Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra 1 - Turma D – $2^o/2016$

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – Funções

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Seja $f : E \to F$ uma função e sejam A e B subconjuntos de E. Mostre que:

a) Se $A \subset B$, então $f(A) \subset f(B)$.

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

d) Se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

e) f é bijetora se, e somente se, $f(A^C) = (f(A))^C$ para todo $A \subseteq E$.

Exercício 2: Seja $f : E \to F$ uma função e sejam $A \subset E$ e $X, Y \subset F$. Mostre que:

a) Se $X \subset Y$, então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

d) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

e) $f(f^{-1}(X)) = X \cap \mathrm{Im} f$ e conclua que se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.

Exercício 3: Se as funções $f : E \to F$ e $g : F \to E$ são tais que $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

Exercício 4: Se as funções $f : E \to F$ e $g : F \to E$ são tais que $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

Exercício 5: Mostrar que toda função injetora (sobrejetora) de um conjunto finito em si mesmo é também sobrejetora (injetora).

Exercício 6: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

a) f é injetora?

b) f é sobrejetora?

c) Obter $f^{-1}(0)$.

d) Obter $f([0, 1] \times [0, 1])$.

Exercício 7: Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(x, y) = (2x + 3, 4y + 5)$. Prove que f é injetora. Verifique se f é bijetora.

Exercício 8: Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais, $a \neq 0$, é uma bijeção. Obter f^{-1}.

Exercício 9: Mostrar que $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ dada por $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, onde a, b, c, d são números reais constantes, $ad - bc \neq 0$, é uma bijeção. Descrever a função f^{-1}.

Exercício 10: Achar uma função $f : A \to B$, com A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, para cada caso abaixo:

a) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneqq \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.

b) $A \subsetneqq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.

c) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneqq \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.

d) $A \subsetneqq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.

Exercício 11: Classificar (se possível) em injetora ou sobrejetora as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $y = x^3$

b) $y = x^2 - 5x - 6$

c) $y = 2^x$

d) $y = |\operatorname{sen} x|$

e) $y = x + |x|$

f) $y = x + 3$

Exercício 12: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Determinar $f([-1, 1])$, $f(]-1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([0, 3])$, $f^{-1}([-1, 3])$ e $f^{-1}(\mathbb{R}^*_-)$.