$$\begin{bmatrix}
\ast & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ast & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ast & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \acute{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & \ast & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ast & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ast & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ast
\end{bmatrix}$$

Notas de Aula 2/2013[1]

José Antônio O. Freitas

Departamento de Matemtica

Universidade de Brasília - UnB

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

1.1 Corpos

Definição 1.1. *Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é chamado de **corpo** se em $\mathbb{K}$ podemos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) de modo que*

$$a + b \in \mathbb{K}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{K}$$

para todos $a, b \in \mathbb{K}$ e que satisfaçam as seguintes propriedades

A1) ***Comutatividade da soma**: $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathbb{K}$;*

A2) ***Associatividade da soma**: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$;*

A3) ***Elemento neutro da soma**: Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $0_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente 0 e chamado de **elemento neutro da adição**, que satisfaz*

$$a + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$*. (Elementro neutro da soma)*

A4) ***Elemento oposto da soma****: Para cada* $a \in \mathbb{K}$*, existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* $-a$ *e chamado de* ***oposto*** *de* a *ou* ***inverso aditivo*** *de* a*) tal que*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_{\mathbb{K}}.$$

M1) ***Comutatividade da multiplicação****:* $a \cdot b = b \cdot a$ *para todos* a*,* $b \in \mathbb{K}$*;*

M2) ***Associatividade da multiplicação****:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*, para todos* a*,* b *e* $c \in \mathbb{K}$*;*

M3) ***Elemento neutro da multiplicação****: Existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* $1_{\mathbb{K}}$ *ou simplesmente* 1 *e chamado de* ***elemento neutro da multiplicação*** *ou* ***unidade****, que satisfaz*

$$a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$*.*

M4) ***Elemento inverso da multiplicação****: Para cada* $a \in \mathbb{K}$*, existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* a^{-1} *e chamado de* ***inverso multiplicativo*** *de* a *tal que*

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_{\mathbb{K}}.$$

D) ***Distributividade da soma em relação à multiplicação****:* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$*, para todos* a*,* b *e* $c \in \mathbb{K}$*.*

Para simplificar a notação vamos escrever

$$a \cdot b = ab.$$

Denotamos um corpo $\mathbb{K}$ pela terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Quando não houver chance de confusão em relação às operações de soma e multiplicação envolvidas no corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, vamos simplesmente dizer que $\mathbb{K}$ é um corpo.

Exemplos 1.1.1. *1. São exemploplos de corpos os conjuntos:* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$ *com as operações de soma e multiplicações usuais destes conjuntos.*

2. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *com a soma e multiplicações usuais não é corpo, pois por exemploplo, não existe* $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $2b = 1$.

3. *Seja*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dados $a + b\sqrt{2},\ c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, *definicaona*

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

Aqui o elemento neutro da adição é 0, *o elemento neutro da multiplicação é* 1, *o oposto aditivo de* $a + b\sqrt{2}$ *é* $-a - b\sqrt{2}$ *e o inverso multiplicativo de* $a + b\sqrt{2}$ *é* $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ *para* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Propriedades importantes: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Então

1. O elemento neutro da soma é único.

   Solução: *De fato, suponha que* 0_1 *e* 0_2 *sejam elementos neutros da soma em* $\mathbb{K}$. *Temos*

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

2. O oposto aditivo de cada elemento de $\mathbb{K}$ é único.

   Solução: *Sejam* b *e* c *elementos opostos de* a, *então*

$$b = b + 0_{\mathbb{K}} = b + (c + a) = (b + a) + c = 0_{\mathbb{K}} + c = c.$$

3. Vale a lei do cancelamento, isto é, se $a + b = a + c$ então $b = c$.

4. Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$.

   Solução: *De fato,*

$$a \cdot 0_{\mathbb{K}} = a \cdot (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) = a \cdot 0_{\mathbb{K}} + a \cdot 0_{\mathbb{K}},$$

logo pela lei do cancelamento, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *como queríamos.*

5. O elemento neutro da multiplicação é único.

   Solução: *De fato, suponha que 1_a e 1_b sejam elementos neutros da multiplicação. Então*
$$1_a = 1_a \cdot 1_b = 1_b.$$

6. O inverso de um elemento não nulo é único.

   Solução: *Dado $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, suponha que b, $c \in \mathbb{K}$ sejam tais que*
$$ab = 1 \quad ac = 1.$$
   Então
$$b = 1b = (ac)b = c(ab) = c1 = c.$$

7. Se $a \in \mathbb{K}$ é tal que $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ e $ab = ac$, então $b = c$.

8. Se $ab = 0_{\mathbb{K}}$, com a e $b \in \mathbb{K}$, então $a = 0_{\mathbb{K}}$ ou $b = 0_{\mathbb{K}}$.

   Solução: *Suponha que $a \neq 0_{\mathbb{K}}$, então existe a^{-1}. Daí*
$$\begin{aligned} &ab = 0_{\mathbb{K}} \\ &a^{-1}(ab) = a^{-1}0_{\mathbb{K}} \\ &1b = 0_{\mathbb{K}} \\ &b = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Observação 1.1.1. *Os elementos de um corpo qualquer $\mathbb{K}$ são chamados de **escalares**.*

1.2 Corpos Finitos

Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Dado $a \in \mathbb{Z}$, sempre é possível escrever
$$a = bp + r,$$
onde b, $r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r \leq p-1$. Assim quando efetuamos a divisão inteira de qualquer número inteiro a por p os possíveis restos são: $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Assim vamos considerar o seguinte conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

onde

$$\begin{aligned}
&\overline{0} = \{bp \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \ldots\}\\
&\overline{1} = \{bp + 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 1, \pm 2p + 1, \pm 3p + 1, \ldots\}\\
&\overline{2} = \{bp \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 2, \pm 2p + 2, \pm 3p + 2, \ldots\}\\
&\vdots\\
&\overline{p-1} = \{bp + (p-1) \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{(b+1)p - 1) \mid b \in \mathbb{Z}\}\\
&\ = \{cp - 1 \mid c \in \mathbb{Z}\} = \{-1, \pm p - 1, \pm 2p - 1, \pm 3p - 1, \ldots\}.
\end{aligned}$$

definicaona em $\mathbb{Z}_p$ a soma $\oplus$ e a multiplicação $\otimes$ por: para $\overline{a}$, $\overline{b} \in \mathbb{Z}_p$

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$$
$$\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{ab},$$

onde sob a barra estamos usando a soma e multiplicação usuais dos inteiros. Para determinar o valor de $\overline{a+b}$ e de $\overline{ab}$, encontramos o resto da divisão inteira de $a+b$ por p e de ab por p. Logo

$$\overline{a} \oplus \overline{b} \in \mathbb{Z}_p$$
$$\overline{a} \otimes \overline{b} \in \mathbb{Z}_p.$$

Exemplos 1.1.2. *Para $p = 3$ os possíveis restos na divisão inteira são: 0, 1 e 2. Daí*

$$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

e temos

$$\overline{0} \oplus \overline{0} = \overline{0} \qquad \overline{2} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{2} = \overline{0+2} = \overline{2}$$

$$\overline{1} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{1} = \overline{0+1} = \overline{1} \qquad \overline{2} \oplus \overline{1} = \overline{1} \oplus \overline{2} = \overline{1+2} = \overline{3} = \overline{0}$$

$\overline{2} \oplus \overline{2} = \overline{2+2} = \overline{4} = \overline{1}$

$\overline{1} \otimes \overline{1} = \overline{1 \cdot 1} = \overline{1}$

$\overline{0} \otimes \overline{0} = \overline{0 \cdot 0} = \overline{0}$

$\overline{2} \otimes \overline{1} = \overline{1} \otimes \overline{2} = \overline{2 \cdot 1} = \overline{2}$

$\overline{0} \otimes \overline{1} = \overline{1} \otimes \overline{0} = \overline{0 \cdot 1} = \overline{0}$

$\overline{2} \otimes \overline{0} = \overline{2} \otimes \overline{0} = \overline{2 \cdot 0} = \overline{0}$

$\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{2 \cdot 2} = \overline{4} = \overline{1}$

Note que a soma $\oplus$ e o produto $\otimes$ em $\mathbb{Z}_3$ são comutativos, a soma possui elemento neutro que é $\overline{0}$, todo elemento possui oposto aditivo. A multiplicação possui unidade que é $\overline{1}$ e todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo. É simples verificar que a soma e o produto em $\mathbb{Z}_3$ são associativos e o produto é distributivo em relação à soma. Portanto, $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \otimes)$ é um corpo. Além disso, em tal corpo temos

$$(\overline{1} \oplus \overline{1}) \oplus \overline{1} = (\overline{1+1}) \oplus \overline{1} = \overline{2} \oplus \overline{1} = \overline{3} = \overline{0}.$$

e $\overline{1} \neq \overline{0}$.

Teorema 1.1. *Para todo $p \in \mathbb{Z}$, p número primo, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ é um corpo.*

Prova: Dados $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in \mathbb{Z}_p$ temos:

A1) $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} \oplus \overline{a}$;

A2) $(\overline{a} \oplus \overline{b}) \oplus \overline{c} = (\overline{a+b}) \oplus \overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c}) = \overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c})$

A3) Temos que $\overline{0} \in \mathbb{Z}_p$ e para todo $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$:

$$\overline{0} \oplus \overline{a} = \overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a}.$$

Logo $\overline{0}$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}_p$.

A4) Dado $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$, tome $\overline{p-a} \in \mathbb{Z}_p$, pois $0 \leq p-a \leq p-1$. Assim

$$\overline{a} \oplus \overline{p-a} = \overline{p-a} \oplus \overline{a} = \overline{(p-a)+a} = \overline{p} = \overline{0}.$$

Logo todo elemento de $\mathbb{Z}_p$ possui oposto aditivo.

M1) $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \overline{b} \otimes \overline{a}$.

M2) $(\overline{a} \otimes \overline{b}) \otimes \overline{c} = (\overline{a \cdot b}) \otimes \overline{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{a} \otimes (\overline{b} \otimes \overline{c})$.

M3) O elemento $\overline{1} \in \mathbb{Z}_p$ é tal que

$$\overline{1} \otimes \overline{a} = \overline{a} \otimes \overline{1} = \overline{a \cdot 1} = \overline{a}$$

para todo $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$.

M4) Primeiramente, como p é um número primo então existem x, $y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + py = 1$$

para todo $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\overline{ax + py} = \overline{1} \\
&\overline{ax} \oplus \overline{py} = \overline{1} \\
&\overline{a} \otimes \overline{x} + \overline{p} \otimes \overline{y} = \overline{1} \\
&\overline{a} \otimes \overline{x} = \overline{1}
\end{aligned}$$

uma vez que $\overline{p} = \overline{0}$. Como $\overline{x}$ é obtido pelo resto da divisão inteira de x por p, então $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$. Observe que $x \neq 0$ pois $p \geq 2$ e $x \neq p$ pois senão $(a+p)y = 1$ o que é impossível uma vez que $p \geq 2$. Logo $\overline{x} \neq 0$ e assim todo elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ possui inverso multiplicativo.

D) $\overline{a} \otimes (\overline{b} \oplus \overline{c}) = \overline{a} \oplus (\overline{b + c}) = \overline{a \cdot (b + c)} = \overline{ab + ac} = \overline{ab} \oplus \overline{ac} = \overline{a} \otimes \overline{b} \oplus \overline{a} \otimes \overline{c}$.

Portanto, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ é um corpo, como queríamos demonstrar. $\diamondsuit$

Observação 1.1.2. *1. Se p não for um número primo, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ pode não ser corpo. Por exemploplo, em $\mathbb{Z}_6$ temos $\overline{2} \neq \overline{0}$ e $\overline{3} \neq \overline{0}$, mas*

$$\overline{2} \otimes \overline{3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} = \overline{0}.$$

2. Para simplificar a notação vamos denotar $\oplus$ por $+$ e $\otimes$ por $\cdot$. Assim vamos dizer simplesmente que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ é um corpo.

1.3 Sistemas Lineares

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Consideremos o problema de determinar n escalares, ou seja, n elementos x_1, x_2, $\cdots$, x_n em $\mathbb{K}$ que satisfaçam as condições

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

onde b_1, $\ldots$, b_m e a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ são elementos de $\mathbb{K}$ previamente conhecidos. Chamamos (1.1) de um **sistema de m equações lineares a n incógnitas**. Toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de $\mathbb{K}$ que satisfazem a cada uma das equações de (1.1) é chamada de uma **solução** do sistema.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0_{\mathbb{K}} \in K$, dizemos que o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \tag{1.2}$$

é um **sistema linear homogêneo**, ou que cada uma de suas equações é homogênea. Observe que tal sistema sempre possui solução, a saber, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$.

O método mais importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método da escalonação. Por exemploplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

onde o corpo considerado é $\mathbb{R}$.

Observe que multiplicando a segunda equação de (1.3) por -2 e somando o resultado à primeira equação obtemos

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

o que resulta em $x_2 = -x_3$. Agora se multiplicarmos a primeira equação de (1.3) por 3 e somarmos com a segunda, obtemos

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

e daí $x_1 = -x_3$.

Assim para que uma terna (x_1, x_2, x_3) de números reais seja solução de (1.3) deve satisfazer

$$x_1 = x_2 = -x_3.$$

Por outro lado, qualquer terna da forma $(a, a, -a)$ é solução de (1.3). Portanto a solução de (1.3) é da forma

$$(a, a, -a)$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

No caso de um sistema linear da forma (1.1), o processo de eleminação de variáveis será feito mediante o uso de 3 tipos de operações. São elas:

e_1) Troca da posição de duas equações.

e_2) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.

e_3) Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Estas três operações são chamada de **operações elementares**.

Exemplos 1.1.3. *Considere o seguinte sistema sobre o corpo* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Efetuando operações elementares podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \quad L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \qquad L_3 \to L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 2x_3 = 2 \quad L_2 \to (-1/3)L_2 \\ \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ \quad - 7x_2 - 5x_3 = 4 \qquad L_3 \to L_3 + 7L_2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ \qquad - (1/3)x_3 = -(2/3) \end{cases}$$

Assim encontramos

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

Definição 1.2. *Dois sistemas de equações lineares são chamados de* ***equivalentes*** *se, e somente, se toda solução de qualquer um dos sistemas é solução do outro.*

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.4}$$

com o objetivo de simplificar sua notação vamos escrevê-lo na forma

$$AX = B \tag{1.5}$$

onde

1. $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

é chamada **matriz dos coeficientes do sistema**;

2.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

3.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \quad ; \quad b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{K}.$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (1.1) é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que é chamada de **matriz ampliada do sistema** ou **matriz aumentada do sistema**.

Na forma matricial as operações elementares são descritas como:

e_1) Trocar a i-ésima linha de A pela j-ésima linhas de A: $L_i \leftrightarrow L_j$;

e_2) Multiplicação da i-ésima linha de A por um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ não nulo: $L_i \to \alpha L_i$;

e_3) Substituição da i-ésima linha de A pela i-ésima linha mais α vezes a j-ésima linha: $L_i \to L_i + \alpha L_j$.

Observação 1.2.1. *Denotaremos a matriz*

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

onde $0_{\mathbb{K}}$ *é o elemento neutro da soma no corpo* $\mathbb{K}$*, simplesmente por* 0.

Uma razão para nos restringirmos a estes três tipos simples de operações sobre linhas é que, tendo efetuado uma tal operação e sobre uma matriz A, podemos desfazer essa operação efetuando uma operação de mesmo tipo sobre $e(A)$.

Teorema 1.2. *A cada operação elementar sobre linhas e, corresponde uma operação elementar sobre linhas e', do mesmo tipo que e, tal que $e'(e(A)) = A$ para qualquer matriz A. Em outras palavras, a operação inversa de uma operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas do mesmo tipo.*

Prova: Vamos verificar que cada uma das operações elementares possui uma operação inversa. Seja A uma matriz $m \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e1) Suponha que e seja a operação que troca a linha i pela linha j de A. Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Então, seja e' a operação que troca a linha i pela linha j de $e(A)$. Assim

$$e'(e(A)) = A$$

como queríamos.

e2) Suponha que e seja a operação que multiplica a i-ésima de A por $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja e' a operação que multiplica a linha i de $e(A)$ por $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$. Então

$$e'(e(A)) = A.$$

e3) Suponha que e seja a operação que substitui a linha i de A pela linha i mais α vezes a linha j. Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja e' a operação que substitui a linha i de $e(A)$ pela linha i mais $(-\alpha)$ vezes a linha j. Então

$$e'(e(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} + (-\alpha)a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} + (-\alpha)a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} + (-\alpha)a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e assim

$$e'(e(A)) = A.$$

Portanto cada operação elementar sobre linhas possui uma operação inversa. $\diamondsuit$

Definição 1.3. *Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é* ***linha-equivalente*** *a A, se B for obtida de A através de uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de A.*

Notação 1.3.1. *$A \to B$ ou $A \sim B$.*

Exemplos 1.3.1. *A matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é linha equivalente à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

pois

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} {}^{-4} \\ {}_{+} \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} {}^{3} \\ \\ {}_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \times -1 \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ {}^{-4} \\ {}_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Teorema 1.3. *Se X_1 e X_2 são duas soluções de*

$$AX = 0,$$

então $\alpha X_1 + \beta X_2$ também é solução de $AX = 0$, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.4. *Se A e B são matrizes $m \times n$ que são linha-equivalentes, então os sistemas homogêneos de equações lineares $AX = 0$ e $BX = 0$ têm exatamente as mesmas soluções.*

Prova: Suponha que podemos obter a matriz B à partir da matriz A por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_r = B.$$

Nesta situação, para provar que $AX = 0$ e $BX = 0$ tem as mesmas soluções basta provar que $A_iX = 0$ e $A_{i+1}X = 0$ tem as mesmas soluções, isto é, que uma operação elementar sobre linhas não altera o conjunto das soluções.

Assim podemos supor que B é obtida de A por meio de uma única operação elementar. Qualquer que seja a operação elementar, e_1 ou e_2 ou e_3, cada equação do sistema $BX = 0$ será uma combinação das equações do sistema $AX = 0$. Como a inversa de uma operação elementar sobre linhas é ainda uma operação elementar sobre linhas, cada equação de $AX = 0$ também será uma combinação das equações em $BX = 0$. Logo toda solução de $AX = 0$ também é solução de $BX = 0$ e toda solução de $BX = 0$ também é solução de $AX = 0$, como queríamos. ♢

Exemplos 1.3.2. *Considere o sistema homogêneo $AX = 0$,onde:*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. *Para encontrar a solução deste sistema só precisamos encontrar uma matriz B que seja linha equivalente à A e que seja mais fácil de determinar a solução do sistema resultante. Assim, vamos executar as operações elementares em A de modo a simplificá-la:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \times -1/2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -(7/2) \\ 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \end{bmatrix}$$

assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + (1/2)x_3 - (7/2)x_4 = 0 \\ (15)/2x_3 - (55/2)x_4 = 0 \end{cases}.$$

Isolando x_3 na última equação temos a solução dada por

$$S = \left\{ \left(\frac{-17}{3}x_4, \frac{5}{3}x_4, \frac{11}{3}x_4, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Temos:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+2i \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \mid \times \frac{3-2i}{13} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

e assim a solução é $x_1 = x_2 = 0$.

Definição 1.4. *Uma matriz $m \times n$ R é chamada de* ***linha-reduzida*** *se:*

(i) o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula de R é $1_{\mathbb{K}}$.

(ii) cada coluna de R que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos.

Exemplos 1.4.1. *1. Um exemplo de uma matriz linha-reduzida é a matriz indetidade $n \times n$. Tal matriz pode ser definida por*

$$I = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

*O símbolo δ_{ij} é chamada **símbolo de Kronecher** é será utilizado com certa frequência.*

2. As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não são linha-reduzidas.

Teorema 1.5. *Toda matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida.*

Prova: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se todo elemento na primeira linha de A é $0_{\mathbb{K}}$, então a condição (a) de (1.4) está satisfeita no que diz respeito a linha 1. Se a linha 1 tem um elemento não nulo, seja r o menor inteiro positivo j tal que $a_{ir} \neq 0$. Multiplique a linha 1 por a_{ir}^{-1} e condição (a) de (1.4) está satisfeita em relação a linha 1. Agora, para cada $i \geq 2$, somemos $-a_{ij}$ vezes a linha 1 à linha i. Assim o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorre na coluna r, este elemento é $1_{\mathbb{K}}$, e todos os outros elementos da coluna r são nulos.

Considere agora a matriz que resultou das operações acima. Se todo elemento na linha 2 é nulo, nada há a fazer. Se algum elemento na linha 2 é não nulo, multiplicamos a linha 2 por um escalar de modo que o primeiro elemento não nulo da linha 2 seja $1_{\mathbb{K}}$. Caso o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorra na coluna r, o primeiro elemento não nulo da linha 2 não pode ocorrer na coluna r. Digamos então que ele ocorra na coluna r'. Somando múltiplos adequados da linha 2 às diversas linhas, podemos fazer com que todos os elementos da coluna r' seja nulos, com exceção do elemento $1_{\mathbb{K}}$ da linha 2. O importante a ser observado é: ao efetuarmos estas últimas operações, não alteramos os elementos da linha 1 na colunas 1, 2, $\ldots$, r; além disso, não alteramos nenhum elemento da coluna r. É claro que, se a linha 1 fosse identicamente nula, as operações com a linha 2 não afetariam a linha 1.

Operando com uma linha de cada vez da maneira acima, é evidente que, com uma quantidade finita de passos, chegamos a uma matriz linha-reduzida. $\diamondsuit$

Definição 1.5. *Uma matriz R $m \times n$ é chamada uma* ***matriz linha-reduzida à forma em escada*** *se:*

1. *R é linha-reduzida;*
2. *toda linha de R cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem uma elemente não-nulo;*
3. *se as linhas 1, 2, $\ldots$, r são as linhas não-nulas de R e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i, $i = 1, \ldots, r$, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

Exemplos 1.5.1.

1. *A matriz identidade e a matriz nula são linha-reduzidas à forma escada;*
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Não é linha-reduzida à forma escada.*
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *Não é linha-reduzida à forma escada.*
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *É linha-reduzida à forma escada.*

Teorema 1.6. *Toda matriz A $m \times n$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada.*

Prova: Sabemos que A é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida. Portanto, basta notar que, efetuando uma quantidade finita de permutações das linhas de uma matriz linha-reduzida, podemos transformá-la numa matriz linha-reduzida à forma em escada. ♢

Definição 1.6. *Dada uma matriz A $m \times n$, seja B $m \times n$ a matriz linha-reduzida à forma em escada linha-equivalente a A. O* ***posto*** *de A, denotado por p, é o número de linhas não-nulas de B. A* ***nulidade*** *de A é o número $n - p$.*

Exemplos 1.6.1. *Qual o posto e a nulidade da matriz A, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Precisamos primeiro reduzir A a sua forma escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (1/2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \mid \times 1/8 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix}$$

Logo o posto de A é $p = 3$ e a nulidade é $n - p = 4 - 3 = 1$.

Considere o sistema

$$AX = B \tag{1.6}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo $\mathbb{K}$ e X é uma matriz $n \times 1$. Observque que enquanto uma sistema homogêneo $AX = 0$ sempre admite a solução

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}},$$

um sistema não homogêneo pode ter:

1. Uma única solução $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e determinado**.

2. Mais de uma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**. Caso o corpo $\mathbb{K}$ tenha infintos elementos, o sistema terá infinitas soluções.

3. Nenhuma solução. Neste caso dizemos o que sistema é **impossível**.

Com o objetivo de resolver o sistema (1.6) vamos começar formando a matriz ampliada

$$P = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}.$$

Sabemos que P é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada R. A última coluna de R contém elementos z_1, z_2, ..., z_m que são resultados das operações elementares aplicadas à matriz P. Seja

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

Então R pode ser escrita como $R = [R' \mid Z]$. Como no caso homogêneo, é possível mostrar que os sistemas

$$AX = B \text{ e } R'X = Z$$

possuem exatamente as mesmas soluções.

As possibilidades para as soluções de tal sistema são descritas no seguinte teorema:

Teorema 1.7. *Considere o sistema*

$$AX = B$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo $\mathbb{K}$ e X é uma matriz $n \times 1$. Então:

1. *O sistema tem solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*
2. *Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p = n$, então a solução é única.*
3. *Sea matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p < n$, então podemos escolher $n-p$ variáveis, e as outras p variáveis serão dadas em função destas $n-p$ variáveis escolhidas.*

O número $n-p$ é chamado de ***grau de liberdade*** *e as $n-p$ variáveis são chamadas de* ***variáveis livres****.*

Prova: 1^a *Parte: Se existe solução para o sistema, então a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto:* Para mostrar isso, vamos provar que se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes tiverem postos diferentes, então o sistema não terá solução. Observe primeiro que o posto da matriz ampliada não pode ser menor que o posto da matriz dos coeficientes uma vez que a matriz ampliada é formada a partir da matriz dos coeficientes. Assim o único caso possível é que o posto da matriz ampliada ser maior que o posto da matriz dos coeficientes. Então esta matriz reduzida a forma em escada deve comter uma linha da forma

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & | & z_r \end{pmatrix}$$

onde $z_r \neq 0_{\mathbb{K}}$. Logo o sistema associado a essa matriz tem uma equação do tipo

$$0_{\mathbb{K}}x_1 + 0_{\mathbb{K}}x_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}x_n = z_r$$

o que é impossível. Logo não existe solução.

2^a *Parte: Se o posto é igual, então existe solução:* Nesta situação podem ocorrem dois casos:

1. Se $p = n$, então a matriz linha-reduzida à forma em escada tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & z_n \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}$$

   e a solução do sistema será

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \cdots, x_n = z_n.$$

2. Se $p \neq n$, então devemos ter $p < n$. Caso $p > n$, como a matriz está na forma escada o elemento $1_{\mathbb{K}}$ deve ocorre em duas linhas diferentes, mas na mesma coluna. Mas neste caso, podemos anular uma destas linhas repetidas. Logo, $p < n$. Neste caso a matriz na forma escada pode ter a forma:

   (a)

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+1} & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+1} & a_{2p+2} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+1} & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

   Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - a_{1p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2 = z_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - a_{2p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+1}x_{p+1} - a_{pp+2}x_{p+2} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

   e o sistema terá mais de uma solução, sendo x_{p+1} , $x_{p+2}, \ldots, x_n$ as variáveis livres.

(b) Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+2} & a_{1p+3} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+2} & a_{2p+3} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+2} & a_{pp+3} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_2 = z_1 - a_{1p+2}x_{p+2} - a_{1p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_3 = z_2 - a_{2p+3}x_{p+3} - a_{2p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+2}x_{p+2} - a_{pp+3}x_{p+3} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo x_1, x_{p+1} , x_{p+2}, $\ldots$, x_n as variáveis livres.

Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que para qualquer posto $p < n$ teremos um sistema com mais de uma solução e $n - p$ variáveis livres.

Portanto a condição (i) do teorema está provada.

Observe que os itens (ii) e (iii) foram automaticamente demonstrados nos itens (a) e (b) anteriores.

Logo o teorema está provado. $\diamondsuit$

Exemplos 1.6.2. *Encontre a solução dos seguintes sistemas lineares:*

1. $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$ *em* $\mathbb{R}$.

Solução: *A matriz dos coeficentes deste sistema é*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 1$ e a nulidade é 2, ou seja, temos duas variáveis livres, a saber y e z. Logo a solução é dada por

$$x = -3y - z; \quad y,\ z \in \mathbb{R}.$$

Que pode ser escrita como

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-3y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

2. $\begin{cases} \overline{1}x + \overline{4}y + \overline{2}z = \overline{6} \\ \overline{1}x + \overline{5}y + \overline{2}z = \overline{2} \\ \overline{2}x + \overline{3}y + \overline{4}z = \overline{4} \\ \overline{4}x + \overline{5}y + \overline{1}z = \overline{5} \end{cases}$ *em $\mathbb{Z}_7$.*

Solução: *A matriz ampliada do sistema é*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{5} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{5} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A a forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{5} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{5} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 2$ e a nulidade é 1. Logo temos uma única variável livre que é z. A solução então é dada por

$$x = \overline{1} + \overline{5}z, \quad y = \overline{3}, \quad z \in \mathbb{Z}_7.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_7\} = \{(\overline{1} + \overline{5}z, \overline{3}, z) \mid z \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Tal conjunto contém exatamente 7 soluções distintas.

3. $\begin{cases} \overline{2}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{2}x_4 = \overline{7} \\ \overline{3}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{9} \\ \overline{1}x_1 + \overline{4}x_3 + \overline{3}x_4 = \overline{6} \\ \overline{5}x_1 + \overline{1}x_3 + \overline{1}x_4 = \overline{9} \end{cases}$ *em* $\mathbb{Z}_{11}$.

Solução: *A matriz ampliada do sistema é*

$$A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{9} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{9} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A a forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{9} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{9} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{9} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{7} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{5} & \overline{7} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{8} & \overline{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{8} & \overline{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \times \overline{3} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{8} & \overline{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{10} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{5} & \overline{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \times \overline{9} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{10} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 4$ e a nulidade é 0. Logo o sistema tem uma única solução dada por

$$x_1 = \overline{6}, x_2 = \overline{4}, x_3 = \overline{8}, x_4 = \overline{4}.$$

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \quad \textit{em } \mathbb{Q}.$$

Solução: *A matriz dos coeficentes deste sistema é*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema não tem solução. Note que o posto da matriz ampliada é $p = 3$ e a posto da matriz dos coeficientes é 2.

1.4 Matrizes e Determinantes

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Denotamos por $\mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $p \times q$ com entradas em $\mathbb{K}$. A soma e o produtos de matrizes são definidos de modo usual.

Quando $p = q = n$, dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que denotaremos simplesmente por $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, é **quadrada**. Tal conjunto tem elemento neutro para a multiplicação de matrizes que é a **matriz indentidade** I_n dada por

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

Definição 1.7. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$ é chamada uma* ***inversa à esquerda*** *de A; uma matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_n$ é chamada uma* ***inversa à direita*** *de A. Se $AB = BA = I_n$, então A é chamada* ***invertível****.*

Proposição 1.7.1. *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui uma inversa à esquerda B e uma inversa à direita C, então $B = C$.*

Proposição 1.7.2. *Sejam A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Se A é invertível, então A^{-1} também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2. *Se A e B são invertíveis, então AB também o é e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Dada um matriz A como encontrar sua inversa? Por exemplo, para $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como achar

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

tal que $AB = BA = I_2$? Queremos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então os seguintes sistemas para resolver:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases} .$$

Assim podemos considerar a matriz ampliada contendo colunos correspondentes a cada um dos sistemas e reduzí-la à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{-3} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{-3} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (-1/2)$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

é tal que $AB = BA = I_2$.

Portanto, determinar se uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui inversa ou não é equivalente à resolver um sistema linear. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.8. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é invertível;*

2. *O sistema homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial;*

3. *O sistema $AX = Y$, onde Y é uma matriz $n \times 1$, possui uma única solução para qualquer Y.*

Corolário 1.8.1. *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e se uma sequência de operações elementares sobre linhas reduz A à matriz unidade, então essa mesma sequência de operações elementares sobre linhas quando aplicadas à matriz I_n, resulta em A^{-1}.*

Exemplos 1.7.1. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a inversa de A, se existir.

Solução: *Temos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |-1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |\,1/3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Logo A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Faremos agora a definição de **determinante** de modo indutivo na ordem de uma dada matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então a matriz $A \in \mathbb{M}_1(\mathbb{K})$ é da forma

$$A = (a_{11})$$

e neste caso definimos

$$\det A = a_{11} \in \mathbb{K}.$$

Suponha que $n > 1$ e que $\det B$ esteja definido para todas as matrizes $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$ com $p < n$ e seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Para cada (i, j), defina a matriz A_{ij} formada a partir de A retirando-se a sua i-ésima linha e a sua j-ésima coluna. É claro que $A \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ e portanto $\det A_{ij}$ está definido. Defina então

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Exemplos 1.7.2. *1. Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 1, temos

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = ad - bc.$$

Obteríamos o mesmo resultado se considerássemos a linha 2.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 2, temos

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} \\
&= (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22} + (-1)^{2+3} a_{32} \det A_{32} \\
&= -a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Propriedades do determinante: Sejam A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

1. $\det(AB) = \det A \det B$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
3. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Observação 1.7.1. *É possível mostrar que o determinante também pode ser definido a partir das colunas de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

Teorema 1.9. *Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se, e somente se,* $\det A \neq 0_{\mathbb{K}}$.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

Em todo este capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio V é um **espaço vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos, chamados **vetores**, estiverem definidas duas operações satisfazendo:*

*A) A cada par $u, w \in V$ corresponde um vetor $u + w \in V$, chamado **soma** de u e w, de modo que:*

A1) $u + w = w + u$, para todos $u, w \in V$;

A2) $(u + w) + v = u + (w + v)$, para todos u, w e $v \in V$;

*A3) Existe em V um vetor, denominado **vetor nulo** e denotado por 0_V, tal que*

$$0_V + u = u$$

para todo $u \in V$.

A4) Para cada vetor $u \in V$, existe um vetor em V, denotado por $-u$ tal que

$$u + (-u) = 0_V.$$

M A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot u \in V$, denominado ***produto por escalar*** *de α por u de modo que:*

M1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ *para todos α, $\beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$;*

M2) $1_{\mathbb{K}}v = v$ *para todo $v \in V$, onde $1_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$.*

D1) $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$, *para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos u, $w \in V$;*

D2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, *para todos α, $\beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.*

Observação 2.1.1. *Vamos usar a expressão $\mathbb{K}$-**espaço vetorial** para nos referir a um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

Exemplos 2.1.1. *1. Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.*

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Considere o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

e defina

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$ *para todos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$*;*
- $\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ *para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$*. Com estas operações $\mathbb{K}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Assim temos:*
  - $\mathbb{R}^n$ *é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;*
  - $\mathbb{C}^n$ *é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$;*
  - $(\mathbb{Z}_p)^n$ *é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$.*

3. $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se definirmos:

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$ *para todos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$*;*
- $\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, mas não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. (Por quê?)*

5. *Considere o conjunto dos polinômios*

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, n; n \geq 0\}.$$

Dados $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ em $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, suponha que $n < m$ e defina:

- $(p+q)(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha p)(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0.$

Assim $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

6. *O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com a soma usual de matrizes e a multiplicação por escalar usual.*

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

1. *Um vetor $w \in V$ é uma* ***combinação linear*** *dos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$ tais que*

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

2. *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um* ***conjunto gerador*** *(ou que $\mathcal{B}$ gera V) se todo todo elemento de V for uma combinação linear de uma quantidade finita de elementos de $\mathcal{B}$.*

Exemplos 2.2.1. *1. O vetor $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ e $u_3 = (-1, 0, 1)$. De fato, precisamos encontrar α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$(1, 1, 1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

econtramos que suas soluções são dadas por

$$\alpha = 1 + \gamma$$
$$\beta = -1 - 2\gamma$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$. *Logo o vetor* $(1, 1, 1)$ *é de fato uma combinação linear dos vetores* u_1, u_2 *e* u_3. *Podemos tomar, por exemplo,* $\gamma = 2$ *e escrever*

$$(1, 1, 1) = 3(1, 2, 3) - 7(0, 1, 2) + 2(-1, 0, 1).$$

2. *O vetor* $(1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ *não é uma combinação linear dos vetores* $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ *e* $u_3 = (-1, 0, 1)$. *De fato, suponha que* α, β *e* $\gamma \in \mathbb{R}$ *são tais que:*

$$(1, -2, 2) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}.$$

A matriz linha-reduzida à forma em escada deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e portanto o sistema é impossível. Logo o vetor $(1, -2, 2)$ *não é uma combinação linear dos vetores* u_1, u_2 *e* u_3.

3. *Considere o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$*. Dado um vetor* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *podemos escrever*

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

Assim qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ *é uma combinação linear dos vetores* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$*. Logo o conjunto* $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é um conjunto gerador para* $\mathbb{R}^3$*.*

4. $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1),(-1,0,0),(-1,-1,0),(-1,-1,-1)\}$ *também é um conjunto gerador para* $\mathbb{R}^3$ *como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial. De fato, dado* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*, queremos encontrar* x_1*,* x_2*, ...,* $x_6 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$(a,b,c) = x_1(1,0,1)+x_2(1,1,0)x_3(1,1,1)x_4(-1,0,0)+x_5(-1,-1,0)+x_6(-1,-1,-1).$$

O que fornece o sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5-x_6 = a \\ x_2+x_3-x_5-x_6 = b \\ x_1+x_3-x_6 = c \end{cases}$$

cuja matriz linha-reduzida à forma em escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & b+c-a \end{bmatrix},$$

assim o sistema é possível e indeterminado, com posto 3 e nulidade 3. Sua solução é descrita pela equações

$$x_1 = a-b+x_4$$
$$x_2 = a-c+x_4+x_5$$
$$x_3 = b+c-a-x_4+x_6$$

onde x_4*,* x_5 *e* $x_6 \in \mathbb{R}$*. Portanto* $\mathcal{B}_1$ *é um conjunto gerador para* $\mathbb{R}^3$*.*

5. *Seja* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *o conjunto dos polinômios em* $\mathbb{R}$*. O subconjunto* $\mathcal{B} = \{1,x,x^2,\dots,x^n,\dots\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *visto como um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial.*

6. *O conjunto* $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *gera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial. No entanto, este conjunto não gera* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial pois, por exemplo,* $(i,0)$ *não é combinação linear dos vetores em* $\mathcal{B}$*. De fato, se* α *e* β *são tais que*

$$(i,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

então $\beta = i$ *o que é impossível em* $\mathbb{R}$*.*

Observação 2.2.1. 1. *Por convenção diremos que o conjunto vazio gera o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $\{0\}$*.*

2. *Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador. (Qual?)*

Definição 2.3. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V*.*

1. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é* ***linearmente independente*** *ou simplesmente* ***L.I.****, se o único meio de escrevermos*

$$0_V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

onde $u_i \in V$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{K}$ *com* $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *é tomando* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$*.*

2. *Dizemos que o conjunto* $\mathcal{B}$ *é* ***linearemente dependente*** *ou simplesmente* ***L.D.****, se existem vetores distintos* $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \in \mathcal{B}$ *e escalares* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,$ *não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Exemplos 2.3.1. 1. *Seja* $\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,1)\} \subseteq \mathbb{C}^2$*. Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial, então* $\mathcal{B}$ *é L.D. pois*

$$(0,0) = 0(1,0) + 0(i,0) + 1(0,1) + i(0,i).$$

Agora, considerando $\mathbb{C}^2$ *com um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial, o conjunto* $\mathcal{B}$ *é L.I.. De fato, se* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ *são tais que*

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(i,0) + \gamma(0,1) + \delta(0,i)$$

então $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$*.*

2. *Considerando* $\mathbb{R}^2$ *como um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial, o conjunto* $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$ *é L.D. pois*

$$(0,0) = \frac{1}{2}(1,-1) - (1,0) + \frac{1}{2}(1,1).$$

Observação 2.3.1. 1. *Por convenção, o conjunto vazio é L.I.*

2. *Todo conjunto contendo o vetor nulo é L.D.*

3. *Todo espaço vetorial não-nulo possui um conjunto L.I. não vazio. (Qual?)*

4. *Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I.*

Definição 2.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. Dizemos que um subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* V *é uma* ***base*** *de* V *se:*

i) $\mathcal{B}$ *for um conjunto gerador de* V*;*

ii) $\mathcal{B}$ *for L.I.*

Exemplos 2.4.1. 1. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial.*

2. $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial.*

3. $\mathcal{B} = \{(1,0),(i,0),(0,1)(0,1),(0,i)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial.*

4. *Considere* $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = \{p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial. Sabemos que o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

gera $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial. Suponha que existam* α_1*,* α_2*, ...,* $\alpha_n \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$\alpha_0 + \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n = 0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$*. Como um polinômio de grau* n *em* $\mathbb{C}$ *não pode ter mais do que* n *raízes, então* $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ *e portanto* $\mathcal{B}$ *é L.I. Logo* $\mathcal{B}$ *é uma base de* $\mathcal{P}(\mathbb{K})$*.*

Observação 2.4.1. *Pelas Observações 2.2.1 item 1 e 2.3.1 item 1, o conjunto vazio é uma base do* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $\{0\}$*.*

Definição 2.5. *Dizemos que um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é* ***finitamente gerado*** *se ele possui um conjunto gerador finito.*

Proposição 2.5.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Então todo conjunto L.I de vetores de V tem no máximo m elementos.*

Prova: Vamos provar qeu todo conjunto de elementos de V que contenha mais do que m vetores é L.D. Para tanto, seja $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ com $n > m$. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V, então existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tais que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ temos

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i.$$

Assim queremos mostrar que existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$

Suponha que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_n\alpha_{1n} = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \lambda_1\alpha_{m1} + \lambda_2\alpha_{m2} + \cdots + \lambda_n\alpha_{mn} = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são as incógnitas e $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, então a matriz linha-reduzida à forma em escada do sistema (2.1) tem posto menor que n, ou seja, o sistema (2.1) tem solução não trivial. Assim existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ não todos nulos tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

ou seja, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A}$ é L.D., como querímos. $\diamondsuit$

Corolário 2.0.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de V. Como V é finitamente gerado, segue da Proposição 2.5.1 que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são finitos pois são L.I e possuem m e m' elementos, respectivamente.

Considerando $\mathcal{B}$ como conjunto gerador de V e $\mathcal{B}'$ L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m' \leq m$. Por outro lado, considerando $\mathcal{B}'$ como conjunto gerador de V e $\mathcal{B}$ L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m \leq m'$.

Logo $m = m'$, ou seja, duas bases têm sempre o mesmo número de elementos. $\diamondsuit$

Definição 2.6. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se V admite uma base finita, então chamamos de* ***dimensão*** *de V, e denotamos por $\dim_{\mathbb{K}} V$, o número de elementos em tal base.*

Exemplos 2.6.1.

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$;
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$;
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Corolário 2.0.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensão $n \geq 1$. Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}$ é uma base de V;*
2. *$\mathcal{B}$ é L.I.;*
3. *$\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.*

Proposição 2.6.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ um conjunto L.I. em V. Se existir $u \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, então $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ é L.I.*

Prova: Sejam α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1} escalares tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u = 0_u.$$

Se $\alpha_{n+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$ então podemos escreuer

$$u = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) u_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) u_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) u_n$$

e então u é combinação linear de u_1, ..., u_n o que contradiz nossa hipótese. Assim $\alpha_{n+1} = 0_{\mathbb{K}}$ e daí obtemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_u.$$

Mas $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é L.I, logo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ é L.I. $\diamondsuit$

Teorema 2.1. *Todo espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado possui uma base.*

Prova: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado. Então V possui um conjunto gerador finito, digamos com m elementos, $m > 1$. Seja $u_1 \in V$, $u_1 \neq 0_V$. Então $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}$ é L.I. Se $\mathcal{B}_1$ gera V então $\mathcal{B}_1$ é uma base de V. Caso contrário, existe $u_2 \in V$ tal que u_2 não é um múltiplo escalar de u_1. Pela Proposição 2.6.1, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2\}$ é L.I. Novamente, se $\mathcal{B}_2$ gera V, então $\mathcal{B}_2$ é uma base de V. Caso contrário, existe $u_3 \in V$ tal que u_3 não é uma combinação linear de u_1 e u_2. Daí, $\mathcal{B}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I. Continuando com este processo chegamos a uma base de V ou obtemos conjuntos L.I. com um número arbitrário de elementos. A segunda opção não é possível por causa da Proposição 2.5.1. Portanto, com este processo obtemos uma base de V. $\diamondsuit$

Teorema 2.2. *Seja V uma $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente gerado e seja $\mathcal{B}$ um conjunto L.I. em V. Então existe uma base de V contendo $\mathcal{B}$.*

Proposição 2.6.2. *Seja V uma $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} \subseteq V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{B}$ é uma base de V;*

(ii) *Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.*

Prova:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ seja um base de V. Em particular $\mathcal{B}$ gera V. Seja $u \in V$ e suponha que existam escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i.$$

Daí

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0_V$$

e como $\mathcal{B}$ é L.I segue que $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ como queríamos.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Agora suponha que cada elemento de V se escreva de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{B}$ gera V. Resta mostrar que $\mathcal{B}$ é L.I. Sejam então $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Como $0_V = 0_{\mathbb{K}} u_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} u_n$, segue então da unicidade que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ e daí $\mathcal{B}$ é L.I. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de V.

$\diamondsuit$

2.1 Subespaços

Definição 2.7. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um subconjunto não vazio W de V é um* ***subespaço vetorial*** *de V se a restrição das operaçoes de V a W torna W um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

Exemplos 2.7.1. *a) O subconjunto $W = \{0_V\}$ é um subespaço vetorial de qualquer espaço vetorial V. O próprio V como subconjunto de V é também um subespaço vetorial. Estes dois subespaços são chamados de* ***subespaços triviais****.*

b) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $w \in V$. Então o conjunto $\mathbb{K}w = \{\alpha w \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema 2.3. *Um subconjunto não vazio W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores u_1, $u_2 \in W$ e cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\lambda u_1 + u_2 \in W$.*

Prova: Exercício! $\diamondsuit$

Exemplos 2.7.2.

1. *$V = \mathbb{R}^5$; $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.*

2. *$V = M_n(\mathbb{K})$; $UT_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$ é um subespaço de V.*

3. *$V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço. Por exemplo, $u = (1,1)$, $v = (2,4) \in W$ e no entanto $u + v \notin W$.*

Proposição 2.7.1. *Se W_1 e W_1 são subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V então*

a) $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorail de V. De fato, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço tanto de W_1 quanto de W_2.

b) $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

Prova: Exercício! $\diamondsuit$

Proposição 2.7.2. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e de dimensão finita. Se W é um subespaço não trivial de V, então $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$.*

Prova: Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W. Em particular $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. de V. Como $W \neq V$, existe $u \in V$ tal que $u \notin W$ e assim u não é gerado pelo elementos de $\mathcal{B}$. Daí pela Proposição 2.6.1, $\{w_1, \dots, w_n, u\}$ é L.I..Logo, uma base de V conterá mais elementos que o conjunto $\mathcal{B}$, isto é, $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$. $\diamondsuit$

Proposição 2.7.3. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Prova: Vamos supor primeiro que $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$. Como W_1 e W_2 são de dimensão finita, então $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ também o são. Assim seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial tanto de W_1 como de W_2, pelo Teorema 2.2 podemos estender $\mathcal{B}$ a uma base de W_1 e a uma base de W_2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_r\}$ uma base de W_1 e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n, u_1, \ldots, u_p\}$ uma base de W_2. Note que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_2$. Vamos então mostrar que $\mathcal{A} = \{w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de $W_1 + W_2$. Primeiro mostraremos que $\mathcal{A}$ gera $W_1 + W_2$.

Seja $v \in W_1 + W_2$. Então $v = x + y$ onde $x \in W_1$ e $y \in W_2$. Mas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente. Assim

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \delta_i w_i + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l$$

com α_i, β_j, δ_i, $\gamma_l \in \mathbb{K}$. Daí

$$v = x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \delta_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l$$

e então $\mathcal{A}$ gera $W_1 + W_2$.

Agora, precisamos mostrar que $\mathcal{A}$ é L.I.. Considere então a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j + \sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = 0_V$$

onde α_i, β_j, $\gamma_l \in \mathbb{K}$. Assim

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} (-\beta_j) v_j \in W_1 \cap W_2 \tag{2.2}$$

pois é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_1$ e de $\mathcal{B}_2$, simultaneamente. Logo, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^{p} \gamma_l u_l + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) w_i = 0_V.$$

Mas $\mathcal{B}$ é L.I., daí $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Assim podemos reescrever (2.2) como

$$\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)w_i + \sum_{j=1}^{r}(-\beta_j)v_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

Mas $\mathcal{B}_1$ é L.I., donde $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0_{\mathbb{K}}$. Isto é, $\mathcal{A}$ é L.I..

Portanto $\mathcal{A}$ é uma base de $W_1 + W_2$ e assim

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de W_1 e W_2, respectivamente. Analogamente ao caso anterior, mostra-se que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $W_1 + W_2$. $\diamondsuit$

Definição 2.8. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$. O **subespaço gerado** por S é definido como o subconjunto de V formado por todas as combinações lineares de $u_1, \ldots, u_n$. Denotaremos tal conjunto por*

$$[u_1, \ldots, u_n] = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Proposição 2.8.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. O conjunto $[v_1, \ldots, v_n]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de V.*

Exemplos 2.8.1.

1. *Dado $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$, seja $\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Então*

   $$[1, x, x^2, x^3, x^4] = \{a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^4\} = \{f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \mid \deg f(x) \leq 4\}$$

   é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

2. *Considere $\mathbb{R}^5$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e seja $\{(1,2,0,3,0); (0,0,1,4,0); (0,0,0,0,1)\}$. Então*

   $$[(1,2,0,3,0); (0,0,1,4,0); (0,0,0,0,1)] = \{(\alpha, 2\alpha, \beta, 3\alpha + 4\beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$.

3. *Considere $W = [(1,2,3); (0,1,2); (-1,0,1)]$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Determinar $\dim_{\mathbb{R}} W$.*

Solução: *Inicialmente, vamos verificar de o conjunto* $\{(1,2,3);(0,1,2);(-1,0,1)\}$ *é L.I. ou L.D.. Para isso, sejam* x, y *e* $z \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$x(1,2,3) + y(0,1,2) + z(-1,0,1) = (0,0,0).$$

Assim vemos que $x = z$ *e* $y = -2z$ *são soluções para o sistema*

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e assim $\{(1,2,3);(0,1,2);(-1,0,1)\}$ *é L.D. Daí* $\dim_{\mathbb{R}} W \leq 2$. *Agora note que* $(1,2,3)$ *não é múltiplo escalar de* $(0,1,2)$. *Logo,* $\{(1,2,3);(0,1,2)\}$ *é L.I. e então* $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

4. *Mostre que*

$$S = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \\ \overline{5} \\ \overline{3} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{5} \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{5} \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7)$ *como* $\mathbb{Z}_7$*-espaço vetorial.*

Solução: *Uma base de* $\mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7)$ *é dada por*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\},$$

daí $\dim_{\mathbb{Z}_7} \mathbb{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_7) = 5$. *Assim como* S *possui 5 elementos, basta mostrar que* S *é*

L.I.. O que é imediato pois

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

só é possível se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \overline{0}$.

5. *Seja* $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Determine uma base de* V *contendo os polinômios*

$$p_1(x) = 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4$$
$$p_2(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4$$
$$p_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4.$$

Solução: *Sabemos que* $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ *é uma base de* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Tal base é chamada de* ***base canônica*** *de* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Assim* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = 5$. *Para determinar uma base contendo* $p_1(x)$, $p_2(x)$ *e* $p_3(x)$, *começamos determinando se tais vetores são L.I. ou L.D.. Para isso montamos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em A *para reduzí-la a forma em escada*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M.$$

Como a matrix M *não possui nenhuma linha nula, então* $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ *é L.I. em* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Observer que* M *não tem 1 na segunda e quarta colunas. Assim vamos* *adicionar a M uma linha com 1 na segunda coluna e outra com 1 na quarta coluna, obtendo*

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim $\mathcal{B}' = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), x, x^3\}$ forma uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ contendo $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

6. *Considere $V = \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Verifique se o conjunto formado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 11 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

é L.D. ou L.I. em V.

Solução: *Considere a matriz M formada pela entradas das matrizes A_1, A_2 e A_3 escritas como linhas de M*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \times -1 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a terceira linha é nula, então o vetor A_3 é uma combinação linear de A_1 e A_2, ou seja, $\{A_1, A_2, A_3\}$ é L.D..

2.2 Espaços de dimensão infinita

Definição 2.9. *Seja X um conjunto qualquer.*

1. *Uma **relação de ordem parcial sobre** X, que denotaremos por $\prec$, é um relação que satisfaz:*

   (a) *$y \prec y$ para todo $y \in X$ (propriedade reflexiva);*

   (b) *Se $y \prec z$ e zt com y, z, $t \in X$, então yt (propriedade transitiva);*

   (c) *Se $y \prec z$ e $z \prec y$, com y, $z \in X$, então $y = z$ (propriedade antissimétrica).*

2. *Uma **relação de ordem total sobre** X é uma relação de ordem parcial $\prec$ sobre X com a propriedade que para quaisquer y, $z \in X$, ou $y \prec z$ ou $z \prec y$.*

3. *Um **conjunto parcialmente ordenado** é um par $(X, \prec)$ consistindo de um conjunto X e uma ordem parcial $\prec$ sobre o mesmo. De modo análogo, definimos um **conjunto totalmente** ordenado.*

4. *Considere $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento $\alpha \in X$ é denominado **maximal** se $\alpha \prec \beta$, para $\beta \in X$, então $\alpha = \beta$.*

5. *Seja $A \subseteq X$. Um elemento $m \in X$ é denominado uma **cota superior para** A se $x \prec m$, para todo $x \in A$.*

Exemplos 2.9.1. 1. *A ordem natural do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\leq$, é uma relação de ordem total.*

2. *Considere em $\mathbb{N}$ a seguinte relação: $a \prec b$ se, e somente se, $a = kb$ para $k \in \mathbb{N}$. Então $\prec$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.*

   Solução: *De fato,*

   (a) *$a \prec a$ pois $a = a1$.*

   (b) *Se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a = k_1b$ e $b = k_2c$. Daí $a = (k_1k_2)c$, ou seja, $a \prec c$.*

   (c) *Se $a \prec b$ e $b \prec a$, então $a = k_1b$ e $b = k_2a$. Logo $k_1 = k_2 = 1$ e assim $a = b$.*

A ordem não é total pois, por exemplo, 2 e 3 não são comparáveis.

Agora considere o subconjunto

$$\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Tal conjunto é totalmente ordenado por $\prec$*. O conjunto* $\mathcal{P}_1 = \{2, 4, 8, 3, 9, 27\}$ *é parcialmente ordenando por* $\prec$ *e possui dois elementos maximais que são 8 e 27.*

3. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma coleção qualquer de conjuntos. A inclusão de conjuntos,* $\subseteq$*, é uma relação de ordem parcial sobre* $\mathcal{A}$*. Não é, de modo geral, uma ordem total.*

4. *Sejam* X *um conjunto não vazio e* $\mathcal{P}(X)$ *a classe de todos os subconjuntos de* X*. Então* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. Seja* $\mathcal{B}$ *qualquer classe de subconjuntos de* X*, então a união de todos os conjuntos* $A \in \mathcal{B}$ *é uma cota superior para* $\mathcal{B}$*. Por exemplo, para* $X = \mathbb{N}$*, seja* $\mathcal{P}(X)$ *formado por todos os subconjuntos de* $\mathbb{N}$*. Considere* $\mathcal{B}$ *dado por*

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A = \{2k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Assim $\cup_{k \in \mathbb{N}}\{2k\}$ *é uma cota superior para* $\mathcal{B}$*.*

Lema 2.9.0.1 (Lema de Zorn)**.** *Seja* X *um conjunto parcialmente ordenando com a propriedade que cada subconjunto totalmente ordenado adminte uma cota superior. Então* X *contém um elemento maximal.*

Teorema 2.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e seja* $\mathcal{C}$ *um conjunto L.I. em* V*. Então existe uma base* $\mathcal{B}$ *de* V *contendo* $\mathcal{C}$*.*

Prova: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{C}$ um subconjunto L.I. de V. Considere $\mathcal{P}$ a classe de todos os subconjuntos L.I. em V que contenham $\mathcal{C}$. É claro que $\mathcal{P}$ é não vazio, já que o próprio conjunto $\mathcal{C}$ pertence a $\mathcal{P}$. Além disso, $\mathcal{P}$ é parcialmente ordenado por inclusão. Para usar o Lema de Zorn, precisamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ tem uma cota superior. Com esse objetivo, considere $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$. O candidato natural para cota superior de $\mathcal{D}$ é a união de todos os conjuntos $\mathcal{A}_\alpha$ em $\mathcal{D}$. Precisamos mostrar que $\mathcal{A} = \cup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ é L.I.. Seja então $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um subconjunto finito de $\mathcal{A}$. Daí para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $\alpha_i \in I$ tal que $v_i \in \mathcal{A}_{\alpha_i}$. Como $\mathcal{A}$ é totalmente ordenado, podemos reorganizar os índices i de tal modo que $\mathcal{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$. Agora cada $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ é L.I. pois pertencem a $\mathcal{P}$, então como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$, segue que $\mathcal{L}$ também é L.I.. Como $\mathcal{L}$ é qualquer conjunto finito, segue que $\mathcal{A}$ é L.I.. Assim $\mathcal{D}$ possui uma cota superior. Segue do Lema de Zorn que $\mathcal{P}$ tem elemento maximal, que vamos chamar de $\mathcal{B}$. Provemos que $\mathcal{B}$ é uma base de V. Primeiro como $\mathcal{B}$ é um elemento de $\mathcal{P}$, então $\mathcal{B}$ é L.I.. Resta então provar que $\mathcal{B}$ gera V. Para isso, suponha que existe $w \in V$ que não é gerado por $\mathcal{B}$. Assim $\mathcal{B} \cup \{w\}$ é L.I.. Mas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{w\}$ o que é impossível pois $\mathcal{B}$ é elemento maximal. Logo tal w não existe. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base de V. $\diamondsuit$

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAES LINEARES

Em todo esse captulo $\mathbb{K}$ denotar um corpo.

3.1 Conceitos Bsicos

Definição 3.1. *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *e* $(W, \oplus, \otimes)$ *espaos vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Uma funo* $T : V \to W$ *uma* ***transformao linear*** *se*

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$ *para todos* u_1, $u_2 \in V$;

2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \otimes T(u)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e todo* $u \in V$.

Observação 3.1.1. *Para simplificar a notao, vamos adotar os mesmos smbolos para indicar a soma e o produto por escalar nos espaos vetoriais que aparecero no decorrer do texto. No entanto, o leitor deve estar ciente que estes smbolos podem ter significados diferentes, dependendo do espao vetorial em questo.*

Lema 3.1.0.1. *Sejam* V *e* W *espaos vetoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Ento uma funo* $T : V \to W$ *uma transformao linear se, e somente se,*

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todos u_1, $u_2 \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Prova: Deixada a cargo do leitor. $\diamondsuit$

Lema 3.1.0.2. *Sejam V e W espaos vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformao linear. Ento:*

1. *$T(0_V) = 0_W$, onde 0_V e 0_W denotam os vetores nulos de V e W, respectivamente.*
2. *$T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in V$.*
3. *$T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in V$ para $i = 1, \ldots, m$.*

Prova:

1. Note que
$$0_W + T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$
ou seja, $T(0_V) = 0_W$.

2. Basta observar que $-u = (-1_{\mathbb{K}})u$ e da
$$T(-u) = T((-1_{\mathbb{K}})u) = -1_{\mathbb{K}} T(u) = -T(u).$$

3. Por induo em m. Se $m = 2$, ento
$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2).$$
Suponha que para $m = p$ tenhamos
$$T(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{p} T(u_i).$$
Vamos mostra que vlido para $m = p + 1$. De fato,
$$\begin{aligned} T(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i u_i) &= T([\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i] + \alpha_{p+1} u_{p+1}) = T(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) + T(\alpha_{p+1} u_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i T(u_i) + \alpha_{p+1} T(u_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i T(u_i). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Exemplos 3.1.1. *1. Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaos vetoriais. A funo $T : V \to W$ dada por $T(u) = 0_W$ para todo $u \in V$ uma transformao linear.*

2. *Seja V um $\mathbb{K}$-espao vetorial. A funo $T : V \to V$ dada por $T(u) = u$ para todo $u \in V$ uma transformao linear.*

3. *Considere $\mathbb{R}$ como um $\mathbb{R}$-espao vetorial. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ento T_a uma transformao linear. Agora, seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = e^x$. Ento T no uma transformao linear pois $T(0) \neq 0$.*

4. *Sejam $\mathbb{K}^3$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-espaos vetoriais. Defina $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ por*

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & c-b \end{bmatrix}.$$

Ento T uma transformao linear. De fato, dados (a,b,c), $(d,e,f) \in \mathbb{K}^3$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} T(\lambda(a,b,c) + (d,e,f)) &= T(\lambda a + d, \lambda b + e, \lambda c + f) \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda a + d) + (\lambda b + e) & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & (\lambda c + f) - (\lambda b + e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda c - \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d+e & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & f-e \end{bmatrix} \\ &= \lambda T(a,b,c) + T(d,e,f). \end{aligned}$$

5. *Seja $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ um $\mathbb{C}$-espao vetorial e considere $D : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dado por*

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Ento D uma transformao linear.

6. *Seja $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ uma funo contnua$\}$. imediato verificar que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ um $\mathbb{R}$-espao vetorial. Defina $T : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por*

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ento T uma transformao linear.

7. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Defina $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

imediato verificar que T uma transformao linear. Denote por e_i o elemento de $\mathbb{K}^n$ contendo $1_{\mathbb{K}}$ na posio i e $0_{\mathbb{K}}$ das demais. Ento $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$ e

$$T(e_i) = a_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Agora, se $S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ uma transformao linear, ento pelo Lema 3.1.0.2 item (c)

$$S(x_1, \ldots, x_n) = S(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} S(e_i)$$

onde $S(e_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Logo qualquer transformao linear de $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ da forma

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

para determinados escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Isto , para determinarmos a transformao T s precisamos conhecer seus valores na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$.

Teorema 3.1. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaos vetoriais. Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V e se $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W$, ento existe uma nica transformao linear $T : V \to W$ tal que $T(u_i) = w_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Prova: Dado $v \in V$, como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V, ento sabemos que existem nicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Defina ento $T : V \to W$ por

$$T(v) = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

A unicidade dos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ garantem que T est bem definida, isto , um mesmo elemento de V no pode ter duas imagens distintas.

Agora, note que $T(u_i) = w_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Assim precisamos mostrar que T linear. Sejam $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Ento

$$T(\lambda v_1 + v_2) = T(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i) = T(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + \beta_i) u_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i\alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i =$$

Logo T uma transformao linear.

Resta agora mostrar que T nica. Suponha que exista uma transformao linear $S : V \to W$ tal que $S(u_i) = w_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Para $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ temos

$$S(v) = S(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = T(v)$$

para todo $v \in V$. Logo $T = S$, isto , existe uma nica transformao linear que satisfaz as condies do teorema. $\diamondsuit$

Exemplos 3.1.2. *Os vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ so L.I em $\mathbb{R}^2$ e assim formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim pelo Teorema 3.1, sabemos que existe uma nica transformao linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(v_1) = T(1, 2) = (3, 2, 1)$$
$$T(v_2) = T(3, 4) = (6, 5, 4).$$

Determine $T(1, 0)$.

Solução: *Inicialmente escrevemos $(1, 0)$ como combinao linear de v_1 e v_2:*

$$(1, 0) = \alpha(1, 2) + \beta(3, 4).$$

Obtendo $\alpha = -2$ e $\beta = 1$. Assim

$$T(1, 0) = T(-2(1, 2) + (3, 4)) = -2T(1, 2) + T(3, 4) = (0, 1, 2).$$

Definição 3.2. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaos vetoriais e $T : V \to W$ uma transformao linear.*

1. *O conjunto*

$$\ker T = \{u \in V \mid T(u) = 0_W\}$$

*chamado de **kernel** ou **ncleo** de T. (O ncleo de T tambm pode ser denotado por $Nuc\ T$.)*

2. O conjunto

$$\operatorname{Im} T = \{u \in W \mid \ \textit{existe } v \in V \ \textit{tal que } T(v) = u\}$$

*chamado de **imagem** de T.*

CAPÍTULO 4

FORMAS CANÔNICAS

Sejam $(V, \boxplus, \boxdot)$ e $(W, \oplus, \otimes)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Denote por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{é uma transformação linear}\}.$$

Dados T, $G \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ defina

- $(T + G)(u) = T(u) \oplus G(u)$
- $(\lambda T)(u) = \lambda \otimes T(u)$

para todo $u \in V$. É fácil verificar que $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. O vetor nulo é a transformação linear $0 : V \to W$ tal que $0(u) = 0_W$ para todo $u \in V$. Dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, o vetor oposto é $(-T) : V \to W$ definido por $(-T)(u) = -T(u)$ para todo $u \in V$.

Teorema 4.1. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaço vetoriais com dimensões p e q, respectivamente. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = \dim_{\mathbb{K}} V \dim_{\mathbb{K}} W.$$

Prova: Sejam $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ bases de V e W, respectivamente. Para cada par (i, j) com $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$ vamos definir uma transformação linear

$T_{(i,j)} : V \to W$ por

$$T_{(i,j)}(v_r) = \begin{cases} w_i & \text{se } r = j \\ 0_W & \text{se } r \neq j \end{cases}, \tag{4.1}$$

isto é, $T_{(i,j)}(v_r) = \delta_{jr} w_i$, onde δ_{jr} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{jr} = 1_{\mathbb{K}}$ se $r = j$ e $\delta_{jr} = 0_{\mathbb{K}}$ se $r \neq j$). Sabemos que existe uma única transformação linear que satisfaz (4.1) para cada (i, j). Assim obtemos um conjunto

$$\mathcal{A} = \{T_{(1,1)}; T_{(1,2)}; \ldots; T_{(1,p)}; \ldots; T_{(q,1)}; \ldots; T_{(q,p)}\} \tag{4.2}$$

com pq elementos. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é uma base de $\mathcal{L}(V, W)$. Primeiro, seja $G \in \mathcal{L}(V, W)$ e considere a matriz $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})$ com relação às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$. Assim $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$ é dada por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11} w_1 + \cdots + a_{q1} w_q = \sum_{i=1}^{q} a_{i1} w_i \\ &\vdots \\ T(v_p) &= a_{1p} w_1 + \cdots + a_{qp} w_q = \sum_{i=1}^{q} a_{ip} w_i, \end{aligned}$$

ou simplesmente, $G(v_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} w_i$ para $j = 1, \ldots, p$. Considere agora a transformação linear $H : V \to W$ dada por

$$H = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} T_{(i,j)}.$$

Vamos mostrar que $G = H$. Para isso, basta mostrar que $G(v_j) = H(v_j)$ para $v_j \in \mathcal{B}_V$. Temos

$$\begin{aligned} H(v_j) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} T_{(i,j)}(v_j) &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} (a_{i1} \delta_{1r} w_i + a_{i2} \delta_{2r} w_i + \cdots + a_{ip} \delta_{pr} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} a_{ij} w_i = G(v_j) \end{aligned}$$

para cada $j = 1, \ldots, p$. Portanto $G = H$ e assim $\mathcal{A}$ gera $\mathcal{L}(V, W)$.

Mostremos agora que $\mathcal{A}$ é L.I. em $\mathcal{L}(V, W)$. Para isso, sejam $b_{ij} \in \mathbb{K}$ com $1 \le i \le q$ e $1 \le j \le p$ tais que

$$S = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} T_{(i,j)} = 0.$$

Assim $S(v_j) = 0_W$ para todo $j = 1, \ldots, p$. Daí

$$\begin{aligned} 0_W = S(v_j) &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} T_{(i,j)}(v_j) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} b_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} (b_{i1}\delta_{1r} w_i + b_{i2}\delta_{2r} w_i + \cdots + b_{ip}\delta_{pr} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} b_{ij} w_i \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, p$. Isto é,

$$\begin{aligned} &b_{11}w_1 + \cdots + b_{q1}w_q = 0_W \\ &\vdots \\ &b_{1p}w_1 + \cdots + b_{qp}w_q = 0_W \end{aligned}$$

e como $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_q\}$ é L.I. em W, então $b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $1 \le i \le q$ e $1 \le j \le p$. Logo $\mathcal{A}$ é L.I. e assim uma base para $\mathcal{L}(V, W)$. Portanto

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = \dim_{\mathbb{K}} V \dim_{\mathbb{K}} W$$

como queríamos. $\diamondsuit$

Corolário 4.1.1. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões p e q, respectivamente. Então $\mathcal{L}(V, W)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$.*

Definição 4.1. *(i) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um* ***operador linear*** *é um transformação linear $T : V \to V$.*

(ii) Se $T : V \to V$ é um operador linear, denotamos $T \circ T$ por T^2 e mais geralmente

$$\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n} = T^n.$$

Além disso, $T^0 = Id : V \to V$ o operador tal que $Id(u) = u$ para todo $u \in V$.

4.1 Operadores Diagonalizáveis

Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda_2 & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v_i]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_i \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Isto é,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Definição 4.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear.*

*(i) Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $u \in V$ com $T(u) = \lambda u$.*

(ii) Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $u \in V$ tal que

$$T(u) = \lambda u$$

é chamado de ***autovetor*** *de T* ***associado*** *ao autovalor λ. Denotaremos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço gerado por todos os autovetores associados a λ. Assim*

$$\mathrm{Aut}_T(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}.$$

(iii) Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é ***diagonalizável*** *se existir uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal, isto é, tem a forma (4.3). Tal fato equivale a dizer que existe uma base formada por autovetores.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Vamos determinar um método para encontrar todos os autovalores de T, caso existam.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor, então existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T(u) = \lambda u$. Assim, seja $Id : V \to V$ o operador identidade. Temos

$$\begin{aligned} T(u) &= \lambda u \\ T(u) &= \lambda Id(u) \\ T(u) - \lambda Id(u) &= 0_V \\ (T - \lambda Id)(u) &= 0_V \end{aligned}$$

isto é, $u \in \ker(T - \lambda Id)$. Reciprocamente, se $u \in \ker(T - \lambda Id)$ e $u \neq 0_V$, então $T(u) = \lambda u$. Logo

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T\text{, se, e somente, } \ker(T - \lambda Id) \neq \{0_V\}.$$

Agora, seja $\mathcal{A}$ uma base qualquer de V e considere a matriz $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ do operador $T - \lambda Id \in \mathcal{L}(V, V)$. Como $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, se $T - \lambda Id$ é injetor, então $T - \lambda Id$ é um isomorfismo e daí invertível. Isto é, $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ é uma matriz invertível. Mas se $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor, então $\ker(T - \lambda Id) \neq \{0_V\}$, ou seja, $T - \lambda Id$ não é injetora e consequentemente não pode ser um isomorfismo. Loga a matriz $[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}}$ não é invertível. Assim

$$\det[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se,

$$\det[T - \lambda Id]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Proposição 4.2.1. *Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor do operador linear $T : V \to V$. Então*

$$\mathrm{Aut}_T(\lambda) = \ker(T - \lambda Id).$$

Seja x uma variável. Temos

$$[T - xId]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{B}} - x[Id]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

onde $[T]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para $1 \leq i,\ j \leq n$. Assim $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ é um polinômio de grau n com coeficiente em $\mathbb{K}$. O termo x^n aparece com coeficiente $\pm 1_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, λ é uma raiz de

$$\det[T - xId]_{\mathcal{A}}.$$

Agora, seja $\mathcal{B}$ uma outra base de V. Sabemos que existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que

$$[T - xId]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P.$$

Então

$$\det([T - xId]_{\mathcal{B}}) = \det(P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P) = \det(P^{-1})\det([T - xId]_{\mathcal{A}})\det(P) = \det[T - xId]_{\mathcal{A}}$$

uma vez que $\det(P^{-1})\det(P) = 1_{\mathbb{K}}$. Logo o polinômio $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ não depende da base escolhida para V.

Definição 4.3. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ um operador linear e $\mathcal{A}$ uma base de V. Chamamos o polinômio $\det([T - xId]_{\mathcal{A}})$ de* ***polinômio característico*** *de T e o denotamos por $p_T(x)$.*

Exemplos 4.3.1. *1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Encontre os autovalores de T e os autoespaços associados, se existirem.*

Solução: *Vamos considerar a base canônica de* $\mathbb{R}^2$ *dada por* $\mathcal{A} = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1)\}$. *Temos*

$$T(1,0) = (0,1) = 0(1,0) + 1(1,0) \tag{4.5}$$

$$T(1,0) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(1,0). \tag{4.6}$$

Daí

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1.$$

Como $p_T(x)$ *não possui raízes em* $\mathbb{R}$, *segue que* T *não possui autovalores.*

2. *Seja* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *o operador linear dado por* $T(x, y) = (-y, x)$. *Encontre os autovalores de* T *e os autoespaços associados, se existirem, considerando* $\mathbb{C}^2$ *com um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial.*

Solução: *Considere a base canônica* $\mathcal{A}$ *de* $\mathbb{C}^2$. *É imediato verificar que o polinômio característico de* T *é* $p_T(x) = x^2 + 1$, *cujas raízes são* $\pm i$. *Assim* T *possui 2 autovalores distintos e para cada um deles vamos encontrar o autoespaço associado.*

- *Para* $\lambda_1 = i$ *temos:*

$$[T - iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

e assim $(x, y) \in \mathrm{Aut}_T(i)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = iy$. *Logo*

$$\mathrm{Aut}_T(i) = \{(iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(i, 1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_1 = \{(i, 1)\}$ *é uma base de* $\mathrm{Aut}_T(i)$ *e daí* $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Aut}_T(i) = 1$.

- *Para* $\lambda_1 = -i$ *temos:*

$$[T + iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

e assim $(x, y) \in \operatorname{Aut}_T(-i)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = -iy$. *Logo*

$$\operatorname{Aut}_T(-i) = \{(-iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(-i, 1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_2 = \{(-i, 1)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(-i)$ *e daí* $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Aut}_T(-i) = 1$.

Agora o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(i, 1); (-i, 1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *e nesta base temos*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

3. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador linear tal que*

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ *é uma base qualquer de* $\mathbb{R}^3$. *Determine, casa exista, uma base de* $\mathbb{R}^3$ *tal que o operador* T *seja diagonalizável.*

Solução: *Temos*

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = (3 - x)^2(-1 - x)$$

e assim os autovalores de T *são* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -1$.

- *Para* $\lambda_1 = 3$ *temos que* $(x, y, z) \in \operatorname{Aut}_T(3)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\operatorname{Aut}_T(3) = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$$

e então $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(3)$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(3) = 1$.

- *Para* $\lambda_2 = -1$ *temos que* $(x,y,z) \in \operatorname{Aut}_T(-1)$ *se, e só se,*

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\operatorname{Aut}_T(-1) = \{(z/16, -5z/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1/16, -5/4, 1)]$$

e então $\mathcal{B}_2 = \{(1/16, -5/4, 1)\}$ *é uma base de* $\operatorname{Aut}_T(-1)$ *e* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(-1) = 1$.

Note que o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *é L.I. mas não é uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Neste caso o operador* T *não é diagonalizável.*

4. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador tal que*

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ *é uma base qualquer de* $\mathbb{R}^3$. *Determinar se* T *é diagonalizável.*

Solução: *Temos*

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = -(x+1)^2(x+2)$$

e assim os autovalores de T *são* $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = -2$. *Cálculos simples mostram que*

$$\operatorname{Aut}_T(-1) = [(1,0,2); (0,1,2)]$$

$$\operatorname{Aut}_T(-2) = [(1,-1,1)].$$

É fácil verificar que o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0,2); (0,1,2); (1,-1,1)\}$ *é L.I, logo uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Nesta base temos*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo T é diagonalizável.

Teorema 4.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \geq 1$, autovalores de T, dois a dois distintos.*

(i) Se $u_1 + \cdots + u_r = 0_V$ com $u_i \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$; $i = 1, \ldots, r$; então $u_i = 0_V$ para todo i.

(ii) Para cada $i = 1, \ldots, r$ seja $\mathcal{B}_i$ um conjunto linearmente independente contido em $\operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$. Então $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I. em V.

Prova:

(i) A prova será por indução em $r \geq 1$. Se $r = 1$, nada há a fazer. Seja $r > 1$ e suponha que o teorema seja válido para todo $j < r$. Vamos mostrar que também é válido para $j = r$. Temos

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_r = 0_V \tag{4.7}$$

com $u_i \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$.

Aplicando T em (4.7) obtemos

$$0_V = T(u_1) + T(u_2) + \cdots + T(u_r) = \lambda_1 u_1 + \lambda 2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r. \tag{4.8}$$

Agora multiplicando (4.7) por λ_1 e subtraindo de (4.8) obtemos

$$\lambda_1 u_2 + \lambda_1 u_r - \lambda_2 u_2 - \cdots - \lambda_r u_r = 0_V$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2) u_2 - \cdots - (\lambda_1 - \lambda_r) u_r = 0_V.$$

Mas por hipótese de indução, segue que $(\lambda_1 - \lambda_i) u_i = 0$ para $i = 2, \ldots, r$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, então $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ e então $u_i = 0_V$ para $i = 2, \ldots, r$. Logo $u_1 = 0_V$ e o resultado está provado.

(ii) Para cada i, seja $\mathcal{B}_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{in_i}\}$. Vamos mostrar que o subconjunto de V dado por $\mathcal{B} = \{u_{11}, \ldots, u_{1n_1}, u_{21}, \ldots, u_{2n_2}, \ldots, u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}\}$ é L.I. em V. Para isso sejam $\alpha_{in_i} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, r$ tais que

$$\alpha_{11} u_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1} u_{1n_1} + \cdots + \alpha_{r1} u_{r1} + \cdots + \alpha_{rn_r} u_{rn_r} = 0_V.$$

Mas
$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} \in \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$$
para $i = 1, \ldots, r$. Daí segue do item (a) que
$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} = 0_V$$
para $i = 1, \ldots, r$. Como $\mathcal{B}_i$ é L.I. para $i = 1, \ldots, r$, então $\alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, n_i$. Portanto $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I. em V.

$\diamondsuit$

Corolário 4.2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são todos os autovalores de T, então T é diagonalizável se, e somente se,*
$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=i}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(\lambda_i).$$

Definição 4.4. *Seja λ um autovalor de um operador linear $T : V \to V$ onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos que*
$$p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$$
com $q(\lambda) \neq 0$, seja o polinômio característico de T.

*(i) O número m é chamada de **multiplicidade álgébrica** de λ e o denotamos por $ma(\lambda)$.*

*(ii) Chamamos de **multiplicidade geométrica** de λ à dimensão do subespaço $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.*

Observação 4.4.1. *A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é o maior índice j tal que*
$$p_T(x) = (x - \lambda)^j q(x)$$
com $q(\lambda) \neq 0$;

Exemplos 4.4.1. *(i)* $p_T(x) = (x-2)(x^2 - 5x + 6)$, $ma(2) = 2$

(ii) $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)$, $ma(2) = 1$, $ma(-1) = 3$.

Proposição 4.4.1. *Seja λ um autovalor de $T : V \to V$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.*

Prova: Seja $W = \operatorname{Aut}_T(\lambda)$ e assuma que $\dim \mathbb{K}W = r$. Sejam $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base de W e $\mathcal{B}_V = \{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ uma base de V contendo $\mathcal{B}_W$. Como $T(w_i) = \lambda w_i$ para $i = 1, \ldots, r$; podemos escrever $[T]_{\mathcal{B}_V}$ na forma

$$[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} \lambda & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \ldots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & \lambda & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} & b_{r+1r+1} & \ldots & b_{r+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} & b_{nr+1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{B}_V}) = (x-\lambda)^r \det(A_2).$$

Por definição, $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x-\lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = r \leq ma(\lambda)$. ♢

Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_r)^{n_r}$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ são distintos. Da definição de $p_T(x)$ temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n_1 + \cdots + n_r.$$

Assim, pela proposição anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$$

se, e somente se, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para $i = 1, \ldots, r$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é diagonalizável.*

(ii) $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$, $n_i \geq 1$ *e* $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ *para cada* $i = 1, \dots, r$.

(iii) $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Aut}_T(\lambda_i)$.

4.2 Subespaços T-invariantes

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{A}$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que T é diagonalizável e os autoespaços de T são

$$\mathrm{Aut}_T(-1) = [(1,0,2); (0,1,2)]$$
$$\mathrm{Aut}_T(-2) = [(1,-1,1)].$$

Seja $u \in \mathrm{Aut}_T(-1)$. Assim existem α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,2)$$

e daí

$$T(u) = \alpha T(1,0,2) + \beta T(0,1,2) = -\alpha(1,0,2) - \beta(0,1,2) \in \mathrm{Aut}_T(-1).$$

Logo, para todo $u \in \mathrm{Aut}_T(-1)$, $T(u) \in \mathrm{Aut}_T(-1)$. Em outras palavras

$$T(\mathrm{Aut}_T(-1)) \subseteq \mathrm{Aut}_T(-1).$$

Analogamente, para todo $u \in \mathrm{Aut}_T(-2)$, $T(u) \in \mathrm{Aut}_T(-2)$. Em outras palavras

$$T(\mathrm{Aut}_T(-2)) \subseteq \mathrm{Aut}_T(-2).$$

Agora, seja $W = [(1,0,0)]$. Primeiramente, podemos escrever

$$(1,0,0) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,2) + \gamma(1,-1,1)$$

tomando $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = -2$. Daí

$$T(1,0,0) = (1,-2,14) \notin W$$

e então $T(W) \subsetneq W$.

Definição 4.5. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Dizemos que W é um **subespaço T-invariante** de V se $T(W) \subseteq W$, isto é, $T(u) \in W$ para todo $u \in W$.*

Exemplos 4.5.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*

1. *Os subespaços triviais de V são T-invariantes.*

2. *Os subespaços $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ são T-invariantes. De fato, se $u \in \ker T$, então $T(u) = 0_V \in \ker T$. Assim $T(\ker T) \subseteq \ker T$. Agora, se $w \in \operatorname{Im} T$, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Assim $T(w) = T(T(u))$, logo $T(w) \in \operatorname{Im} T$ para todo $w \in \operatorname{Im} T$.*

3. *Se λ for um autovalor de T, então $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante.*

4. *Se W é um subespaço T-invariante, então $T : W \to W$ é um operador linear.*

5. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então os únicos subespaços T-invariantes são os triviais. De fato, qualquer outro espaço T-invariante teria dimensão 1, isto é, se W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, T-invariante então $W = [v]$. Daí v seria um autovetor de T. Mas

$$p_T(x) = x^2 + 1$$

que não possui raízes em $\mathbb{R}$. Logo, T não possui subespaço T-invariante não trivial.

Definição 4.6. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Dizemos que $W_1 + W_2$ é uma **soma direta** se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Neste caso escreveremos $W_1 \oplus W_2$.*

Exemplos 4.6.1. *1. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de $\mathbb{C}^4$ com bases $\{(1,2,0,i);(i,0,0,1)\}$ e $\{(0,0,3,1)\}$, respectivamente. Seja $(z_1,z_2,z_3,z_4) \in W_1 \cap W_2$. Temos*

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = \alpha(1,2,0,i) + \beta(i,0,0,1) = \gamma(0,0,3,1)$$

donde $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0,0)\}$ e portanto $W_1 + W_2$ é uma soma direta e escrevemos $W_1 \oplus W_2$.

2. Sejam $W_1 = [(0,1)]$ e $W_2 = [(1,1)]$ subespaços de $\mathbb{R}^2$. Temos que se $(x,y) \in W_1 \cap W_2$, então

$$(x,y) = \alpha(0,1) = \beta(1,1)$$

e daí $\alpha = \beta = 0$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{(0,0\}$ e então $W_1 + W_2$ é uma soma direta. Mais ainda

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1 \oplus W_2) = \dim_{\mathbb{R}} W_1 + \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$$

e portanto,

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2.$$

Definição 4.7. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam W_1 e W_2 dois subespaços de V. Dizemos que V é a* ***soma direta*** *de W_1 e W_2 se*

1. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$;

2. $W_1 + W_2 = V$.

Neste caso escrevemos

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Proposição 4.7.1. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e só, se cada elemento $u \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $x_1 + x_2$, onde $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2$.*

Prova:

($\Rightarrow$) Vamos supor que $V = W_1 \oplus W_2$. Segue então que cada elemento $u \in V$ se escreve como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2. Suponha agora que $u = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ onde x_1, $y_1 \in W_1$ e x_2, $y_2 \in W_2$. Daí

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$$

pois $x_1 - y_1 \in W_1$ e $y_2 - x_2 \in W_2$. Mas $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, logo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Como cada elemento de V é uma soma de elementos de W_1 com elementos de W_2, logo $V = W_1 + W_2$. Seja $u \in W_1 + W_2$ com $u \neq 0_V$. Assim como $0_V \in W_1$ temos

$$u = 0_V + u$$

considerando $u \in W_2$. Por outro lado, $0_V \in W_2$, daí

$$u = u + 0_V$$

considerando $u \in W_1$. Logo u pode ser escrito de duas maneiras distintas, o que contradiz nossa hipótese. Logo $u = 0_V$, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Portanto, $V = W_1 \oplus W_2$.

$\diamondsuit$

Proposição 4.7.2. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não nulo e de dimensão finita e W_1 um subespaço não nulo de V. Então existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Prova: Se $V = W_1$ não há nada a fazer, pois basta escolher $W_2 = \{0_V\}$. Suponha então que $V \neq W_1$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W_1. Sabemos que podemos estender $\mathcal{B}_1$ a uma base $\mathcal{B}$ de V. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m, u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de V contendo $\mathcal{B}_1$. Defina

$$W_2 = [u_1, \ldots, u_n]$$

o subespaço gerado por u_1, …, u_n. Como $\mathcal{B}$ gera V, então $V = W_1 + W_2$. Seja $v \in W_1 \cap W_2$. Então existem escalares α_1, …, α_m, β_1, …, β_n tais que

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$$
$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n,$$

isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_n u_n = 0_V$$

e então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$ pois $\mathcal{B}$ é L.I.. Assim $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ e portanto $V = W_1 \oplus W_2$. $\diamondsuit$

Exemplos 4.7.1. *1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = [(1,0,0)]$. Então podemos tomar $W_2 = [(0,1,0);(0,0,1)]$ e teremos $V = W_1 \oplus W_2$. Também podemos tomar $W_3 = [(1,1,1);(0,0,1)]$ e assim $V = W_1 \oplus W_3$.*

2. Sejam $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$. Tomando

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

temos $V = W_1 \oplus W_2$.

4.3 Polinômio Minimal

Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ V. Para cada $i \geq 0$ definindo

$$T^i = \begin{cases} \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{i \text{ vezes}}, & i \geq 1 \\ Id, & i = 0, \end{cases}$$

então $T^i \in \mathcal{L}(V,V)$. Mas, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V,V) = n^2$, assim existe $r \geq 1$ tal que o conjunto $\{T^0, T, T^2, \ldots, T^{r-1}\}$ é L.I., mas $\{T^0, T, T^2, \ldots, T^r\}$ é L.D.. Logo existem escalares a_0, a_1, $\ldots$, a_{r-1} tais que

$$T^r = a_0 T^0 + a_1 T^1 + \cdots + a_{r-1} T^{r-1},$$

ou seja,

$$T^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i.$$

Assim

$$T^r(u) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i(u)$$

para todo $u \in V$.

Defina

$$m_T(x) = x^r - a_{r-1}x^{r-1} - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Do exposto anteriormente segue que

$$m_T(T(u)) = 0_V$$

para todo $u \in V$.

Definição 4.8. *O **polinômio minimal** de um operador linear T em $\mathcal{L}(V,V)$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Assim, se o grau de $m_T(x)$ é r, então o coeficiente de x^r é 1.*

Exemplos 4.8.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ dado por*

$$T(a,b,c) = (a, a+b, c).$$

Temos $T \neq \lambda Id$ e

$$T^2(a,b,c) = T(T(a,b,c)) = T(a,a+b,c) = (a, 2a+b, c) = 2(a,a+b,c) - (a,b,c)$$

isto é,

$$T^2(a,b,c) = 2T(a,b,c) - Id(a,b,c).$$

Assim o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x-1)^2.$$

Teorema 4.4. *Seja $T \in \mathcal{L}(V,V)$, onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Os polinômios característico e minimal de T possuem exatamente as mesmas raízes, a menos de multiplicadade.*

Exemplos 4.8.2. *Seja T o operador sobre $\mathbb{R}^n$ representado em relação à base canônica pela matriz A dada. Encontre o polinômio minimal de T.*

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$, $n = 3$

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$(x-1)(x-2),\ (x-1)(x-2)^2.$$

Temos

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}, A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

e assim

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = [0]_{3\times 3}.$$

Logo o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x-1)(x-2).$$

Note que $p_T(x) = m_T(x)(x-2)$ e assim $p_T(A) = [0]_{3\times 3}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $n = 4.$

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x-3)(x-2)^3.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$f(x) = (x-3)(x-2),\ g(x) = (x-3)(x-2)^2, h(x) = (x-3)(x-2)^3.$$

Temos

$$f(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora

$$g(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x - 3)(x - 2)^2.$$

Note que $p_T(x) = m_T(x)(x - 2)$ e assim $p_T(A) = [0]_{4\times 4}$.

3. $A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *onde $a \neq 0$, $n = 2$.*

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^2.$$

Assim o polinômio minimal será da forma

$$(x - \lambda),\ (x - \lambda)^2;$$

Como $T \neq \lambda Id$, então segue que $m_T(x) = p_T(x)$ e daí $p_T(A) = [0]_{2\times 2}$.

Teorema 4.5 (Cayley-Hamilton)**.** *Seja T um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita. Se $p_T(x)$ é o polinômio característico de T, então $p_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Em particular, o polinômio característico $p_T(x)$ é um múltiplo do polinômio minimal $m_T(x)$ de T.*

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left[e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$W_2 = \left[e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Temos

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1, T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

assim W_1 é um subespaço T-invariante. Seja então $T_1 = T : W_1 \to W_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ uma base de W_1. Temos

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_2, T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

assim W_2 é um subespaço T-invariante. Seja então $T_2 = T : W_2 \to W_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$ uma base de W_2. Temos

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é fácil ver que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ e assim $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}.$$

Neste caso dizemos que T é a **soma direta** dos operadores T_1 e T_2 e escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Além disso temos

$$T_1^2(e_1) = T_1(T(e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2(e_2) = T_1(T(e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

assim $T_1^2 = 0$.

Note também que T_2 é invertível pois leva uma base de W_2 em uma base de W_2. Desse modo o operador T pode ser escrito como a soma direta

$$T = T_1 \oplus T_2$$

onde $T_1^2 = 0$ e T_2 é invertível. O operador T_1 é chamado de **nilpotente** de índice de nilpotência 2.

Definição 4.9. *Seja $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que W_i seja T-invariante para $i = 1, \ldots, r$. Sejam $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ bases de $W_1, \ldots, W_r$, respectivamente. Como $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V então*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}$$

onde $T_i = T : W_i \to W_i$, $i = 1, \ldots, r$. Neste caso escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$$

*e dizemos que T é a **soma direta dos operadores** $T_1, \ldots, T_r$.*

Definição 4.10. *Uma operador linear $T : V \to V$ é chamado de **nilpotente** se existir um $r > 0$ tal que $T^r = 0$. O **índice de nilpotênica** de um operador nilpotente será o menor inteiro i tal que $T^i = 0$.*

Observação 4.10.1. *Se $T : V \to V$ é um operador linear nilpotente, então* $\ker T \neq \{0_V\}$. *De fato, se T é nilpotente de índice $i \geq 1$, então existe $u \in V$ tal que $T^i(u) = 0_V$ e $T^{i-1}(u) \neq 0_V$. Assim*

$$0_V = T^i(u) = T(T^{i-1}(u)),$$

isto é, $T^{i-1}(u) \in \ker T$.

Exemplos 4.10.1.

1. *Seja $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o operador derivação. É fácil ver que D é nilpotente de índice de nilpotênica 4.*

2. *Seja $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o operador derivação. É fácil ver que D é nilpotente de índice de nilpotênica $n + 1$.*

3. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que*

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que T é nilpotente de índice de nilpotência 2.

Teorema 4.6. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.*

Observação 4.10.2. *O Teorema 4.6 não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. Por exemplo, seja $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(p(x)) = xp(x)$. Suponha que $T = T_1 \oplus T_2$, onde T_1 é nilpotente e T_2 é invertível. Primeiro note que para todo $l \geq 1$,* $\ker T^l = \{0\}$, *logo T não é nilpotente. Assim $T_2 \neq 0$. Seja W_2 um subespaço T-invariante tal que $T_2 = T : W_2 \to W_2$ seja invertível. Logo T_2 é sobrejetora. Tome $q(x) \in W_2$ um polinômio mônico de menor grau possível. Como T_2 é sobrejetora, então existe $p(x) \in W_2$ tal que*

$$xp(x) = T_2(p(x)) = q(x).$$

Mas o grau de $xp(x)$ é maior que o grau de $q(x)$, o que é um absurdo. Logo T_2 não é sobrejetora, ou seja, T não pode ser decomposta com uma soma de um operador nilpotente com um invertível.

Proposição 4.10.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente de índice de nilpotência $r \geq 1$ e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se $u \in V$ é tal que $T^{r-1}(u) \neq 0_V$, então*

1. *O conjunto $\{u, T(u), \ldots, T^{r-1}(u)\}$ é L.I..*

2. *Existe um subespaço T-invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde U é o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dado por $U = [u, T(u), \ldots, T^{r-1}(u)]$.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Suponha que T seja nilpotente de índice de nilpotência $r \geq 1$. É imediato que $r \leq n$. Além disso, como $T^{r-1} \neq 0$, existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T^{r-1}(u) \neq 0_V$. Daí, se $r = n$, então pela Proposição 4.10.1, o conjunto $\mathcal{B} = \{u, T(u), \ldots, T^{n-1}(u)\}$ é uma base de V. Com relação à essa base temos

$$\begin{aligned}
T(u) &= 0u + 1T(u) + 0T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)\\
T(T(u)) &= 0u + 0T(u) + 1T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)\\
&\vdots\\
T^n(u) &= 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + \cdots + 0T^{n-1}(u)
\end{aligned}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, se o polinômio característico de T é $p_T(x) = (x - \lambda)^n$, então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, 4.5, o operador $T - \lambda Id$ é nilpotente. Se o seu índice de nilpotência for

n, então existirá uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ terá a forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Definição 4.11. *Um **bloco de Jordan** $r \times r$ em λ é a matrix $J_r(\lambda)$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ que tem λ na diagonal principal e 1 na diagonal abaixo da principal, isto é,*

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r} .$$

Teorema 4.7. *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $r \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos p, m_1, $\ldots$, m_p e vetores u_1, $\ldots$, u_p tais que*

(a) $r = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p$.

(b) O conjunto $\mathcal{B} = \{u_1, T(u_1), \ldots, T^{r-1}(u_1); \ldots; u_p, T(u_p), \ldots, T^{r-1}(u_p)\}$ *é uma base de* V.

(c) $T^{m_i}(u_i) = 0_V$ *para cada* $i = 1, \ldots, p$.

(d) Se S for um operador linear em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial W de dimensão finita, então os inteiros p, m_1, $\ldots$, m_p associados a S e a T são iguais se, e somente se, existir um isomorfismo $\Phi : V \to W$ com $\Phi T \Phi^{-1} = S$.

Teorema 4.8. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

onde $m_i \geq 1$ *e* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *se* $i \neq j$. *Então* $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ *onde para cada* $i = 1, \ldots, r$ *temos:*

(a) $\dim_{\mathbb{K}} W_i = m_i$

(b) O subespaço W_i *é* $T-$ *invariante*

(c) A restrição do operador $\lambda_i Id - T$ *à* W_i *é nilpotente.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita tal que seu polinômio característico seja dado por

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Pelo Teorema 4.8, existe uma decomposição $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) de seu enunciado. Agora, para cada $i = 1, \ldots, r$ considere $T_i = T - \lambda_i Id : W_i \to W_i$. Pelo item (c) do Teorema 4.8, T_i é nilpotente. Seja α_i o índice de nilpotência de T_i. Assim

$$\begin{aligned} T_i^{\alpha_i} &= 0 \\ (T - \lambda_i Id)^{\alpha_i} &= 0 \end{aligned}$$

e então T_i é raiz do polinômio $(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ para $i = 1, \ldots, r$. Seja $f(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1}(x - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$. Pela definição de índice de nilpotência, $f(x)$ é o polinômio de menor grau tal que suas raízes são $T_1, \ldots, T_r$. Logo T é uma raiz de $f(x)$, isto é, $f(x)$ é o polinômio minimal de T. Portanto o índice de nilpotência de T_i é determinado pelo polinômio minimal $m_T(x)$.

Como T_i é nilpotente, pelo item (b) do Teorema 4.7, existe uma base $\mathcal{B}_i$ de W_i e números p_i, $m_{i_1} \geq m_{i_2} \cdots \geq m_{i_{p_i}}$ tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i_1}}(\lambda_i) & & & \\ & J_{m_{i_2}}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_{i_{p_i}}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

onde para cada $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, p_i$

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V. Em relação à essa base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & & & \\ & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

A matriz (4.9) é chamada **forma de Jordan** associada ao operador linear T. Os números p_i, m_{ij}, $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, p_i$ são completamente determinados por T. Mais ainda, pelo item (d) do Teorema 4.7, dois operadores lineares $S \in \mathcal{L}(V, V)$ e $T \in \mathcal{L}(W, W)$ têm a mesma forma de Jordan se, e somente se, existir um isomorfismo $\Phi : V \to W$ tal que $\Phi^{-1} S \Phi = T$.

Exemplos 4.11.1. *1. Seja $T : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$ um operador linear tal que seu polinômio característico é $p_T(x) = (x-2)^4(x-3)^3$. Encontre a(s) possível(is) forma(s) de Jordan associadas a T.*

Solução: *Como $p_T(x) = (x-2)^4(x-3)^3$, então $V = W_1 \oplus W_2$ onde $\dim_{\mathbb{K}} W_1 = 4$ e $\dim_{\mathbb{K}} W_2 = 3$. Assim $T = T_1 \oplus T_2$, onde $T_1 = T : W_1 \to W_1$ e $T_2 = T : W_2 \to W_2$. Agora, $(T_1 - 2I_4)$ é nilpotente de índice de nilpotência $r \leq 4$. Se $r = 1$, então*

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 2$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array}\right] \quad ou \quad [T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 3$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right].$$

Se $r = 4$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O operador $(T_2 - 3I_3)$ é nilpotente de índice de nilpotência $r \leq 3$.

Se $r = 1$, então

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 2$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 1 & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right].$$

Se $r = 3$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo existem 15 possíveis formas de Jordan para T.

2. Seja $T : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ tal que $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)^2$.

Solução: *As possíveis formas são*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tal que em relação à base canônica, T seja representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T.

Solução: *Primeiramente temos que*

$$p_T(x) = x^4.$$

Cálculos simples mostram que $m_T(x) = x^2$. Assim a forma de Jordan de T possui um *bloco de Jordan de tamanho 2 associado a 0. Agora,*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Aut}_T(a) = 2$*, isto é, existem dois blocos de Jordan. Portanto, existe uma base* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que*

$$[T]_B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right].$$

4. *Seja* $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ *o operador linear representado pela matriz*

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T*.*

Solução: *Inicialmente, como* $[T]$ *é uma matriz triangular, seu polinômio característico será*

$$p_T(x) = (x+1)^5(x+4).$$

Um cálculo simples, mostra que

$$m_T(x) = (x+1)^3(x+4)$$

logo a forma de Jordan de T *possui um bloco de Jordan de tamanho 3, associado à* -1 *e um bloco de Jordan de tamanho 1, associado à* 4*. Desse modo a forma de Jordan de*

T será

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar agora, $\mathrm{Aut}_T(-1)$ *para decidir qual será a forma de Jordan de* T*. Temos*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \mid \times -1/3 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde obtemos que $\operatorname{Aut}_T(-1) = \{(x_1, x_2, -2x_2, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. *Logo obtemos* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}_T(-1) = 2$ *e portanto a forma de Jorda de* T *é*

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Observação 4.11.1. *1. Se um operador linear* $T : V \to V$, *onde* $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, *é tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ *e* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *se* $i \neq j$. *Se* $T - \lambda_i Id$ *é nilpotente de índice de nilpotência* α_i, *então existe um bloco de Jordan de tamanho* α_i, $i = 1, \dots, r$.

2. A dimensão de $\operatorname{Aut}_T(\lambda_i)$ *é igual ao número de blocos de Jordan* $J_{\alpha_i}(\lambda_i)$ *de tamanho* α_i *que aparece em* T.

3. A base que gera a forma de Jordan é chamada de ***base de Jordan***.

4.4 Como encontrar a base de Jordan

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que sua forma de Jordan seja

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan, temos

$$T(v_1) = 3v_1 + v_2$$
$$T(v_2) = 3v_2 + v_3$$
$$T(v_3) = 3v_3,$$

isto é,

$$(T - 3Id)(v_1) = v_2$$
$$(T - 3Id)(v_2) = v_3$$
$$(T - 3Id)(v_3) = 0.$$

Assim para achar a base de Jordan precisamos de:

1. Achar todos os autovetores correspondentes a um certo autovalor, isto é, encontrar $\text{Aut}_T(\lambda)$.

2. O número de autovetores L.I. associados ao autovalor λ é igual ao número de blocos de Jordan associados à λ.

3. Resolver a equação $(T - \lambda Id)(u) = v_\lambda$ onde v_λ é o autovetor associado ao autovalor λ para cada autovetor diferente.

Vamos aplicar este método para o caso de matrizes 3×3. Neste caso temos três situações para analisar:

1. Existem 3 autovetores L.I.

   Por exemplo, para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Encontre a forma de Jordan de A.

   Solução: *O polinômio característico é*

$$p_A(x) = (x - 5)(x - 3)^2$$

   e daí

$$\text{Aut}_A(5) = [e_1 = (1, 2, 1)]$$
$$\text{Aut}_A(3) = [e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (-1, 0, 1)].$$

Assim a forma de Jordan de A é

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $J_1(5) = [5]$ *e* $J_1(3) = [3]$.

2. Existem 2 autovetores L.I.

   Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Solução: *Temos*

$$p_A(x) = (x-1)^3 \quad e \quad m_A(x) = (x-1)^2.$$

   Assim temos pelo menos um bloco de Jordan de tamanho 2. Além disso,

$$\mathrm{Aut}_A(1) = [e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,-1)]$$

   e daí temos duas possíveis formas de Jordan para A, a saber:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Vamos procurar uma base que gere a matriz B. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *é a base de Jordan que produz a matriz B, então temos*

$$\begin{aligned} A(v_1) &= v_1 + v_2 \\ A(v_2) &= v_2 \\ A(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

e assim

$$(A - I_3)(v_1) = v_2$$
$$(A - I_3)(v_2) = 0$$
$$(A - I_3)(v_3) = 0.$$

Deste modo podemos escolher v_2 e v_3 como autovetores de A. Digamos que

$$v_2 = (0, 1, -1) \quad e \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

O sistema associado é

$$\begin{bmatrix} y + z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é impossível. Assim vamos tomar

$$v_2 = (1, 0, 0) \quad e \quad v_3 = (0, 1, -1).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

Resolvendo o sistema associado encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1).$$

Tomando $x = y = 0$ o vetor procurado é $v_1 = (0, 0, 1)$. Assim na base $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1); v_2 = (1, 0, 0); v_3 = (0, 1, -1)\}$ a forma de Jordan de A será como dado por B. Escolhermos a ordem $\mathcal{B}_1 = \{v_3, v_1, v_2\}$ obtemos

$$[A]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Existe 1 autovalor L.I.

   Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Solução: *Aqui*
$$p_A(x) = (x+1)^3 = m_A(x).$$

   Deste modo existe um bloco de Jordan de tamanho 3. Além disso
$$\text{Aut}_A(-1) = [e_1 = (1,0,0)].$$

   Assim a única possibilidade para a forma de Jordan é
$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *é a base de Jordan, então*
$$(A + I_3)(v_1) = v_2$$
$$(A + I_3)(v_2) = v_3$$
$$(A + I_3)(v_3) = 0.$$

   Tome $v_3 = (1,0,0)$ *e seja* $v_2 = (x, y, z)$. *Temos*
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   donde
$$v_2 = x(1,0,0) + (0,-1,0).$$

   Podemos então tomar $v_2 = (0,-1,0)$.

Agora, precisamos encontrar $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ *tal que* $(A + I_3)(v_1) = v_2$. *Do sistema*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

encontramos

$$v_1 = x(1,0,0) + (0,0,1/2).$$

Tomando $v_1 = (0,0,1/2)$ *a base de Jordan será*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (0,0,1/2); v_2 = (0,-1,0); v_3 = (1,0,0)\}.$$

CAPÍTULO 5

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Durante este capítulo o corpo base $\mathbb{K}$ de um espaço vetorial V será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 5.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um **produto interno** sobre V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades seguintes:*

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todos u, v e $w \in V$.*

2. $\langle \lambda u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$ *para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todos u, $w \in V$.*

3. $\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle}$ *para todos u, $w \in V$. (Aqui, $\overline{a+bi} = a - bi$.)*

4. $\langle u, u\rangle > 0_{\mathbb{K}}$ *se $u \neq 0_V$.*

Observação 5.1.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Temos*

1. $\langle 0_V, w\rangle = \langle w, 0_V\rangle = 0_{\mathbb{K}}$ *para todo $w \in V$.*

   De fato,
   $$\langle 0_V, w\rangle = \langle 0_V + 0_V, w\rangle = \langle 0_V, w\rangle + \langle 0_V, w\rangle$$
   logo $\langle 0_V, w\rangle = 0_{\mathbb{K}}$. Como $\langle w, 0_V\rangle = \overline{\langle 0_V, w\rangle}$, então $\langle w, 0_V\rangle = 0_{\mathbb{K}}$.

2. $\langle w, w\rangle = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $w = 0_V$.

3. *No caso em* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *a propriedade 3 da definição de produto interno torna-se:* $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle$.

Exemplos 5.1.1. 1. *Em* $\mathbb{R}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle (a,b,c);(x,y,z)\rangle = ax + by + cz$$

é um produto interno.

Solução: *De fato, dados* (a,b,c), (x,y,z), $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos:*

(a) $\langle (a,b,c)+(x,y,z);(u,v,w)\rangle = \langle (a+x,b+y,c+z);(u,v,w)\rangle = (a+x)u + (b+y)v + (c+z)w = \langle (a,b,c);(u,v,w)\rangle + \langle (x,y,z);(u,v,w)\rangle$.

(b) $\langle \lambda(a,b,c),(x,y,z)\rangle = \langle (\lambda a,\lambda b,\lambda c),(x,y,z)\rangle = \lambda ax+\lambda by+\lambda cz = \lambda\langle (a,b,c);(x,y,z)\rangle$

(c) $\langle (a,b,c);(x,y,z)\rangle = ax + by + cz = \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle$.

(d) $\langle (a,b,c);(a,b,c)\rangle = a^2 + b^2 + c^2 > 0$ *para todo* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

2. *Em* $\mathbb{C}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\langle (a,b,c);(x,y,z)\rangle = ax + by + cz$$

não é um produto interno.

Solução: *De fato, por exemplo*

$$\langle (i,0,0);(i,0,0)\rangle = i^2 = -1 < 0.$$

3. *Em* $\mathbb{C}^3$ *a função* $\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\langle (a,b,c);(x,y,z)\rangle = a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z}$$

é um produto interno.

4. *Se* $V = \mathbb{R}^2$ *então* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$\langle (a,b);(x,y)\rangle = 2ax - ay - bx + by$$

   é um produto interno.

5. *De modo geral, em* $V = \mathbb{K}^n$ *a função definida por*

$$\langle (x_1,\ldots,x_n);(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

   é um produto interno em $\mathbb{K}^n$*. Tal produto interno é chamada de* ***produto interno canônico*** *em* $\mathbb{K}^n$*.*

6. *Considere o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *o espaço das funções contínuas de* $[a,b]$ *em* $\mathbb{K}$*. Defina*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

   para $f,\ g \in V$*. Tal função é um produto interno em* V *e é chamado de* ***produto interno canônico*** *em* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*.*

7. *O* ***produto interno canônico*** *em* $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *é dado por*

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

   onde $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{n\times n}$*.*

Definição 5.2. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial munido de um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*. Para cada* $u \in V$*, chamados de* ***norma*** *de* u *ao número real dado por*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

Observação 5.2.1. *Segue diretamente da definição de norma que:*

1. $\|u\| \geq 0$ *para todo* $u \in V$*.*

2. $\|u\| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0_V$*.*

3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo* $u \in V$*.*

Exemplos 5.2.1. *1. Em $\mathbb{R}^3$ considere o produto interno canônico. Dados $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ temos*

$$\|u - v\| = \|(a - x, b - y, c - z)\| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}$$

indicará a distância entre u e v.

2. A norma de um vetor depende do produto interno escolhido. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ se considerarmos o produto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_1) \rangle_1 = 2x_1y_1 + 25x_2y_2.$$

Então $\|(1, 0)\|_1 = \langle (1, 0); (1, 0) \rangle_1 = \sqrt{2}$ e $\|(0, 1)\|_1 = \langle (0, 1); (0, 1) \rangle_1 = 5$.

Agora, se considerarmos o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$, temos $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$.

Definição 5.3. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \ , \rangle$.*

1. *Dizemos que u e w são vetores **ortogonais** se $\langle u, w \rangle = 0$.*

2. *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de V é chamado de **ortogonal** se os seus elementos são ortogonais dois a dois.*

3. *Dizemos que um subconjunto $\mathcal{A}$ de V é **ortonomal** se for um conjunto ortogonal e se $\|u\| = 1$ para todo $u \in \mathcal{A}$.*

Notação 5.3.1. *Usaremos a notação $u \perp w$ para indicar que os vetores u e v são ortogonais.*

Observação 5.3.1. *O vetor nulo 0_V é ortogonal a todos os elementos de V pois $\langle 0_V, u \rangle = 0$ para todo $u \in V$. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.*

Exemplos 5.3.1. *As bases canônicas de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ são conjunto ortonormais, considerando o produto interno canônico nestes espaços vetoriais.*

Proposição 5.3.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e seja $\mathcal{A}$ um sobconjunto ortogonal de V formado por vetores não nulos.*

(a) Se $u \in [v_1, \ldots, v_n]$ *com* $v_i \in \mathcal{A}$ *para* $i = 1, \ldots, n$, *então*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

(b) O conjunto $\mathcal{A}$ *é L.I.*

Prova:

(a) Seja $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é ortogonal temos

$$\langle u, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

para $j = 1, \ldots, n$. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Assim

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

como queríamos.

(b) Suponha que existam escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e vetores não nulos $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{A}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Pelo item (a) temos

$$\alpha_i = \frac{\langle 0_V, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} = 0_K$$

para $i = 1, \ldots, n$. Portanto $\mathcal{A}$ é L.I..

$\diamondsuit$

Corolário 5.0.1. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno e seja* $\mathcal{A}$ *uma base ortonormal de* V*. Então para* $u \in V$ *temos*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i$$

onde $v_i \in \mathcal{A}$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com um produto interno. Considere $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ um conjunto L.I. Vamos obter um novo conjunto L.I. $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ ortogonal e que gera o mesmo espaço vetorial que $\mathcal{A}$. Para tal fazemos:

1. $w_1 = v_1$

2. $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$

   Como $\{v_1, v_2\}$ é L.I., então $w_2 \neq 0_V$. Além disso,

   $$\langle w_2, w_1\rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1; w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\langle w_1, w_1\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \langle v_2, w_1\rangle = 0$$

   e então $w_1 \perp w_2$.

3. Definidos w_1, …, w_k, $1 < k < n$ podemos definir w_{k+1} por

   $$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$
   $$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

É fácil verificar que os vetores w_1, …, w_n definidos anteriormente são dois a dois ortogonais, logo $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal. Mais ainda, pela Proposição 5.3.1, o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. e $w_i \in [v_1, \ldots, v_n] = U$ para $i = 1$, …, n. Agora como $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, segue que $\mathcal{B}$ é uma base para U, como queríamos.

Exemplos 5.3.2. *1. Seja $V = \mathbb{C}^3$ com o produto interno canônico. Determinar uma base ortogonal de $\mathbb{C}^3$ contendo o vetor $(1, 2i, 0)$.*

Solução: *Primeiro obtemos uma base de $\mathbb{C}^3$ contedo $(1, 2i, 0)$. Por exemplo, podemos considerar a base $\{v_1 = (1, 2i, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$. Defina $w_1 = v_1 =$*

$(1, 2i, 0)$, *assim*

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} = (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0),(1,2i,0)\rangle}{\|(1,2i,0)\|^2}(1,2i,0) = (0,1,0) + \frac{2i}{5}(1,2i,0)$$

$$w_2 = \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,2i,0)\rangle}{\|(1,2i,0)\|^2}(1,2i,0)$$

$$- \frac{\langle (0,0,1),(2i/5,1/5,0)\rangle}{\|(2i/5,1/5,0)\|^2}(2i/5,1/5,0)$$

$$w_3 = (0,0,1).$$

Portanto o conjunto

$$\left\{(1,2i,0); \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0\right); (0,0,1)\right\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{C}^3$.

2. *Seja* $\{(1,1,1);(0,2,1);(0,0,1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontrar uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$, *em relação ao produto interno canônico.*

Solução: *Defina* $w_1 = (1,1,1)$. *Temos*

$$w_2 = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = (-1,1,0)$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1)$$

$$w_3 = (-1/3,-1/3,2/3).$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A} = \{(1,1,1);(-1,1,0);(-1/3,-1/3,2/3)\}$ *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 5.1. *Todo espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *com produto interno possui uma base ortonormal.*

Prova: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe uma base ortogonal para V. Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tal base. Assim

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \ldots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right\}$$

é uma base ortonormal, como queríamos. ♢

Deste teorema temos o seguinte: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de V. Se

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$
$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j$$

então

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle w_i, w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}. \tag{5.1}$$

Deste fato segue que

Corolário 5.1.1. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{A} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ duas bases ortonormais de V. Se M é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$, então*

$$M\overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n.$$

Prova: Seja $M = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$. Então para i, $j = 1, \ldots, n$ temos

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} u_k$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k.$$

Agora, de (5.1) temos

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k i \overline{\alpha_{kj}}$$

para cada $1 \leq i,\ j \leq n$. Logo

$$M\overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n$$

como queríamos. ♢

BIBLIOGRAFIA

[1] Flávio U. Coelho e Mary L. Lourenço, *Um curso de Álgebra Linear*, Editora EdUSP, 2^a edição, 2007.

[2] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1976.

[3] J. Boldrini, S. Costa, V. Figueiredo, H. Wetzler, *Álgebra Linear*, Editora Harbra, 3^a edição, 1980.

[4] Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, *Elementary Linear Algebra*, D. C. Heath and Company, 1988.

[5] Salahoddin Shokranian, *Álgebra 1*, Editora Ciência Moderna, 2010.

[6] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, 1992.

ÍNDICE REMISSIVO