



Álgebra 1 - Turma D – 2^o/2016

6^a Lista de Exercícios – Anéis

Prof. José Antônio O. Freitas

Anéis

Exercício 1: Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações \oplus e \otimes definidas por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ é um anel comutativo e com unidade.

Exercício 2: Considere as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$x \star y = x + y - 3$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{3}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ é um anel comutativo e com unidade.

Exercício 3: Prove que são anéis:

- a) O conjunto \mathbb{Z} com a adição usual e o produto $x \otimes y = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.
- b) O conjunto \mathbb{Q} com as operações $x \oplus y = x + y - 1$ e $x \odot y = x + y - xy$.
- c) O conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com as operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + bc).$$

Quais destes anéis são comutativos? Quais têm unidade?

Exercício 4: Ache os elementos inversíveis dos seguintes anéis:

- a) $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ onde $a \oplus b = a + b - 1$ e $a \otimes b = a + b - ab$;
- b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star, \odot)$ onde $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Exercício 5: Determinar quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{Q} são subanéis:

- (a) \mathbb{Z}
- (b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$
- (c) $C = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, 2 \mid b \right\}$
- (d) $D = \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercício 6: Quais dos conjuntos abaixo são subanéis de $M_2(\mathbb{R})$?

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ L_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ L_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ L_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Exercício 7: Determine todos os subanéis do anel $(\mathbb{Z}_{16}, \oplus, \otimes)$.

Exercício 8: Verifique se $L = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subanel do anel \mathbb{R} .

Exercício 9: Ache todos os ideais do anel \mathbb{Z}_4 , do anel \mathbb{Z}_{12} e do anel \mathbb{Z}_{16} .

Exercício 10: Mostre que a interseção de quaisquer dois ideais de um anel comutativo é sempre um conjunto não vazio. Mostre que esse conjunto não vazio é um ideal também.

Exercício 11: Ache os ideais primos dos anéis \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_8 e \mathbb{Z}_{10} . O ideal $\{\bar{0}\}$ do anel \mathbb{Z}_4 é primo?

Exercício 12: Seja p um número primo. Seja A um ideal de \mathbb{Z} , tal que $p\mathbb{Z} \subseteq A$. Mostre que $A = \mathbb{Z}$ ou $A = p\mathbb{Z}$.

Exercício 13: Sejam m, n inteiros positivos. Mostre que a interseção $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ é um ideal de \mathbb{Z} .

Exercício 14: É verdadeiro ou falso que a união de dois ideais de \mathbb{Z} é um ideal de \mathbb{Z} ?

Exercício 15: Sejam A e B dois ideais de \mathbb{Z} . Definimos a **soma de ideais**

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

quando a varia sobre todos os elementos de A e b varia sobre todos os elementos de B . Mostre que a soma de dois ideais de \mathbb{Z} é um ideal de \mathbb{Z} .

Exercício 16: Considere os anéis \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Verifique se são homomorfismos:

- (a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = (0, y)$
- (b) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = y$
- (c) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x) = (2x, 0)$
- (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = (-y, -x)$
- (e) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $f(x) = (0, x)$

Exercício 17: Determine o kernel dos homomorfismos do Exercício 17.

Exercício 18: Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que:

- (a) Se C é um subanel de A , então $f(C)$ é um subanel de B .
- (b) Se D é um subanel de B , então $f^{-1}(D)$ é um subanel de A .
- (c) Se I é um ideal de A , então $f(I)$ é um ideal de B .

(d) Se J é um ideal de B , então $f^{-1}(J)$ é um ideal de A .

Exercício 19: Dê um exemplo de anéis A e B e um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $f(1_A) \neq 1_B$.

Exercício 20: Sejam os anéis $A = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $B = M_2(\mathbb{Q})$.

(a) Mostre que $f : A \rightarrow B$ dada por

$$f(a + b\sqrt{-2}) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo.

(b) f é um isomorfismo?

Exercício 21: É verdadeiro ou falso: \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_m para $m > 1$ são anéis isomorfos.

Exercício 22: Considere os seguintes anéis: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, sendo $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$. Mostre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Exercício 23: Seja A um anel de integridade. Mostre que se $x \in A$ é tal que $x^2 = 1$, então $x = 1$ ou $x = -1$.

Exercício 24: Seja A é um anel de integridade. Mostre que se $x \in A$ é tal que $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$.

Exercício 25: Seja A um anel com unidade tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Mostre que A é um anel de integridade se, e somente se, $A = \{0, 1\}$.