto \Re$ es métrica, esto implica que $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. en el caso mínimo con $d(x,y) = 0$, se tendrá que

$$\bar{d}(x,y) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Y con valores mayores, al ser una división de números positivos, dará un resultado positivo. esto demuestra que $\bar{d}(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.

Propiedad idéntica: Supongamos que x=y. Sabemos que $d(x,y) = 0$ por ser métrica, por lo tanto.

$$\bar{d}(x,y) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Cumpliendo la propiedad idéntica.

Simetría : al ser $d : X \times X \mapsto \Re$ métrica, implica que $d(x,y) = d(y,x)$, así que al reemplazar en $\bar{d}$ tenemos

$$\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \bar{d}(y,x)$$

demostrando que $\bar{d}(x,y)$ es simétrica.

Desigualdad del triángulo: sabiendo que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ por ser métrica. tenemos que

$$\frac{d(x,y)}{1+(d(x,y))} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+(d(x,z)+d(z,y))}$$

Repartiendo la fracción.

$$\frac{d(x,y)}{1+(d(x,y))} \leq \frac{d(x,z)}{1+(d(x,z)+d(z,y))} + \frac{d(z,y)}{1+(d(x,z)+d(z,y))} \tag{3}$$

Ahora, al ser cada d igual o mayor que cero, sabemos que $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1+(x,z)$ lo que implica

$$\frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{1}{1+d(x,z)}$$

Que sería equivalente a

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}$$

Igualmente para d(z,y)

$$\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades, podemos reemplazar cada una en (3) sin romper la desigualdad.

$$\frac{d(x,y)}{1+(d(x,y))} \leq \frac{d(x,z)}{1+(d(x,z))} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y))}$$

Esto es equivalente a

$$\bar{d}(x,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$$

Aquí demostramos que $\bar{d}(x,y)$ cumple la desigualdad del triángulo, concluyendo que es métrica.

1.6 Si $d : X \times X \mapsto \Re$ es una métrica, entonces $\bar{d}(x,y) = min\{1, d(x,y)\}$ también lo es.

Para verificar si $\bar{d}(x,y)$ es métrica, tenemos que verificar que cumple sus propiedades

Positividad:
Si 1 es el mínimo, entonces $\bar{d}(x,y) = 1$
Si $d(x,y)$ es el mínimo, entonces $\bar{d}(x,y) = d(x,y)$, que será mayor a cero por ser métrica
Para ambos casos $\bar{d}(x,y) \geq 0$ así que cumple la propiedad.

Propiedad idéntica: Supongamos que x=y. Sabemos que $d(x,y) = 0$ por ser métrica, por lo tanto.

$$\bar{d}(x,y) = min\{1, 0\} = 0$$

Simetría: Al ser $d : X \times X \mapsto \Re$ métrica, implica que $d(x,y) = d(y,x)$, así que al reemplazar en $\bar{d}$ tenemos $\bar{d}(x,y) = min\{1, d(x,y)\} = min\{1, d(y,x)\} = \bar{d}(y,x)$

Desigualdad del triángulo: Por definición de $\bar{d}(x,y)$ sabemos que esta métrica solo puede tomar valores entre [0,1]. Además, teniendo en cuenta los casos planteados en la positividad sabemos que $\bar{d}(x,y) \leq d(x,y)$
.
Si se cumple que $d(x,z) \vee d(z,y) \geq 1$, alguno de los mínimos será igual o mayor a 1, cumpliendo la desigualdad del triángulo.

Si se cumple que $d(x,z) \wedge d(z,y) \leq 1$, recordamos que por definición.
$\bar{d}(x,z) = d(x,z)$ y $\bar{d}(z,y) = d(z,y)$ que permite concluir.

$$\bar{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$\bar{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$$

$$\bar{d}(x,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$$

Esto demuestra la desigualdad del triángulo de $\bar{d}(x,y)$, concluyendo que si es métrica.

1.7 Que la norma de Frobenius satisface las condiciones para ser norma matricial

Se define la norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{TrA^TA}$ para cualquier matriz $A \in R^{n\times n}$. Demostraremos inicialmente que la norma de Frobenius es la norma euclidiana de la matriz considerada como un elemento sobre $\Re^{n^2}$.

$$||A||_F^2 = TrA^TA = \sum_i [A^TA]_{ii} = \sum_i (\sum_j A_{ij}^T A_{ij}) = \sum_{ij} A_{ij}^2$$

$$||A||_F = \left(\sum_{ij} A_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Teniendo esta definición de la norma es más sencillo verificar si cumple las condiciones para ser una norma matricial.

Positividad: Al ser una sumatoría de numeros potenciados al cuadrado, siempre tendrá valores positivos. el unico caso es cuando todos los valores de la matriz son igual a cero, cumpliendo

$$||A||_F \geq 0 \wedge ||A||_F = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Homogeneidad: Si tenemos $||cA||_F$ es equivalente a $\left(\sum_{ij}(cA_{ij})^2\right)^{1/2}$ Aquí podemos seguir simplificando.

$$||cA||_F = \left(c^2 \sum_{ij} A_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$$||cA||_F = |c|\sqrt{\sum_{ij} A_{ij}^2} = |c|||A||_F$$

Demostrando que se cumple la propiedad.

Desigualdad triangular: Tenemos que $||A+B||_F^2 = \sum_{ij}(A_{ij}+B_{ij})^2$, que sería equivalente a

$$\sum_{ij}(A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + 2A_{ij}B_{ij}) = \sum_{ij} A_{ij}^2 + \sum_{ij} B_{ij}^2 + 2\sum_{ij} A_{ij}B_{ij}$$

Por lo tanto

$$||A+B||_F^2 = ||A||_F^2 + ||B||_F^2 + 2AB$$

Aquí podemos utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para crear una desigualdad.

$$||A||_F^2 + ||B||_F^2 + 2AB \leq ||A||_F^2 + ||B||_F^2 + 2||A||_F||B||_F = (||A||_F + ||B||_F)^2$$

Aquí concluímos

$$||A + B||_F^2 \leq (||A||_F + ||B||_F)^2$$
$$||A + B||_F \leq (||A||_F + ||B||_F)$$

Demostrando la desigualdad del triángulo y por lo tanto, que la norma Frobenius cumple los requisitos de una norma matricial.

Fuentes: `https://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee263/ee263.1082/hw/hw9sol#:~:text=The%20Frobenius%20norm%20of%20a,sum%20of%20the%20diagonal%20entries.)&text=Thus%20the%20Frobenius%20norm%20is,as%20an%20element%20of%20Rn2%20.`
`https://math.stackexchange.com/questions/1107357/proof-that-the-euclidean-norm-is-indeed-a-`

1.8 Que la norma 2 matricial de A es la raíz cuadrada del mayor autovalor de A

Se define la norma 2 matricial como

$$||A||_2 = max\{||Ax||_2 : ||x|| = 1\}$$

Ahora demostraremos que esta norma es igual a la raíz cuadrada del mayor autovalor de A
Declaramos $B = A^T A$, la cual será una matriz simétrica. Una transformación lineal de espacio vectorial euclidiano E es simétrica si existe una base ortonormal de E con todos los autovalores de B. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dichos autovalores de B y $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base ortonormal de E. Llamaremos λ_{j0} el mayor autovalor de B.

Para $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, tenemos que $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$
Para $Bx = B\sum_{i=1}^{n} a_ie_i = \sum_{i=1}^{n} a_iB(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_ia_ie_i$
Por lo tanto

$$||Ax|| = \sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} = \sqrt{\langle x, A^TAx\rangle} = \sqrt{\langle x, Bx\rangle}$$

$$||Ax|| = \sqrt{\langle\sum_{i=1}^{n} a_ie_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_ia_ie_i\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i\bar{a}_i} \leq max_{1\leq j\leq n}\sqrt{|\lambda_j|} \times (||x||)$$

Al haber declarado $||A||_2 = max\{||Ax||_2 : ||x|| = 1\}$ entonces

$$||A||_2 \leq max_{1\leq j\leq n}\sqrt{|\lambda_j|}$$

Ahora consideremos $x_0 = e_{j_0}$, esto implica que $||x_0|| = 1$ para que

$$||A||_2^2 \geq \langle x_0, Bx_0\rangle = \langle e_{j_0}, B(e_{j_0})\rangle = \langle e_{j_0}, \lambda_{j_0}e_{j_0}\rangle = \lambda_{j_0}$$

Combinando las últimas dos expresiones tenemos que $||A||_2 = max_{1\leq j\leq n}\sqrt{|\lambda_j|}$, donde λ_j es el autovalor de $B = A^TA$

Fuente: https://math.stackexchange.com/questions/586663/why-does-the-spectral-norm-equal-t