Álgebra 1 - Turma C – $1^o/2020$

Lista de Exercícios – Semana 04

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre $E = \{a, b, c\}$?

a) $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (c, c)\}$

b) $R_2 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (b, c)\}$

c) $R_3 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (a, c); (c, a)\}$

d) $R_4 = E \times E$

e) $R_5 = \emptyset$

Exercício 2: Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$. Defina $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = km, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Exercício 3: Determinar todas as relações de equivalência R sobre A e os respectivos conjuntos quocientes A/R para:

a) $A = \{a\}$;

b) $A = \{a, b\}$;

c) $A = \{a, b, c\}$;

d) $A = \{a, b, c, d\}$.

Exercício 4: Quais das seguintes sentenças definem uma relação de equivalência no conjunto A dado?

a) aRb se, e só se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - b = 3k$, $A = \mathbb{N}$.

b) aRb quando existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = ka$, $A = \mathbb{N}$.

c) aRb quando $a \leq b$, $A = \mathbb{Z}$.

d) xRy quando $xy > 0$, $A = \mathbb{R}$.

e) xRy quando $xy \geq 0$, $A = \mathbb{R}$.

f) $x \sim y$ quando $x + y$ é par, onde $x, y \in \mathbb{Z}$.

g) $x \sim y$ quando $x + y$ é ímpar, onde $x, y \in \mathbb{Z}$.

h) $x \sim y$ quando $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, onde $x, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

i) $x \sim y$ quando $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Z}$, onde $x, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Exercício 5: Seja $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Considere a seguinte relação sobre A:

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } a + b = c + d.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre A.

Exercício 6: Seja $A = \mathbb{R}$ e considere o conjunto definido por

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } 2a - b = 2c - d.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 7: Seja $A = \mathbb{R}^3$. Dados (x, y, z), $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, defina $(x, y, z)R(\alpha, \beta, \gamma)$ quando $z = \gamma$. Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}^3$.

Exercício 8: Seja $A = \mathbb{R}^3$. Dados $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ defina

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Tome um elemento fixo $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e defina

$$u \sim v \text{ quando } u \cdot w = v \cdot w.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9: Para pontos (a, b), $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ defina $(a, b)S(c, d)$ quando $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

a) Prove que S é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$.

b) Liste todos os elementos no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(0, 0)\}$.

c) Liste cinco elementos distintos no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y)S(1, 0)\}$.

Exercício 10: Sejam $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $R = \{(x, y) \in E \times E : x + |x| = y + |y|\}$. Mostrar que R é uma relação de equivalência e descrever E/R.

Exercício 11: Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para (a, b), $(c, d) \in A$, considere a seguinte relação

$$(a, b)R(c, d) \text{ quando } ad = bc.$$

a) Mostre que R é uma relação de equivalência sobre A.

b) Descreva a classe de equivalência $\overline{(0, 1)}$, $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$, $\overline{(2, 1)}$, $\overline{(2, 2)}$, $\overline{(2, 3)}$.

Exercício 12: Considere a seguinte relação sobre $\mathbb{C}$:

$$(x+yi)R(r+si) \text{ quando } x^2+y^2=r^2+s^2.$$

a) Mostre que R é relação de equivalência.

b) Descreva a classe de equivalência de $1+i$.

Exercício 13: Considere a seguinte relação sobre $\mathbb{Z}$:

$$x \sim y \text{ quando } x^2-y^2=4k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

a) Mostre que $\sim$ é relação de equivalência.

b) Determine todas as classes de equivalência de $\sim$.

Exercício 14: Seja $\sim$ uma relação sobre $\mathbb{Q}$ definida da seguinte forma:

$$x \sim y \text{ quando } x-y \in \mathbb{Z}.$$

a) Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Q}$.

b) Descreva a classe $\bar{1}$.

c) Descreva a classe $\overline{1/2}$.

Exercício 15: Defina

$$H=\{2^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \mathbb{Q}^+=\{x \in \mathbb{Q} \mid x>0\}.$$

Seja R dado por

$$R=\left\{(x,y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ : \frac{x}{y} \in H\right\}.$$

a) Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Q}^+$.

b) Determine a classe de equivalência de 3.

Exercício 16: A divisibilidade (ou seja, a relação definida por xRy se, e só se, $x \mid y$) é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$?

Exercício 17: Seja R a seguinte relação sobre $\mathbb{Z}^*$:

$$xRy \text{ quando existem } k,l \in \mathbb{Z} \text{ tais que } y=kx \text{ e } x=ly.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}^*$ e descreva o conjunto quociente $\mathbb{Z}^*/R$.

Exercício 18: Seja $R=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que R é uma relação de equivalência e descrever as classes representadas por $1/2$ e $\sqrt{2}$.

Exercício 19: Seja A um conjunto não vazio. Suponha que $R \subseteq A \times A$ é tal que:

a) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$;

b) Para todos x, y, $z \in A$ se $(x, y) \in R$ e $(x, z) \in R$, então $(y, z) \in R$.

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre A.

Exercício 20: Seja A um conjunto não vazio. Suponha que R_1 e R_2 são relações de equivalências sobre A. Defina

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \in R_1 \text{ e } (x, y) \in R_2\}.$$

Mostre que:

a) R é uma relação de equivalência sobre A.

b) Se $c_R(x)$, $c_{R_1}(x)$ e $c_{R_2}(x)$ denota a classe de equivalência de x com respeito a R, R_1 e R_2, mostre que $c_R(a) = c_{R_1}(a) \cap c_{R_2}(a)$.