Considere A un subconjunto de un espacio métrico X y sea ∈ > 0. Interprete el conjunto

$A_{\in}$={ x ∈ X | d(x,A) < ∈ }

Como relaciona $A_{\in 1}$ y $A_{\in 2}$ cuando $\in_1 < \in_2$. Calcule $X_{\in}$ y $\emptyset_{\in}$

Respuesta /

La definición de espacio métrico, establece que un subconjunto A de un espacio métrico X es un subespacio métrico si hereda la topología inducida por la distancia d en X2. El conjunto A_∈={ x ∈ X | d(x,A) < ∈ } se puede interpretar como el conjunto de los puntos de X que están a una distancia menor que ∈ del subconjunto A. Es decir, son los puntos que tienen algún punto de A como vecino próximo. Se puede demostrar que A_∈ es un conjunto abierto.

Como relaciona A_(∈1) y A_(∈2) cuando ∈_1 < ∈_2, se puede ver que si x pertenece a A_(∈1), entonces d(x,A) < ∈_1 < ∈_2, lo que implica que x también pertenece a A_(∈2). Por lo tanto, A_(∈1) está contenido en A_(∈2).

Para calcular X_∈, se debe tomar el conjunto de todos los puntos de X que están a una distancia menor que ∈ de algún punto en X. Por lo tanto, X_∈ es la unión de todos los conjuntos A_∈ para cada punto en X. Se tiene que X_∈ = { x ∈ X | d(x,X) < ∈ } = { x ∈ X | d(x,x) < ∈ } = { x ∈ X | 0 < ∈ }, que es igual a X si ∈ > 0 y a Ø si ∈ ≤ 0.

Por otro lado, Ø_∈ = { x ∈ X | d(x,Ø) < ∈ } = Ø, ya que la distancia de cualquier punto a un conjunto vacío no está definida. Por lo cual, Ø_∈ es el conjunto vacío ya que no hay puntos en X que estén a una distancia menor que ∈ del conjunto vacío.