Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra 1 - Turma D – $2^o/2016$

$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – Grupos

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Verifique se os seguintes conjuntos com a operação dada é ou não um grupo. Em caso afirmativo, o grupo é comutativo?

(a) $(\mathbb{Z}, \star)$, onde $x \star y = x + xy$, para $x,\ y \in \mathbb{Z}$;

(b) $(\mathbb{Z}, \star)$, onde $x \star y = x + y + xy$, para $x,\ y \in \mathbb{Z}$;

(c) $(\mathbb{Z}, \star)$, onde $x \star y = xy + 2x$, para $x,\ y \in \mathbb{Z}$;

(d) $(\mathbb{Q}, \star)$, onde $x \star y = x + xy$, para $x,\ y \in \mathbb{Q}$;

(e) $(\mathbb{R}^*, \star)$, onde $x \star y = \dfrac{x}{y}$, para $x,\ y \in \mathbb{R}$;

(f) $(\mathbb{R}_+, \star)$, onde $x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$, para $x,\ y \in \mathbb{R}_+$;

(g) $(\mathbb{R}, \star)$, onde $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, para $x,\ y \in \mathbb{R}$.

(h) $(G, \cdot)$, onde $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ e $\cdot$ é a multiplicação de números racionais.

(i) $(G, \cdot)$, onde $G = \left\{\dfrac{1 + 2m}{1 + 2n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ e $\cdot$ é a multiplicação de números racionais.

(j) $(G, +)$, onde $G = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ e $+$ é a soma de números inteiros.

(k) $(G, \star)$, onde $G = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ e $\star$ é definida como $x \star y = x + y - xy$.

(l) $(G, +)$, onde $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $+$ é a soma de números reais.

(m) $(G, \cdot)$, onde $G = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $\cdot$ é a multiplição de números reais.

(n) $(G, +)$, onde $G = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $+$ é a soma de números reais.

(o) $(G, \cdot)$, onde $G = \{a + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $\cdot$ é a multiplição de números reais..

Exercício 2: Seja
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
e $i^2 = -1$. Mostre que:

(a) $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo abeliano, onde
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
para $a + bi,\ c + di \in \mathbb{C}$.

(b) Para $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ é um grupo abeliano, onde

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

para $a + bi$, $c + di \in \mathbb{C}$.

Exercício 3: Verifique se o conjunto $\mathbb{Q}_{>0}$ dos números racionais estritamente positivos com a operação dada é ou não um grupo. Justifique sua resposta.

(a) $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Q}_{>0}, +)$

Exercício 4: Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, onde a, $b \in \mathbb{R}$. Definimos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prove que $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é um grupo abeliano com a operação de multiplicação de números complexos.

Exercício 5: Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^* = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um grupo multiplicativo abeliano.

Exercício 6: No conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ considere a operação de soma definida por

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$$

para (x, y), $(z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano.