Sistema de segundo orden

La forma genérica de un sistema de segundo ord

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(as^2 + bs + c)K}{s^2 + ds + e}$$

a, b, c, d, e son números reales , K - Ganancia/atenuación

- <u>Sistema de segundo orden paso bajo</u>

$a = b = 0$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \cdot c}{s^2 + ds + e} = \frac{K \cdot W_n^2}{\underbrace{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2}}$$

forma estandar del sistema de segundo orden paso bajo

$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2$

$$s = \frac{-2\xi W_n \pm \sqrt{4\xi^2 W_n^2 - 4W_n^2}}{2} = -\xi W_n \pm W_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\alpha = -\xi W_n + W_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -W_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$

polos de la función de transferencia H

$\beta = -\xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -W_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$

$$\boxed{H(s)} = \frac{K \cdot W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2} = \frac{K \cdot W_n^2}{(s - \alpha) \cdot (s - \beta)} = \frac{K \cdot W_n^2}{s^2 - (\alpha + \beta)s + \alpha\beta}$$

$$\frac{K \cdot W_n^2}{(s + \xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (s + \xi W_n + W_n\sqrt{\xi^2 - 1})} = \boxed{\frac{K \cdot W_n^2}{(s + W_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})) \cdot (s + W_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}))}}$$

$\xi \equiv$ factor de amortiguamiento relativo

$W_n \equiv$ frecuencia natural no amortiguada

$\sigma \equiv$ atenuación „ $\sigma = \xi W_n$

$W_d \equiv$ frecuencia natural amortiguada „ $W_d = W_n \sqrt{1-\xi^2}$

* <u>Respuesta al escalón unitario para un sistema de segundo orden paso bajo</u>

$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

$X(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow$ transformada de Laplace del escalón unitario

$$Y(s) = \frac{K \cdot W_n^2}{\left(s + W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right) \cdot \left(s + W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = K \cdot W_n^2 \mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{\left(s + W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\left(s + W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} \cdot \frac{1}{s}\right\}}$$

Resolver esto por el método de descomposición por fracciones. Voy a llamar a esto $Z(s)$

$$Z(s) = \frac{1}{\left(s + W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\left(s + W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\left(s + W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} + \frac{A_3}{\left(s + W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right)}$$

$$A_1 = s \cdot Z(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)} \cdot \frac{1}{W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)} = \frac{1}{W_n^2\left(\cancel{\xi^2} - \left(\cancel{\xi^2}-1\right)\right)} = \frac{1}{W_n^2}$$

$$A_2 = \left(s + W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\right) Z(s)\Bigg|_{s=\underbrace{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}_{\alpha}} = \frac{1}{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right) + W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{W_n\sqrt{\xi^2-1} - \cancel{W_n\xi} + \cancel{W_n\xi} + W_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{2W_n\sqrt{\xi^2-1}} = -\frac{1}{2W_n^2\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\cdot\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$A_3 = \left(s + W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\right) Z(s)\Bigg|_{s=\underbrace{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}_{\beta}} = \frac{1}{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right) + W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{-\cancel{W_n\xi} - W_n\sqrt{\xi^2-1} + \cancel{W_n\xi} - W_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{-}W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{\cancel{-}2W_n\sqrt{\xi^2-1}} = \frac{1}{2W_n^2\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\left(\sqrt{\xi^2-1}\right)}$$

$$Z(s) = \frac{1}{W_n^2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2W_n^2\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\cdot\sqrt{\xi^2-1}}\,\frac{1}{\left(s+W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\right)} + \frac{1}{2W_n^2\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\sqrt{\xi^2-1}}\,\frac{1}{\left(s+W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\right)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(Z(s)\right) = \frac{1}{W_n^2}u(t) - \frac{1}{2W_n^2\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\cdot\sqrt{\xi^2-1}}\cdot e^{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}u(t) + \frac{1}{2W_n^2\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\sqrt{\xi^2-1}}\cdot e^{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}u(t)$$

Mirando
en tablas
de transformadas inversas

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Z(s)\right) = \frac{1}{W_n^2}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{-W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{-W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}\right)\right] \quad t \geq 0$$

[redacted] $Y(s) = k \cdot W_n^2\, Z(s) \longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = k \cdot W_n^2\, \mathcal{L}^{-1}\left(Z(s)\right) = k \cdot W_n^2\, z(t)$

$$\boxed{y(t) = K\left[1 + \frac{W_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{\beta t}}{\beta}\right)\right] \quad t \geq 0}$$

Renombrando: $\beta = -W_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)$ „ $\alpha = -W_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)$

TIPOS DE RESPUESTA

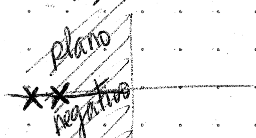
1. Sistema Sobreamortiguado ($\xi > 1$)

$$H(s) = \frac{W_n^2}{\left(s + \underbrace{\xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2-1}}_{-\alpha}\right)\left(s + \underbrace{\xi W_n + W_n\sqrt{\xi^2-1}}_{-\beta}\right)}$$

$$\alpha = -\left(\xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2-1}\right) = -\xi W_n + W_n\sqrt{\xi^2-1} = -W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)$$

$$\beta = -\left(\xi W_n + W_n\sqrt{\xi^2-1}\right) = -\xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2-1} = -W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)$$

Dos polos reales puros negativos distintos (Eje X negativo)



$$y(t) = K\left[1 + \frac{W_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{+\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{+\beta t}}{\beta}\right)\right] \quad t \geq 0$$

$\beta = -W_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)$ „ $\alpha = -W_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)$

Cuando ξ crece considerablemente por encima de 1 uno de los términos exponenciales decae más rapido que el otro, por tanto puede eliminarse.

Cuando ξ ↑ S_1 Crece más rapido que S_2, por tanto e^{-S_1} decae más rápido que e^{-S_2}

2. Sistema Subamortiguado: $(0 < \xi < 1)$

El término $\sqrt{\xi^2 - 1} < 0$, por tanto se puede escribir Como:

$$\sqrt{1-\xi^2} \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_{j} = \sqrt{1-\xi^2}\, j$$

Por tanto: $W_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ se reescribe como $\underbrace{W_n \sqrt{1-\xi^2}}_{W_d}\, j = W_d\, j$

$$H(s) = \frac{K \cdot W_n^2}{(s + W_n \xi - W_d j)(s + W_n \xi + W_d j)}$$

$$\alpha = -(W_n \xi - W_d j) = -W_n \xi + W_d j$$

$$\beta = -(W_n \xi + W_d j) = -W_n \xi - W_d j$$

polos complejos conjugados con parte real y parte imaginaria en el plano izquierdo del eje de coordenadas.

$$y(t) = K\left(1 + \frac{\cancel{W_n}}{2\sqrt{1-\xi^2}\, j}\left(\frac{(\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\, j)\, e^{\alpha t} - (\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\, j)\, e^{\beta t}}{-\cancel{W_n}\underbrace{(\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\, j)\cdot(\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\, j)}_{1}}\right)\right)$$

Mínimo común múltiplo de α y β

$$\alpha = -W_n \xi + W_n \sqrt{1-\xi^2}\, j = -W_n(\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}\, j) \quad ; \quad \beta = -W_n \xi - W_n \sqrt{1-\xi^2}\, j = -W_n(\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}\, j)$$

$$\alpha \cdot \beta = (W_n \xi)^2 + W_n^2 (1-\xi^2) = W_n$$

$$= K\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}\,j}\left(\left(\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j\right)e^{\alpha t} - \left(\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j\right)e^{\beta t}\right)\right)$$

$$\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\,j = \underbrace{\sqrt{\cancel{\zeta^2}+(1-\cancel{\zeta^2})}}_{1}\; e^{j\,\underbrace{\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}_{\phi}} = 1\cdot e^{j\phi}$$

$$\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}\,j = \underbrace{\sqrt{\cancel{\zeta^2}+(1-\cancel{\zeta^2})}}_{1}\; e^{j\,\mathrm{arctg}\,\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} = 1\cdot e^{j\left(-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)} = e^{-j\phi}$$

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}\,j}\left(e^{j\phi}e^{\alpha t} - e^{-j\phi}e^{\beta t}\right)\right)$$

$$e^{j\phi}e^{\alpha t} = e^{j\phi}e^{-\zeta t W_n}\cdot e^{W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,jt} = e^{-\zeta W_n t}\cdot e^{j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)}$$

$$e^{-j\phi}e^{\beta t} = e^{-j\phi}e^{-\zeta W_n t}\cdot e^{-W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,jt} = e^{-\zeta W_n t}\cdot e^{-j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)}$$

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{e^{-\zeta W_n t}\cdot e^{j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)} - e^{-\zeta W_n t}\cdot e^{-j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)}}{2j}\right)\right) =$$

$$= K\left(1 - \frac{e^{-\zeta W_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\underbrace{\frac{e^{j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)} - e^{-j\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)}}{2j}}_{\sin\left(W_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)}\right)\right) =$$

$$\boxed{= K\left(1 - \frac{e^{-W_n\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(W_d t+\phi\right)\right)}$$

3. Sistema oscilatorio. ($\xi = 0$)

$$H(s) = \frac{K \cdot W_n^2}{(s - W_n j)(s + W_n j)}$$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = +W_n j \\ \beta = -W_n j \end{array}\right\}$ Dos polos complejos conjugados puramente imaginarios.

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - \sin\left(W_n t + \underbrace{\operatorname{arctg}(\alpha)}_{90^\circ;\ \pi/2}\right)\right) = K\left(1 - \cos\left(W_n t\right)\right) \quad t \geq 0}$$

$$\sin\left(\alpha + \pi/2\right) = \cos\alpha$$

Cuando $\xi = 0$ (no hay amortiguamiento) la respuesta del sistema se vuelve oscilatoria de manera definitiva. Se comprueba como W_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema, es decir, la frecuencia a la cual la salida del sistema oscila cuando no amortiguamiento.

Si existe cualquier cantidad de amortiguamiento no se observa W_n, tan sólo se observa W_d, que además siempre será menor que W_n.

4. Sistema críticamente amortiguado ($\xi = 1$)

$$H(s) = \frac{K \cdot W_n^2}{(s + W_n)^2}$$

$\alpha = -W_n \rightarrow$ Un polo doble real negativo. (Polo doble en el eje x negativo)
puro

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{K \cdot W_n^2}{(s+W_n)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = K \cancel{W_n^2} \frac{1}{\cancel{W_n^2}} \left(1 - e^{-W_n t} - W_n t\, e^{-W_n t}\right)}$$

Mirando las tablas de trasformada inversa de Laplace

$$\boxed{= K\left(1 - e^{-W_n t}\left(1 + W_n t\right)\right) \qquad t \geq 0}$$

Brevemente se analiza la respuesta del sistema para ζ negativo.

* $-1 < \zeta < 0 \rightarrow$ polos complejos conjugados, con parte real e imaginaria situados en el plano derecho del eje de coordenados.

* $\zeta < -1$: 2 polos reales puros distintos positivos. (Eje x positivo)

* En ambos casos el sistema es inestable y por tanto su salida no está acotada, tiende a infinito.

Resumen:

- Dos polos reales puros distintos negativos
  Sistema Sobreamortiguada
  $\zeta > 1$

- Dos polos iguales reales puros negativos
  Sistema críticamente amortiguado. (Situados en eje X negativo)
  $\zeta = 1$

- Dos polos complejos conjugados distintos con parte real y parte imaginaria situado en el semiplano izquierdo.
  Sistema subamortiguado
  $0 < \zeta < 1$

- Dos polos complejos conjugados distintos puramente imaginarios. (Situados en eje y)
  Sistema oscilatorio
  $\zeta = 0$

- Dos polos complejos conjugados distintos, con parte real y parte imaginaria situados en el semi plano derecho
  Sistema inestable
  $-1 < \zeta < 0$

- Dos polos reales puros distintos positivos (Eje X positivo)
  Sistema inestable. $\zeta < -1$

• Dos polos iguales reales puros positivos
Sistema inestable (Situado en eje x positivo)
$\zeta = -1$

Existe Im	Existe Re	
NO	SÍ	1. Dos polos positivos puros distintos: si ($\xi < -1$) 2. Dos polos positivos puros iguales: si ($\xi = -1$) 3. Dos polos negativos puros distintos: si ($\xi > 1$) 4. Dos polos negativos puros iguales: si ($\xi = 1$)
SÍ	NO	Dos polos reales puros de distinto signo: <u>NO</u>
SÍ	SÍ	

5. Dos polos imaginarios puros con distinto signo y misma magnitud: <u>SI</u>
Dos polos imaginarios puros con mismo signo: <u>NO</u>
Dos polos imaginarios puros con distinto signo y distinta magnitud: <u>No</u>

6. Sólo se admiten dos polos que posean parte real y parte imaginaria, donde la parte real debe ser igual (o bien >0 ó <0) y la parte imaginaria tiene misma magnitud y signo opuesto.

TODOS LOS CASOS

Entrada: $\alpha, \beta \longrightarrow \alpha \cdot \beta = W_n^2 \longrightarrow W_n = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

$$-(\alpha+\beta) = +2\zeta W_n \longrightarrow \zeta = -\frac{(\alpha+\beta)}{2W_n}$$