Lista Semana 07

Questão 15: Sejam $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to C$ funções. Prove que se h é injetora e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

Questão 18: Mostrar que toda função injetora (sobrejetora) de um conjunto finito em si mesmo é também sobrejetora (injetora).

Lista Semana 08

Questão 10: Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P \subseteq A$ e $X, Y \subseteq B$. Mostre que:

e) $f(f^{-1}(X)) = X \cap \mathrm{Im} f$ e conclua que se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.

g) f é sobrejetora se, e somente se, $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ para todo $T \subseteq B$.

Lista Semana 09

Questão 5: Prove que são anéis:

b) O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações $x \oplus y = x + y - 1$ e $x \odot y = x + y - xy$.

c) O conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com as operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + bc).$$

Quais destes anéis são comutativos? Quais têm unidade?

Questão 12: Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de $M_2(\mathbb{R})$?

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b^2 + 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Lista Semana 10

Questão 10: Seja $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que f é um homomorfismo de anéis.

(b) Esse homomorfismo é injetor?

(c) É sobrejetor?

Questão 12: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que:

b) Se D é um subanel de B, então $f^{-1}(D)$ é um subanel de A.

c) Se I é um ideal de A e f é sobrejetora, então $f(I)$ é um ideal de B.

d) Se J é um ideal de B, então $f^{-1}(J)$ é um ideal de A.

Questão 21: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo.

d) Sejam J_1, $J_2 \subset A$ ideiais tais que $J_1 \subset J_2$. Mostre que $J_1 \cup J_2$ é um ideal de A.

e) Sejam I e J ideais de A. Mostre que

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

é um ideal de A.

Questão 23: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Mostre que se I é um ideal de A, então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade.