



## Álgebra 1 - Turma C – 1<sup>o</sup>/2020

### Lista de Exercícios – Semana 04

Prof. José Antônio O. Freitas

---

**Exercício 1:** Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre  $E = \{a, b, c\}$ ?

- a)  $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (c, c)\}$
- b)  $R_2 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (b, c)\}$
- c)  $R_3 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (a, c); (c, a)\}$
- d)  $R_4 = E \times E$
- e)  $R_5 = \emptyset$

**Exercício 2:** Seja  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ . Defina  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = km, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}$ .

**Exercício 3:** Determinar todas as relações de equivalência  $R$  sobre  $A$  e os respectivos conjuntos quocientes  $A/R$  para:

- a)  $A = \{a\}$ ;
- b)  $A = \{a, b\}$ ;
- c)  $A = \{a, b, c\}$ ;
- d)  $A = \{a, b, c, d\}$ .

**Exercício 4:** Quais das seguintes sentenças definem uma relação de equivalência no conjunto  $A$  dado?

- a)  $aRb$  se, e só se, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a - b = 3k$ ,  $A = \mathbb{N}$ .
- b)  $aRb$  quando existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $b = ka$ ,  $A = \mathbb{N}$ .
- c)  $aRb$  quando  $a \leq b$ ,  $A = \mathbb{Z}$ .
- d)  $xRy$  quando  $xy > 0$ ,  $A = \mathbb{R}$ .
- e)  $xRy$  quando  $xy \geq 0$ ,  $A = \mathbb{R}$ .
- f)  $x \sim y$  quando  $x + y$  é par, onde  $x, y \in \mathbb{Z}$ .



- g)  $x \sim y$  quando  $x + y$  é ímpar, onde  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
- h)  $x \sim y$  quando  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .
- i)  $x \sim y$  quando  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Exercício 5:** Seja  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . Considere a seguinte relação sobre  $A$ :

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } a + b = c + d.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .

**Exercício 6:** Seja  $A = \mathbb{R}$  e considere o conjunto definido por

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } 2a - b = 2c - d.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 7:** Seja  $A = \mathbb{R}^3$ . Dados  $(x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , defina  $(x, y, z)R(\alpha, \beta, \gamma)$  quando  $z = \gamma$ . Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercício 8:** Seja  $A = \mathbb{R}^3$ . Dados  $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  defina

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Tome um elemento fixo  $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  e defina

$$u \sim v \text{ quando } u \cdot w = v \cdot w.$$

Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercício 9:** Para pontos  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  defina  $(a, b)S(c, d)$  quando  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ .

- a) Prove que  $S$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Liste todos os elementos no conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(0, 0)\}$ .
- c) Liste cinco elementos distintos no conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(1, 0)\}$ .

**Exercício 10:** Sejam  $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  e  $R = \{(x, y) \in E \times E : x + |x| = y + |y|\}$ . Mostrar que  $R$  é uma relação de equivalência e descrever  $E/R$ .

**Exercício 11:** Seja  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , onde  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Para  $(a, b), (c, d) \in A$ , considere a seguinte relação

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } ad = bc.$$

- a) Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .
- b) Descreva a classe de equivalência  $\overline{(0, 1)}, \overline{(1, 1)}, \overline{(1, 2)}, \overline{(2, 1)}, \overline{(2, 2)}, \overline{(2, 3)}$ .



**Exercício 12:** Considere a seguinte relação sobre  $\mathbb{C}$ :

$$(x + yi)R(r + si) \text{ quando } x^2 + y^2 = r^2 + s^2.$$

- a) Mostre que  $R$  é relação de equivalência.
- b) Descreva a classe de equivalência de  $1 + i$ .

**Exercício 13:** Considere a seguinte relação sobre  $\mathbb{Z}$ :

$$x \sim y \text{ quando } x^2 - y^2 = 4k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que  $\sim$  é relação de equivalência.

**Exercício 14:** Seja  $\sim$  uma relação sobre  $\mathbb{Q}$  definida da seguinte forma:

$$x \sim y \text{ quando } x - y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Prove que  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Q}$ .
- b) Descreva a classe  $\bar{1}$ .
- c) Descreva a classe  $\overline{1/2}$ .

**Exercício 15:** Defina

$$H = \{2^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}.$$

Seja  $R$  dado por

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ : \frac{x}{y} \in H \right\}.$$

- a) Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{Q}^+$ .
- b) Determine a classe de equivalência de 3.

**Exercício 16:** A divisibilidade (ou seja, a relação definida por  $xRy$  se, e só se,  $x \mid y$ ) é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercício 17:** Seja  $R$  a seguinte relação sobre  $\mathbb{Z}^*$ :

$$xRy \text{ quando existem } k, l \in \mathbb{Z} \text{ tais que } y = kx \text{ e } x = ly.$$

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{Z}^*$ .

**Exercício 18:** Seja  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$ . Prove que  $R$  é uma relação de equivalência e descrever as classes representadas por  $1/2$  e  $\sqrt{2}$ .

**Exercício 19:** Seja  $A$  um conjunto não vazio. Suponha que  $R \subseteq A \times A$  é tal que:

- a) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ ;
- b) Para todos  $x, y, z \in A$  se  $(x, y) \in R$  e  $(x, z) \in R$ , então  $(y, z) \in R$ .

Mostre que  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .