Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Álgebra 1 - Turma C – $1^o/2018$

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – Funções

Prof. José Antônio O. Freitas

Notações:

i) $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

ii) $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

iii) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

iv) $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$

Exercício 1: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) =\mid x - 2 \mid$. Encontre:

a) $f(\{1\})$

b) $f(\{-\sqrt{2}, 3\})$

c) $f([-2, 2])$

d) $f((-3, 5))$

e) $f^{-1}(\{3\})$

f) $f^{-1}(\{-3, 5\})$

g) $f^{-1}([0, 2])$

h) $f^{-1}([-3, 3])$

i) $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$

Exercício 2: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Encontre:

a) $g([-1, 8])$

b) $g(\mathbb{R}_+)$

c) $g^{-1}([-1, 16])$

d) $g(\mathbb{R}_-)$

e) $g^{-1}([1, 25])$

f) $g^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$

Exercício 3: Seja $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^7$. Verifique que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Exercício 4: Dadas as funções $f(x) = 3x + m$ e $g(x) = ax + 2$, determine condições sobre a e m para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Exercício 5: Dada as funções

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determine $f \circ g$.

Exercício 6: Dada as funções

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{se } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 4-x^2, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad g(x) = 2-3x.$$

Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

Exercício 7: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

a) f é injetora?

b) f é sobrejetora?

c) Obter $f^{-1}(0)$.

d) Obter $f([0, 1] \times [0, 1])$.

Exercício 8: Seja $f : A \to [-9, -1)$ dada por $f(x) = \dfrac{4x+3}{3-x}$.

a) Determine A.

b) Mostre que f é injetora.

c) É verdade que f é sobrejetora?

Exercício 9: Seja $f : A \to (1, 10]$ dada por $f(x) = \dfrac{4-11x}{4-2x}$.

a) Determine A.

b) Mostre que f é injetora.

c) É verdade que f é sobrejetora?

Exercício 10: Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(x, y) = (2x + 3, 4y + 5)$. Prove que f é injetora. Verifique se f é bijetora.

Exercício 11: Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais, $a \neq 0$, é uma bijeção. Obter f^{-1}.

Exercício 12: Mostrar que $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ dada por $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c, d são números reais constantes, $ad - bc \neq 0$, é uma bijeção. Descrever a função f^{-1}.

Exercício 13: Achar uma função $f : A \to B$, com A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, para cada caso abaixo:

a) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneqq \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.

b) $A \subsetneqq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f injetora e não sobrejetora.

c) $A = \mathbb{R}$, $B \subsetneqq \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.

d) $A \subsetneqq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e f sobrejetora e não injetora.

Exercício 14: Classificar (se possível) em injetora ou sobrejetora as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2 - 5x - 6$

c) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

e) $f(x) = x + |x|$

f) $f(x) = x + 3$

g) $f(x) = | x - 1 |$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

i) $f(x) = 1 - x^2$

j) $f(x) = |x|(x - 1)$

Exercício 15: Seja $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções tais que $g \circ f = i_A$. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

a) $g = f^{-1}$

b) f é sobrejetora

c) f é injetora

d) g é sobrejetora

e) g é injetora

Exercício 16: Sejam $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to C$ funções. Prove que se h é injetora e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

Exercício 17: Seja $f : A \to B$ uma função e sejam P e Q subconjuntos de A. Mostre que:

a) Se $P \subset Q$, então $f(P) \subset f(Q)$.

b) $f(P \cup Q) = f(P) \cup f(Q)$.

c) $f(P \cap Q) \subset f(P) \cap f(Q)$.

d) Se f é injetora, então $f(P \cap B) = f(P) \cap f(Q)$.

e) f é bijetora se, e somente se, $f(P^C) = (f(P))^C$ para todo $P \subseteq A$. *(Aqui P^C é o complementar de P em relação à A.)*

Exercício 18: Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P \subset A$ e $X, Y \subset B$. Mostre que:

a) Se $X \subset Y$, então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

d) $P \subset f^{-1}(f(P))$.

e) $f(f^{-1}(X)) = X \cap \operatorname{Im} f$ e conclua que se f é sobrejetora então $f(f^{-1}(X)) = X$.

Exercício 19: Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são tais que $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

Exercício 20: Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são tais que $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

Exercício 21: Mostrar que toda função injetora (sobrejetora) de um conjunto finito em si mesmo é também sobrejetora (injetora).