Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra 1 - Turma D – $2^o/2016$

$5^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – Grupos: continuação

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Quais dos seguintes subconjuntos G de $\mathbb{Z}_{13}$ são grupos com a operação de multiplicação?

(a) $G = \{\overline{1}, \overline{12}\}$;

(b) $G = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$;

(c) $G = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\}$

(d) $G = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$.

Exercício 2: Determine f, $g \in S_3$ tais que:

(a) $(f \circ g)^3 \neq f^3 \circ g^3$

(b) $(f \circ g)^2 \neq f^2 \circ g^2$

Exercício 3: Considere o grupo S_3:

(a) Determine todos os elementos $f \in S_3$ tais que $f^2 = Id$ e $f \neq Id$.

(b) Determine todos os elementos $g \in S_3$ tais que $g^3 = Id$ e $g \neq Id$.

Exercício 4: Seja $V = \{1, f, g, h\}$ o seguinte subconjunto do grupo S_4:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Prove que $(V, \circ)$ é um grupo contendo 4 elementos, onde $\circ$ é a operação de S_4.

(b) Prove que $(V, \circ)$ é um grupo abeliano.

Exercício 5: Considere o grupo S_7 e sejam

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

.

(a) Encontre o menor $l \geq 0$ tal que $\sigma^l = 1$.

(b) Encontre $\delta \in S_7$ tal que $\sigma \circ \delta = 1$.

(c) Encontre o menor $k \geq 0$ tal que $\beta^k = 1$.

(d) Encontre $\gamma \in S_7$ tal que $\gamma \circ \beta = 1$.

Exercício 6: Seja $(G, *)$ um grupo com elemento neutro e. Para $x \in G$, considere a notação $x^n = x * x * \cdots * x$ (n vezes).

(a) Seja G um grupo tendo e como elemento neutro. Prove que se $x^2 = e$, para todo $x \in G$, então G é um grupo abeliano.

(b) Mostre que se $x \in G$ é tal que $x^2 = x$, então x é o elemento neutro.

Exercício 7: Verifique se são subgrupos:

(a) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

(b) $H = \left\{\dfrac{1+2m}{1+2n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

(c) $H = \{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \mid \theta \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(d) $H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ de $(\mathbb{Z}, +)$.

(e) $H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ do grupo $(\mathbb{Q} - \{1\}, \star)$ onde $\star$ é definida como $x \star y = x + y - xy$.

(f) $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$.

(g) $H = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

(h) $H = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$.

(i) $H = \{a + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Exercício 8: Determine todos os subgrupos do grupo aditivo $\mathbb{Z}_4$.

Exercício 9: Determine todos os subgrupos de S_3.

Exercício 10: Seja

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R},\ \det(A) \neq 0\right\}.$$

(a) Mostre que $GL_2(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo. Esse grupo é abeliano?

(b) Seja

$$H = \left\{A = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Mostre que H é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

(c) Seja

$$K = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e não nulos simultaneamente}\right\}.$$

Mostre que K é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercício 11: Sejam G um grupo e x, y, $z \in G$. Prove que:

(a) Se $xy = xz$, então $y = z$.

(b) Se $yx = zx$, então $y = z$.

Exercício 12: Sejam H e K subgrupos de um grupo G (com notação multiplicativa).

(a) Mostre que $H \cap K$ também é subgrupo de G.

(b) Seja $g \in G$ um elemento fixado. Mostre que o conjunto $g^{-1}Hg = \{g^{-1}xg \mid x \in H\}$ é um subgrupo de G.

(c) Prove que $H \cup K$ é subgrupo de G se, e somente se, $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Exercício 13: Seja G um grupo com notação multiplicativa e a um elemento de G. Prove que $N(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ é um subgrupo de G.

Exercício 14: Seja G um grupo com notação multiplicativa. Considere o subconjunto $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \text{ para todo } x \in G\}$. Mostre que:

(a) $Z(G)$ é um subgrupo de G.

(b) G é abeliano se, e somente se, $Z(G) = G$.

Exercício 15: Sejam G e J grupos multiplicativos, $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos e H um subgrupo de J. Mostre que $f^{-1}(H) = \{x \in G \mid f(x) \in H\}$ é um subgrupo de G.

Exercício 16: Seja $(G, *)$ um grupo e $g \in G$ um elemento fixado e g^{-1} seu inverso. Mostre que a aplicação $i_g : G \to G$ definida por $i_g(x) = g^{-1} * x * g$, para todo $x \in G$, é um isomorfismo.

Exercício 17: Sejam $f : G \to H$ e $g : H \to J$ isomorfismos de grupos. Mostre que

(a) $g \circ f$ é também isomorfismo de grupos;

(b) f^{-1} é isomorfismo de grupos.

Exercício 18: Prove que um grupo G é abeliano se, e somente se, $f : G \to G$ definada por $f(x) = x^{-1}$ é um homomorfismo.

Exercício 19: Seja $f : G \to H$ um homomorfismo sobrejetivo de grupos e K um subgrupo de H.

(a) Mostre que $f^{-1}(K)$ é um subgrupo de G, onde $f^{-1}(K)$ é a imagem inversa de K.

(b) Mostre que o núcleo $\mathrm{Ker}(f)$ de f é um subgrupo de G e que $\mathrm{Ker}(f) \subset f^{-1}(K)$.

Exercício 20: Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos e $g \in G$ tal que $o(g) = n$.

(a) Mostre que $f(g)$ tem ordem positiva e que a ordem de $f(g)$ divide n.

(b) Mostre que se f é isomorfismo, então $o(f(g)) = n$.

Exercício 21: Verificar em cada caso se f é um homomorfismo de grupos.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = kx$, sendo $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos inteiros e k um número inteiro fixo.

(b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = |x|$ sendo $\mathbb{R}^*$ o grupo multiplicativo dos reais.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, onde $\mathbb{R}$ é o grupo aditivo dos reais.

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = (x, 0)$, onde $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ denotam grupos aditivos.

(e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x$, onde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ são grupos aditivos.

(f) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 2^x$, onde $\mathbb{Z}$ é grupo aditivo e $\mathbb{R}_+^*$ é grupo multiplicativo.

Exercício 22: Determinar os homomorfismos injetores e os sobrejetores do exercício anterior.

Exercício 23: Determine o núcleo em cada homomorfismo do **Exercício 21**.

Exercício 24: Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = (x - y, 0)$. Provar que f é um homomorfimo do grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em si próprio. Obter $\ker(f)$.

Exercício 25: Seja G um grupo finito com elemento neutro e e suponha que H e K são subgrupos de G tais que $|H| = p$ e $|K| = q$, onde p e q são primos distintos. Mostre que $H \cap K = \{e\}$.