$$
\begin{bmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \acute{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *
\end{bmatrix}
$$

Notas de Aula 1/2017[1]

26 de junho de 2018

José Antônio O. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília - UnB

SUMÁRIO

1 Sistemas Lineares E Matrizes **5**

1.1 Corpos 5

1.2 Corpos Finitos 8

1.3 Sistemas Lineares 12

1.4 Matrizes e Determinantes 32

2 Espaços Vetoriais **37**

2.1 Subespaços 47

2.2 Espaços de dimensão infinita 54

3 Transformações Lineares **57**

3.1 Conceitos Básicos 57

3.2 Isomorfismos 67

3.3 Transformações Lineares e Matrizes 70

4 Formas Canônicas **83**

4.1 Operadores Diagonalizáveis 86

4.2 Subespaços T-invariantes 95

4.3 Polinômio Minimal 99

4.4 Como encontrar a base de Jordan 115

5 Espaços com produto interno **121**

5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt 126

Bibliografia **129**

Índice Remissivo **131**

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

1.1 Corpos

Definição 1.1. *Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é chamado de **corpo** se em $\mathbb{K}$ podemos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) de modo que*

$$a + b \in \mathbb{K}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{K}$$

para todos a, $b \in \mathbb{K}$ e que satisfaçam as seguintes propriedades:

A1) ***Comutatividade da soma**: $a + b = b + a$ para todos a, $b \in \mathbb{K}$;*

A2) ***Associatividade da soma**: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$;*

A3) ***Elemento neutro da soma**: Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $0_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente 0 e chamado de **elemento neutro da adição**, que satisfaz*

$$a + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$. (Elemento neutro da soma)

A4) ***Elemento oposto da soma****: Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $-a$ e chamado de* ***oposto*** *de a ou* ***inverso aditivo*** *de a tal que*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_{\mathbb{K}}.$$

M1) ***Comutatividade da multiplicação****: $a \cdot b = b \cdot a$ para todos a, $b \in \mathbb{K}$;*

M2) ***Associatividade da multiplicação****: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$;*

M3) ***Elemento neutro da multiplicação****: Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $1_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente 1 e chamado de* ***elemento neutro da multiplicação*** *ou* ***unidade****, que satisfaz*

$$a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$.

M4) ***Elemento inverso da multiplicação****: Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1} e chamado de* ***inverso multiplicativo*** *de a tal que*

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_{\mathbb{K}}.$$

D) ***Distributividade da soma em relação à multiplicação****: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$.*

Para simplificar a notação vamos escrever

$$a \cdot b = ab.$$

Denotamos um corpo $\mathbb{K}$ pela terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Quando não houver chance de confusão em relação às operações de soma e multiplicação envolvidas no corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, vamos simplesmente dizer que $\mathbb{K}$ é um corpo. Os elementos de um corpo $\mathbb{K}$ são chamados de **escalares**.

Exemplo 1.1.1. *1. São exemplos de corpos os conjuntos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ com as operações de soma e multiplicações usuais destes conjuntos.*

2. *O conjunto $\mathbb{Z}$ com a soma e multiplicações usuais não é um corpo, pois por exemplo, não existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $2b = 1$.*

3. *Seja*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dados $a + b\sqrt{2},\ c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, defina

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

Além disso, $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Aqui o elemento neutro da adição é 0, o elemento neutro da multiplicação é 1, o oposto aditivo de $a + b\sqrt{2}$ é $-a - b\sqrt{2}$ e o inverso multiplicativo de $a + b\sqrt{2}$ é $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ para $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Propriedades importantes: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Então

1. O elemento neutro da soma é único.

   Solução: *De fato, suponha que 0_1 e 0_2 sejam elementos neutros da soma em $\mathbb{K}$. Temos*

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

2. O oposto aditivo de cada elemento de $\mathbb{K}$ é único.

   Solução: *Sejam b e c elementos opostos de a, então*

$$b = b + 0_{\mathbb{K}} = b + (c + a) = (b + a) + c = 0_{\mathbb{K}} + c = c.$$

3. Vale a lei do cancelamento, isto é, se $a + b = a + c$ então $b = c$.

4. Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$.

   Solução: *De fato,*

$$a \cdot 0_{\mathbb{K}} = a \cdot (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) = a \cdot 0_{\mathbb{K}} + a \cdot 0_{\mathbb{K}},$$

logo pela lei do cancelamento, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ como queríamos.

5. O elemento neutro da multiplicação é único.

   Solução: *De fato, suponha que* 1_a *e* 1_b *sejam elementos neutros da multiplicação. Então*

   $$1_a = 1_a \cdot 1_b = 1_b.$$

6. O inverso de um elemento não nulo é único.

   Solução: *Dado* $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, *suponha que* b, $c \in \mathbb{K}$ *sejam tais que*

   $$ab = 1 \quad ac = 1.$$

   Então

   $$b = 1b = (ac)b = c(ab) = c1 = c.$$

7. Se $a \in \mathbb{K}$ é tal que $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ e $ab = ac$, então $b = c$.

8. Se $ab = 0_{\mathbb{K}}$, com a e $b \in \mathbb{K}$, então $a = 0_{\mathbb{K}}$ ou $b = 0_{\mathbb{K}}$.

   Solução: *Suponha que* $a \neq 0_{\mathbb{K}}$, *então existe* a^{-1}. *Daí*

   $$\begin{aligned} &ab = 0_{\mathbb{K}} \\ &a^{-1}(ab) = a^{-1}0_{\mathbb{K}} \\ &1b = 0_{\mathbb{K}} \\ &b = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

1.2 Corpos Finitos

Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Dado $a \in \mathbb{Z}$, sempre é possível escrever

$$a = bp + r,$$

onde b, $r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r \leq p-1$. Assim quando efetuamos a divisão inteira de qualquer número inteiro a por p os possíveis restos são: 0, 1, 2, ..., $p-1$.

Assim vamos considerar o seguinte conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

onde

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{bp \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \ldots\} \\
\overline{1} &= \{bp + 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 1, \pm 2p + 1, \pm 3p + 1, \ldots\} \\
\overline{2} &= \{bp + 2 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 2, \pm 2p + 2, \pm 3p + 2, \ldots\} \\
&\vdots \\
\overline{p-1} &= \{bp + (p-1) \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{(b+1)p - 1) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{cp - 1 \mid c \in \mathbb{Z}\} = \{-1, \pm p - 1, \pm 2p - 1, \pm 3p - 1, \ldots\}.
\end{aligned}$$

defina em $\mathbb{Z}_p$ a soma $\oplus$ e a multiplicação $\otimes$ por: para $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{Z}_p$

$$\begin{aligned}
\overline{x} \oplus \overline{y} &= \overline{x+y} \\
\overline{x} \otimes \overline{y} &= \overline{xy},
\end{aligned}$$

onde sob a barra estamos usando a soma e multiplicação usuais dos inteiros. Para determinar o valor de $\overline{x+y}$ e de $\overline{xy}$, encontramos o resto da divisão inteira de $x + y$ por p e de xy por p. Logo

$$\begin{aligned}
\overline{x} \oplus \overline{y} &\in \mathbb{Z}_p \\
\overline{x} \otimes \overline{y} &\in \mathbb{Z}_p.
\end{aligned}$$

Exemplos 1.1.1. *1. Para $p = 3$ os possíveis restos na divisão inteira são: 0, 1 e 2. Daí*

$$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

e temos

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Note que a soma $\oplus$ *e o produto* $\otimes$ *em* $\mathbb{Z}_3$ *são comutativos, a soma possui elemento neutro que é* $\overline{0}$*, todo elemento possui oposto aditivo. A multiplicação possui unidade que é* $\overline{1}$ *e todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo. É simples verificar que a soma e o produto em* $\mathbb{Z}_3$ *são associativos e o produto é distributivo em relação à soma. Portanto,* $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \otimes)$ *é um corpo. Além disso, em tal corpo temos*

$$(\overline{1} \oplus \overline{1}) \oplus \overline{1} = (\overline{1+1}) \oplus \overline{1} = \overline{2} \oplus \overline{1} = \overline{3} = \overline{0}.$$

e $\overline{1} \neq \overline{0}$.

2. *Para* $p = 5$ *os possíveis restos na divisão inteira são:* 0, 1, 2, 3 *e* 4*. Daí*

$$\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

e temos

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Note que a soma $\oplus$ *e o produto* $\otimes$ *em* $\mathbb{Z}_5$ *são comutativos, a soma possui elemento neutro que é* $\overline{0}$*, todo elemento possui oposto aditivo. A multiplicação possui unidade que é* $\overline{1}$ *e todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo. É simples verificar que a soma e o produto em* $\mathbb{Z}_5$ *são associativos e o produto é distributivo em relação à soma. Portanto,* $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ *é um corpo. Além disso, em tal corpo temos*

$$\overline{1} \oplus \overline{1} \oplus \overline{1} \oplus \overline{1} \oplus \overline{1} = \overline{1+1+1+1+1} = \overline{5} = \overline{0}.$$

e $\overline{1} \neq \overline{0}$.

Teorema 1.1. *Para todo* $p \in \mathbb{Z}$*,* p *número primo,* $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ *é um corpo.*

Prova: Dados $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in \mathbb{Z}_p$ temos:

A1) $\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \overline{y} \oplus \overline{x}$;

A2) $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = (\overline{x+y}) \oplus \overline{z} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+(y+z)} = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$

A3) Temos que $\overline{0} \in \mathbb{Z}_p$ e para todo $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$:

$$\overline{0} \oplus \overline{x} = \overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{x+0} = \overline{x}.$$

Logo $\overline{0}$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}_p$.

A4) Dado $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$, tome $\overline{p-x} \in \mathbb{Z}_p$, pois $0 \leq p - x \leq p - 1$. Assim

$$\overline{x} \oplus \overline{p-x} = \overline{p-x} \oplus \overline{x} = \overline{(p-x)+x} = \overline{p} = \overline{0}.$$

Logo todo elemento de $\mathbb{Z}_p$ possui oposto aditivo.

M1) $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{x \cdot y} = \overline{y \cdot x} = \overline{y} \otimes \overline{x}$.

M2) $(\overline{x} \otimes \overline{y}) \otimes \overline{z} = (\overline{x \cdot y}) \otimes \overline{z} = \overline{(x \cdot y) \cdot z} = \overline{x \cdot (y \cdot z)} = \overline{x} \otimes (\overline{y} \otimes \overline{z})$.

M3) O elemento $\overline{1} \in \mathbb{Z}_p$ é tal que

$$\overline{1} \otimes \overline{x} = \overline{x} \otimes \overline{1} = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$$

para todo $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$.

M4) Primeiramente, como p é um número primo então existem y, $z \in \mathbb{Z}$ tais que

$$xy + pz = 1$$

para todo $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\overline{xy + pz} = \overline{1} \\
&\overline{xy} \oplus \overline{pz} = \overline{1} \\
&\overline{x} \otimes \overline{y} + \overline{p} \otimes \overline{z} = \overline{1} \\
&\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{1}
\end{aligned}$$

uma vez que $\overline{p} = \overline{0}$. Como $\overline{y}$ é obtido pelo resto da divisão inteira de y por p, então $\overline{y} \in \mathbb{Z}_p$. Observe que $y \neq 0$ pois $p \geq 2$ e $y \neq p$ pois senão $(a+p)y = 1$ o que é impossível uma vez que $p \geq 2$. Logo $\overline{y} \neq 0$ e assim todo elemento $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$ possui inverso multiplicativo.

D) $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \otimes \overline{z} = (\overline{x+y}) \otimes \overline{z} = \overline{(x+y)\cdot z} = \overline{xz+yz} = \overline{xz} \oplus \overline{yz} = \overline{x} \otimes \overline{z} \oplus \overline{y} \otimes \overline{z}$.

Portanto, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ é um corpo, como queríamos demonstrar. $\diamondsuit$

Observação 1.1.1. *1. Se p não for um número primo, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ pode não ser corpo. Por exemplo, em $\mathbb{Z}_6$ temos $\overline{2} \neq \overline{0}$ e $\overline{3} \neq \overline{0}$, mas*

$$\overline{2} \otimes \overline{3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} = \overline{0}.$$

2. Para simplificar a notação vamos denotar $\oplus$ por $+$ e $\otimes$ por $\cdot$. Assim vamos dizer simplesmente que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ é um corpo.

1.3 Sistemas Lineares

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Consideremos o problema de determinar n escalares, ou seja, n elementos x_1, x_2, ..., x_n em $\mathbb{K}$ que satisfaçam as condições

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

onde b_1, ..., b_m e a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ são elementos de $\mathbb{K}$ previamente conhecidos. Chamamos (1.1) de um **sistema de m equações lineares a n incógnitas**. Toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de $\mathbb{K}$ que satisfazem a cada uma das equações de (1.1) é chamada de uma **solução** do sistema.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0_{\mathbb{K}} \in K$, dizemos que o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \tag{1.2}$$

é um **sistema linear homogêneo**, ou que cada uma de suas equações é homogênea. Observe que tal sistema sempre possui solução, a saber, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$.

O método mais importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método do **escalonamento**. Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

onde o corpo considerado é $\mathbb{R}$.

Observe que multiplicando a segunda equação de (1.3) por -2 e somando o resultado à primeira equação obtemos

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

o que resulta em $x_2 = -x_3$. Agora se multiplicarmos a primeira equação de (1.3) por 3 e somarmos com a segunda, obtemos

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

e daí $x_1 = -x_3$.

Assim para que uma terna (x_1, x_2, x_3) de números reais seja solução de (1.3) deve satisfazer

$$x_1 = x_2 = -x_3.$$

Por outro lado, qualquer terna da forma $(a, a, -a)$ é solução de (1.3). Portanto a solução de (1.3) é da forma

$$(a, a, -a)$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

No caso de um sistema linear da forma (1.1), o processo de eleminação de variáveis será feito mediante o uso de 3 tipos de operações. São elas:

e_1) Troca da posição de duas equações.

e_2) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.

e_3) Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Estas três operações são chamadas de **operações elementares**.

Exemplo 1.1.2. *Considere o seguinte sistema sobre o corpo* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Efetuando operações elementares podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \quad L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \qquad L_3 \to L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 2x_3 = 2 \quad L_2 \to (-1/3)L_2 \\ \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \qquad L_3 \to L_3 + 7L_2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ \qquad - (1/3)x_3 = -(2/3) \end{cases}$$

Assim encontramos

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

Definição 1.2. *Dois sistemas de equações lineares são chamados de* ***equivalentes*** *se, e somente, se toda solução de qualquer um dos sistemas é solução do outro.*

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.4}$$

com o objetivo de simplificar sua notação vamos escrevê-lo na forma

$$AX = B \tag{1.5}$$

onde

1. $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

   é chamada **matriz dos coeficientes do sistema**;

2. $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

3. $$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad ; \quad b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{K}.$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (1.1) é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que é chamada de **matriz ampliada do sistema** ou **matriz aumentada do sistema**.

Na forma matricial as operações elementares são descritas como:

e_1) Trocar a i-ésima linha de A pela j-ésima linha de A: $L_i \leftrightarrow L_j$;

e_2) Multiplicação da i-ésima linha de A por um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ não nulo: $L_i \to \alpha L_i$;

e_3) Substituição da i-ésima linha de A pela i-ésima linha mais α vezes a j-ésima linha: $L_i \to L_i + \alpha L_j$.

Observação 1.2.1. *Denotaremos a matriz*

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix},$$

onde $0_{\mathbb{K}}$ *é o elemento neutro da soma no corpo* $\mathbb{K}$, *simplesmente por* 0.

Uma razão para nos restringirmos a estes três tipos simples de operações sobre linhas é que, tendo efetuado uma tal operação e sobre uma matriz A, podemos desfazer essa operação efetuando uma operação de mesmo tipo sobre $e(A)$.

Teorema 1.2. *A cada operação elementar sobre linhas* e, *corresponde uma operação elementar sobre linhas* e', *do mesmo tipo que* e, *tal que* $e'(e(A)) = A$ *para qualquer matriz* A. *Em outras palavras, a operação inversa de uma operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas do mesmo tipo.*

Prova: Vamos verificar que cada uma das operações elementares possui uma operação inversa. Seja A uma matriz $m \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

e1) Suponha que e seja a operação que troca a linha i pela linha j de A. Temos

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Então, seja e' a operação que troca a linha i pela linha j de $e(A)$. Assim

$$e'(e(A)) = A$$

como queríamos.

e2) Suponha que e seja a operação que multiplica a i-ésima de A por $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Temos

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Seja e' a operação que multiplica a linha i de $e(A)$ por $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$. Então

$$e'(e(A)) = A.$$

e3) Suponha que e seja a operação que substitui a linha i de A pela linha i mais α vezes a linha j. Temos

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Seja e' a operação que substitui a linha i de $e(A)$ pela linha i mais $(-\alpha)$ vezes a linha j. Então

$$e'(e(A)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} + (-\alpha)a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} + (-\alpha)a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} + (-\alpha)a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

e assim

$$e'(e(A)) = A.$$

Portanto cada operação elementar sobre linhas possui uma operação inversa. $\diamondsuit$

Definição 1.3. *Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é **linha-equivalente** a A, se B for obtida de A através de uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de A.*

Notação 1.3.1. *$A \to B$ ou $A \sim B$.*

Exemplo 1.3.1. *A matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é linha equivalente à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

pois

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{-4} \\ \hookleftarrow_{+} \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{3} \\ \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mid \times -1$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \urcorner^{-4} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Teorema 1.3. *Se X_1 e X_2 são duas soluções de*

$$AX = 0,$$

então $\alpha X_1 + \beta X_2$ também é solução de $AX = 0$, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.4. *Se A e B são matrizes $m \times n$ que são linha-equivalentes, então os sistemas homogêneos de equações lineares $AX = 0$ e $BX = 0$ têm exatamente as mesmas soluções.*

Prova: Suponha que podemos obter a matriz B à partir da matriz A por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_r = B.$$

Nesta situação, para provar que $AX = 0$ e $BX = 0$ tem as mesmas soluções basta provar que $A_iX = 0$ e $A_{i+1}X = 0$ tem as mesmas soluções, isto é, que uma operação elementar sobre linhas não altera o conjunto das soluções.

Assim podemos supor que B é obtida de A por meio de uma única operação elementar. Qualquer que seja a operação elementar, e_1 ou e_2 ou e_3, cada equação do sistema $BX = 0$ será uma combinação das equações do sistema $AX = 0$. Como a inversa de uma operação elementar sobre linhas é ainda uma operação elementar sobre linhas, cada equação de $AX = 0$

também será uma combinação das equações em $BX = 0$. Logo toda solução de $AX = 0$ também é solução de $BX = 0$ e toda solução de $BX = 0$ também é solução de $AX = 0$, como queríamos. ♢

Exemplo 1.3.2. *Considere o sistema homogêneo $AX = 0$, onde:*

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. *Para encontrar a solução deste sistema só precisamos encontrar uma matriz B que seja linha equivalente à A e que seja mais fácil de determinar a solução do sistema resultante. Assim, vamos executar as operações elementares em A de modo a simplificá-la:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -2 \\ + \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \times -1/2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 9 \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \end{bmatrix}$$

assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + (1/2)x_3 - (7/2)x_4 = 0 \\ (15)/2x_3 - (55/2)x_4 = 0 \end{cases}.$$

Isolando x_3 na última equação temos a solução dada por

$$S = \left\{ \left(\frac{-17}{3}x_4, \frac{5}{3}x_4, \frac{11}{3}x_4, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Temos:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+2i \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \mid \times \frac{3-2i}{13} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x_1 = x_2 = 0$.

Definição 1.4. *Uma matriz R $m \times n$ é chamada de* ***linha-reduzida*** *se:*

(i) o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula de R é $1_{\mathbb{K}}$.

(ii) cada coluna de R que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos.

Exemplo 1.4.1. *1. Um exemplo de uma matriz linha-reduzida é a matriz identidade $n \times n$. Tal matriz pode ser definida por*

$$I = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

O símbolo δ_{ij} é chamada ***símbolo de Kronecher*** *é será utilizado com certa frequência.*

2. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não são linha-reduzidas.

Teorema 1.5. *Toda matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida.*

Prova: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se todo elemento na primeira linha de A é $0_{\mathbb{K}}$, então a condição (a) de (1.4) está satisfeita no que diz respeito a linha 1. Se a linha 1 tem um elemento não nulo, seja r o menor inteiro positivo j tal que $a_{1r} \neq 0$. Multiplique a linha 1 por a_{1r}^{-1} e condição (a) de (1.4) está satisfeita em relação a linha 1. Agora, para cada $i \geq 2$, somemos $-a_{ir}$ vezes a linha 1 à linha i. Assim o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorre na coluna r, este elemento é $1_{\mathbb{K}}$, e todos os outros elementos da coluna r são nulos.

Considere agora a matriz que resultou das operações acima. Se todo elemento na linha 2 é nulo, nada há a fazer. Se algum elemento na linha 2 é não nulo, multiplicamos a linha 2 por um escalar de modo que o primeiro elemento não nulo da linha 2 seja $1_{\mathbb{K}}$. Caso o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorra na coluna r, o primeiro elemento não nulo da linha 2 não pode ocorrer na coluna r. Digamos então que ele ocorra na coluna r'. Somando múltiplos adequados da linha 2 às diversas linhas, podemos fazer com que todos os elementos da coluna r' seja nulos, com exceção do elemento $1_{\mathbb{K}}$ da linha 2. O importante a ser observado é: ao efetuarmos estas últimas operações, não alteramos os elementos da linha 1 na colunas 1, 2, ..., r; além disso, não alteramos nenhum elemento da coluna r. É claro que, se a linha 1 fosse identicamente nula, as operações com a linha 2 não afetariam a linha 1.

Operando com uma linha de cada vez da maneira acima, é evidente que, com uma quantidade finita de passos, chegamos a uma matriz linha-reduzida. $\diamondsuit$

Definição 1.5. *Uma matriz R $m \times n$ é chamada uma **matriz linha-reduzida à forma em escada** se:*

1. R é linha-reduzida;

2. *toda linha de R cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem uma elemente não-nulo;*

3. *se as linhas 1, 2, ..., r são as linhas não-nulas de R e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i, $i = 1, ..., r$, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

Exemplo 1.5.1. *1. A matriz identidade e a matriz nula são linha-reduzidas à forma escada;*

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *Não é linha-reduzida à forma escada.*

3. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Não é linha-reduzida à forma escada.*

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *É linha-reduzida à forma escada.*

Teorema 1.6. *Toda matriz A $m \times n$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada.*

Prova: Sabemos que A é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida. Portanto, basta notar que, efetuando uma quantidade finita de permutações das linhas de uma matriz linha-reduzida, podemos transformá-la numa matriz linha-reduzida à forma em escada. ◇

Definição 1.6. *Dada uma matriz A $m \times n$, seja B $m \times n$ a matriz linha-reduzida à forma em escada linha-equivalente a A. O **posto** de A, denotado por p, é o número de linhas não-nulas de B. A **nulidade** de A é o número $n - p$.*

Exemplo 1.6.1. *Qual o posto e a nulidade da matriz A, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Precisamos primeiro reduzir A a sua forma escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (1/2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \mid \times 1/8$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix}$$

Logo o posto de A é $p = 3$ e a nulidade é $n - p = 4 - 3 = 1$.

Considere o sistema

$$AX = B \tag{1.6}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo $\mathbb{K}$ e X é uma matriz $n \times 1$. Observe que, enquanto uma sistema homogêneo $AX = 0$ sempre admite a solução

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}},$$

um sistema não homogêneo pode ter:

1. Uma única solução $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, ..., n$. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e determinado**.

2. Mais de uma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**. Caso o corpo $\mathbb{K}$ tenha infinitos elementos, o sistema terá infinitas soluções.

3. Nenhuma solução. Neste caso dizemos o que sistema é **impossível**.

Com o objetivo de resolver o sistema (1.6) vamos começar formando a matriz ampliada

$$P = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}.$$

Sabemos que P é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada R. A última coluna de R contém elementos z_1, z_2, ..., z_m que são resultados das operações elementares aplicadas à matriz P. Seja

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

Então R pode ser escrita como $R = [R' \mid Z]$. Como no caso homogêneo, é possível mostrar que os sistemas

$$AX = B \text{ e } R'X = Z$$

possuem exatamente as mesmas soluções.

As possibilidades para as soluções de tal sistema são descritas no seguinte teorema:

Teorema 1.7. *Considere o sistema*

$$AX = B$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo $\mathbb{K}$ e X é uma matriz $n \times 1$. Então:

1. *O sistema tem solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*

2. *Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p = n$, então a solução é única.*

3. *Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p < n$, então podemos escolher $n-p$ variáveis, e as outras p variáveis serão dadas em função destas $n-p$ variáveis escolhidas.*

O número $n-p$ é chamado de ***grau de liberdade*** *e as $n-p$ variáveis são chamadas de* ***variáveis livres****.*

Prova: 1^a *Parte: Se existe solução para o sistema, então a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto:* Para mostrar isso, vamos provar que se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes tiverem postos diferentes, então o sistema não terá solução. Observe primeiro que o posto da matriz ampliada não pode ser menor que o posto da matriz dos coeficientes uma vez que a matriz ampliada é formada a partir da matriz dos coeficientes. Assim o único caso possível é o posto da matriz ampliada ser maior que o posto da matriz dos coeficientes. Então esta matriz, quando reduzida à forma em escada deve conter uma linha da forma

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & | & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Logo o sistema associado a essa matriz tem uma equação do tipo

$$0_{\mathbb{K}}x_1 + 0_{\mathbb{K}}x_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}x_n = 1_{\mathbb{K}}$$

o que é impossível. Logo não existe solução.

2^a *Parte: Se o posto é igual, então existe solução:* Nesta situação podem ocorrer dois casos:

1. Se $p = n$, então a matriz linha-reduzida à forma em escada tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & z_n \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema será

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \cdots, x_n = z_n.$$

2. Se $p \neq n$, então devemos ter $p < n$. Caso $p > n$, como a matriz está na forma escada o elemento $1_{\mathbb{K}}$ deve ocorrer em duas linhas diferentes, mas na mesma coluna. Mas neste caso, podemos anular uma destas linhas repetidas. Logo, $p < n$. Neste caso a matriz na forma escada pode ter a forma:

   (a)
   $$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+1} & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+1} & a_{2p+2} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+1} & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

   Neste caso teremos

   $$\begin{cases} x_1 = z_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - a_{1p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2 = z_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - a_{2p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+1}x_{p+1} - a_{pp+2}x_{p+2} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

   e o sistema terá mais de uma solução, sendo x_{p+1} , x_{p+2}, ..., x_n as variáveis livres.

   (b) Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

   $$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+2} & a_{1p+3} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+2} & a_{2p+3} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+2} & a_{pp+3} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_2 = z_1 - a_{1p+2}x_{p+2} - a_{1p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_3 = z_2 - a_{2p+3}x_{p+3} - a_{2p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+2}x_{p+2} - a_{pp+3}x_{p+3} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo x_1, x_{p+1} , x_{p+2}, ..., x_n as variáveis livres.

Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que para qualquer posto $p < n$ teremos um sistema com mais de uma solução e $n - p$ variáveis livres.

Portanto a condição (i) do teorema está provada.

Observe que os itens (ii) e (iii) foram automaticamente demonstrados nos itens (a) e (b) anteriores.

Logo o teorema está provado. $\diamondsuit$

Exemplo 1.6.2. *Encontre a solução dos seguintes sistemas lineares:*

1. $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$ *em* $\mathbb{R}$.

Solução: *A matriz dos coeficentes deste sistema é*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 1$ e a nulidade é 2, ou seja, temos duas variáveis livres, a saber y e z. Logo a solução é dada por

$$x = -3y - z; \quad y,\ z \in \mathbb{R}.$$

Que pode ser escrita como

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-3y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

2. $\begin{cases} \overline{1}x + \overline{4}y + \overline{2}z = \overline{6} \\ \overline{1}x + \overline{5}y + \overline{2}z = \overline{2} \\ \overline{2}x + \overline{3}y + \overline{4}z = \overline{4} \\ \overline{4}x + \overline{5}y + \overline{1}z = \overline{5} \end{cases}$ *em $\mathbb{Z}_7$.*

Solução: *A matriz ampliada do sistema é*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{5} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{5} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A a forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{5} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{5} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \overline{6}\ \overline{5}\ \overline{3} \\ + \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} + \\ \overline{3}\ \overline{5}\ \overline{4} \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 2$ e a nulidade é 1. Logo temos uma única variável livre que é z. A solução então é dada por

$$x = \overline{1} + \overline{5}z, \quad y = \overline{3}, \quad z \in \mathbb{Z}_7.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_7\} = \{(\overline{1} + \overline{5}z, \overline{3}, z) \mid z \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Tal conjunto contém exatamente 7 soluções distintas.

3. $\begin{cases} \overline{2}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{2}x_4 = \overline{7} \\ \overline{3}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{9} \\ \overline{1}x_1 + \overline{4}x_3 + \overline{3}x_4 = \overline{6} \\ \overline{5}x_1 + \overline{1}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{9} \end{cases}$ *em* $\mathbb{Z}_{11}$.

Solução: *A matriz ampliada do sistema é*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{9} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{9} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A=\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{2}&\overline{7}\\ \overline{3}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{1}&\overline{9}\\ \overline{1}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{3}&\overline{6}\\ \overline{5}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{9}\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{3}&\overline{6}\\ \overline{3}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{1}&\overline{9}\\ \overline{2}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{2}&\overline{7}\\ \overline{5}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{9}\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{3}&\overline{6}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{3}&\overline{2}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{5}&\overline{7}&\overline{6}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{3}&\overline{8}&\overline{1}\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{3}&\overline{6}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{3}&\overline{2}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{4}&\overline{4}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{3}&\overline{8}&\overline{1}\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ \\ |\times\overline{3}\\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{4}&\overline{3}&\overline{6}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{3}&\overline{2}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{1}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{3}&\overline{8}&\overline{1}\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{10}&\overline{2}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{2}&\overline{1}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{1}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{5}&\overline{9}\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ \\ \\ |\times\overline{9}\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{10}&\overline{2}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{2}&\overline{1}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{1}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{4}\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{6}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{4}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{8}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{4}\end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p=4$ e a nulidade é 0. Logo o sistema tem uma única solução dada por

$$x_1=\overline{6}, x_2=\overline{4}, x_3=\overline{8}, x_4=\overline{4}.$$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4\\ x_1+x_3=6\\ 2x_1-3x_2+5x_3=4\end{cases}$ *em* $\mathbb{Q}$.

Solução: *A matriz dos coeficentes deste sistema é*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema não tem solução. Note que o posto da matriz ampliada é $p = 3$ e a posto da matriz dos coeficientes é 2.

1.4 Matrizes e Determinantes

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Denotamos por $\mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $p \times q$ com entradas em $\mathbb{K}$. A soma e o produtos de matrizes são definidos de modo usual.

Quando $p = q = n$, dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que denotaremos simplesmente por $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, é **quadrada**. Tal conjunto tem elemento neutro para a multiplicação de matrizes que é a **matriz identidade** I_n dada por

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.7. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$ é chamada uma* ***inversa à esquerda*** *de A; uma matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_n$ é chamada uma* ***inversa à direita*** *de A. Se $AB = BA = I_n$, então A é chamada* ***invertível****.*

Proposição 1.7.1. *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui uma inversa à esquerda B e uma inversa à direita C, então $B = C$.*

Proposição 1.7.2. *Sejam A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Se A é invertível, então A^{-1} também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2. *Se A e B são invertíveis, então AB também o é e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Dada um matriz A como encontrar sua inversa? Por exemplo, para $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como achar

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

tal que $AB = BA = I_2$? Queremos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então os seguintes sistemas para resolver:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases}.$$

Assim podemos considerar a matriz ampliada contendo colunas correspondentes a cada um dos sistemas e reduzí-la à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \;|\; \times(-1/2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

é tal que $AB = BA = I_2$.

Portanto, determinar se uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui inversa ou não é equivalente à resolver um sistema linear. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.8. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é invertível;*

2. *O sistema homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial;*

3. *O sistema $AX = Y$, onde Y é uma matriz $n \times 1$, possui uma única solução para qualquer Y.*

Corolário 1.8.1. *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e se uma sequência de operações elementares sobre linhas reduz A à matriz unidade, então essa mesma sequência de operações elementares sobre linhas quando aplicadas à matriz I_n, resulta em A^{-1}.*

Exemplo 1.7.1. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a inversa de A, se existir.

Solução: *Temos*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid -1 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid 1/3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Logo A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Faremos agora a definição de **determinante** de modo indutivo na ordem de uma dada matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então a matriz $A \in \mathbb{M}_1(\mathbb{K})$ é da forma

$$A = (a_{11})$$

e neste caso definimos

$$\det A = a_{11} \in \mathbb{K}.$$

Suponha que $n > 1$ e que $\det B$ esteja definido para todas as matrizes $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$ com $p < n$ e seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Para cada (i, j), defina a matriz A_{ij} formada a partir de A retirando-se a sua i-ésima linha e a sua j-ésima coluna. É claro que $A \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ e portanto $\det A_{ij}$ está definido. Defina então

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 1.7.2. *1. Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 1, temos

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = ad - bc.$$

Obteríamos o mesmo resultado se considerássemos a linha 2.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 2, temos

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j}\\ &= (-1)^{2+1}a_{21}\det A_{21} + (-1)^{2+2}a_{22}\det A_{22} + (-1)^{2+3}a_{32}\det A_{32}\\ &= -a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{23}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Daí

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Propriedades do determinante: Sejam A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

1. $\det(AB) = \det A \det B$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
3. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Observação 1.7.1. *É possível mostrar que o determinante também pode ser definido a partir das colunas de uma matriz* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Teorema 1.9. *Uma matriz* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *é invertível se, e somente se,* $\det A \neq 0_{\mathbb{K}}$.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

Em todo este capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio V é um* ***espaço vetorial*** *sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos, chamados* ***vetores****, estiverem definidas duas operações satisfazendo:*

A) A cada par $u, w \in V$ corresponde um vetor $u + w \in V$, chamado ***soma*** *de u e w, de modo que:*

A1) $u + w = w + u$, para todos $u, w \in V$;

A2) $(u + w) + v = u + (w + v)$, para todos u, w e $v \in V$;

A3) Existe em V um vetor, denominado ***vetor nulo*** *e denotado por 0_V, tal que*

$$0_V + u = u$$

para todo $u \in V$.

A4) Para cada vetor $u \in V$, existe um vetor em V, denotado por $-u$ tal que

$$u + (-u) = 0_V.$$

M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot u \in V$, denominado ***produto por escalar*** *de α por u de modo que:*

M1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ para todos α, $\beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$;

M2) $1_{\mathbb{K}}v = v$ para todo $v \in V$, onde $1_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$.

D1) $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos u, $w \in V$;

D2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, para todos α, $\beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.

Observação 2.1.1. *Vamos usar a expressão $\mathbb{K}$-**espaço vetorial** para nos referir a um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

Exemplo 2.1.1. *1. Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.*

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Considere o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

e defina

- $(a_1, a_2, \dots, a_n)+(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ *para todos* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,$(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo* $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. *Com estas operações $\mathbb{K}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Assim temos:*
  - $\mathbb{R}^n$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$;
  - $\mathbb{C}^n$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$;
  - $(\mathbb{Z}_p)^n$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{Z}_p$.

3. $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se definirmos:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n)+(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ *para todos* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$,$(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, mas não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. (Por quê?)*

5. *Considere o conjunto dos polinômios*

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n; n \geq 0\}.$$

Dados $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ em $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, suponha que $n < m$ e defina:

- $(p+q)(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha p)(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0.$

Assim $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

6. *O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com a soma usual de matrizes e a multiplicação por escalar usual.*

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

1. *Um vetor $w \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores u_1, u_2, ..., $u_n \in V$ se existirem escalares α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in V$ tais que*

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

2. *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um **conjunto gerador** (ou que $\mathcal{B}$ gera V) se todo elemento de V for uma combinação linear de uma quantidade finita de elementos de $\mathcal{B}$.*

Exemplo 2.2.1. *1. O vetor $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (0,1,2)$ e $u_3 = (-1,0,1)$. De fato, precisamos encontrar α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$(1,1,1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

encontramos que suas soluções são dadas por

$$\alpha = 1 + \gamma$$
$$\beta = -1 - 2\gamma$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$*. Logo o vetor* $(1, 1, 1)$ *é de fato uma combinação linear dos vetores* u_1*,* u_2 *e* u_3*. Podemos tomar, por exemplo,* $\gamma = 2$ *e escrever*

$$(1, 1, 1) = 3(1, 2, 3) - 7(0, 1, 2) + 2(-1, 0, 1).$$

2. *O vetor* $(1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ *não é uma combinação linear dos vetores* $u_1 = (1, 2, 3)$*,* $u_2 = (0, 1, 2)$ *e* $u_3 = (-1, 0, 1)$*. De fato, suponha que* α*,* β *e* $\gamma \in \mathbb{R}$ *são tais que:*

$$(1, -2, 2) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}.$$

A matriz linha-reduzida à forma em escada deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e portanto o sistema é impossível. Logo o vetor $(1, -2, 2)$ *não é uma combinação linear dos vetores* u_1*,* u_2 *e* u_3*.*

3. *Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Dado um vetor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever*

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

Assim qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Logo o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é um conjunto gerador para $\mathbb{R}^3$.

4. *$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1),(-1,0,0),(-1,-1,0),(-1,-1,-1)\}$ também é um conjunto gerador para $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. De fato, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, queremos encontrar x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, $x_6 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$(a,b,c) = x_1(1,0,1)+x_2(1,1,0)+x_3(1,1,1)+x_4(-1,0,0)+x_5(-1,-1,0)+x_6(-1,-1,-1).$$

O que fornece o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = a \\ x_2 + x_3 - x_5 - x_6 = b \\ x_1 + x_3 - x_6 = c \end{cases}$$

cuja matriz linha-reduzida à forma em escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & b+c-a \end{bmatrix},$$

assim o sistema é possível e indeterminado, com posto 3 e nulidade 3. Sua solução é descrita pela equações

$$x_1 = a - b + x_4$$
$$x_2 = a - c + x_4 + x_5$$
$$x_3 = b + c - a - x_4 + x_6$$

onde x_4, x_5 e $x_6 \in \mathbb{R}$. Portanto $\mathcal{B}_1$ é um conjunto gerador para $\mathbb{R}^3$.

5. *Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios em $\mathbb{R}$. O subconjunto $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ visto como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

6. *O conjunto* $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *gera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial. No entanto, este conjunto não gera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial pois, por exemplo,* $(i,0)$ *não é combinação linear dos vetores em* $\mathcal{B}$*. De fato, se* α *e* β *são tais que*

$$(i,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

então $\alpha = i$ *o que é impossível em* $\mathbb{R}$*.*

Observação 2.2.1. *1. Por convenção diremos que o conjunto vazio gera o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $\{0\}$*.*

2. *Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador. (Qual?)*

Definição 2.3. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V*.*

1. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é* ***linearmente independente*** *ou simplesmente* ***L.I.****, se o único meio de escrevermos*

$$0_V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

onde $u_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{K}$ *com* $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *é tomando* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$*.*

2. *Dizemos que o conjunto* $\mathcal{B}$ *é* ***linearemente dependente*** *ou simplesmente* ***L.D.****, se existem vetores distintos* $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \in \mathcal{B}$ *e escalares* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ *não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Exemplo 2.3.1. *1. Seja* $\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,1)\} \subseteq \mathbb{C}^2$*. Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial, então* $\mathcal{B}$ *é L.D. pois*

$$(0,0) = 0(1,0) + 0(i,0) + 1(0,1) + i(0,i).$$

Agora, considerando $\mathbb{C}^2$ *com um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial, o conjunto* $\mathcal{B}$ *é L.I.. De fato, se* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ *são tais que*

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(i,0) + \gamma(0,1) + \delta(0,i)$$

então $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$*.*

2. *Considerando $\mathbb{R}^2$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$ é L.D. pois*

$$(0,0) = \frac{1}{2}(1,-1) - (1,0) + \frac{1}{2}(1,1).$$

Observação 2.3.1. *Por convenção, o conjunto vazio é L.I.*

Propriedades 2.3.1. *i) Todo conjunto contendo o vetor nulo é L.D.*

ii) Todo espaço vetorial não-nulo possui um conjunto L.I. não vazio. (Qual?)

iii) Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I.

Definição 2.4. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B}$ de V é uma **base** de V se:*

i) $\mathcal{B}$ for um conjunto gerador de V;

ii) $\mathcal{B}$ for L.I.

Exemplo 2.4.1. *1. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

2. *$\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial.*

3. *$\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1)(0,1),(0,i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

4. *Considere $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = \{p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Sabemos que o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

gera $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Suponha que existam α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n = 0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Como um polinômio de grau n em $\mathbb{C}$ não pode ter mais do que n raízes, então $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e portanto $\mathcal{B}$ é L.I. Logo $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Observação 2.4.1. *Pelas Observações 2.2.1 item 1 e Observação 2.3.1, o conjunto vazio é uma base do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\{0\}$.*

Definição 2.5. *Dizemos que um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é* ***finitamente gerado*** *se ele possui um conjunto gerador finito.*

Proposição 2.5.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Então todo conjunto L.I de vetores de V tem no máximo m elementos.*

Prova: Vamos provar que todo conjunto de elementos de V que contenha mais do que m vetores é L.D. Para tanto, seja $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com $n > m$. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V, então existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tais que para cada $j = 1$, 2, ..., n temos

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i.$$

Assim queremos mostrar que existem escalares λ_1, λ_2, ..., λ_n não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$

Suponha que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$$

para $i = 1$, 2, ..., n. Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_n\alpha_{1n} = 0_{\mathbb{K}} \\ \quad\vdots \\ \lambda_1\alpha_{m1} + \lambda_2\alpha_{m2} + \cdots + \lambda_n\alpha_{mn} = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde λ_1, ..., λ_n são as incógnitas e $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, então a matriz linha-reduzida à forma em escada do sistema (2.1) tem posto menor que n, ou seja, o sistema (2.1) tem solução não trivial. Assim existem λ_1, ..., λ_n não todos nulos tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

ou seja, existem λ_1, ..., λ_n não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A}$ é L.D., como queríamos. $\diamondsuit$

Corolário 2.0.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de V. Como V é finitamente gerado, segue da Proposição 2.5.1 que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são finitos pois são L.I e possuem m e m' elementos, respectivamente.

Considerando $\mathcal{B}$ como conjunto gerador de V e $\mathcal{B}'$ L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m' \leq m$. Por outro lado, considerando $\mathcal{B}'$ como conjunto gerador de V e $\mathcal{B}$ L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m \leq m'$.

Logo $m = m'$, ou seja, duas bases têm sempre o mesmo número de elementos. $\diamondsuit$

Definição 2.6. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se V admite uma base finita, então chamamos de* ***dimensão*** *de V, e denotamos por $\dim_{\mathbb{K}} V$, o número de elementos em tal base.*

Exemplo 2.6.1.

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$;
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$;
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Proposição 2.6.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ um conjunto L.I. em V. Se existir $u \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, então $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ é L.I.*

Prova: Sejam α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1} escalares tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u = 0_u.$$

Se $\alpha_{n+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$ então podemos escrever

$$u = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) u_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) u_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) u_n$$

e então u é combinação linear de u_1, ..., u_n o que contradiz nossa hipótese. Assim $\alpha_{n+1} = 0_{\mathbb{K}}$ e daí obtemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_u.$$

Mas $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é L.I, logo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ é L.I. $\diamondsuit$

Teorema 2.1. *Todo espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado possui uma base.*

Prova: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado. Então V possui um conjunto gerador finito, digamos com m elementos, $m > 1$. Seja $u_1 \in V$, $u_1 \neq 0_V$. Então $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}$ é L.I. Se $\mathcal{B}_1$ gera V então $\mathcal{B}_1$ é uma base de V. Caso contrário, existe $u_2 \in V$ tal que u_2 não é um múltiplo escalar de u_1. Pela Proposição 2.6.1, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2\}$ é L.I. Novamente, se $\mathcal{B}_2$ gera V, então $\mathcal{B}_2$ é uma base de V. Caso contrário, existe $u_3 \in V$ tal que u_3 não é uma combinação linear de u_1 e u_2. Daí, $\mathcal{B}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I. Continuando com este processo chegamos a uma base de V ou obtemos conjuntos L.I. com um número arbitrário de elementos. A segunda opção não é possível por causa da Proposição 2.5.1. Portanto, com este processo obtemos uma base de V. $\diamondsuit$

Corolário 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensão $n \geq 1$. Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{B}$ é uma base de V;*

(ii) *$\mathcal{B}$ é L.I.;*

(iii) *$\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.*

Teorema 2.2. *Seja V uma $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado e seja $\mathcal{B}$ um conjunto L.I. em V. Então existe uma base de V contendo $\mathcal{B}$.*

Proposição 2.6.2. *Seja V uma $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} \subseteq V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{B}$ é uma base de V;*

(ii) *Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.*

Prova:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ seja um base de V. Em particular $\mathcal{B}$ gera V. Seja $u \in V$ e suponha que existam escalares α_1, ..., α_n, β_1, ..., β_n tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i.$$

Daí

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0_V$$

e como $\mathcal{B}$ é L.I segue que $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_n = \beta_n$ como queríamos.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Agora suponha que cada elemento de V se escreva de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{B}$ gera V. Resta mostrar que $\mathcal{B}$ é L.I. Sejam então α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Como $0_V = 0_{\mathbb{K}} u_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} u_n$, segue então da unicidade que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ e daí $\mathcal{B}$ é L.I. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de V.

$\diamondsuit$

2.1 Subespaços

Definição 2.7. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um subconjunto não vazio W de V é um* ***subespaço vetorial*** *de V se a restrição das operaçoẽs de V a W torna W um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

Exemplo 2.7.1. *a) O subconjunto $W = \{0_V\}$ é um subespaço vetorial de qualquer espaço vetorial V. O próprio V como subconjunto de V é também um subespaço vetorial. Estes dois subespaços são chamados de* ***subespaços triviais****.*

b) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $w \in V$. Então o conjunto $\mathbb{K}w = \{\alpha w \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema 2.3. *Um subconjunto não vazio W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores u_1, $u_2 \in W$ e cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\lambda u_1 + u_2 \in W$.*

Prova: Exercício! $\diamondsuit$

Exemplo 2.7.2. *1. $V = \mathbb{R}^5$; $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.*

2. $V = M_n(\mathbb{K})$; $UT_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$ é um subespaço de V.

3. $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço. Por exemplo, $u = (1,1)$, $v = (2,4) \in W$ e no entanto $u + v \notin W$.

Proposição 2.7.1. *Se W_1 e W_1 são subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V então*

a) $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V. De fato, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço tanto de W_1 quanto de W_2.

b) $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

Prova: Exercício! $\diamondsuit$

Proposição 2.7.2. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e de dimensão finita. Se W é um subespaço não trivial de V, então $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$.*

Prova: Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base de W. Em particular $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. de V. Como $W \neq V$, existe $u \in V$ tal que $u \notin W$ e assim u não é gerado pelos elementos de $\mathcal{B}$. Daí pela Proposição 2.6.1, $\{w_1, \ldots, w_n, u\}$ é L.I..Logo, uma base de V conterá mais elementos que o conjunto $\mathcal{B}$, isto é, $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$. $\diamondsuit$

Proposição 2.7.3. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Prova: Vamos supor primeiro que $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$. Como W_1 e W_2 são de dimensão finita, então $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ também o são. Assim seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial tanto de W_1 como de W_2, pelo Teorema 2.2 podemos estender $\mathcal{B}$ a uma base de W_1 e a uma base de W_2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_r\}$ uma base de W_1 e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n, u_1, \ldots, u_p\}$ uma base de W_2. Note que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_2$. Vamos então mostrar que $\mathcal{A} = \{w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de $W_1 + W_2$. Primeiro mostraremos que $\mathcal{A}$ gera $W_1 + W_2$.

Seja $v \in W_1 + W_2$. Então $v = x + y$ onde $x \in W_1$ e $y \in W_2$. Mas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente. Assim

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j$$
$$y = \sum_{i=1}^{n} \delta_i w_i + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l$$

com α_i, β_j, δ_i, $\gamma_l \in \mathbb{K}$. Daí

$$v = x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \delta_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l$$

e então $\mathcal{A}$ gera $W_1 + W_2$.

Agora, precisamos mostrar que $\mathcal{A}$ é L.I.. Considere então a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = 0_V$$

onde α_i, β_j, $\gamma_l \in \mathbb{K}$. Assim

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} (-\beta_j) v_j \in W_1 \cap W_2 \tag{2.2}$$

pois é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_1$ e de $\mathcal{B}_2$, simultaneamente. Logo, existem λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) w_i = 0_V.$$

Mas $\mathcal{B}$ é L.I., daí $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Assim podemos reescrever (2.2) como

$$\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)w_i + \sum_{j=1}^{r}(-\beta_j)v_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

Mas $\mathcal{B}_1$ é L.I., donde $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0_{\mathbb{K}}$. Isto é, $\mathcal{A}$ é L.I..

Portanto $\mathcal{A}$ é uma base de $W_1 + W_2$ e assim

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de W_1 e W_2, respectivamente. Analogamente ao caso anterior, mostra-se que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $W_1 + W_2$. ♢

Definição 2.8. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$. O* ***subespaço gerado*** *por S é definido como o subconjunto de V formado por todas as combinações lineares de u_1, ..., u_n. Denotaremos tal conjunto por*

$$[u_1, \ldots, u_n] = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Proposição 2.8.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. O conjunto $[v_1, \ldots, v_n]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de V.*

Exemplo 2.8.1.

1. *Dado $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$, seja $\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Então*

$$[1, x, x^2, x^3, x^4] = \{a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^4\} = \{f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \mid \deg f(x) \leq 4\}$$

é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

2. *Considere $\mathbb{R}^5$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e seja $\{(1,2,0,3,0); (0,0,1,4,0); (0,0,0,0,1)\}$. Então*

$$[(1,2,0,3,0); (0,0,1,4,0); (0,0,0,0,1)] = \{(\alpha, 2\alpha, \beta, 3\alpha + 4\beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$.

3. *Considere $W = [(1,2,3); (0,1,2); (-1,0,1)]$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Determinar $\dim_{\mathbb{R}} W$.*

Solução: *Inicialmente, vamos verificar se o conjunto* $\{(1,2,3);(0,1,2);(-1,0,1)\}$ *é L.I. ou L.D.. Para isso, sejam* x, y *e* $z \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$x(1,2,3)+y(0,1,2)+z(-1,0,1)=(0,0,0).$$

Assim vemos que $x=z$ *e* $y=-2z$ *são soluções para o sistema*

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

e com isso $\{(1,2,3);(0,1,2);(-1,0,1)\}$ *é L.D. Daí* $\dim_{\mathbb{R}} W \leq 2$. *Agora note que* $(1,2,3)$ *não é múltiplo escalar de* $(0,1,2)$. *Logo,* $\{(1,2,3);(0,1,2)\}$ *é L.I. e então* $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

4. *Mostre que*

$$S=\left\{ e_1=\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{2}\\ \overline{6}\\ \overline{3}\\ \overline{4}\end{bmatrix}; e_2=\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{3}\\ \overline{5}\\ \overline{3}\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{2}\\ \overline{6}\\ \overline{5}\end{bmatrix}, e_4=\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{2}\\ \overline{4}\end{bmatrix}, e_5=\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{5}\end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7)$ *como* $\mathbb{Z}_7$*-espaço vetorial.*

Solução: *Uma base de* $\mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7)$ *é dada por*

$$S=\left\{ \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}, e_5=\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{1}\end{bmatrix} \right\},$$

daí $\dim_{\mathbb{Z}_7} \mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7) = 5$. *Assim como* S *possui 5 elementos, basta mostrar que* S *é*

L.I.. O que é imediato pois

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}$$

só é possível se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \overline{0}$.

5. *Seja* $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Determine uma base de* V *contendo os polinômios*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4 \\ p_2(x) &= 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4 \\ p_3(x) &= 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4. \end{aligned}$$

Solução: *Sabemos que* $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ *é uma base de* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Tal base é chamada de* ***base canônica*** *de* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Assim* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = 5$. *Para determinar uma base contendo* $p_1(x)$, $p_2(x)$ *e* $p_3(x)$, *começamos determinando se tais vetores são L.I. ou L.D.. Para isso montamos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em A para reduzí-la a forma em escada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \xleftarrow{-2} + \\ \xleftarrow{1} + \\ \xleftarrow{-3} + \\ \xleftarrow{-2} + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = M.$$

Como a matrix M possui posto 3, então $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é L.I. em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Observe que M não tem 1 na segunda e quarta linhas. Assim vamos adicionar a M uma coluna com 1 na segunda linha e outra com 1 na quarta linha, obtendo

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim $\mathcal{B}' = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), x, x^3\}$ forma uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ contendo $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

6. *Considere $V = \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Verifique se o conjunto formado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 11 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

é L.D. ou L.I. em V.

Solução: *Considere a matriz M formada pelas entradas das matrizes A_1, A_2 e A_3 escritas como colunas de M*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz possui posto 2, então o vetor A_3 é uma combinação linear de A_1 e A_2, ou seja, $\{A_1, A_2, A_3\}$ é L.D..

2.2 Espaços de dimensão infinita

Definição 2.9. *Seja X um conjunto qualquer.*

1. *Uma **relação de ordem parcial sobre** X, que denotaremos por $\prec$, é um relação que satisfaz:*

   (a) $y \prec y$ para todo $y \in X$ (propriedade reflexiva);

   (b) Se $y \prec z$ e $z \prec t$ com $y, z, t \in X$, então $y \prec t$ (propriedade transitiva);

   (c) Se $y \prec z$ e $z \prec y$, com $y, z \in X$, então $y = z$ (propriedade antissimétrica).

2. *Uma **relação de ordem total sobre** X é uma relação de ordem parcial $\prec$ sobre X com a propriedade que para quaisquer $y, z \in X$, ou $y \prec z$ ou $z \prec y$.*

3. *Um* ***conjunto parcialmente ordenado*** *é um par* $(X, \prec)$ *consistindo de um conjunto* X *e uma ordem parcial* $\prec$ *sobre o mesmo. De modo análogo, definimos um* ***conjunto totalmente*** *ordenado.*

4. *Considere* $(X, \prec)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento* $\alpha \in X$ *é denominado* ***maximal*** *se* $\alpha \prec \beta$*, para* $\beta \in X$*, então* $\alpha = \beta$*.*

5. *Seja* $A \subseteq X$*. Um elemento* $m \in X$ *é denominado uma* ***cota superior para*** A *se* $x \prec m$*, para todo* $x \in A$*.*

Exemplo 2.9.1. 1. *A ordem natural do conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$, $\leq$, *é uma relação de ordem total.*

2. *Considere em* $\mathbb{N}$ *a seguinte relação:* $a \prec b$ *se, e somente se,* $a = kb$ *para* $k \in \mathbb{N}$*. Então* $\prec$ *é uma relação de ordem parcial em* $\mathbb{N}$*.*

   Solução: *De fato,*

   (a) $a \prec a$ *pois* $a = a1$.

   (b) *Se* $a \prec b$ *e* $b \prec c$ *então* $a = k_1 b$ *e* $b = k_2 c$*. Daí* $a = (k_1 k_2)c$*, ou seja,* $a \prec c$*.*

   (c) *Se* $a \prec b$ *e* $b \prec a$*, então* $a = k_1 b$ *e* $b = k_2 a$*. Logo* $k_1 = k_2 = 1$ *e assim* $a = b$*.*

   A ordem não é total pois, por exemplo, 2 e 3 não são comparáveis.

   Agora considere o subconjunto

$$\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

   Tal conjunto é totalmente ordenado por $\prec$*. O conjunto* $\mathcal{P}_1 = \{2, 4, 8, 3, 9, 27\}$ *é parcialmente ordenando por* $\prec$ *e possui dois elementos maximais que são 8 e 27.*

3. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma coleção qualquer de conjuntos. A inclusão de conjuntos,* $\subseteq$*, é uma relação de ordem parcial sobre* $\mathcal{A}$*. Não é, de modo geral, uma ordem total.*

4. *Sejam* X *um conjunto não vazio e* $\mathcal{P}(X)$ *a classe de todos os subconjuntos de* X*. Então* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. Seja* $\mathcal{B}$ *qualquer classe de*

subconjuntos de X, então a união de todos os conjuntos $A \in \mathcal{B}$ é uma cota superior para $\mathcal{B}$. Por exemplo, para $X = \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}(X)$ formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Considere $\mathcal{B}$ dado por

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A = \{2k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Assim $\cup_{k\in\mathbb{N}}\{2k\}$ é uma cota superior para $\mathcal{B}$.

Lema 2.9.0.1 (Lema de Zorn)**.** *Seja X um conjunto parcialmente ordenando com a propriedade que cada subconjunto totalmente ordenado adminte uma cota superior. Então X contém um elemento maximal.*

Teorema 2.4. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $\mathcal{C}$ um conjunto L.I. em V. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V contendo $\mathcal{C}$.*

Prova: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{C}$ um subconjunto L.I. de V. Considere $\mathcal{P}$ a classe de todos os subconjuntos L.I. em V que contenham $\mathcal{C}$. É claro que $\mathcal{P}$ é não vazio, já que o próprio conjunto $\mathcal{C}$ pertence a $\mathcal{P}$. Além disso, $\mathcal{P}$ é parcialmente ordenado por inclusão. Para usar o Lema de Zorn, precisamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ tem uma cota superior. Com esse objetivo, considere $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$. O candidato natural para cota superior de $\mathcal{D}$ é a união de todos os conjuntos $\mathcal{A}_\alpha$ em $\mathcal{D}$. Precisamos mostrar que $\mathcal{A} = \cup_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ é L.I.. Seja então $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um subconjunto finito de $\mathcal{A}$. Daí para cada $i = 1$, ..., n existe $\alpha_i \in I$ tal que $v_i \in \mathcal{A}_{\alpha_i}$. Como $\mathcal{A}$ é totalmente ordenado, podemos reorganizar os índices i de tal modo que $\mathcal{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$. Agora cada $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ é L.I. pois pertencem a $\mathcal{P}$, então como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$, segue que $\mathcal{L}$ também é L.I.. Como $\mathcal{L}$ é qualquer conjunto finito, segue que $\mathcal{A}$ é L.I.. Assim $\mathcal{D}$ possui uma cota superior. Segue do Lema de Zorn que $\mathcal{P}$ tem elemento maximal, que vamos chamar de $\mathcal{B}$. Provemos que $\mathcal{B}$ é uma base de V. Primeiro como $\mathcal{B}$ é um elemento de $\mathcal{P}$, então $\mathcal{B}$ é L.I.. Resta então provar que $\mathcal{B}$ gera V. Para isso, suponha que existe $w \in V$ que não é gerado por $\mathcal{B}$. Assim $\mathcal{B} \cup \{w\}$ é L.I.. Mas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{w\}$ o que é impossível pois $\mathcal{B}$ é elemento maximal. Logo tal w não existe. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base de V. $\diamondsuit$

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Em todo esse capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo.

3.1 Conceitos Básicos

Definição 3.1. *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *e* $(W, \oplus, \otimes)$ *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Uma função* $T : V \to W$ *é uma* ***transformação linear*** *se*

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$ *para todos* u_1, $u_2 \in V$;

2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \otimes T(u)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e todo* $u \in V$.

Observação 3.1.1. *Para simplificar a notação, vamos adotar os mesmos símbolos para indicar a soma e o produto por escalar nos espaços vetoriais que aparecerão no decorrer do texto. No entanto, o leitor deve estar ciente que estes símbolos podem ter significados diferentes, dependendo do espaço vetorial em questão.*

Lema 3.1.0.1. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Então uma função* $T : V \to W$ *é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todos u_1, $u_2 \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Prova: Deixada a cargo do leitor. $\diamondsuit$

Lema 3.1.0.2. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então:*

1. *$T(0_V) = 0_W$, onde 0_V e 0_W denotam os vetores nulos de V e W, respectivamente.*

2. *$T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in V$.*

3. *$T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in V$ para $i = 1, \dots, m$.*

Prova:

1. Note que
$$0_W + T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$
ou seja, $T(0_V) = 0_W$.

2. Basta observar que $-u = (-1_{\mathbb{K}})u$ e daí
$$T(-u) = T((-1_{\mathbb{K}})u) = -1_{\mathbb{K}}T(u) = -T(u).$$

3. Por indução em m. Se $m = 2$, então
$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2).$$
Suponha que para $m = p$ tenhamos
$$T(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{p} T(u_i).$$
Vamos mostra que é válido para $m = p + 1$. De fato,
$$\begin{aligned} T(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i u_i) &= T([\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i] + \alpha_{p+1} u_{p+1}) = T(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) + T(\alpha_{p+1} u_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i T(u_i) + \alpha_{p+1} T(u_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i T(u_i). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 3.1.1. *1. Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. A função $T : V \to W$ dada por $T(u) = 0_W$ para todo $u \in V$ é uma transformação linear.*

2. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. A função $T : V \to V$ dada por $T(u) = u$ para todo $u \in V$ é uma transformação linear.

3. Considere $\mathbb{R}$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então T_a é uma transformação linear. Agora, seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = e^x$. Então T não é uma transformação linear pois $T(0) \neq 0$.

4. Sejam $\mathbb{K}^3$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Defina $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ por

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & c-b \end{bmatrix}.$$

Então T é uma transformação linear. De fato, dados (a,b,c), $(d,e,f) \in \mathbb{K}^3$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} T(\lambda(a,b,c) + (d,e,f)) &= T(\lambda a + d, \lambda b + e, \lambda c + f) \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda a + d) + (\lambda b + e) & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & (\lambda c + f) - (\lambda b + e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda c - \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d+e & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & f-e \end{bmatrix} \\ &= \lambda T(a,b,c) + T(d,e,f). \end{aligned}$$

5. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e considere $D : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dado por

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Então D é uma transformação linear.

6. *Seja* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ *é uma função contínua*$\}$. *É imediato verificar que* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial. Defina* $T : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *por*

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Então T *é uma transformação linear.*

7. *Sejam* a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$. *Defina* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *por*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

É imediato verificar que T *é uma transformação linear. Denote por* e_i *o elemento de* $\mathbb{K}^n$ *contendo* $1_\mathbb{K}$ *na posição* i *e* $0_\mathbb{K}$ *das demais. Então* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base de* $\mathbb{K}^n$ *e*

$$T(e_i) = a_i$$

para $i = 1$, ..., n. *Agora, se* $S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *é uma transformação linear, então pelo Lema 3.1.0.2 item (c)*

$$S(x_1, \ldots, x_n) = S(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} S(e_i)$$

onde $S(e_i) \in \mathbb{K}$ *para* $i = 1$, ..., n. *Logo qualquer transformação linear de* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *é da forma*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

para determinados escalares a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$. *Isto é, para determinarmos a transformação* T *só precisamos conhecer seus valores na base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *de* $\mathbb{K}^n$.

Teorema 3.1. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais. Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* V *e se* $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W$, *então existe uma única transformação linear* $T : V \to W$ *tal que* $T(u_i) = w_i$ *para cada* $i = 1$, ..., n.

Prova: Dado $v \in V$, como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V, então sabemos que existem únicos α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Defina então $T : V \to W$ por

$$T(v) = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

A unicidade dos escalares α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ garante que T está bem definida, isto é, um mesmo elemento de V não pode ter duas imagens distintas.

Agora, note que $T(u_i) = w_i$ para cada $i = 1$, ..., n. Assim precisamos mostrar que T é linear. Sejam $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T(\lambda v_1 + v_2) &= T(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i) = T(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \beta_i) u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \\ &= \lambda T(v_1) + T(v_2). \end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear.

Resta mostrar que T é única. Suponha que exista uma transformação linear $S : V \to W$ tal que $S(u_i) = w_i$ para todo $i = 1$, ..., n. Para $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ temos

$$S(v) = S(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = T(v)$$

para todo $v \in V$. Logo $T = S$, isto é, existe uma única transformação linear que satisfaz as condições do teorema. $\diamondsuit$

Exemplo 3.1.2. *Os vetores* $v_1 = (1, 2)$ *e* $v_2 = (3, 4)$ *são L.I em* $\mathbb{R}^2$ *e assim formam uma base de* $\mathbb{R}^2$. *Assim pelo Teorema 3.1, sabemos que existe uma única transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1, 2) = (3, 2, 1) \\ T(v_2) &= T(3, 4) = (6, 5, 4). \end{aligned}$$

Determine $T(1, 0)$.

Solução: *Inicialmente escrevemos* $(1, 0)$ *como combinação linear de* v_1 *e* v_2*:*

$$(1, 0) = \alpha(1, 2) + \beta(3, 4).$$

Obtendo $\alpha = -2$ *e* $\beta = 1$. *Assim*

$$T(1,0) = T(-2(1,2) + (3,4)) = -2T(1,2) + T(3,4) = (0,1,2).$$

Definição 3.2. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e* $T : V \to W$ *uma transformação linear.*

1. *O conjunto*

$$\ker T = \{u \in V \mid T(u) = 0_W\}$$

   *é chamado de **kernel** ou **núcleo** de* T*. (O núcleo de* T *também pode ser denotado por* $Nuc\ T$*.)*

2. *O conjunto*

$$\operatorname{Im} T = \{u \in W \mid \text{ existe } v \in V \text{ tal que } T(v) = u\}$$

   *é chamado de **imagem** de* T*.*

Proposição 3.2.1. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então:*

1. $\ker T$ *é um subespaço de* V*;*

2. $\operatorname{Im} T$ *é um subespaço de* W*.*

Prova:

1. Inicialmente $\ker T \neq \emptyset$ pois $T(0_V) = 0_W$, ou seja, $0_V \in \ker T$. Agora, sejam u_1, $u_2 \in \ker T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Precisamos mostrar que $\lambda u_1 + u_2 \in \mathbb{K}$, isto é, precisamos mostrar que $\lambda u_1 + u_2 \in \ker T$. Temos

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2) = 0_W.$$

   Logo, $\ker T$ é um subespaço de V.

2. Inicialmente $0_W \in \operatorname{Im} T$ pois $0_W = T(0_V)$ e daí $\operatorname{Im} T \neq \emptyset$. Sejam w_1, $w_2 \in \operatorname{Im} T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem u_1, $u_2 \in V$ tais que $w_1 = T(u_1)$ e $w_2 = T(u_2)$. Assim

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda T(u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1 + u_2)$$

   e então $\lambda w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} T$. Portanto, $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W.

$\diamondsuit$

Exemplos 3.2.1. *1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por*

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix}.$$

Determine $\ker T$ *e* $\operatorname{Im} T$*.*

Solução: *Temos*

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se, e só se, $a = -b$ e $c = b$. Daí

$$\ker T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b, c = b\} = \{(-b,b,b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $\{(1,1,1)\}$ é uma base de $\ker T$, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$.

Agora,

$$\operatorname{Im} T = \{v \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{ existe } u \in \mathbb{R}^3 \text{ de modo que } T(u) = v\}$$
$$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim temos

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} = (a+b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (c-b) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e é fácil ver que

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador de $\operatorname{Im} T$ e é L.I., ou seja, é uma base de $\operatorname{Im} T$, com isso $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$. Observe que

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

2. *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x, y) = x + y$. *Determine* $\ker T$ *e* $\operatorname{Im} T$.

Solução: *Temos*

$$\ker T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$
$$\ker T = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Assim $\{(1, -1)\}$ *é uma base de* $\ker T$, *ou seja,* $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$.

Agora

$$\operatorname{Im} T = \{w \in \mathbb{R} \mid \text{ existe } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y) = w\}.$$

Assim dado $w \in \mathbb{R}$ *um número real qualquer, tome o elemento* $(w, 0) \in \mathbb{R}^2$. *Temos* $T(w, 0) = w + 0 = w$. *Logo* $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$ *e então* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 1$.

Novamente temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

Definição 3.3. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e* $T : V \to W$ *uma transformação linear.*

1. *Dizemos que* T *é* ***injetora*** *se dados* u_1, $u_2 \in V$ *tais que* $T(u_1) = T(u_2)$, *então* $u_1 = u_2$. *De modo equivalente, se* u_1, $u_2 \in V$ *são tais que* $u_1 \neq u_2$, *então* $T(u_1) \neq T(u_2)$.

2. *Dizemos que* T *é* ***sobrejetora*** *se* $\operatorname{Im} T = W$. *Em outras palavras,* T *é* ***sobrejetora*** *se para todo* $w \in W$, *existe* $u \in V$ *tal que* $T(u) = w$.

3. *Se* T *é injetora e sobrejetora, então dizemos que* T *é um* ***isomorfismo***.

Exemplos 3.3.1. 1. *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x, y) = x + y$ *é sobrejetora, mas não é injetora.*

2. *A transformação linear* $T : V \to V$ *dada por* $T(u) = u$ *é injetora e sobrejetora, ou seja, é um isomorfismo.*

Proposição 3.3.1. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Então* T *é injetora se, e somente se,* $\ker T = \{0_V\}$.

Prova: Suponha que T é injetora. Queremos mostrar que $\ker T = \{0_V\}$. Seja então $u \in \ker T$. Então $T(u) = 0_W$. Mas $T(0_V) = 0_W$ e como T é injetora devemos ter $u = 0_V$. Logo $\ker T = \{0_V\}$.

Agora suponha que $\ker T = \{0_V\}$. Queremos mostrar que T é injetora. Para isso, sejam u_1, $u_2 \in V$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Então

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \\ T(u_1) - T(u_2) &= 0_W \\ T(u_1 - u_2) &= 0_W, \end{aligned}$$

isto é, $u_1 - u_2 \in \ker T$. Mas $\ker T = \{0_V\}$, logo $u_1 = u_2$. Portanto T é injetora. $\diamondsuit$

Exemplo 3.3.1. *Seja* $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ *dada por*

$$T(1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 1_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}; T(0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 1_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}$$
$$T(0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 1_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}; T(0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 1_\mathbb{K} \end{bmatrix}$$

É fácil ver que $\ker T = \{(0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K})\}$. *Além disso,*

$$\operatorname{Im} T = \left[\begin{bmatrix} 1_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 1_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 1_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_\mathbb{K} & 0_\mathbb{K} \\ 0_\mathbb{K} & 1_\mathbb{K} \end{bmatrix} \right] = \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Daí $\dim_\mathbb{K} \operatorname{Im} T = 4$ *e novamente*

$$\dim_\mathbb{K} \ker T + \dim_\mathbb{K} \operatorname{Im} T = 4 = \dim_\mathbb{K} \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Lema 3.3.1.1. *Sejam* V *e* W $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Se* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* V*, então* $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ *gera* $\operatorname{Im} T$.

Prova: Seja $w \in \operatorname{Im} T$. Por definição, existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V, então existem α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Daí

$$w = T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n),$$

ou seja, todo vetor de $\operatorname{Im} T$ é uma combinação linear de $T(u_1)$, ..., $T(u_n)$. Portanto $\operatorname{Im} T = [T(u_1), \ldots, T(u_n)]$ como queríamos. $\diamondsuit$

Exemplo 3.3.2. *Considere $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais e seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$T(a + bi, c + di) = (a - c, b + 2d, a + b - c + 2d)$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$. É fácil ver que T é uma transformação linear. Seja $\{(1, 0); (i, 0); (0, 1); (0, i)\}$ uma base de $\mathbb{C}^2$. Temos pelo Lema 3.3.1.1 que $\{T(1, 0); T(i, 0); T(0, 1); T(0, i)\}$ gera $\operatorname{Im} T$. Agora

$$T(1, 0) = (1, 0, 1); \quad T(i, 0) = (0, 1, 1)$$
$$T(0, 1) = (-1, 0, -1); \quad T(0, i) = (0, 2, 2)$$

e temos

$$T(1, 0) = -T(0, 1)$$
$$T(i, 0) = 2T(0, i).$$

Observe que $T(1, 0)$ não é múltiplo de $T(0, i)$. Logo o conjunto $\{T(1, 0); T(0, i)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

Teorema 3.2 (Teorema do Núcleo e da Imagem)**.** *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais com $\dim_{\mathbb{K}} V$ finita. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T.$$

Prova: Suponha primeiro que $\ker T \neq \{0_V\}$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $\ker T$. Podemos completar o conjunto $\mathcal{B}_1$ até obter uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_r\}$ de V. Para demonstrar o teorema precisamos encontrar uma base de W com r elementos. Considere então os seguintes elementos de W:

$$T(u_1), \ldots, T(u_n), T(v_1), \ldots, T(v_r).$$

Como $u_i \in \ker T$, então $T(u_i) = 0_W$ para $i = 1$, ..., n. Assim pelo Lema 3.3.1.1, $\mathcal{B}_2 = \{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ é um conjunto gerador de $\operatorname{Im} T$. Precisamos mostrar que $\mathcal{B}_2$ é L.I. para que seja uma base de $\operatorname{Im} T$. Para isso, sejam λ_1, ..., $\lambda_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_r T(v_r) = 0_W.$$

Daí $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \ker T$. Então existem α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

ou seja, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ pois $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_r\}$ é uma base de V. Portanto $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$. Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T.$$

Agora, se $\ker T = \{0_V\}$, considere $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V. De maneira análoga ao caso anterior, mostra-se que $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$. Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T.$$

$\diamondsuit$

3.2 Isomorfismos

Definição 3.4. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se T é um isomorfismo, então dizemos que V e W são* ***espaços vetoriais isomorfos*** *e denotamos por $V \cong W$.*

Proposição 3.4.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$ e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é um isomorfismo.*
2. *T é injetora.*
3. *T é sobrejetora.*

Prova: As implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ seguem da definição de isomorfismo.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que T é injetora. Queremos mostrar que T é um isomorfismo. Assim só precisamos mostrar que T é sobrejetora. Como T é injetora, então pela Proposição 3.3.1, temos $\ker T = \{0_V\}$. Assim, pelo Teorema 3.2 temos

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n,$$

logo $\operatorname{Im} T = W$, isto é, T é sobrejetora. Assim T é um isomorfismo.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que T é sobrejetora. Queremos mostrar que T é um isomorfismo. Para isso, basta mostrar que T é injetora. Como T é sobrejetora, então $\operatorname{Im} T = W$ e daí $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = n$. Assim, pelo Teorema 3.2 devemos ter $\dim_{\mathbb{K}} \ker T = 0$, ou seja, $\ker T = \{0_V\}$ e então T é injetora. Logo, T é um isomorfismo.

$\diamondsuit$

Exemplos 3.4.1. 1. *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y) = (-y, x, x + y)$. *Pelo Teorema 3.2, sabemos que* T *não pode ser sobrejetora, logo* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T \leq 2$. *Agora*

$$(x, y) \in \ker T \Leftrightarrow T(x, y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (-y, x, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Daí $\ker T = \{(0, 0)\}$ *e então* T *é injetora.*

Temos

$$\operatorname{Im} T = \{(-y, x, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que

$$(-y, x, x + y) = y(-1, 0, 1) + x(0, 1, 1)$$

e então $\{(-1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ *gera* $\operatorname{Im} T$ *e como estes vetores não são múltiplos um do outro, eles formam uma base para* $\operatorname{Im} T$. *Assim* $\operatorname{Im} T = [(-1, 0, 1); (0, 1, 1)]$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$.

2. *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ *sobre* $\mathbb{C}$ *e seja* $\mathcal{D} : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *dada por* $\mathcal{D}(p(x)) = p'(x)$ *a derivada de* $p(x)$. *Observe que* $\ker D = \{p(x) = a \mid a \in \mathbb{C}\}$. *Além disso,* $\operatorname{Im} \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *pois todo elemento de* $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ *tem uma primitiva.*

3. *Seja*

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{K}, i \geq 1\}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Defina*

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$

- $\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n, \ldots)$

para todos $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{K}$. *É fácil ver que* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Defina* $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *dada por*

$$T((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = ((a_i)_{i+1\in\mathbb{N}}) = (a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots).$$

É imediato ver que T *é uma transformação linear. Além disso,* T *é sobrejetora pois dada uma sequência* $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, considere* $x = (0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*. Temos*

$$T(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots),$$

assim $\operatorname{Im} T = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*. Além disso,* T *não é injetora pois dado* $(x_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *tempos*

$$T(x_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

e então

$$\ker T = \{(x_1, 0, 0, \ldots, 0) \mid x_1 \in \mathbb{K}\}.$$

Teorema 3.3. *Dois* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

Prova: Se ambos os espaços forem nulos, nada há a fazer. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$. Seja $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V e W, respectivamente. Pelo Teorema 3.1 sabemos que existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para $i = 1,\ldots, n$.

Vamos mostrar que T é sobrejetora e daí pela Proposição 3.4.1, T será um isomorfismo. Para isto, seja $y \in W$ um elemento qualquer de W. Como $\mathcal{B}$ é uma base de W, existem escalares α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i.$$

Seja $x \in V$ dado por

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

pois $\mathcal{A}$ é uma base de V. Temos

$$T(x) = T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = y,$$

logo $\operatorname{Im} T = W$, ou seja, T é sobrejetora.

Portanto V e W são isomorfos. $\diamondsuit$

Corolário 3.3.1. *Todo $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Exemplos 3.4.2. *1.* $\mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n+1}$.

2. $\mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{pq}$.

3.3 Transformações Lineares e Matrizes

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n \geq 1$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Sabemos que cada elemento de V se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é, dado $u \in V$ existem únicos escalares α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Assim vamos fixar uma ordem para os elementos da base $\mathcal{B}$ e por isso vamos chamá-la de **base ordenada** de V. Pela unicidade dos elementos α_1, ..., α_n acima, podemos denotar o vetor u por

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

e dizemos que α_1, ..., α_n são as **coordenadas de u em relação à base ordenada $\mathcal{B}$**.

Exemplos 3.4.3. *1. Considere $V = \mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e seja $\mathcal{B} = \{(1, i); (i, 0)\}$ uma base de $\mathbb{C}^2$ (Verifique!). Dado o vetor $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$, quais suas coordenadas em relação a tal base?*

Solução: *As coordenadas de* v *em relação à base* $\mathcal{B}$ *serão* $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2)_{\mathcal{B}}$ *onde* α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}^2$ *são tais que*

$$v = \alpha_1(1, i) + \alpha_2(i, 0).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos $\alpha_1 = 1 - 2i$ *e* $\alpha_2 = 3 + i$. *Assim*

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 - 2i \\ 3 + i \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

2. *Agora considere* $V = \mathbb{C}^2$ *como um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial e seja* $\mathcal{A} = \{(1, 1); (i, 0); (1, i); (0, 1)\}$ *uma base de* $\mathbb{C}^2$ *(Verifique!). Dado o vetor* $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$, *quais suas coordenadas em relação a tal base?*

Solução: *As coordenadas de* v *em relação à base* $\mathcal{A}$ *serão* $[v]_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{\mathcal{A}}$ *onde* α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{C}$ *são tais que*

$$v = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(i, 0) + \alpha_3(1, i) + \alpha_4(0, 1).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ *e* $\alpha_4 = 3$. *Assim*

$$[v]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

Agora, sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = p \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{K}} W = q \geq 1$. Vamos fixar bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_q\}$ de V e W, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Sabemos pelo Teorema 3.1 que T fica completamente determinada se conhecermos seus valores na base de V. Assim

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{q1}w_q \\ T(u_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{q2}w_q \\ &\vdots \\ T(u_p) &= a_{1p}w_1 + a_{2p}w_2 + \cdots + a_{qp}w_q \end{aligned}$$

para certos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ onde $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$.

Agora, seja $x \in V$. Então

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$$

onde α_1, α_2, ..., $\alpha_p \in \mathbb{K}$. Daí

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_p T(u_p) \\
&= \alpha_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{q1}w_q) + \alpha_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{q2}w_q) + \cdots \\
&+ \alpha_p(a_{1p}w_1 + a_{2p}w_2 + \cdots + a_{qp}w_q) \\
&= (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{1j})w_1 + (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{2j})w_2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{qj})w_q \\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\alpha_j \right) w_i.
\end{aligned}$$

Note que os escalares $\sum_{j=1}^{p} a_{1j}\alpha_j$, $\sum_{j=1}^{p} a_{2j}\alpha_j$, ..., $\sum_{j=1}^{p} a_{qi}\alpha_j$ são as coordenadas do vetor $T(x)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$, isto é,

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{qj}\alpha_j \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qp} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1p}\alpha_p \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2p}\alpha_p \\ \vdots \\ a_{q1}\alpha_1 + a_{q2}\alpha_2 + \cdots + a_{qp}\alpha_p \end{bmatrix}$$

e daí podemos escrever

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

onde $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$.

Agora seja $B \in \mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$ onde

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qp} \end{bmatrix}.$$

Seja V_1 um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $p \geq 1$ e W_1 um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $q \geq 1$. Tome $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{l_1, \dots, l_q\}$ bases ordenadas de V_1 e W_1, respectivamente. Defina $T : V_1 \to W_1$ por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= b_{11}l_1 + b_{21}l_2 + \cdots + b_{q1}l_q \\ &\vdots \\ T(v_p) &= b_{1p}l_1 + b_{2p}l_2 + \cdots + b_{qp}l_q. \end{aligned}$$

Então T é uma transformação linear tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = B[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo $x \in V$.

Assim provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões $p \geq 1$ e $q \geq 1$, respectivamente. Sejam $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então para cada transformação linear $T : V \to W$, existe uma matriz $A \in \mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$ tal que*

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_W} = A[x]_{\mathcal{B}_V}$$

para todo vetor $x \in B$. Além disso, a cada matriz $A \in \mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$ corresponde uma transformação linear $T : V \to W$ tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_W} = A[x]_{\mathcal{B}_V}$$

para todo $x \in V$.

Definição 3.5. *A matriz $A \in \mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$ do Teorema 3.4 é chamada de* ***matriz da transformação linear*** *T com respeito às bases ordenadas $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ e será denotada por*

$$A = [T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}.$$

No caso em que $V = W$ e $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = \mathcal{B}$, denotaremos $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ simplesmente por $[T]_{\mathcal{B}}$.

Exemplos 3.5.1. *1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = (x, 0).$$

Considere $\mathbb{R}^2$ com a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$. Encontre $[T]_{\mathcal{B}}$.

Solução: *Temos*

$$T(e_1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$
$$T(e_2) = (0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1).$$

Logo a matriz de T é

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$(x, y) = xe_1 + ye_2$$

e então

$$[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (x, y)_{\mathcal{B}}.$$

Assim podemos escrever

$$[T(x, y)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[(x, y)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [(x, y)]_{\mathcal{B}}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 3); (1, 4)\}$. Encontre $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Solução: *Temos*

$$T(1,1,1) = (2,5) = 3(1,3) - 1(1,4)$$
$$T(1,1,0) = (3,1) = 11(1,3) - 8(1,4)$$
$$T(1,0,0) = (2,3) = 5(1,5) - 3(1,4)$$

e daí

$$[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora considerando as bases $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ *e* $\mathcal{B}_4 = \{(1,0);(0,1)\}$ *obtemos*

$$T(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$T(0,1,0) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1)$$
$$T(0,0,1) = (-1,4) = -1(1,0) + 4(0,1)$$

e assim a matriz de T *será*

$$[T]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.5. *Sejam* $F : U \to V$ *e* $G : V \to W$ *duas transformações lineares onde* U, V *e* W *são* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais de dimensões* n, m *e* r, *respectivamente. Fixe bases ordenadas* $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_V$ *e* $\mathcal{B}_W$ *para* U, V *e* W, *respectivamente. Então* $(G \circ F) : U \to W$ *dada por* $(G \circ F)(v) = G(F(v))$ *é uma transformação linear e*

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} = [G]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}[F]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V}.$$

Prova: É imediato verificar que $G \circ F$ é uma transformação linear.

Sejam $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ bases ordenadas para U, V e W, respectivamente. Considere as matrizes

1. $[F]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V} = (a_{ij})_{m \times n}$ onde $F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ para $j = 1, \ldots, n$;

2. $[G]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = (b_{ki})_{r \times n}$ onde $G(v_i) = \sum_{k=1}^{r} b_{ij} w_i$ para $i = 1, \ldots, m$;

3. $[G \circ F]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} = (c_{kj})_{r\times n}$ onde $(G \circ F)(u_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj} w_k$ para $j = 1, ..., n$.

Vamos calcular $(G \circ F)(v_j)$ usando (1) e (2):

$$\begin{aligned}(G \circ F)(u_j) &= G(F(u_j)) = G(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} G(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{r} b_{ki} w_k\\ &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} w_k.\end{aligned}$$

Comparando essa última equação com (3) e usando a unicidade dos escalares obtemos

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$$

para $j = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., r$. Isto é, para cada par (j, k) o elemento c_{kj} da matriz $[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W}$ é o elemento na posição (k, j) da matriz resultante da multiplicação de $[G]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ por $[F]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V}$. Portanto

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} = [G]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} [F]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V}$$

como queríamos. $\diamondsuit$

Vamos tratar, principalmente, com a representação por matrizes de transformações lineares de um espaço em si mesmo. Lembre-se que esta matriz muda de acordo com a escolha da base. Assim, deve-se prestar atenção sempre à base escolhida. Assim como um espaço vetorial pode ter várias bases distintas, o que acontecerá com a matriz representante de uma transformação linear quando mudamos a base ordenada? Vamos considerar $T : V \to V$ uma transformação linear sobre o $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita V e sejam

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

bases ordenadas de V. Qual a relação entre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}_1}$ e $[T]_{\mathcal{B}_2}$?

Para responder a esta questão, primeiro vamos determinar uma relação entre $[x]_{\mathcal{B}_1}$ e $[x]_{\mathcal{B}_2}$, para todo $x \in V$. Como $\mathcal{B}_1$ é uma base de V, então existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i,\ j \leq n$ tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{n1} v_n\\ &\vdots\\ w_n &= \alpha_{1n} v_1 + \cdots + \alpha_{nn} v_n.\end{aligned}$$

Agora, dado $x \in V$, existem β_1, ..., $\beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n.$$

Daí

$$\begin{aligned}
x &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{n1}v_n) + \cdots + \beta_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{nn}v_n)\\
&= (\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \cdots + \beta_n\alpha_{1n})v_1 + \cdots + (\beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \cdots + \beta_n\alpha_{nn})v_n\\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_{1j}v_1 + \cdots + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_{nj}v_n\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_{ij} \right) v_i.
\end{aligned}$$

Assim as coordenadas de x em relação à base $\mathcal{B}_1$ são

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_{nj} \end{bmatrix}.$$

Seja P a matriz cuja entrada (i, j) é o escalar α_{ij}, isto é,

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então podemos escrever

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = P[x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Mais ainda, como $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de V, então $[x]_{\mathcal{B}_1} = [0_V]_{\mathcal{B}_1}$ se, e somente se, $[x]_{\mathcal{B}_2} = [0_V]_{\mathcal{B}_2}$. Logo P possui inversa. Assim mostramos o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases ordenadas de V. Então existe uma única matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, necessariamente invertível tal que*

1. $[x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2}$

2. $[x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$

para todo $x \in V$*. As colunas de* $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ *são dadas por*

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_1}$$

para $j = 1$, ..., n.

Além disso, também temos o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Seja* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *um matriz invertível. Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e* $\mathcal{B}_1$ *uma base ordenada de* V*. Então existe uma única base ordenada* $\mathcal{B}_2$ *de* V *tal que*

1. $[x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2}$

2. $[x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$

para todo $x \in V$*.*

Definição 3.6. *A matriz* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *do Teorema 3.7 é chamada de* ***matriz de mudança de base*** *e é denotada por* $P = [I]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$*.*

Agora, sejam $T : V \to V$ uma transformação linear, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V. Sabemos que existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2} \tag{3.1}$$

para todo $x \in V$. Mas, para todo $x \in V$ temos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B}_1}[x]_{\mathcal{B}_1}. \tag{3.2}$$

Aplicando (3.1) ao vetor $T(x)$ obtemos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}. \tag{3.3}$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3):

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}_1}[x]_{\mathcal{B}_1} &= [T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2} \\ [T]_{\mathcal{B}_1}P[x]_{\mathcal{B}_2} &= P[T(x)]_{\mathcal{B}_2} \\ P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P[x]_{\mathcal{B}_2} &= [T(x)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2}[x]_{\mathcal{B}_2}. \end{aligned}$$

Daí

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P = [T]_{\mathcal{B}_2}$$

o que responde nossa pergunta.

Por outro lado, sabemos que existe uma única transformação linear $G : V \to V$ tal que

$$G(v_i) = w_i$$

para $i = 1$, ..., n. Mais ainda, tal transformação linear é um isomorfismo. Afirmamos que a matriz P acima é exatamente a matriz de G em relação à base $\mathcal{B}_1$. De fato, as entradas de P são definidas por

$$w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$$

e como $G(v_i) = w_i$ podemos escrever

$$G(v_i) = w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i$$

e então por definição $[G]_{\mathcal{B}_1} = P$. Desse modo, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V. Suponha que $T : V \to V$ é uma transformação linear. Se $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz com colunas*

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_1}$$

então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P.$$

Alternativamente, se G é o isomorfismo de V definido por $G(v_i) = w_i$, $i = 1$, ..., n então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = ([G]_{\mathcal{B}_1})^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}[G]_{\mathcal{B}_1}.$$

Definição 3.7. *Sejam A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que B é **semelhante** a A sobre $\mathbb{K}$ se existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemplos 3.7.1. *1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. Sabemos que com relação à base $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$ a matriz de T é*

$$[T_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, seja $\mathcal{B}_2$ a base de $\mathbb{R}^2$ formada por

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 1); w_2 = (2, 1)\}.$$

Então

$$w_1 = e_1 + e_2$$
$$w_2 = 2e_1 + e_2.$$

Assim P é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1} P$$
$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $\mathcal{D} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ a transformação derivada. Considere a base $\mathcal{B}_1 = \{f_1 = 1; f_2 = x; f_3 = x^2; f_4 = x^3\}$. Tome $t \in \mathbb{R}$ e defina

$$\mathcal{B}_2 = \{g_1 = 1; g_2 = (x + t); g_3 = (x + t)^2; g_4 = (x + t)^3\}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
g_1 &= 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 \\
g_2 &= tf_1 + xf_2 + 0f_3 + 0f_4 \\
g_3 &= t^2f_1 + 2tf_2 + 1f_3 + 0f_4 \\
g_4 &= t^3f_1 + 3t^2f_2 + 3tf_3 + 1f_4
\end{aligned}$$

e então

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível com

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
D(f_1) &= 0 \\
D(f_2) &= 1 \\
D(f_3) &= 2x \\
D(f_4) &= 3x^2
\end{aligned}$$

e então

$$[D]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[D]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[D]_{\mathcal{B}_1}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 4

FORMAS CANÔNICAS

Sejam $(V, \boxplus, \boxdot)$ e $(W, \oplus, \otimes)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Denote por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Dados T, $G \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ defina

- $(T + G)(u) = T(u) \oplus G(u)$
- $(\lambda T)(u) = \lambda \otimes T(u)$

para todo $u \in V$. É fácil verificar que $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. O vetor nulo é a transformação linear $0 : V \to W$ tal que $0(u) = 0_W$ para todo $u \in V$. Dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, o vetor oposto é $(-T) : V \to W$ definido por $(-T)(u) = -T(u)$ para todo $u \in V$.

Teorema 4.1. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais com dimensões p e q, respectivamente. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = (\dim_{\mathbb{K}} V)(\dim_{\mathbb{K}} W).$$

Prova: Sejam $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ bases de V e W, respectivamente. Para cada par (i, j) com $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$ vamos definir uma transformação linear

$T_{(i,j)} : V \to W$ por

$$T_{(i,j)}(v_r) = \begin{cases} w_i & \text{se } r = j \\ 0_W & \text{se } r \neq j \end{cases}, \tag{4.1}$$

isto é, $T_{(i,j)}(v_r) = \delta_{jr} w_i$, onde δ_{jr} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{jr} = 1_{\mathbb{K}}$ se $r = j$ e $\delta_{jr} = 0_{\mathbb{K}}$ se $r \neq j$). Sabemos que existe uma única transformação linear que satisfaz (4.1) para cada (i, j). Assim obtemos um conjunto

$$\mathcal{A} = \{T_{(1,1)}; T_{(1,2)}; \ldots; T_{(1,p)}; \ldots; T_{(q,1)}; \ldots; T_{(q,p)}\} \tag{4.2}$$

com pq elementos. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é uma base de $\mathcal{L}(V, W)$. Primeiro, seja $G \in \mathcal{L}(V, W)$ e considere a matriz $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})$ com relação às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$. Assim $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$ é dada por

$$\begin{aligned} G(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{q1}w_q = \sum_{i=1}^{q} a_{i1}w_i \\ &\vdots \\ G(v_p) &= a_{1p}w_1 + \cdots + a_{qp}w_q = \sum_{i=1}^{q} a_{ip}w_i, \end{aligned}$$

ou simplesmente, $G(v_r) = \sum_{i=1}^{q} a_{ir} w_i$ para $r = 1$, ..., p. Considere agora a transformação linear $H : V \to W$ dada por

$$H = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} T_{(i,j)}.$$

Vamos mostrar que $G = H$. Para isso, basta mostrar que $G(v_j) = H(v_j)$ para $v_j \in \mathcal{B}_V$. Temos

$$\begin{aligned} H(v_r) &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} T_{(i,j)}(v_r) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} (a_{i1}\delta_{1r}w_i + a_{i2}\delta_{2r}w_i + \cdots + a_{ip}\delta_{pr}w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} a_{ir}w_i = G(v_r) \end{aligned}$$

para cada $r = 1$, ..., p. Portanto $G = H$ e assim $\mathcal{A}$ gera $\mathcal{L}(V, W)$.

Mostremos agora que $\mathcal{A}$ é L.I. em $\mathcal{L}(V,W)$. Para isso, sejam $b_{ij} \in \mathbb{K}$ com $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$ tais que

$$S = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} T_{(i,j)} = 0.$$

Assim $S(v_r) = 0_W$ para todo $r = 1, \ldots, p$. Daí

$$\begin{aligned} 0_W = S(v_r) &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} T_{(i,j)}(v_r) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} (b_{i1}\delta_{1r} w_i + b_{i2}\delta_{2r} w_i + \cdots + b_{ip}\delta_{pr} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} b_{ir} w_i \end{aligned}$$

para $r = 1, \ldots, p$. Isto é,

$$\begin{aligned} &b_{11}w_1 + \cdots + b_{q1}w_q = 0_W \\ &\vdots \\ &b_{1p}w_1 + \cdots + b_{qp}w_q = 0_W \end{aligned}$$

e como $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ é L.I. em W, então $b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$. Logo $\mathcal{A}$ é L.I. e assim uma base para $\mathcal{L}(V,W)$. Portanto

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V,W) = pq = (\dim_{\mathbb{K}} V)(\dim_{\mathbb{K}} W)$$

como queríamos. ♢

Corolário 4.1.1. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões p e q, respectivamente. Então $\mathcal{L}(V,W)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$.*

Definição 4.1. *(i) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um* ***operador linear*** *é uma transformação linear $T : V \to V$.*

(ii) Se $T : V \to V$ é um operador linear, denotamos $T \circ T$ por T^2 e mais geralmente

$$\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n} = T^n.$$

Além disso, $T^0 = Id : V \to V$ o operador tal que $Id(u) = u$ para todo $u \in V$.

4.1 Operadores Diagonalizáveis

Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda_2 & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v_i]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_i \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Isto é,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Definição 4.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear.*

*(i) Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $u \in V$ com $T(u) = \lambda u$.*

(ii) Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $u \in V$ tal que

$$T(u) = \lambda u$$

é chamado de ***autovetor*** *de* T ***associado*** *ao autovalor* λ*. Denotaremos por* $Aut_T(\lambda)$ *o subespaço gerado por todos os autovetores associados a* λ*. Assim*

$$\operatorname{Aut}_T(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}.$$

(iii) Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$*. Dizemos que* T *é* ***diagonalizável*** *se existir uma base* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que* $[T]_{\mathcal{B}}$ *é diagonal, isto é, tem a forma* (4.3)*. Tal fato equivale a dizer que existe uma base formada por autovetores.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Vamos determinar um método para encontrar todos os autovalores de T, caso existam.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor, então existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T(u) = \lambda u$. Assim, seja $Id : V \to V$ o operador identidade. Temos

$$\begin{aligned} T(u) &= \lambda u \\ T(u) &= \lambda Id(u) \\ T(u) - \lambda Id(u) &= 0_V \\ (T - \lambda Id)(u) &= 0_V \end{aligned}$$

isto é, $u \in \ker(T - \lambda Id)$. Reciprocamente, se $u \in \ker(T - \lambda Id)$ e $u \neq 0_V$, então $T(u) = \lambda u$. Logo

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T\text{, se, e somente, } \ker(T - \lambda Id) \neq \{0_V\}.$$

Agora, seja $\mathcal{A}$ uma base qualquer de V e considere a matriz $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ do operador $T - \lambda Id \in \mathcal{L}(V, V)$. Como $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, se $T - \lambda Id$ é injetor, então $T - \lambda Id$ é um isomorfismo e daí invertível. Isto é, $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ é uma matriz invertível. Mas se $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor, então $\ker(T - \lambda Id) \neq \{0_V\}$, ou seja, $T - \lambda Id$ não é injetora e consequentemente não pode ser um isomorfismo. Loga a matriz $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ não é invertível. Assim

$$\det[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se,

$$\det[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Proposição 4.2.1. *Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor do operador linear $T : V \to V$. Então*

$$\operatorname{Aut}_T(\lambda) = \ker(T - \lambda Id).$$

Seja x uma variável. Temos

$$[T - xId]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}} - x[Id]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - x \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

onde $[T]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para $1 \leq i,\ j \leq n$. Assim $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ é um polinômio de grau n com coeficiente em $\mathbb{K}$. O termo x^n aparece com coeficiente $\pm 1_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, λ é uma raiz de

$$\det[T - xId]_{\mathcal{A}}.$$

Agora, seja $\mathcal{B}$ uma outra base de V. Sabemos que existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que

$$[T - xId]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P.$$

Então

$$\det([T - xId]_{\mathcal{B}}) = \det(P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P) = \det(P^{-1})\det([T - xId]_{\mathcal{A}})\det(P) = \det[T - xId]_{\mathcal{A}}$$

uma vez que $\det(P^{-1})\det(P) = 1_{\mathbb{K}}$. Logo o polinômio $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ não depende da base escolhida para V.

Definição 4.3. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ um operador linear e $\mathcal{A}$ uma base de V. Chamamos o polinômio* $\det([T - xId]_{\mathcal{A}})$ *de **polinômio característico** de T e o denotamos por $p_T(x)$.*

Exemplo 4.3.1. *1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Encontre os autovalores de T e os autoespaços associados, se existirem.*

Solução: *Vamos considerar a base canônica de* $\mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathcal{A} = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1)\}$. *Temos*

$$T(1,0) = (0,1) = 0(1,0) + 1(1,0) \tag{4.5}$$

$$T(0,1) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(1,0). \tag{4.6}$$

Daí

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1.$$

Como $p_T(x)$ *não possui raízes em* $\mathbb{R}$, *segue que* T *não possui autovalores.*

2. *Seja* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *o operador linear dado por* $T(x,y) = (-y,x)$. *Encontre os autovalores de* T *e os autoespaços associados, se existirem, considerando* $\mathbb{C}^2$ *com um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial.*

Solução: *Considere a base canônica* $\mathcal{A}$ *de* $\mathbb{C}^2$. *É imediato verificar que o polinômio característico de* T *é* $p_T(x) = x^2 + 1$, *cujas raízes são* $\pm i$. *Assim* T *possui 2 autovalores distintos e para cada um deles vamos encontrar o autoespaço associado.*

- *Para* $\lambda_1 = i$ *temos:*

$$[T - iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

e assim $(x,y) \in \operatorname{Aut}_T(i)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = iy$. *Logo*

$$\operatorname{Aut}_T(i) = \{(iy,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(i,1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_1 = \{(i,1)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(i)$ *e daí* $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Aut}_T(i) = 1$.

- *Para* $\lambda_1 = -i$ *temos:*

$$[T + iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

e assim $(x, y) \in \operatorname{Aut}_T(-i)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = -iy$. *Logo*

$$\operatorname{Aut}_T(-i) = \{(-iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(-i, 1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_2 = \{(-i, 1)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(-i)$ *e daí* $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Aut}_T(-i) = 1$.

Agora o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(i, 1); (-i, 1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *e nesta base temos*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

3. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador linear tal que*

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ *é uma base qualquer de* $\mathbb{R}^3$. *Determine, casa exista, uma base de* $\mathbb{R}^3$ *tal que o operador* T *seja diagonalizável.*

Solução: *Temos*

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = (3 - x)^2(1 - x)$$

e assim os autovalores de T *são* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = 1$.

- *Para* $\lambda_1 = 3$ *temos que* $(x, y, z) \in \operatorname{Aut}_T(3)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\operatorname{Aut}_T(3) = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$$

e então $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(3)$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(3) = 1$.

- *Para* $\lambda_2 = 1$ *temos que* $(x,y,z) \in \operatorname{Aut}_T(1)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\operatorname{Aut}_T(1) = \{(-7z/4, -5z/2, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-7/4, -5/2, 1)]$$

e então $\mathcal{B}_2 = \{(-7/4, -5/2, 1)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(1)$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(1) = 1$.

Note que o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *é L.I. mas não é uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Neste caso o operador* T *não é diagonalizável.*

4. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador tal que*

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ *é uma base qualquer de* $\mathbb{R}^3$. *Determinar se* T *é diagonalizável.*

Solução: *Temos*

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = -(x+1)^2(x+2)$$

e assim os autovalores de T *são* $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = -2$. *Cálculos simples mostram que*

$$\operatorname{Aut}_T(-1) = [(1,0,2); (0,1,2)]$$
$$\operatorname{Aut}_T(-2) = [(1,-1,1)].$$

É fácil verificar que o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0,2);(0,1,2);(1,-1,1)\}$ *é L.I, logo uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Nesta base temos*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo T *é diagonalizável.*

Teorema 4.2. *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear onde* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita e sejam* λ_1*, ...,* λ_r*,* $r \geq 1$*, autovalores de* T*, dois a dois distintos.*

(i) Se $u_1 + \cdots + u_r = 0_V$ *com* $u_i \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$*;* $i = 1$*, ...,* r*; então* $u_i = 0_V$ *para todo* i*.*

(ii) Para cada $i = 1$*, ...,* r *seja* $\mathcal{B}_i$ *um conjunto linearmente independente contido em* $\operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$*. Então* $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ *é L.I. em* V*.*

Prova:

(i) A prova será por indução em $r \geq 1$. Se $r = 1$, nada há a fazer. Seja $r > 1$ e suponha que o teorema seja válido para todo $j < r$. Vamos mostrar que também é válido para $j = r$. Temos

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 0_V \tag{4.7}$$

com $u_i \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$.

Aplicando T em (4.7) obtemos

$$0_V = T(u_1) + T(u_2) + \cdots + T(u_r) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r. \tag{4.8}$$

Agora multiplicando (4.7) por λ_1 e subtraindo de (4.8) obtemos

$$\lambda_1 u_2 + \lambda_1 u_r - \lambda_2 u_2 - \cdots - \lambda_r u_r = 0_V$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_2 - \cdots - (\lambda_1 - \lambda_r)u_r = 0_V.$$

Mas por hipótese de indução, segue que $(\lambda_1 - \lambda_i)u_i = 0$ para $i = 2$, ..., r. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, então $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ e então $u_i = 0_V$ para $i = 2$, ..., r. Logo $u_1 = 0_V$ e o resultado está provado.

(ii) Para cada i, seja $\mathcal{B}_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{in_i}\}$. Vamos mostrar que o subconjunto de V dado por $\mathcal{B} = \{u_{11}, \ldots, u_{1n_1}, u_{21}, \ldots, u_{2n_2}, \ldots, u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}\}$ é L.I. em V. Para isso sejam $\alpha_{in_i} \in \mathbb{K}$, $i = 1$, ..., r tais que

$$\alpha_{11}u_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1}u_{1n_1} + \cdots + \alpha_{r1}u_{r1} + \cdots + \alpha_{rn_r}u_{rn_r} = 0_V.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}u_{ij} \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$$

para $i = 1$, ..., r. Daí segue do item (a) que

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}u_{ij} = 0_V$$

para $i = 1$, ..., r. Como $\mathcal{B}_i$ é L.I. para $i = 1$, ..., r, então $\alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para $i = 1$, ..., r e $j = 1$, ..., n_i. Portanto $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I. em V.

$\diamondsuit$

Corolário 4.2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se λ_1, ..., λ_r são todos os autovalores de T, então T é diagonalizável se, e somente se,*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=i}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(\lambda_i).$$

Definição 4.4. *Seja λ um autovalor de um operador linear $T : V \to V$ onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos que*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$$

com $q(\lambda) \neq 0$, seja o polinômio característico de T.

(i) O número m é chamada de ***multiplicidade algébrica*** *de λ e o denotamos por $ma(\lambda)$.*

(ii) Chamamos de ***multiplicidade geométrica*** *de λ à dimensão do subespaço $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.*

Observação 4.4.1. *A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é o maior índice j tal que*

$$p_T(x) = (x-\lambda)^j q(x)$$

com $q(\lambda) \neq 0$;

Exemplo 4.4.1. *(i)* $p_T(x) = (x-2)(x^2-5x+6)$, $ma(2) = 2$

(ii) $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)$, $ma(2) = 1$, $ma(-1) = 3$.

Proposição 4.4.1. *Seja λ um autovalor de $T : V \to V$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.*

Prova: Seja $W = \operatorname{Aut}_T(\lambda)$ e assuma que $\dim_{\mathbb{K}} W = r$. Sejam $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ uma base de W e $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ uma base de V contendo $\mathcal{B}_W$. Como $T(w_i) = \lambda w_i$ para $i = 1$, ..., r; podemos escrever $[T]_{\mathcal{B}_V}$ na forma

$$[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} \lambda & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{r+1r+1} & \dots & b_{r+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{nr+1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{B}_V}) = (x-\lambda)^r \det(A_2).$$

Por definição, $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x-\lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = r \leq ma(\lambda)$. $\diamondsuit$

Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \dots (x-\lambda_r)^{n_r}$, onde λ_1, ..., $\lambda_r \in \mathbb{K}$ são distintos. Da definição de $p_T(x)$ temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n_1 + \dots + n_r.$$

Assim, pela proposição anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$$

se, e somente se, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para $i = 1, ..., r$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é diagonalizável.*

(ii) $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$, $n_i \geq 1$ *e* $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ *para cada* $i = 1, ..., r$.

(iii) $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$.

4.2 Subespaços T-invariantes

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que T é diagonalizável e os autoespaços de T são

$$\operatorname{Aut}_T(-1) = [(1,0,2);(0,1,2)]$$
$$\operatorname{Aut}_T(-2) = [(1,-1,1)].$$

Seja $u \in \operatorname{Aut}_T(-1)$. Assim existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,2)$$

e daí

$$T(u) = \alpha T(1,0,2) + \beta T(0,1,2) = -\alpha(1,0,2) - \beta(0,1,2) \in \operatorname{Aut}_T(-1).$$

Logo, para todo $u \in \operatorname{Aut}_T(-1)$, $T(u) \in \operatorname{Aut}_T(-1)$. Em outras palavras

$$T(\operatorname{Aut}_T(-1)) \subseteq \operatorname{Aut}_T(-1).$$

Analogamente, para todo $u \in \operatorname{Aut}_T(-2)$, $T(u) \in \operatorname{Aut}_T(-2)$. Em outras palavras

$$T(\operatorname{Aut}_T(-2)) \subseteq \operatorname{Aut}_T(-2).$$

Agora, seja $W = [(1,0,0)]$. Primeiramente, podemos escrever

$$(1,0,0) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,2) + \gamma(1,-1,1)$$

tomando $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = -2$. Daí

$$T(1,0,0) = (1,-2,2) \notin W$$

e então $T(W) \subsetneq W$.

Definição 4.5. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Dizemos que W é um* ***subespaço T-invariante*** *de V se $T(W) \subseteq W$, isto é, $T(u) \in W$ para todo $u \in W$.*

Exemplo 4.5.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

1. *Os subespaços triviais de V são T-invariantes.*

2. *Os subespaços $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ são T-invariantes. De fato, se $u \in \ker T$, então $T(u) = 0_V \in \ker T$. Assim $T(\ker T) \subseteq \ker T$. Agora, se $w \in \operatorname{Im} T$, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Assim $T(w) = T(T(u))$, logo $T(w) \in \operatorname{Im} T$ para todo $w \in \operatorname{Im} T$.*

3. *Se λ for um autovalor de T, então $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante.*

4. *Se W é um subespaço T-invariante, então $T : W \to W$ é um operador linear.*

5. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então os únicos subespaços T-invariantes são os triviais. De fato, qualquer outro espaço T-invariante teria dimensão 1, isto é, se W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, T-invariante então $W = [v]$. Daí v seria um autovetor de T. Mas

$$p_T(x) = x^2 + 1$$

que não possui raízes em $\mathbb{R}$. Logo, T não possui subespaço T-invariante não trivial.

Definição 4.6. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Dizemos que $W_1 + W_2$ é uma **soma direta** se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Neste caso escreveremos $W_1 \oplus W_2$.*

Exemplo 4.6.1. 1. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de $\mathbb{C}^4$ com bases $\{(1, 2, 0, i); (i, 0, 0, 1)\}$ e $\{(0, 0, 3, 1)\}$, respectivamente. Seja $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in W_1 \cap W_2$. Temos*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \alpha(1, 2, 0, i) + \beta(i, 0, 0, 1) = \gamma(0, 0, 3, 1)$$

donde $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e portanto $W_1 + W_2$ é uma soma direta e escrevemos $W_1 \oplus W_2$.

2. *Sejam $W_1 = [(0, 1)]$ e $W_2 = [(1, 1)]$ subespaços de $\mathbb{R}^2$. Temos que se $(x, y) \in W_1 \cap W_2$, então*

$$(x, y) = \alpha(0, 1) = \beta(1, 1)$$

e daí $\alpha = \beta = 0$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$ e então $W_1 + W_2$ é uma soma direta. Mais ainda

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1 \oplus W_2) = \dim_{\mathbb{R}} W_1 + \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$$

e portanto,

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2.$$

Definição 4.7. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam W_1 e W_2 dois subespaços de V. Dizemos que V é a **soma direta** de W_1 e W_2 se*

1. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$;

2. $W_1 + W_2 = V$.

Neste caso escrevemos

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Proposição 4.7.1. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e só, se cada elemento $u \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $x_1 + x_2$, onde $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2$.*

Prova:

($\Rightarrow$) Vamos supor que $V = W_1 \oplus W_2$. Segue então que cada elemento $u \in V$ se escreve como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2. Suponha agora que $u = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ onde x_1, $y_1 \in W_1$ e x_2, $y_2 \in W_2$. Daí

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$$

pois $x_1 - y_1 \in W_1$ e $y_2 - x_2 \in W_2$. Mas $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, logo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Como cada elemento de V é uma soma de elementos de W_1 com elementos de W_2, logo $V = W_1 + W_2$. Seja $u \in W_1 + W_2$ com $u \neq 0_V$. Assim como $0_V \in W_1$ temos

$$u = 0_V + u$$

considerando $u \in W_2$. Por outro lado, $0_V \in W_2$, daí

$$u = u + 0_V$$

considerando $u \in W_1$. Logo u pode ser escrito de duas maneiras distintas, o que contradiz nossa hipótese. Logo $u = 0_V$, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Portanto, $V = W_1 \oplus W_2$.

$\diamondsuit$

Proposição 4.7.2. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e de dimensão finita e W_1 um subespaço não nulo de V. Então existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Prova: Se $V = W_1$ não há nada a fazer, pois basta escolher $W_2 = \{0_V\}$. Suponha então que $V \neq W_1$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W_1. Sabemos que podemos estender $\mathcal{B}_1$ a uma base $\mathcal{B}$ de V. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m, u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V contendo $\mathcal{B}_1$. Defina

$$W_2 = [u_1, \ldots, u_n]$$

o subespaço gerado por u_1, ..., u_n. Como $\mathcal{B}$ gera V, então $V = W_1 + W_2$. Seja $v \in W_1 \cap W_2$. Então existem escalares α_1, ..., α_m, β_1, ..., β_n tais que

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$$

$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n,$$

isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_n u_n = 0_V$$

e então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$ pois $\mathcal{B}$ é L.I.. Assim $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ e portanto $V = W_1 \oplus W_2$. $\diamondsuit$

Exemplo 4.7.1. *1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = [(1,0,0)]$. Então podemos tomar $W_2 = [(0,1,0);(0,0,1)]$ e teremos $V = W_1 \oplus W_2$. Também podemos tomar $W_3 = [(1,1,1);(0,0,1)]$ e assim $V = W_1 \oplus W_3$.*

2. Sejam $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$. Tomando

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

temos $V = W_1 \oplus W_2$.

4.3 Polinômio Minimal

Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Para cada $i \geq 0$ se definirmos

$$T^i = \begin{cases} \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{i \text{ vezes}}, & i \geq 1 \\ Id, & i = 0, \end{cases}$$

então $T^i \in \mathcal{L}(V,V)$. Mas, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V,V) = n^2$, assim existe $r \geq 1$ tal que o conjunto $\{T^0, T, T^2, \ldots, T^{r-1}\}$ é L.I., mas $\{T^0, T, T^2, \ldots, T^r\}$ é L.D.. Logo existem escalares a_0, a_1, ..., a_{r-1} tais que

$$T^r = a_0 T^0 + a_1 T^1 + \cdots + a_{r-1} T^{r-1},$$

ou seja,

$$T^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i.$$

Assim

$$T^r(u) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i(u)$$

para todo $u \in V$.

Defina

$$m_T(x) = x^r - a_{r-1}x^{r-1} - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Do exposto anteriormente segue que

$$m_T(T(u)) = 0_V$$

para todo $u \in V$.

Definição 4.8. *O **polinômio minimal** de um operador linear T em $\mathcal{L}(V,V)$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Assim, se o grau de $m_T(x)$ é r, então o coeficiente de x^r é 1.*

Exemplo 4.8.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ dado por*

$$T(a,b,c) = (a, a+b, c).$$

Temos $T \neq \lambda Id$ e

$$T^2(a,b,c) = T(T(a,b,c)) = T(a, a+b, c) = (a, 2a+b, c) = 2(a, a+b, c) - (a,b,c)$$

isto é,

$$T^2(a,b,c) = 2T(a,b,c) - Id(a,b,c).$$

Assim o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x-1)^2.$$

Teorema 4.4. *Seja* $T \in \mathcal{L}(V,V)$*, onde* $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$*. Os polinômios característico e minimal de* T *possuem exatamente as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.*

Exemplo 4.8.2. *Seja* T *o operador sobre* $\mathbb{R}^n$ *representado em relação à base canônica pela matriz* A *dada. Encontre o polinômio minimal de* T*.*

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$, $n = 3$

   Solução: *O polinômio característico de* T *é*

   $$p_T(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

   Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

   $$(x-1)(x-2),\ (x-1)(x-2)^2.$$

   Temos

   $$A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}, A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

   e assim

   $$(A - I_3)(A - 2I_3) = [0]_{3\times 3}.$$

   Logo o polinômio minimal de T *é*

   $$m_T(x) = (x-1)(x-2).$$

   Note que $p_T(x) = m_T(x)(x-2)$ *e assim* $p_T(A) = [0]_{3\times 3}$*.*

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $n = 4$.

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x-3)(x-2)^3.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$f(x) = (x-3)(x-2),\ \ g(x) = (x-3)(x-2)^2, h(x) = (x-3)(x-2)^3.$$

Temos

$$f(A) = (A-3I_4)(A-2I_4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora

$$g(A) = (A-3I_4)(A-2I_4)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x-3)(x-2)^2.$$

Note que $p_T(x) = m_T(x)(x-2)$ e assim $p_T(A) = [0]_{4\times 4}$.

3. $A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *onde $a \neq 0$, $n = 2$.*

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x-\lambda)^2.$$

Assim o polinômio minimal será da forma

$$(x-\lambda),\ \ (x-\lambda)^2;$$

Como $T \neq \lambda Id$, então segue que $m_T(x) = p_T(x)$ e daí $p_T(A) = [0]_{2\times 2}$.

Teorema 4.5 (Cayley-Hamilton). *Seja T um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita. Se $p_T(x)$ é o polinômio característico de T, então $p_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Em particular, o polinômio característico $p_T(x)$ é um múltiplo do polinômio minimal $m_T(x)$ de T.*

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left[e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]$$
$$W_2 = \left[e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right].$$

Temos

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_1, T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

assim W_1 é um subespaço T-invariante. Seja então $T_1 = T : W_1 \to W_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ uma base de W_1. Temos

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W_2, T(e_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$$

assim W_2 é um subespaço T-invariante. Seja então $T_2 = T : W_2 \to W_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$ uma base de W_2. Temos

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é fácil ver que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ e assim $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}.$$

Neste caso dizemos que T é a **soma direta** dos operadores T_1 e T_2 e escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Além disso temos

$$T_1^2(e_1) = T_1(T(e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$T_1^2(e_2) = T_1(T(e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

assim $T_1^2 = 0$.

Note também que T_2 é invertível pois leva uma base de W_2 em uma base de W_2. Desse modo o operador T pode ser escrito como a soma direta

$$T = T_1 \oplus T_2$$

onde $T_1^2 = 0$ e T_2 é invertível. O operador T_1 é chamado de **nilpotente** de índice de nilpotência 2.

Definição 4.9. *Seja $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que W_i seja T-invariante para $i = 1, \ldots, r$. Sejam $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ bases de $W_1, \ldots, W_r$, respectivamente. Como $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V então*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}$$

onde $T_i = T : W_i \to W_i$, $i = 1, ..., r$. *Neste caso escrevemos*

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$$

e dizemos que T *é a* ***soma direta dos operadores*** $T_1, ..., T_r$.

Definição 4.10. *Uma operador linear* $T : V \to V$ *é chamado de* ***nilpotente*** *se existir um* $r > 0$ *tal que* $T^r = 0$. *O* ***índice de nilpotência*** *de um operador nilpotente será o menor inteiro* i *tal que* $T^i = 0$.

Observação 4.10.1. *Se* $T : V \to V$ *é um operador linear nilpotente, então* $\ker T \neq \{0_V\}$. *De fato, se* T *é nilpotente de índice* $i \geq 1$, *então existe* $u \in V$ *tal que* $T^i(u) = 0_V$ *e* $T^{i-1}(u) \neq 0_V$. *Assim*

$$0_V = T^i(u) = T(T^{i-1}(u)),$$

isto é, $T^{i-1}(u) \in \ker T$.

Exemplo 4.10.1.

1. *Seja* $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *o operador derivação. É fácil ver que* D *é nilpotente de índice de nilpotênica 4.*

2. *Seja* $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ *o operador derivação. É fácil ver que* D *é nilpotente de índice de nilpotênica* $n + 1$.

3. *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o operador linear tal que*

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   É fácil ver que T *é nilpotente de índice de nilpotência 2.*

Teorema 4.6. *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear, onde* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita. Então* T *é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.*

Observação 4.10.2. *O Teorema 4.6 não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. Por exemplo, seja* $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *o operador linear dado por* $T(p(x)) = xp(x)$. *Suponha que* $T = T_1 \oplus T_2$, *onde* T_1 *é nilpotente e* T_2 *é invertível. Primeiro note que para todo* $l \geq 1$,

$\ker T^l = \{0\}$, *logo* T *não é nilpotente. Assim* $T_2 \neq 0$. *Seja* W_2 *um subespaço* T*-invariante tal que* $T_2 = T : W_2 \to W_2$ *seja invertível. Logo* T_2 *é sobrejetora. Tome* $q(x) \in W_2$ *um polinômio mônico de menor grau possível. Como* T_2 *é sobrejetora, então existe* $p(x) \in W_2$ *tal que*

$$xp(x) = T_2(p(x)) = q(x).$$

Mas o grau de $xp(x)$ *é maior que o grau de* $q(x)$, *o que é um absurdo. Logo* T_2 *não é sobrejetora, ou seja,* T *não pode ser decomposta com uma soma de um operador nilpotente com um invertível.*

Proposição 4.10.1. *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear nilpotente de índice de nilpotência* $r \geq 1$ *e* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita. Se* $u \in V$ *é tal que* $T^{r-1}(u) \neq 0_V$, *então*

1. *O conjunto* $\{u, T(u), \ldots, T^{r-1}(u)\}$ *é L.I..*

2. *Existe um subespaço* T*-invariante* W *de* V *tal que* $V = U \oplus W$, *onde* U *é o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial dado por* $U = [u, T(u), \ldots, T^{r-1}(u)]$.

Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Suponha que T seja nilpotente de índice de nilpotência $r \geq 1$. É imediato que $r \leq n$. Além disso, como $T^{r-1} \neq 0$, existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T^{r-1}(u) \neq 0_V$. Daí, se $r = n$, então pela Proposição 4.10.1, o conjunto $\mathcal{B} = \{u, T(u), \ldots, T^{n-1}(u)\}$ é uma base de V. Com relação à essa base temos

$$\begin{aligned}
T(u) &= 0u + 1T(u) + 0T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)\\
T(T(u)) &= 0u + 0T(u) + 1T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)\\
&\vdots\\
T^n(u) &= 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)
\end{aligned}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, se o polinômio característico de T é $p_T(x) = (x-\lambda)^n$, então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, 4.5, o operador $T - \lambda Id$ é nilpotente. Se o seu índice de nilpotência for n, então existirá uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ terá a forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Definição 4.11. *Um **bloco de Jordan** $r \times r$ em λ é a matrix $J_r(\lambda)$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ que tem λ na diagonal principal e 1 na diagonal abaixo da principal, isto é,*

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r} .$$

Teorema 4.7. *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $r \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos p, m_1, ..., m_p e vetores u_1, ..., u_p tais que*

(a) $r = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p$.

(b) *O conjunto* $\mathcal{B} = \{u_1, T(u_1), \ldots, T^{r-1}(u_1); \ldots; u_p, T(u_p), \ldots, T^{r-1}(u_p)\}$ *é uma base de* V.

(c) $T^{m_i}(u_i) = 0_V$ *para cada* $i = 1, \ldots, p$.

(d) Se S *for um operador linear em um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* W *de dimensão finita, então os inteiros* $p, m_1, \ldots, m_p$ *associados a* S *e a* T *são iguais se, e somente se, existir um isomorfismo* $\Phi : V \to W$ *com* $\Phi T \Phi^{-1} = S$.

Teorema 4.8. *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear, onde* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

onde $m_i \geq 1$ *e* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *se* $i \neq j$. *Então* $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ *onde para cada* $i = 1, \ldots, r$ *temos:*

(a) $\dim_{\mathbb{K}} W_i = m_i$

(b) O subespaço W_i *é* $T-$*invariante*

(c) A restrição do operador $\lambda_i Id - T$ *à* W_i *é nilpotente.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita tal que seu polinômio característico seja dado por

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Pelo Teorema 4.8, existe uma decomposição $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) de seu enunciado. Agora, para cada $i = 1, \ldots, r$ considere $T_i = T - \lambda_i Id : W_i \to W_i$. Pelo item (c) do Teorema 4.8, T_i é nilpotente. Seja α_i o índice de nilpotência de T_i. Assim

$$T_i^{\alpha_i} = 0$$
$$(T - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = 0$$

e então T_i é raiz do polinômio $(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ para $i = 1, \ldots, r$. Seja $f(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1}(x - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$. Pela definição de índice de nilpotência, $f(x)$ é o polinômio de menor grau tal que suas raízes são $T_1, \ldots, T_r$. Logo T é uma raiz de $f(x)$, isto é, $f(x)$ é o polinômio minimal de T. Portanto o índice de nilpotência de T_i é determinado pelo polinômio minimal $m_T(x)$.

Como T_i é nilpotente, pelo item (b) do Teorema 4.7, existe uma base $\mathcal{B}_i$ de W_i e números p_i, $m_{i_1} \geq m_{i_2} \cdots \geq m_{i_{p_i}}$ tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i_1}}(\lambda_i) & & & \\ & J_{m_{i_2}}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_{i_{p_i}}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

onde para cada $i = 1, ..., r$ e $j = 1, ..., p_i$

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V. Em relação à essa base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & & & \\ & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

A matriz (4.9) é chamada **forma de Jordan** associada ao operador linear T. Os números p_i, m_{ij}, $i = 1, ..., r$ e $j = 1, ..., p_i$ são completamente determinados por T. Mais ainda, pelo item (d) do Teorema 4.7, dois operadores lineares $S \in \mathcal{L}(V, V)$ e $T \in \mathcal{L}(W, W)$ têm a mesma forma de Jordan se, e somente se, existir um isomorfismo $\Phi : V \to W$ tal que $\Phi^{-1} S \Phi = T$.

Exemplo 4.11.1. *1. Seja $T : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$ um operador linear tal que seu polinômio característico é $p_T(x) = (x-2)^4(x-3)^3$. Encontre a(s) possível(is) forma(s) de Jordan associadas a T.*

Solução: *Como $p_T(x) = (x-2)^4(x-3)^3$, então $V = W_1 \oplus W_2$ onde $\dim_{\mathbb{K}} W_1 = 4$ e $\dim_{\mathbb{K}} W_2 = 3$. Assim $T = T_1 \oplus T_2$, onde $T_1 = T : W_1 \to W_1$ e $T_2 = T : W_2 \to W_2$.*

Agora, $(T_1 - 2I_4)$ *é nilpotente de índice de nilpotência* $r \leq 4$*. Se* $r = 1$*, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 2$*, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array}\right] \quad ou \quad [T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 3$*, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right].$$

Se $r = 4$*, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O operador $(T_2 - 3I_3)$ *é nilpotente de índice de nilpotência* $r \leq 3$*.*

Se $r = 1$*, então*

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 2$*, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 1 & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right].$$

Se $r = 3$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo existem 15 possíveis formas de Jordan para T.

2. *Seja $T : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ tal que $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)^2$.*

Solução: *As possíveis formas são*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *Seja $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tal que em relação à base canônica, T seja representado pela matriz*

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T.

Solução: *Primeiramente temos que*

$$p_T(x) = x^4.$$

Cálculos simples mostram que $m_T(x) = x^2$. *Assim a forma de Jordan de* T *possui um bloco de Jordan de tamanho 2 associado a 0. Agora,*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ + \\ -1/2 \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -0{,}4 \\ + \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(a) = 2$, *isto é, existem dois blocos de Jordan associados ao autovalor 0. Portanto, existe uma base* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que*

$$[T]_B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right].$$

4. *Seja* $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ *o operador linear representado pela matriz*

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T.

Solução: *Inicialmente, como* $[T]$ *é uma matriz triangular, seu polinômio característico será*

$$p_T(x) = (x+1)^5(x+4).$$

Um cálculo simples, mostra que

$$m_T(x) = (x+1)^3(x+4)$$

logo a forma de Jordan de T possui um bloco de Jordan de tamanho 3, associado à -1 e um bloco de Jordan de tamanho 1, associado à 4. Desse modo a forma de Jordan de T será

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar agora, $\mathrm{Aut}_T(-1)$ para decidir qual será a forma de Jordan de T.

Temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \mid \times -1/3 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde obtemos que $\operatorname{Aut}_T(-1) = \{(x_1, x_2, -2x_2, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. *Logo obtemos* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(-1) = 2$, *com isso existem dois blocos de Jordan associados ao autovalor -1 e portanto a forma de Jordan de* T *é*

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Observação 4.11.1. *1. Se um operador linear $T : V \to V$, onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, é tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Se $T - \lambda_i Id$ é nilpotente de índice de nilpotência α_i, então existe um bloco de Jordan de tamanho α_i, $i = 1, \ldots, r$.

2. A dimensão de $\operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$ é igual ao número de blocos de Jordan $J_c(\lambda_i)$ associados ao autovalor λ_i que aparece em T.

3. A base que gera a forma de Jordan é chamada de ***base de Jordan****.*

4.4 Como encontrar a base de Jordan

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que sua forma de Jordan seja

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan, temos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 3v_1 + v_2 \\ T(v_2) &= 3v_2 + v_3 \\ T(v_3) &= 3v_3, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} (T - 3Id)(v_1) &= v_2 \\ (T - 3Id)(v_2) &= v_3 \\ (T - 3Id)(v_3) &= 0. \end{aligned}$$

Assim para achar a base de Jordan precisamos de:

1. Achar todos os autovetores correspondentes a um certo autovalor, isto é, encontrar $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$.

2. O número de autovetores L.I. associados ao autovalor λ é igual ao número de blocos de Jordan associados à λ.

3. Resolver a equação $(T - \lambda Id)(u) = v_\lambda$ onde v_λ é o autovetor associado ao autovalor λ para cada autovetor diferente.

Vamos aplicar este método para o caso de matrizes 3×3. Neste caso temos três situações para analisar:

1. Existem 3 autovetores L.I.

   Por exemplo, para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Encontre a forma de Jordan de A.

   Solução: *O polinômio característico é*

$$p_A(x) = (x-5)(x-3)^2$$

   e daí

$$\text{Aut}\,_A(5) = [e_1 = (1,2,1)]$$
$$\text{Aut}\,_A(3) = [e_2 = (0,1,0); e_3 = (-1,0,1)].$$

   Assim a forma de Jordan de A é

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

   onde $J_1(5) = [5]$ *e* $J_1(3) = [3]$.

2. Existem 2 autovetores L.I.

Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: *Temos*

$$p_A(x) = (x-1)^3 \quad e \quad m_A(x) = (x-1)^2.$$

Assim existem dois bloco de Jordan de tamanho 2. Além disso,

$$\text{Aut}_A(1) = [e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,-1)]$$

e daí temos duas possíveis formas de Jordan para A, a saber:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos procurar uma base que gere a matriz B. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan que produz a matriz B, então temos

$$\begin{aligned} A(v_1) &= v_1 + v_2 \\ A(v_2) &= v_2 \\ A(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} (A - I_3)(v_1) &= v_2 \\ (A - I_3)(v_2) &= 0 \\ (A - I_3)(v_3) &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo podemos escolher v_2 e v_3 como autovetores de A. Digamos que

$$v_2 = (0,1,-1) \quad e \quad v_3 = (1,0,0).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ *tal que*

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

O sistema associado é

$$\begin{bmatrix} y+z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é impossível. Assim vamos tomar

$$v_2 = (1, 0, 0) \quad e \quad v_3 = (0, 1, -1).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ *tal que*

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

Resolvendo o sistema associado encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1).$$

Tomando $x = y = 0$ *o vetor procurado é* $v_1 = (0, 0, 1)$. *Assim na base* $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1); v_2 = (1, 0, 0); v_3 = (0, 1, -1)\}$ *a forma de Jordan de* A *será como dado por* B. *Se escolhermos a ordem* $\mathcal{B}_1 = \{v_3, v_1, v_2\}$ *para a base, obtemos*

$$[A]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Existe 1 autovalor L.I.

   Encontre a forma de Jordan e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução: *Aqui*

$$p_A(x) = (x+1)^3 = m_A(x).$$

Deste modo existe um bloco de Jordan de tamanho 3. Além disso

$$\text{Aut}_A(-1) = [e_1 = (1,0,0)].$$

Assim a única possibilidade para a forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *é a base de Jordan, então*

$$(A + I_3)(v_1) = v_2$$

$$(A + I_3)(v_2) = v_3$$

$$(A + I_3)(v_3) = 0.$$

Tome $v_3 = (1,0,0)$ *e seja* $v_2 = (x,y,z)$. *Temos*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$v_2 = x(1,0,0) + (0,-1,0).$$

Podemos então tomar $v_2 = (0,-1,0)$.

Agora, precisamos encontrar $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ *tal que* $(A + I_3)(v_1) = v_2$. *Do sistema*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

encontramos

$$v_1 = x(1,0,0) + (0,0,1/2).$$

Tomando $v_1 = (0,0,1/2)$ *a base de Jordan será*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (0,0,1/2); v_2 = (0,-1,0); v_3 = (1,0,0)\}.$$

CAPÍTULO 5

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Durante este capítulo o corpo base $\mathbb{K}$ de um espaço vetorial V será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 5.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um* ***produto interno*** *sobre V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades seguintes:*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todos u, v e $w \in V$.*

2. $\langle \lambda u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$ *para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todos u, $w \in V$.*

3. $\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle}$ *para todos u, $w \in V$. (Aqui, $\overline{a+bi} = a - bi$.)*

4. $\langle u, u\rangle > 0_{\mathbb{K}}$ *se $u \neq 0_V$.*

Observação 5.1.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Temos*

1. $\langle 0_V, w\rangle = \langle w, 0_V\rangle = 0_{\mathbb{K}}$ *para todo $w \in V$.*

   De fato,
   $$\langle 0_V, w\rangle = \langle 0_V + 0_V, w\rangle = \langle 0_V, w\rangle + \langle 0_V, w\rangle$$
   logo $\langle 0_V, w\rangle = 0_{\mathbb{K}}$. Como $\langle w, 0_V\rangle = \overline{\langle 0_V, w\rangle}$, então $\langle w, 0_V\rangle = 0_{\mathbb{K}}$.

2. $\langle w, w\rangle = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $w = 0_V$.

3. *No caso em* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *a propriedade 3 da definição de produto interno torna-se:* $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle$.

Exemplo 5.1.1. 1. *Em* $\mathbb{R}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle (a, b, c); (x, y, z)\rangle = ax + by + cz$$

é um produto interno.

Solução: *De fato, dados* (a, b, c), (x, y, z), $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos:*

(a) $\langle (a, b, c) + (x, y, z); (u, v, w)\rangle = \langle (a + x, b + y, c + z); (u, v, w)\rangle = (a + x)u + (b + y)v + (c + z)w = \langle (a, b, c); (u, v, w)\rangle + \langle (x, y, z); (u, v, w)\rangle$.

(b) $\langle \lambda(a, b, c), (x, y, z)\rangle = \langle (\lambda a, \lambda b, \lambda c), (x, y, z)\rangle = \lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda\langle (a, b, c); (x, y, z)\rangle$

(c) $\langle (a, b, c); (x, y, z)\rangle = ax + by + cz = \langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle$.

(d) $\langle (a, b, c); (a, b, c)\rangle = a^2 + b^2 + c^2 > 0$ *para todo* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

2. *Em* $\mathbb{C}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\langle (a, b, c); (x, y, z)\rangle = ax + by + cz$$

não é um produto interno.

Solução: *De fato, por exemplo*

$$\langle (i, 0, 0); (i, 0, 0)\rangle = i^2 = -1 < 0.$$

3. *Em* $\mathbb{C}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\langle (a, b, c); (x, y, z)\rangle = a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}$$

é um produto interno.

4. *Se* $V = \mathbb{R}^2$ *então* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$\langle (a,b);(x,y)\rangle = 2ax - ay - bx + by$$

é um produto interno.

5. *De modo geral, em* $V = \mathbb{K}^n$ *a função definida por*

$$\langle (x_1,\ldots,x_n);(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

é um produto interno em $\mathbb{K}^n$*. Tal produto interno é chamada de* ***produto interno canônico*** *em* $\mathbb{K}^n$*.*

6. *Considere o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *o espaço das funções contínuas de* $[a,b]$ *em* $\mathbb{K}$*. Defina*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

para $f,\ g \in V$*. Tal função é um produto interno em* V *e é chamado de* ***produto interno canônico*** *em* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*.*

7. *O* ***produto interno canônico*** *em* $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *é dado por*

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

onde $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{n\times n}$*.*

Definição 5.2. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial munido de um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*. Para cada* $u \in V$*, chamados de* ***norma*** *de* u *ao número real dado por*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

Observação 5.2.1. *Segue diretamente da definição de norma que:*

1. $\|u\| \geq 0$ *para todo* $u \in V$*.*

2. $\|u\| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0_V$*.*

3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo* $u \in V$*.*

Exemplo 5.2.1. *1. Em* $\mathbb{R}^3$ *considere o produto interno canônico. Dados* $u = (a, b, c)$ *e* $v = (x, y, z)$ *temos*

$$\|u - v\| = \|(a - x, b - y, c - z)\| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}$$

indicará a distância entre u *e* v*.*

2. A norma de um vetor depende do produto interno escolhido. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ *se considerarmos o produto interno dado por*

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_1) \rangle_1 = 2x_1y_1 + 25x_2y_2.$$

Então $\|(1, 0)\|_1 = \langle (1, 0); (1, 0) \rangle_1 = \sqrt{2}$ *e* $\|(0, 1)\|_1 = \langle (0, 1); (0, 1) \rangle_1 = 5$*.*

Agora, se considerarmos o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$*, temos* $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$*.*

Definição 5.3. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial munido de um produto interno* $\langle\ ,\rangle$*.*

1. *Dizemos que* u *e* w *são vetores* ***ortogonais*** *se* $\langle u, w \rangle = 0$*.*

2. *Um subconjunto* $\mathcal{A}$ *de* V *é chamado de* ***ortogonal*** *se os seus elementos são ortogonais dois a dois.*

3. *Dizemos que um subconjunto* $\mathcal{A}$ *de* V *é* ***ortonormal*** *se for um conjunto ortogonal e se* $\|u\| = 1$ *para todo* $u \in \mathcal{A}$*.*

Notação 5.3.1. *Usaremos a notação* $u \perp w$ *para indicar que os vetores* u *e* v *são ortogonais.*

Observação 5.3.1. *O vetor nulo* 0_V *é ortogonal a todos os elementos de* V *pois* $\langle 0_V, u \rangle = 0$ *para todo* $u \in V$*. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.*

Exemplo 5.3.1. *As bases canônicas de* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{C}^n$*,* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *são conjunto ortonormais, considerando o produto interno canônico nestes espaços vetoriais.*

Proposição 5.3.1. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno e seja* $\mathcal{A}$ *um sobconjunto ortogonal de* V *formado por vetores não nulos.*

(a) Se $u \in [v_1, \dots, v_n]$ com $v_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \dots, n$, então

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

(b) O conjunto $\mathcal{A}$ é L.I.

Prova:

(a) Seja $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é ortogonal temos

$$\langle u, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

para $j = 1, \dots, n$. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

para $j = 1, \dots, n$. Assim

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

como queríamos.

(b) Suponha que existam escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e vetores não nulos $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{A}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Pelo item (a) temos

$$\alpha_i = \frac{\langle 0_V, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} = 0_K$$

para $i = 1, \dots, n$. Portanto $\mathcal{A}$ é L.I..

$\diamondsuit$

Corolário 5.0.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e seja $\mathcal{A}$ uma base ortonormal de V. Então para $u \in V$ temos*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i$$

onde $v_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \dots, n$.

5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com um produto interno. Considere $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ um conjunto L.I. Vamos obter um novo conjunto L.I. $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ ortogonal e que gera o mesmo espaço vetorial que $\mathcal{A}$. Para tal fazemos:

1. $w_1 = v_1$

2. $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$

   Como $\{v_1, v_2\}$ é L.I., então $w_2 \neq 0_V$. Além disso,

   $$\langle w_2, w_1\rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1; w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\langle w_1, w_1\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \langle v_2, w_1\rangle = 0$$

   e então $w_1 \perp w_2$.

3. Definidos w_1, ..., w_k, $1 < k < n$ podemos definir w_{k+1} por

   $$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$
   $$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

É fácil verificar que os vetores w_1, ..., w_n definidos anteriormente são dois a dois ortogonais, logo $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal. Mais ainda, pela Proposição 5.3.1, o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. e $w_i \in [v_1, \ldots, v_n] = U$ para $i = 1$, ..., n. Agora como $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, segue que $\mathcal{B}$ é uma base para U, como queríamos.

Exemplo 5.3.2. *1. Seja $V = \mathbb{C}^3$ com o produto interno canônico. Determinar uma base ortogonal de $\mathbb{C}^3$ contendo o vetor $(1, 2i, 0)$.*

Solução: *Primeiro obtemos uma base de $\mathbb{C}^3$ contedo $(1, 2i, 0)$. Por exemplo, podemos considerar a base $\{v_1 = (1, 2i, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$. Defina $w_1 = v_1 =$*

$(1, 2i, 0)$, *assim*

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} = (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0),(1,2i,0) \rangle}{\|(1,2i,0)\|^2}(1,2i,0) = (0,1,0) + \frac{2i}{5}(1,2i,0)$$

$$w_2 = \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,2i,0) \rangle}{\|(1,2i,0)\|^2}(1,2i,0)$$

$$- \frac{\langle (0,0,1),(2i/5,1/5,0) \rangle}{\|(2i/5,1/5,0)\|^2}(2i/5,1/5,0)$$

$$w_3 = (0,0,1).$$

Portanto o conjunto

$$\left\{(1,2i,0); \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0\right); (0,0,1)\right\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{C}^3$.

2. *Seja* $\{(1,1,1);(0,2,1);(0,0,1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontrar uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$, *em relação ao produto interno canônico.*

Solução: *Defina* $w_1 = (1,1,1)$. *Temos*

$$w_2 = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = (-1,1,0)$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(-1,1,0) \rangle}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1),(1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1)$$

$$w_3 = (-1/3, -1/3, 2/3).$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A} = \{(1,1,1); (-1,1,0); (-1/3,-1/3,2/3)\}$ *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 5.1. *Todo espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *com produto interno possui uma base ortonormal.*

Prova: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe uma base ortogonal para V. Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tal base. Assim

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \ldots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right\}$$

é uma base ortonormal, como queríamos. ♢

Deste teorema temos o seguinte: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de V. Se

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$
$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j$$

então

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle w_i, w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}. \tag{5.1}$$

Deste fato segue que

Corolário 5.1.1. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{A} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ duas bases ortonormais de V. Se M é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$, então*

$$M\overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n.$$

Prova: Seja $M = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$. Então para i, $j = 1$, ..., n temos

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} u_k$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k.$$

Agora, de (5.1) temos

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k i \overline{\alpha_{kj}}$$

para cada $1 \le i,\ j \le n$. Logo

$$M\overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n$$

como queríamos. ♢

BIBLIOGRAFIA

[1] Flávio U. Coelho e Mary L. Lourenço, *Um curso de Álgebra Linear*, Editora EdUSP, 2^a edição, 2007.

[2] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1976.

[3] J. Boldrini, S. Costa, V. Figueiredo, H. Wetzler, *Álgebra Linear*, Editora Harbra, 3^a edição, 1980.

[4] Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, *Elementary Linear Algebra*, D. C. Heath and Company, 1988.

[5] Salahoddin Shokranian, *Álgebra 1*, Editora Ciência Moderna, 2010.

[6] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, 1992.

ÍNDICE REMISSIVO

Autovalor, 86
Autovetor, 87

Corpos, 5
  Finitos, 8
Cota Superior, 55

Elemento
  Maximal, 55
Espaço Vetorial, 37
  Base, 43
  Combinação linear, 39
  Conjunto gerador, 39
  Conjunto L.D., 42
  Conjunto L.I., 42
  Dimensão, 45
  Finitamente gerado, 44

Jordan
  Base de, 115
  Bloco de , 107
  Forma de, 109

Lema de Zorn , 56

Matriz
  Linha Equivalente, 18
  Linha-reduzida, 21
  Na forma escada, 22
  Quadrada, 32
Multiplicidade
  Algébrica, 93
  Geométrica, 93

Nulidade
  de uma matriz, 23

Operações Elementares, 14
  Sobre Matrizes, 15
Operador Linear, 85
  Nilpotente, 105

Polinômio
  Característico, 88
  Minimal, 100
Posto

de uma matriz, 23
Produto interno, 121

Relação de Ordem
Parcial, 54
Total, 54

Sistema Linear, 12
Sistemas Equivalentes, 14
Soma direta, 97
Subespaço, 47
T-invariante, 96
gerado, 50

Transformação Linear
Diagonalizável, 87