

# Symulacje komputerowe, WMat 2023

## Raport 2: Generowanie procesów losowych

Termin oddania: **30 czerwca**.

1. **Szum telegraficzny.** Proces ten definiujemy jako  $X_t := D(-1)^{N_t}$ ,  $N_t$  - proces Poissona,  $D$  - losowe  $\pm$  niezależne od  $N$ ,  $P(D = 1) = 1/2 = P(D = -1)$ . Stwórz algorytm generujący trajektorie tego procesu, narysuj jego trajektorię. Oszacuj numerycznie jego funkcje średniej  $m_t := \mathbb{E}[X_t]$  oraz kowariancji  $r_t := \text{cov}(X_0, X_t)$ . W jakim tempie zanika  $r$ ?

2. **Efektywność generacji niejednorodnego procesu Poissona.** W metodzie generacji przez przerzedzanie sprawdź jej efektywność (procent zaakceptowanych punktów) oraz szybkość w zależności od tego, czy  $\lambda_t$  jest funkcją wolno, czy szybkozmienną na odcinku  $[0, T]$ . Jak szybkość ta wypada w porównaniu do szybkości generacji przez metodę odwróconej dystrybucyjności?

3. **Estymacja niejednorodnej intensywności.** Zaimplementuj estymację niejednorodnej funkcji intensywności losowej miary Poissonowskiej w 1D i 2D na podstawie histogramu. Analizowany obszar należy podzielić na komórki i dla kolejnych realizacji losowych punktów zliczać ile średnio do każdej z nich wpada. Zademonstruj działanie tej metody.

4. **Prawdopodobieństwo ruiny.** Dla procesu ryzyka zaimplementuj metodę szacującą prawdopodobieństwo ruiny, tj. szansę, że w zadanym okresie kapitał choćby raz spadnie poniżej zera. Dla wybranego procesu sprawdź jak zależy ono od czasu, sporządź również wykresy trajektorii procesu.

5. **Rozkład stacjonarny łańcucha Markowa.** Niech dany będzie łańcuch Markowa o stanach  $\{1, 2, 3\}$  oraz macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zaimplementuj symulowanie jego trajektorii. Sprawdź numerycznie, że niezależnie od stanu początkowego łańcuch osiąga stan stacjonarny  $p_\infty(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(X_t = k)$ . Jaki on jest? W jakim tempie zachodzi zbieżność?

6. **Czas wyjścia.** Numerycznie oszacuj rozkład czasu wyjścia ruchu Browna 2D z kuli jednostkowej  $\tau := \inf\{t: |\mathbf{B}_t| \leq 1\}$ .

Raport wykonujemy w grupach dwuosobowych, oddajemy w formacie Jupytera .ipynb, w nazwie pliku proszę podać nazwiska. Można za niego dostać 20 punktów. 14 za zawartość merytoryczną (kod i analizę wyników symulacji), 6 za wykonanie techniczne - poprawność języka, czytelność i estetykę. Należy opisać wszystkie użyte metody, formę przeprowadzenia symulacji. Przeanalizować wyniki, zwizualizować je

na wykresach i na ich podstawie ocenić ich poprawność i wyciągnąć odpowiednie wnioski.

W przypadku opóźnień naliczane będą punkty karne. Niesamodzielność w implementowaniu algorytmów oraz pisaniu raportów może skutkować wyzerowaniem wyniku.