



## Álgebra 1 - Turma D – 1<sup>o</sup>/2016

### 6<sup>a</sup> Lista de Exercícios – Anéis

Prof. José Antônio O. Freitas

## Anéis

**Exercício 1:** Consideremos em  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  as operações  $\oplus$  e  $\otimes$  definidas por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \\ (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$  é um anel comutativo e com unidade.

**Exercício 2:** Considere as operações  $\star$  e  $\odot$  em  $\mathbb{Q}$  definidas por

$$x \star y = x + y - 3 \\ x \odot y = x + y - \frac{xy}{3}.$$

Mostre que  $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$  é um anel comutativo e com unidade.

**Exercício 3:** Prove que são anéis:

- a) O conjunto  $\mathbb{Z}$  com a adição usual e o produto  $x \otimes y = 0$ , para todo  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
- b) O conjunto  $\mathbb{Q}$  com as operações  $x \oplus y = x + y - 1$  e  $x \odot y = x + y - xy$ .
- c) O conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  com as operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \\ (a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + bc).$$

Quais destes anéis são comutativos? Quais têm unidade?

**Exercício 4:** Ache os elementos inversíveis dos seguintes anéis:

- a)  $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$  onde  $a \oplus b = a + b - 1$  e  $a \otimes b = a + b - ab$ ;
- b)  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star, \odot)$  onde  $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d)$  e  $(a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc)$ .

**Exercício 5:** Determinar quais dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{Q}$  são subanéis:

- (a)  $\mathbb{Z}$
- (b)  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$
- (c)  $C = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, 2 \mid b \right\}$
- (d)  $D = \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z} \right\}$

**Exercício 6:** Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de  $M_2(\mathbb{R})$ ?

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ L_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ L_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ L_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

**Exercício 7:** Determine todos os subanéis do anel  $(\mathbb{Z}_{16}, \oplus, \otimes)$ .

**Exercício 8:** Verifique se  $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  é um subanel do anel  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 9:** Ache todos os ideais do anel  $\mathbb{Z}_4$ , do anel  $\mathbb{Z}_{12}$  e do anel  $\mathbb{Z}_{16}$ .

**Exercício 10:** Mostre que a interseção de quaisquer dois ideais de um anel comutativo é sempre um conjunto não vazio. Mostre que esse conjunto não vazio é um ideal também.

**Exercício 11:** Ache os ideais primos dos anéis  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_4$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_8$  e  $\mathbb{Z}_{10}$ . O ideal  $\{\bar{0}\}$  do anel  $\mathbb{Z}_4$  é primo?

**Exercício 12:** As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas?

- |                                                   |                                                    |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$ ;          | e) $3\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} = 21\mathbb{Z}$ ; |
| b) $3\mathbb{Z} \subseteq 7\mathbb{Z}$ ;          | f) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$ ; |
| c) $8\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$ ;          | g) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ ;  |
| d) $2\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} = 8\mathbb{Z}$ ; | h) $2\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ ;  |

**Exercício 13:** Seja  $p$  um número primo. Seja  $A$  um ideal de  $\mathbb{Z}$ , tal que  $p\mathbb{Z} \subseteq A$ . Mostre que  $A = \mathbb{Z}$  ou  $A = p\mathbb{Z}$ .

**Exercício 14:** Sejam  $m, n$  inteiros positivos. Mostre que a interseção  $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$  é um ideal de  $\mathbb{Z}$ .

**Exercício 15:** É verdadeiro ou falso que a união de dois ideais de  $\mathbb{Z}$  é um ideal de  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercício 16:** Sejam  $A$  e  $B$  dois ideais de  $\mathbb{Z}$ . Definimos a **soma de ideais**

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

quando  $a$  varia sobre todos os elementos de  $A$  e  $b$  varia sobre todos os elementos de  $B$ . Mostre que a soma de dois ideais de  $\mathbb{Z}$  é um ideal de  $\mathbb{Z}$ .

**Exercício 17:** Considere os anéis  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Verifique se são homomorfismos:

- (a)  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dado por  $f(x, y) = (0, y)$
- (b)  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dado por  $f(x, y) = y$
- (c)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dado por  $f(x) = (2x, 0)$
- (d)  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dado por  $f(x, y) = (-y, -x)$

(e)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dado por  $f(x) = (0, x)$

**Exercício 18:** Determine o kernel dos homomorfismos do Exercício 17.

**Exercício 19:** Seja  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis. Mostre que:

- (a) Se  $C$  é um subanel de  $A$ , então  $f(C)$  é um subanel de  $B$ .
- (b) Se  $D$  é um subanel de  $B$ , então  $f^{-1}(D)$  é um subanel de  $A$ .
- (c) Se  $I$  é um ideal de  $A$ , então  $f(I)$  é um ideal de  $B$ .
- (d) Se  $J$  é um ideal de  $B$  e  $f$  sobrejetora, então  $f^{-1}(J)$  é um ideal de  $A$ .

**Exercício 20:** Dê um exemplo de anéis  $A$  e  $B$  e um homomorfismo  $f : A \rightarrow B$  tal que  $f(1_A) \neq 1_B$ .

**Exercício 21:** Sejam os anéis  $A = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  e  $B = M_2(\mathbb{Q})$ .

(a) Mostre que  $f : A \rightarrow B$  dada por

$$f(a + b\sqrt{-2}) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo.

(b)  $f$  é um isomorfismo?

**Exercício 22:** É verdadeiro ou falso:  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z}_m$  para  $m > 1$  são anéis isomorfos.

**Exercício 23:** Considere os seguintes anéis:  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ , sendo  $a \oplus b = a + b + 1$  e  $a \odot b = a + b + ab$ . Mostre que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x) = x + 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é um isomorfismo de  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  em  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

**Exercício 24:** Seja  $A$  um anel de integridade. Mostre que se  $x \in A$  é tal que  $x^2 = 1$ , então  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

**Exercício 25:** Seja  $A$  é um anel de integridade. Mostre que se  $x \in A$  é tal que  $x^2 = x$ , então  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

**Exercício 26:** Seja  $A$  um anel com unidade tal que  $x^2 = x$  para todo  $x \in A$ . Mostre que  $A$  é um anel de integridade se, e somente se,  $A = \{0, 1\}$ .