



Álgebra 1 - Turma D – 2º/2016

5ª Lista de Exercícios – Grupos: continuação

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Quais dos seguintes subconjuntos G de \mathbb{Z}_{13} são grupos com a operação de multiplicação?

- (a) $G = \{\bar{1}, \bar{12}\};$ (c) $G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}\}$
(b) $G = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\};$ (d) $G = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}\}.$

Exercício 2: Determine $f, g \in S_3$ tais que:

- (a) $(f \circ g)^3 \neq f^3 \circ g^3$
(b) $(f \circ g)^2 \neq f^2 \circ g^2$

Exercício 3: Considere o grupo S_3 :

- (a) Determine todos os elementos $f \in S_3$ tais que $f^2 = Id$ e $f \neq Id$.
(b) Determine todos os elementos $g \in S_3$ tais que $g^3 = Id$ e $g \neq Id$.

Exercício 4: Seja $V = \{1, f, g, h\}$ o seguinte subconjunto do grupo S_4 :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Prove que (V, \circ) é um grupo contendo 4 elementos, onde \circ é a operação de S_4 .
(b) Prove que (V, \circ) é um grupo abeliano.

Exercício 5: Considere o grupo S_7 e sejam

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontre o menor $l \geq 0$ tal que $\sigma^l = 1$.

- (b) Encontre $\delta \in S_7$ tal que $\sigma \circ \delta = 1$.
- (c) Encontre o menor $k \geq 0$ tal que $\beta^k = 1$.
- (d) Encontre $\gamma \in S_7$ tal que $\gamma \circ \beta = 1$.

Exercício 6: Seja $(G, *)$ um grupo com elemento neutro e . Para $x \in G$, considere a notação $x^n = x * x * \dots * x$ (n vezes).

- (a) Seja G um grupo tendo e como elemento neutro. Prove que se $x^2 = e$, para todo $x \in G$, então G é um grupo abeliano.
- (b) Mostre que se $x \in G$ é tal que $x^2 = x$, então x é o elemento neutro.

Exercício 7: Verifique se são subgrupos:

- (a) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ de (\mathbb{Q}^*, \cdot) .
- (b) $H = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ de (\mathbb{Q}^*, \cdot) .
- (c) $H = \{\cos \theta + i \sin \theta \mid \theta \in \mathbb{Q}\}$ de (\mathbb{C}^*, \cdot) .
- (d) $H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ de $(\mathbb{Z}, +)$.
- (e) $H = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ do grupo $(\mathbb{Q} - \{1\}, \star)$ onde \star é definida como $x \star y = x + y - xy$.
- (f) $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$.
- (g) $H = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de (\mathbb{R}^*, \cdot) .
- (h) $H = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $(\mathbb{R}, +)$.
- (i) $H = \{a + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Exercício 8: Determine todos os subgrupos do grupo aditivo \mathbb{Z}_4 .

Exercício 9: Determine todos os subgrupos de S_3 .

Exercício 10: Seja

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}, \det(A) \neq 0 \right\}.$$

- (a) Mostre que $GL_2(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo. Esse grupo é abeliano?
- (b) Seja

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostre que H é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

- (c) Seja

$$K = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e não nulos simultaneamente} \right\}.$$

Mostre que K é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercício 11: Sejam G um grupo e $x, y, z \in G$. Prove que:

- (a) Se $xy = xz$, então $y = z$.
- (b) Se $yx = zx$, então $y = z$.

Exercício 12: Sejam H e K subgrupos de um grupo G (com notação multiplicativa).

- (a) Mostre que $H \cap K$ também é subgrupo de G .
- (b) Seja $g \in G$ um elemento fixado. Mostre que o conjunto $g^{-1}Hg = \{g^{-1}xg \mid x \in H\}$ é um subgrupo de G .
- (c) Prove que $H \cup K$ é subgrupo de G se, e somente se, $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Exercício 13: Seja G um grupo com notação multiplicativa e a um elemento de G . Prove que $N(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ é um subgrupo de G .

Exercício 14: Seja G um grupo com notação multiplicativa. Considere o subconjunto $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \text{ para todo } x \in G\}$. Mostre que:

- (a) $Z(G)$ é um subgrupo de G .
- (b) G é abeliano se, e somente se, $Z(G) = G$.

Exercício 15: Verificar em cada caso se f é um homomorfismo de grupos.

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = kx$, sendo \mathbb{Z} o grupo aditivo dos inteiros e k um número inteiro fixo.
- (b) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = |x|$ sendo \mathbb{R}^* o grupo multiplicativo dos reais.
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, onde \mathbb{R} é o grupo aditivo dos reais.
- (d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = (x, 0)$, onde \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ denotam grupos aditivos.
- (e) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x$, onde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e \mathbb{Z} são grupos aditivos.
- (f) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 2^x$, onde \mathbb{Z} é grupo aditivo e \mathbb{R}_+^* é grupo multiplicativo.

Exercício 16: Determinar os homomorfismos injetores e os sobrejetores do exercício anterior.

Exercício 17: Determine o núcleo em cada homomorfismo do **Exercício 21**.

Exercício 18: Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = (x - y, 0)$. Provar que f é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em si próprio. Obter $\ker(f)$.

Exercício 19: Seja G um grupo finito com elemento neutro e e suponha que H e K são subgrupos de G tais que $|H| = p$ e $|K| = q$, onde p e q são primos distintos. Mostre que $H \cap K = \{e\}$.

Exercício 20: Sejam G e J grupos multiplicativos, $f : G \rightarrow J$ um homomorfismo de grupos e H um subgrupo de J . Mostre que $f^{-1}(H) = \{x \in G \mid f(x) \in H\}$ é um subgrupo de G .

Exercício 21: Seja $(G, *)$ um grupo e $g \in G$ um elemento fixado e g^{-1} seu inverso. Mostre que a aplicação $i_g : G \rightarrow G$ definida por $i_g(x) = g^{-1} * x * g$, para todo $x \in G$, é um isomorfismo.

Exercício 22: Sejam $f : G \rightarrow H$ e $g : H \rightarrow J$ isomorfismos de grupos. Mostre que

- (a) $g \circ f$ é também isomorfismo de grupos;
- (b) f^{-1} é isomorfismo de grupos.

Exercício 23: Prove que um grupo G é abeliano se, e somente se, $f : G \rightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ é um homomorfismo.

Exercício 24: Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo sobrejetivo de grupos e K um subgrupo de H .

- (a) Mostre que $f^{-1}(K)$ é um subgrupo de G , onde $f^{-1}(K)$ é a imagem inversa de K .
- (b) Mostre que o núcleo $\text{Ker}(f)$ de f é um subgrupo de G e que $\text{Ker}(f) \subset f^{-1}(K)$.

Exercício 25: Seja $f : G \rightarrow J$ um homomorfismo de grupos e $g \in G$ tal que $o(g) = n$.

- (a) Mostre que $f(g)$ tem ordem positiva e que a ordem de $f(g)$ divide n .
- (b) Mostre que se f é isomorfismo, então $o(f(g)) = n$.