Álgebra 1 - Turma C – $1^o/2020$

Lista de Exercícios – Semana 03

Prof. José Antônio O. Freitas

Observação: A notação $A \subsetneq B$ significa que $A \subset B$ e $A \neq B$.

Exercício 1: Determinar os elementos dos conjuntos A, B e E tais que:

$$A \cap B = \{b, c\}, \quad C_E(A) = \{d, e, f\} \quad \text{e} \quad C_E(B) = \{a, e, f\}.$$

Exercício 2: Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{d, e, f, g\}$, determine:

a) $A - (B - C)$ e $(A - B) - C$

b) $(A \cap B) - (B \cup C)$ e $(A \cup C) - (A \cup B)$

c) $A \cap (B - C)$ e $(A \cap B) - C$

d) $A - (B \cup C)$ e $(A - B) \cap (B - C)$

Exercício 3: Dados os conjuntos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d\}$, $A = \{1, 2, 4, d\}$ e $B = \{a, 2, 4, b, 5\}$, determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C_E(B)$

c) $C_E(A) \cup B$

d) $C_E(A \cup B)$

Exercício 4: Dados os conjuntos $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20\}$ calcule:

a) $A - B$

b) $A - C$

c) $B - C$

d) $(A - B) - C$

e) $A - (B - C)$

f) $(A \cup B) - C$

g) $A - (B \cap C)$

h) $(A \cup C) - B$

i) $(B \cap C) - A$

Exercício 5: Determine os conjuntos E, A e B se:

$$C_E(A) = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$$
$$C_E(B) = \{2, 6, 18, 20\}$$
$$A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}.$$

Exercício 6: Demonstre que:

a) Se $A \subseteq B$ e $C = B - A$, então $A = B - C$.

b) Se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = C$, então $A = C - B$.

c) Se $A \cup B = E$, então $C_E(A) \subseteq B$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

d) Se $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup C_E(B) = C_E(B)$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

e) $A = B$ se, e somente se, $A - B = B - A$.

f) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A - B = \emptyset$.

g) $C_E(A) \subseteq C_E(B)$ se, e somente se, $A \cup B = A$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

h) $C_E(A) \subseteq C_E(B)$ se, e somente se, $A \cap B = B$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

Exercício 7: Demonstre as seguintes igualdades.

a) $A \cup (C_E(A) \cap B) = A \cup B$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

b) $A \cap (C_E(A) \cup B) = A \cap B$. *(Aqui suponha que A, $B \subseteq E$.)*

c) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

d) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

f) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

g) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

h) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

i) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

j) $(A \cap B) \cap (A - B) = (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

k) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

l) $A - (A - B) = A \cap B$.

m) $(A - B) - (B - C) = A - B$.

n) $(A - B) - B = A - B$.

o) $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$.

p) $C_E(A \cap [B \cup C]) = C_E(A) \cup [C_E(B) \cap C_E(C)]$. *(Aqui suponha que A, B, $C \subseteq E$.)*

q) $C_E(A \cap B \cap C) = C_E(A) \cup C_E(B) \cup C_E(C)$. *(Aqui suponha que A, B, $C \subseteq E$.)*

r) $C_E(A \cup B \cup C) = C_E(A) \cap C_E(B) \cap C_E(C)$. *(Aqui suponha que A, B, $C \subseteq E$.)*

Exercício 8: Dados conjuntos A e B, defina:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Agora considerando os conjuntos A, B e C verifique se as seguintes propriedades são verdadeiras:

a) $A\Delta A = \emptyset$

b) $A\Delta B = B\Delta A$

c) $A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$

d) $A\Delta(A\Delta B) = B$

e) $B\Delta(A\Delta B) = B$

f) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

g) $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$

h) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

i) $A\Delta B = (A \cap B) - (A \cup B)$

j) $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Exercício 9: Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, r, s\}$, $B = \{r, s, 2, 3, 4\}$, $C = \{s, t, 4, 5\}$ e $D = \{s, t, 5, 6\}$, determine:

a) $(A \times A) \cap (B \times B)$

b) $A^2 \times C^2$

c) $(A - B) \times (C - D)$

d) $(A \cap B) \times (C \cap B)$

e) $(A \cup B) \times (B \cup D)$

f) $(A \times B) - (C \times D)$

g) $(A - B) \times (C \cap D)$

h) $(A - C) \times (B - D)$

i) $(A - (C - D)) \times ((D - B) \cup A)$

j) $(A\Delta B) \times (D\Delta B)$

Exercício 10: Determine conjuntos A, $B \subseteq E$ tais que:

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \{2, 4, 5, 8, 9, 10\} \\ A \cap B &= \{1, 3\} \\ C_E(A) &= \{5, 6, 7, 9, 10\} \\ E &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \end{aligned}$$

Exercício 11: Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove que:

a) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$, então $A \times B \subseteq C \times D$.

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

d) $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Exercício 12: Sejam A, B, C e D conjuntos.

a) Mostre que A e B são disjuntos se, e somente se, para todo conjunto não vazio C, $A \times C$ e $B \times C$ são disjuntos.

b) Suponha $A \neq \emptyset$ e $C \neq \emptyset$, com $A \neq C$. Mostre que $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ se, e somente se, $A \times C \subseteq B \times D$.

Exercício 13: Sejam X_1, X_1, Y_1 e Y_2 subconjuntos contidos num conjunto E. Suponha que $X_1 \cup X_2 = E$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $X_1 \subseteq Y_1$ e $X_2 \subseteq Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.