Álgebra 1 - Turma 2 – $1^o/2022$

Lista de Exercícios – Semana 14

Prof. José Antônio O. Freitas

Observação: *Nos casos em que não forem especificadas as operações do anel, considere as operações usuais.*

Exercício 1: Verificar se a função $f : A \to B$ é ou não um homomorfismo do anel A no anel B, nos seguintes casos:

(a) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

(b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = 2x$

(c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $f(x) = (x, 0)$

(d) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x, y) = x$

(e) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $f(x, y) = (y, x)$

(f) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_n$ e $f(x) = \overline{x}$

(g) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}$ e $f(a + bi) = a - bi$

(h) $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ e $f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$

(i) $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ e $f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x + t$

Exercício 2: Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, 0) \end{aligned}$$

para todos (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostre que $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definada por $f(a, b) = a$ é um homomorfismo sobrejetor.

Exercício 3: Seja

$$T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

um anel. Defina $f : T_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = a.$$

Prove que f é um homomorfismo de anéis.

Exercício 4: Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostre que $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definada por $f(a, b) = a$ é um homomorfismo.

Exercício 5: Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

para todos (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostre que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definada por $f(a) = (a, 0)$ é um homomorfismo.

Exercício 6: Prove que $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ dada por

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo de anéis.

Exercício 7: Verifique se as seguintes funções são homomorfismos de anéis:

(a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = (0, y)$

(b) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = y$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x) = (2x, 0)$

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ dado por $f(x) = (\overline{2}\overline{x}, \overline{0})$

(e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = (-y, -x)$

(f) $f : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ dado por $f(x, y) = (\overline{5}\overline{y}, \overline{5}\overline{x})$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x) = (0, x)$

(h) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ dado por $f(x) = (\overline{0}, \overline{x})$

Exercício 8: Determine o kernel dos homomorfismos dos **Exercícios de 1 a 7**.

Exercício 9: Nos **Exercícios de 1 a 7** para as funções que forem homomorfismos determine se elas também são isomorfismos.

Exercício 10: Seja $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que f é um homomorfismo de anéis.

(b) Esse homomorfismo é injetor?

(c) É sobrejetor?

Exercício 11: Seja $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_3)$ dada por

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que f é um homomorfismo de anéis.

(b) Esse homomorfismo é injetor?

(c) É sobrejetor?

Exercício 12: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que:

(a) Se C é um subanel de A, então $f(C)$ é um subanel de B.

(b) Se D é um subanel de B, então $f^{-1}(D)$ é um subanel de A.

(c) Se I é um ideal de A e f é sobrejetora, então $f(I)$ é um ideal de B.

(d) Se J é um ideal de B, então $f^{-1}(J)$ é um ideal de A.

Exercício 13: Dê um exemplo de anéis A e B e um homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f(1_A) \neq 1_B$.

Exercício 14: Sejam os anéis $A = \{a + b\sqrt{-2} \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ e $B = M_2(\mathbb{Z}_7)$.

(a) Mostre que $f : A \to B$ dada por

$$f(a + b\sqrt{-2}) = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{5b} \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo.

(b) f é um isomorfimo?

Exercício 15: Considere o conjunto

$$M^{\sigma}(\mathbb{Z}) = \{a_1 I_2 + a_2 \sigma \mid a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$$

onde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este conjunto é um subanel de $M_2(\mathbb{Z})$? Caso afirmativo responda aos itens abaixo:

(a) Se $f : M^\sigma(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ é dada por $f(a_1 I_2 + a_2\sigma) = a_1 + a_2$, então f é um homomorfismo de anéis? Caso afirmativo, determine $\ker(f)$.

(b) Se $g : M^\sigma(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ é dada por $g(a_1 I_2 + a_2\sigma) = a_1 - a_2$, então g é um homomorfismo de anéis? Caso afirmativo, determine $\ker(g)$.

Exercício 16: É verdadeiro ou falso: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_m$ para $m > 1$ são anéis isomorfos.

Exercício 17: Considere os seguintes anéis: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, sendo $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é um isomorfimos de $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.