Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra 1 - Turma D – $2^o/2017$

$5^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – Anéis

Prof. José Antônio O. Freitas

Anéis

Exercício 1: Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações $\oplus$ e $\otimes$ definidas por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ é um anel comutativo e com unidade.

Exercício 2: Considere as operações $\star$ e $\odot$ em $\mathbb{Q}$ definidas por

$$x \star y = x + y - 3$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{3}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ é um anel comutativo e com unidade.

Exercício 3: Prove que são anéis:

a) O conjunto $\mathbb{Z}$ com a adição usual e o produto $x \otimes y = 0$, para todo x, $y \in \mathbb{Z}$.

b) O conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações $x \oplus y = x + y - 1$ e $x \odot y = x + y - xy$.

c) O conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com as operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + bc).$$

Quais destes anéis são comutativos? Quais têm unidade?

Exercício 4: Ache os elementos inversíveis dos seguintes anéis:

a) $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ onde $a \oplus b = a + b - 1$ e $a \otimes b = a + b - ab$;

b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star, \odot)$ onde $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Exercício 5: Determinar quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$ são subanéis:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

(c) $C = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ 2|b\right\}$

(d) $D = \left\{\frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercício 6: Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de $M_2(\mathbb{R})$?

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercício 7: Determine todos os subanéis do anel $(\mathbb{Z}_{16}, \oplus, \otimes)$.

Exercício 8: Verifique se $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subanel do anel $\mathbb{R}$.