Álgebra 1 - Turma 2 – $1^o/2022$

Lista de Exercícios – Semana 11

Prof. José Antônio O. Freitas

Observação: *Nos casos em que não forem especificadas as operações do anel, considere as operações usuais.*

Exercício 1: Determinar quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$ são subanéis:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

(c) $C = \left\{\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ 2|b\right\}$

(d) $D = \left\{\dfrac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercício 2: No anel $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ onde as operações $\oplus$ e $\otimes$ são definidas por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Quais dos seguintes conjuntos são subanéis?

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 0\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 0\}$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercício 3: No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações $\star$ e $\odot$ em $\mathbb{Q}$ definidas por

$$x \star y = x + y - 6$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{6}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $A = \mathbb{Z}$

(b) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $C = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(d) $D = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exercício 4: Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de $M_2(\mathbb{R})$?

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b^2 + 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercício 5: Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de $M_2(\mathbb{Z}_2)$?

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{b} & \overline{0} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{c} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$
$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{b} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$
$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a} \\ \overline{c} & \overline{b} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$
$$L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{a} \\ \overline{0} & \overline{b}^2 + \overline{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

Exercício 6: Determine todos os subanéis do anel $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \otimes)$.

Exercício 7: Determine todos os subanéis do anel $(\mathbb{Z}_{16}, \oplus, \otimes)$.

Exercício 8: Mostre que a interseção de dois subanéis de um anel A é ainda um subanel de A.

Exercício 9: É verdade que a união de subanéis é um subanel?

Exercício 10: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $x \in A$ fixo. Mostre que o conjunto

$$N(x) = \{y \in A \mid xy = yx\}$$

é um subanel de A.

Exercício 11: Verifique se $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subanel do anel $\mathbb{R}$.

Exercício 12: Seja $d \in \mathbb{Z}$ e considere o subconjunto de $M_2(\mathbb{Z})$ dado por

$$M_2^d(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mostre que $M_2^d(\mathbb{Z})$ é um subanel de $M_2(\mathbb{Z})$.

Exercício 13: Seja X um conjunto infinito. Sabemos que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ é um anel com unidade. Seja

$$R = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é finito}\}.$$

Prove as seguintes afirmações:

(a) R é um subanel de $\mathcal{P}(X)$.

(b) R não possui unidade.

(c) Para todo $A \in R$, $A \neq \emptyset$ existe $B \in R$, $B \neq \emptyset$, tal que $A \cap B = \emptyset$.

(d) Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \neq X$, $A \neq \emptyset$ existe $B \in \mathcal{P}(X)$, $B \neq \emptyset$, tal que $A \cap B = \emptyset$.

Exercício 14: Verifique se são ideiais:

(a) $I = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ no anel $\mathbb{Z}_6$;

(b) $I = m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ no anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, em que m, $n \in \mathbb{Z}$;

(c) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid 25 \text{ divide } 35x\}$ no anel $\mathbb{Z}$;

(d) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 24\}$ no anel $\mathbb{Z}$;

(e) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6 \text{ divide } x \text{ e } 24 \text{ divide } x^2\}$ no anel $\mathbb{Z}$;

(f) $I = \mathbb{Z}$ no anel $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ em que a $a \oplus b = a + b - 1$ e $a \odot b = a + b - ab$, para todos a, $b \in \mathbb{Q}$;

(g) $I = 2\mathbb{Z}$ no anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ em que a adição é a usual e $a \cdot b = 0$, para quaisquer a, $b \in \mathbb{Z}$.

Exercício 15: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo.

(a) Mostre que a interseção de quaisquer dois ideais de A é sempre um conjunto não vazio.

(b) Mostre que essa interseção é sempre um ideal.

(c) A união de ideias é ainda um ideal?

(d) Sejam J_1, $J_2 \subset A$ ideiais tais que $J_1 \subset J_2$. Mostre que $J_1 \cup J_2$ é um ideal de A.

(e) Sejam I e J ideais de A. Mostre que

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

é um ideal de A.

(f) Se I é um ideal de um anel comutativo A, mostre que $r(I) = \{x \in A \mid xy = 0 \text{ para todo } y \in I\}$, então $r(I)$ é um ideal de A.

Exercício 16: Sendo A um anel, não necessariamente comutativo, dizemos que $I \subset A$, $I \neq \emptyset$ é um **ideal à esquerda** em A se, e somente se:

(i) Para todos x, $y \in I$ temos $x - y \in I$;

(ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$ temos $\alpha x \in I$.

Verifique se são ideiais à esquerda em $M_2(\mathbb{R})$:

(a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(d) $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.