## Álgebra 1 - Turma C $-1^{o}/2020$

## Lista de Exercícios – Semana 03

Prof. José Antônio O. Freitas

Observação: A notação  $A \subsetneq B$  significa que  $A \subset B$  e  $A \neq B$ .

**Exercício 1:** Determinar os elementos dos conjuntos  $A, B \in E$  tais que:

$$A \cap B = \{b, c\}, \quad C_E(A) = \{d, e, f\} \quad \text{e} \quad C_E(B) = \{a, e, f\}.$$

**Exercício 2:** Dados os conjuntos  $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}, C = \{d, e, f, g\},$  determine:

a) 
$$A - (B - C)$$
 e  $(A - B) - C$ 

b) 
$$(A \cap B) - (B \cup C)$$
 e  $(A \cup C) - (A \cup B)$ 

c) 
$$A \cap (B - C)$$
 e  $(A \cap B) - C$ 

d) 
$$A - (B \cup C)$$
 e  $(A - B) \cap (B - C)$ 

**Exercício 3:** Dados os conjuntos  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d\}, A = \{1, 2, 4, d\}$  e  $B = \{a, 2, 4, b, 5\},$  determine:

a) 
$$A \cup B$$

c) 
$$C_E(A) \cup B$$

b) 
$$A \cup C_E(B)$$

d) 
$$C_E(A \cup B)$$

**Exercício 4:** Dados os conjuntos  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  e  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}$  calcule:

a) 
$$A - B$$

$$d) (A - B) - C$$

g) 
$$A - (B \cap C)$$

b) 
$$A - C$$

e) 
$$A - (B - C)$$

h) 
$$(A \cup C) - B$$

c) 
$$B-C$$

f) 
$$(A \cup B) - C$$

i) 
$$(B \cap C) - A$$

**Exercício 5:** Determine os conjuntos E, A e B se:

$$C_E(A) = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$$

$$C_E(B) = \{2, 6, 18, 20\}$$

$$A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}.$$



## **Exercício 6:** Demonstre que:

a) Se 
$$A \subseteq B$$
 e  $C = B - A$ , então  $A = B - C$ .

b) Se 
$$A \cap B = \emptyset$$
 e  $A \cup B = C$ , então  $A = C - B$ .

c) Se 
$$A \cup B = E$$
, então  $C_E(A) \subseteq B$ . (Aqui suponha que  $A, B \subseteq E$ .)

d) Se 
$$A \cap B = \emptyset$$
, então  $A \cup C_E(B) = C_E(B)$ . (Aqui suponha que  $A, B \subseteq E$ .)

e) 
$$A = B$$
 se, e somente se,  $A - B = B - A$ .

f) 
$$A \subseteq B$$
 se, e somente se,  $A - B = \emptyset$ .

g) 
$$C_E(A) \subseteq C_E(B)$$
 se, e somente se,  $A \cup B = A$ . (Aqui suponha que  $A, B \subseteq E$ .)

h) 
$$C_E(A) \subseteq C_E(B)$$
 se, e somente se,  $A \cap B = B$ . (Aqui suponha que A,  $B \subseteq E$ .)

## **Exercício 7:** Demonstre as seguintes igualdades.

a) 
$$A \cup (C_E(A) \cap B) = A \cup B$$
. (Aqui suponha que A,  $B \subseteq E$ .)

b) 
$$A \cap (C_E(A) \cup B) = A \cap B$$
. (Aqui suponha que  $A, B \subseteq E$ .)

c) 
$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$
.

d) 
$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$
.

e) 
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$
.

f) 
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
.

g) 
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$
.

h) 
$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$
.

i) 
$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$
.

$$j) (A \cap B) \cap (A - B) = (A - B) \cap (B - A) = \emptyset.$$

k) 
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$
.

$$1) A - (A - B) = A \cap B.$$

m) 
$$(A - B) - (B - C) = A - B$$
.

n) 
$$(A - B) - B = A - B$$
.

o) 
$$A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$$
.

p) 
$$C_E(A \cap [B \cup C]) = C_E(A) \cup [C_E(B) \cap C_E(C)]$$
. (Aqui suponha que A, B, C  $\subseteq$  E.)

q) 
$$C_E(A \cap B \cap C) = C_E(A) \cup C_E(B) \cup C_E(C)$$
. (Aqui suponha que A, B,  $C \subseteq E$ .)

r) 
$$C_E(A \cup B \cup C) = C_E(A) \cap C_E(B) \cap C_E(C)$$
. (Aqui suponha que A, B,  $C \subseteq E$ .)

**Exercício 8:** Dados conjuntos  $A \in B$ , defina:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Agora considerando os conjuntos  $A,\,B$  e C verifique se as seguintes propriedades são verdadeiras:

a) 
$$A\Delta A = \emptyset$$

b) 
$$A\Delta B = B\Delta A$$

c) 
$$A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$$

d) 
$$A\Delta(A\Delta B) = B$$

e) 
$$B\Delta(A\Delta B) = B$$

f) 
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta (B\Delta C)$$

g) 
$$A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$$

h) 
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

i) 
$$A\Delta B = (A \cap B) - (A \cup B)$$

j) 
$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

**Exercício 9:** Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, r, s\}, B = \{r, s, 2, 3, 4\}, C = \{s, t, 4, 5\}$  e  $D = \{s, t, 5, 6\},$  determine:

a) 
$$(A \times A) \cap (B \times B)$$

b) 
$$A^2 \times C^2$$

c) 
$$(A-B) \times (C-D)$$

d) 
$$(A \cap B) \times (C \cap B)$$

e) 
$$(A \cup B) \times (B \cup D)$$

f) 
$$(A \times B) - (C \times D)$$

g) 
$$(A - B) \times (C \cap D)$$

h) 
$$(A-C)\times(B-D)$$

i) 
$$(A - (C - D)) \times ((D - B) \cup A)$$

j) 
$$(A\Delta B) \times (D\Delta B)$$

**Exercício 10:** Determine conjuntos  $A, B \subseteq E$  tais que:

$$A\Delta B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

$$C_E(A) = \{5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

**Exercício 11:** Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove que:

a) Se 
$$A \subseteq C$$
 e  $B \subseteq D$ , então  $A \times B \subseteq C \times D$ .

b) 
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

c) 
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

d) 
$$A \times B = \emptyset$$
 se, e somente se,  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ .



**Exercício 12:** Sejam  $A, B, C \in D$  conjuntos.

- a) Mostre que A e B são disjuntos se, e somente se, para todo conjunto não vazio C,  $A \times C$  e  $B \times C$  são disjuntos.
- b) Suponha  $A \neq \emptyset$  e  $C \neq \emptyset$ , com  $A \neq C$ . Mostre que  $A \subseteq B$  e  $C \subseteq D$  se, e somente se,  $A \times C \subseteq B \times D$ .

 Exercício 13: Sejam  $X_1,\ X_1,\ Y_1$  e  $Y_2$  subconjuntos contidos num conjunto E. Suponha que  $X_1 \cup X_2 = E, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, X_1 \subseteq Y_1$  e  $X_2 \subseteq Y_2$ . Prove que  $X_1 = Y_1$  e  $X_2 = Y_2$ .