



Álgebra 1 - Turma B

2ª Lista de Exercícios – 2º/2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação e sejam A e B subconjuntos de E . Mostre que

- a) Se $A \subset B$, então $f(A) \subset f(B)$.
- b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- d) Se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- e) f é bijetora se, e somente se, $f(A^C) = (f(A))^C$ para todo $A \subseteq E$.

Exercício 2: Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação e sejam $A \subset E$ e $X, Y \subset F$. Mostre que

- a) Se $X \subset Y$, então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.
- b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
- c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
- d) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- e) $f(f^{-1}(X)) = X \cap \text{Im} f$ e conclua que se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.

Exercício 3: Se as aplicações $f : E \rightarrow F$ e $g : F \rightarrow E$ são tais que $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

Exercício 4: Se as aplicações $f : E \rightarrow F$ e $g : F \rightarrow E$ são tais que $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

Exercício 5: Mostrar que toda aplicação injetora (sobrejetora) de um conjunto finito em si mesmo é também sobrejetora (injetora).

Exercício 6: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

- a) f é injetora?
- b) f é sobrejetora?
- c) Obter $f^{-1}(0)$.
- d) Obter $f([0, 1] \times [0, 1])$.

Exercício 7: Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(x, y) = (2x + 3, 4y + 5)$. Prove que f é injetora. Verifique se f é bijetora.

Exercício 8: Mostra que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais, $a \neq 0$, é uma bijeção. Obter f^{-1} .

Exercício 9: Mostrar que $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ dada por $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, onde a, b, c, d são números reais constantes, $ad - bc \neq 0$, é uma bijeção. Descrever a aplicação f^{-1} .

Exercício 10: Achar uma função $f : A \rightarrow B$, com A e B subconjuntos de \mathbb{R} , para cada caso abaixo:

- a) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneq \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.
- b) $A \subsetneq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.
- c) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneq \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.
- d) $A \subsetneq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.

Exercício 11: Classificar (se possível) em injetora ou sobrejetora as seguintes funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

- a) $y = x^3$
- b) $y = x^2 - 5x - 6$
- c) $y = 2^x$
- d) $y = |\sin x|$
- e) $y = x + |x|$
- f) $y = x + 3$

Exercício 12: Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Determinar $f([-1, 1])$, $f([-1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([0, 3])$, $f^{-1}([-1, 3])$ e $f^{-1}(\mathbb{R}_*)$.