

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | Á | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | A | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | T | * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | U | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | n | I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | B | N | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | E | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | A | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | R | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | * |

## Notas de Aula 1/2017<sup>1</sup>

**José Antônio O. Freitas**  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília - UnB

---

<sup>1</sup> Este texto está licenciado sob uma **Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil** [http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt_BR).



---

# SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Sistemas Lineares E Matrizes</b>          | <b>5</b>  |
| 1.1      | Corpos . . . . .                             | 5         |
| 1.2      | Corpos Finitos . . . . .                     | 8         |
| 1.3      | Sistemas Lineares . . . . .                  | 12        |
| 1.4      | Matrizes e Determinantes . . . . .           | 31        |
| <b>2</b> | <b>Espaços Vetoriais</b>                     | <b>37</b> |
| 2.1      | Subespaços . . . . .                         | 47        |
| 2.2      | Espaços de dimensão infinita . . . . .       | 54        |
| <b>3</b> | <b>Transformações Lineares</b>               | <b>57</b> |
| 3.1      | Conceitos Básicos . . . . .                  | 57        |
| 3.2      | Isomorfismos . . . . .                       | 67        |
| 3.3      | Transformações Lineares e Matrizes . . . . . | 70        |
| <b>4</b> | <b>Formas Canônicas</b>                      | <b>83</b> |
| 4.1      | Operadores Diagonalizáveis . . . . .         | 86        |
| 4.2      | Subespaços T-invariantes . . . . .           | 95        |
| 4.3      | Polinômio Minimal . . . . .                  | 99        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.4      | Como encontrar a base de Jordan . . . . .             | 114        |
| <b>5</b> | <b>Espaços com produto interno</b>                    | <b>121</b> |
| 5.1      | Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt . . . . . | 126        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                   | <b>129</b> |
|          | <b>Índice Remissivo</b>                               | <b>131</b> |

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

---

### 1.1 Corpos

---

**Definição 1.1.** Um conjunto não vazio  $\mathbb{K}$  é chamado de **corpo** se em  $\mathbb{K}$  podemos definir duas operações, denotadas por  $+$  (adição) e  $\cdot$  (multiplicação) de modo que

$$a + b \in \mathbb{K}$$

$$a \cdot b \in \mathbb{K}$$

para todos  $a, b \in \mathbb{K}$  e que satisfaçam as seguintes propriedades:

A1) **Comutatividade da soma:**  $a + b = b + a$  para todos  $a, b \in \mathbb{K}$ ;

A2) **Associatividade da soma:**  $a + (b + c) = (a + b) + c$ , para todos  $a, b$  e  $c \in \mathbb{K}$ ;

A3) **Elemento neutro da soma:** Existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $0_{\mathbb{K}}$  ou simplesmente  $0$  e chamado de **elemento neutro da adição**, que satisfaz

$$a + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + a = a$$

para todo  $a \in \mathbb{K}$ . (Elemento neutro da soma)

A4) **Elemento oposto da soma:** Para cada  $a \in \mathbb{K}$ , existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $-a$  e chamado de **oposto** de  $a$  ou **inverso aditivo** de  $a$  tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_{\mathbb{K}}.$$

M1) **Comutatividade da multiplicação:**  $a \cdot b = b \cdot a$  para todos  $a, b \in \mathbb{K}$ ;

M2) **Associatividade da multiplicação:**  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , para todos  $a, b$  e  $c \in \mathbb{K}$ ;

M3) **Elemento neutro da multiplicação:** Existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $1_{\mathbb{K}}$  ou simplesmente  $1$  e chamado de **elemento neutro da multiplicação** ou **unidade**, que satisfaz

$$a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a$$

para todo  $a \in \mathbb{K}$ .

M4) **Elemento inverso da multiplicação:** Para cada  $a \in \mathbb{K}$ , existe um elemento em  $\mathbb{K}$ , denotado por  $a^{-1}$  e chamado de **inverso multiplicativo** de  $a$  tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_{\mathbb{K}}.$$

D) **Distributividade da soma em relação à multiplicação:**  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ , para todos  $a, b$  e  $c \in \mathbb{K}$ .

Para simplificar a notação vamos escrever

$$a \cdot b = ab.$$

Denotamos um corpo  $\mathbb{K}$  pela terna  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ . Quando não houver chance de confusão em relação às operações de soma e multiplicação envolvidas no corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ , vamos simplesmente dizer que  $\mathbb{K}$  é um corpo.

**Exemplo 1.1.1.** 1. São exemplos de corpos os conjuntos:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  com as operações de soma e multiplicações usuais destes conjuntos.

2. O conjunto  $\mathbb{Z}$  com a soma e multiplicações usuais não é um corpo, pois por exemplo, não existe  $b \in \mathbb{Z}$  tal que  $2b = 1$ .

3. Seja

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dados  $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , defina

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aqui o elemento neutro da adição é 0, o elemento neutro da multiplicação é 1, o oposto aditivo de  $a + b\sqrt{2}$  é  $-a - b\sqrt{2}$  e o inverso multiplicativo de  $a + b\sqrt{2}$  é  $\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$  para  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ .

Propriedades importantes: Seja  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  um corpo. Então

1. O elemento neutro da soma é único.

**Solução:** De fato, suponha que  $0_1$  e  $0_2$  sejam elementos neutros da soma em  $\mathbb{K}$ . Temos

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

2. O oposto aditivo de cada elemento de  $\mathbb{K}$  é único.

**Solução:** Sejam  $b$  e  $c$  elementos opostos de  $a$ , então

$$b = b + 0_{\mathbb{K}} = b + (c + a) = (b + a) + c = 0_{\mathbb{K}} + c = c.$$

3. Vale a lei do cancelamento, isto é, se  $a + b = a + c$  então  $b = c$ .

4. Para todo  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ .

**Solução:** De fato,

$$a \cdot 0_{\mathbb{K}} = a \cdot (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) = a \cdot 0_{\mathbb{K}} + a \cdot 0_{\mathbb{K}},$$

logo pela lei do cancelamento,  $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$  como queríamos.

5. O elemento neutro da multiplicação é único.

**Solução:** De fato, suponha que  $1_a$  e  $1_b$  sejam elementos neutros da multiplicação. Então

$$1_a = 1_a \cdot 1_b = 1_b.$$

6. O inverso de um elemento não nulo é único.

**Solução:** Dado  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$ , suponha que  $b, c \in \mathbb{K}$  sejam tais que

$$ab = 1 \quad ac = 1.$$

Então

$$b = 1b = (ac)b = c(ab) = c1 = c.$$

7. Se  $a \in \mathbb{K}$  é tal que  $a \neq 0_{\mathbb{K}}$  e  $ab = ac$ , então  $b = c$ .

8. Se  $ab = 0_{\mathbb{K}}$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{K}$ , então  $a = 0_{\mathbb{K}}$  ou  $b = 0_{\mathbb{K}}$ .

**Solução:** Suponha que  $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ , então existe  $a^{-1}$ . Daí

$$ab = 0_{\mathbb{K}}$$

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0_{\mathbb{K}}$$

$$1b = 0_{\mathbb{K}}$$

$$b = 0_{\mathbb{K}}.$$

**Observação 1.1.1.** Os elementos de um corpo qualquer  $\mathbb{K}$  são chamados de **escalares**.

---

## 1.2 Corpos Finitos

---

Seja  $p \in \mathbb{Z}$  um número primo. Dado  $a \in \mathbb{Z}$ , sempre é possível escrever

$$a = bp + r,$$

onde  $b, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r \leq p-1$ . Assim quando efetuamos a divisão inteira de qualquer número inteiro  $a$  por  $p$  os possíveis restos são:  $0, 1, 2, \dots, p-1$ .



Assim vamos considerar o seguinte conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{bp \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots\} \\ \bar{1} &= \{bp + 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 1, \pm 2p + 1, \pm 3p + 1, \dots\} \\ \bar{2} &= \{bp + 2 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 2, \pm 2p + 2, \pm 3p + 2, \dots\} \\ &\vdots \\ \overline{p-1} &= \{bp + (p-1) \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{(b+1)p - 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{cp - 1 \mid c \in \mathbb{Z}\} = \{-1, \pm p - 1, \pm 2p - 1, \pm 3p - 1, \dots\}.\end{aligned}$$

defina em  $\mathbb{Z}_p$  a soma  $\oplus$  e a multiplicação  $\otimes$  por: para  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$

$$\begin{aligned}\bar{a} \oplus \bar{b} &= \overline{a+b} \\ \bar{a} \otimes \bar{b} &= \overline{ab},\end{aligned}$$

onde sob a barra estamos usando a soma e multiplicação usuais dos inteiros. Para determinar o valor de  $\overline{a+b}$  e de  $\overline{ab}$ , encontramos o resto da divisão inteira de  $a+b$  por  $p$  e de  $ab$  por  $p$ . Logo

$$\begin{aligned}\bar{a} \oplus \bar{b} &\in \mathbb{Z}_p \\ \bar{a} \otimes \bar{b} &\in \mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.2.** Para  $p = 3$  os possíveis restos na divisão inteira são: 0, 1 e 2. Daí

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

e temos

$$\begin{aligned}\bar{0} \oplus \bar{0} &= \bar{0} & \bar{2} \oplus \bar{0} &= \bar{0} \oplus \bar{2} = \overline{0+2} = \bar{2} \\ \bar{1} \oplus \bar{0} &= \bar{0} \oplus \bar{1} = \overline{0+1} = \bar{1} & \bar{2} \oplus \bar{1} &= \bar{1} \oplus \bar{2} = \overline{1+2} = \bar{3} = \bar{0}\end{aligned}$$

$$\bar{2} \oplus \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{1} \otimes \bar{1} = \overline{1 \cdot 1} = \bar{1}$$

$$\bar{0} \otimes \bar{0} = \overline{0 \cdot 0} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \bar{2} = \overline{2 \cdot 1} = \bar{2}$$

$$\bar{0} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \bar{0} = \overline{0 \cdot 1} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{0} = \bar{2} \otimes \bar{0} = \overline{2 \cdot 0} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{2} = \overline{2 \cdot 2} = \bar{4} = \bar{1}$$

Note que a soma  $\oplus$  e o produto  $\otimes$  em  $\mathbb{Z}_3$  são comutativos, a soma possui elemento neutro que é  $\bar{0}$ , todo elemento possui oposto aditivo. A multiplicação possui unidade que é  $\bar{1}$  e todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo. É simples verificar que a soma e o produto em  $\mathbb{Z}_3$  são associativos e o produto é distributivo em relação à soma. Portanto,  $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \otimes)$  é um corpo. Além disso, em tal corpo temos

$$(\bar{1} \oplus \bar{1}) \oplus \bar{1} = (\overline{1+1}) \oplus \bar{1} = \bar{2} \oplus \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}.$$

e  $\bar{1} \neq \bar{0}$ .

**Teorema 1.1.** Para todo  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  número primo,  $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$  é um corpo.

**Prova:** Dados  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_p$  temos:

$$A1) \quad \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \bar{b} \oplus \bar{a};$$

$$A2) \quad (\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} = (\overline{a+b}) \oplus \bar{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$$

A3) Temos que  $\bar{0} \in \mathbb{Z}_p$  e para todo  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ :

$$\bar{0} \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}.$$

Logo  $\bar{0}$  é o elemento neutro da adição em  $\mathbb{Z}_p$ .

A4) Dado  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ , tome  $\overline{p-a} \in \mathbb{Z}_p$ , pois  $0 \leq p-a \leq p-1$ . Assim

$$\bar{a} \oplus \overline{p-a} = \overline{p-a} \oplus \bar{a} = \overline{(p-a)+a} = \bar{p} = \bar{0}.$$

Logo todo elemento de  $\mathbb{Z}_p$  possui oposto aditivo.

$$M1) \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \bar{b} \otimes \bar{a}.$$

$$\text{M2)} \quad (\bar{a} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{c} = (\overline{a \cdot b}) \otimes \bar{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \bar{a} \otimes (\bar{b} \otimes \bar{c}).$$

M3) O elemento  $\bar{1} \in \mathbb{Z}_p$  é tal que

$$\bar{1} \otimes \bar{a} = \bar{a} \otimes \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}$$

para todo  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ .

M4) Primeiramente, como  $p$  é um número primo então existem  $x, y \in \mathbb{Z}$  tais que

$$ax + py = 1$$

para todo  $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ . Logo,

$$\overline{ax + py} = \bar{1}$$

$$\overline{ax} \oplus \overline{py} = \bar{1}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{x} + \bar{p} \otimes \bar{y} = \bar{1}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{x} = \bar{1}$$

uma vez que  $\bar{p} = \bar{0}$ . Como  $\bar{x}$  é obtido pelo resto da divisão inteira de  $x$  por  $p$ , então  $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p$ . Observe que  $x \neq 0$  pois  $p \geq 2$  e  $x \neq p$  pois senão  $(a+p)y = 1$  o que é impossível uma vez que  $p \geq 2$ . Logo  $\bar{x} \neq 0$  e assim todo elemento  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$  possui inverso multiplicativo.

$$\text{D)} \quad \bar{a} \otimes (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \otimes (\overline{b+c}) = \overline{a \cdot (b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} \oplus \overline{ac} = \bar{a} \otimes \bar{b} \oplus \bar{a} \otimes \bar{c}.$$

Portanto,  $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$  é um corpo, como queríamos demonstrar.  $\diamond$

**Observação 1.1.2.** 1. Se  $p$  não for um número primo,  $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$  pode não ser corpo.

Por exemplo, em  $\mathbb{Z}_6$  temos  $\bar{2} \neq \bar{0}$  e  $\bar{3} \neq \bar{0}$ , mas

$$\bar{2} \otimes \bar{3} = \overline{2 \cdot 3} = \bar{6} = \bar{0}.$$

2. Para simplificar a notação vamos denotar  $\oplus$  por  $+$  e  $\otimes$  por  $\cdot$ . Assim vamos dizer simplesmente que  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  é um corpo.

## 1.3 Sistemas Lineares

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Consideremos o problema de determinar  $n$  escalares, ou seja,  $n$  elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em  $\mathbb{K}$  que satisfaçam as condições

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $b_1, \dots, b_m$  e  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  são elementos de  $\mathbb{K}$  previamente conhecidos. Chamamos (1.1) de um **sistema de  $m$  equações lineares a  $n$  incógnitas**. Toda  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de elementos de  $\mathbb{K}$  que satisfazem a cada uma das equações de (1.1) é chamada de uma **solução** do sistema.

Se  $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0_{\mathbb{K}} \in K$ , dizemos que o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \quad (1.2)$$

é um **sistema linear homogêneo**, ou que cada uma de suas equações é homogênea. Observe que tal sistema sempre possui solução, a saber,  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$ .

O método mais importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método do **escalonamento**. Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde o corpo considerado é  $\mathbb{R}$ .

Observe que multiplicando a segunda equação de (1.3) por  $-2$  e somando o resultado à primeira equação obtemos

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

o que resulta em  $x_2 = -x_3$ . Agora se multiplicarmos a primeira equação de (1.3) por 3 e somarmos com a segunda, obtemos

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

e daí  $x_1 = -x_3$ .

Assim para que uma terna  $(x_1, x_2, x_3)$  de números reais seja solução de (1.3) deve satisfazer

$$x_1 = x_2 = -x_3.$$

Por outro lado, qualquer terna da forma  $(a, a, -a)$  é solução de (1.3). Portanto a solução de (1.3) é da forma

$$(a, a, -a)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ .

No caso de um sistema linear da forma (1.1), o processo de eliminação de variáveis será feito mediante o uso de 3 tipos de operações. São elas:

- $e_1)$  Troca da posição de duas equações.
- $e_2)$  Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.
- $e_3)$  Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Estas três operações são chamadas de **operações elementares**.

**Exemplo 1.1.3.** *Considere o seguinte sistema sobre o corpo  $\mathbb{R}$ :*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Efetuada operações elementares podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\
 & \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow (-1/3)L_2 \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ -7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 7L_2 \\
 & \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ -(1/3)x_3 = -(2/3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim encontramos

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

**Definição 1.2.** Dois sistemas de equações lineares são chamados de **equivalentes** se, e somente, se toda solução de qualquer um dos sistemas é solução do outro.

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

com o objetivo de simplificar sua notação vamos escrevê-lo na forma

$$AX = B \quad (1.5)$$

onde

1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

é chamada **matriz dos coeficientes do sistema**;

2.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

3.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1} \quad ; \quad b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{K}.$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (1.1) é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que é chamada de **matriz ampliada do sistema** ou **matriz aumentada do sistema**.

Na forma matricial as operações elementares são descritas como:

$e_1$ ) Trocar a  $i$ -ésima linha de  $A$  pela  $j$ -ésima linhas de  $A$ :  $L_i \leftrightarrow L_j$ ;

$e_2$ ) Multiplicação da  $i$ -ésima linha de  $A$  por um escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  não nulo:  $L_i \rightarrow \alpha L_i$ ;

$e_3$ ) Substituição da  $i$ -ésima linha de  $A$  pela  $i$ -ésima linha mais  $\alpha$  vezes a  $j$ -ésima linha:

$$L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j.$$

**Observação 1.2.1.** Denotaremos a matriz

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

onde  $0_{\mathbb{K}}$  é o elemento neutro da soma no corpo  $\mathbb{K}$ , simplesmente por 0.

Uma razão para nos restringirmos a estes três tipos simples de operações sobre linhas é que, tendo efetuado uma tal operação  $e$  sobre uma matriz  $A$ , podemos desfazer essa operação efetuando uma operação de mesmo tipo sobre  $e(A)$ .

**Teorema 1.2.** *A cada operação elementar sobre linhas  $e$ , corresponde uma operação elementar sobre linhas  $e'$ , do mesmo tipo que  $e$ , tal que  $e'(e(A)) = A$  para qualquer matriz  $A$ . Em outras palavras, a operação inversa de uma operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas do mesmo tipo.*

**Prova:** Vamos verificar que cada uma das operações elementares possui uma operação inversa. Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e1) Suponha que  $e$  seja a operação que troca a linha  $i$  pela linha  $j$  de  $A$ . Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Então, seja  $e'$  a operação que troca a linha  $i$  pela linha  $j$  de  $e(A)$ . Assim

$$e'(e(A)) = A$$

como queríamos.



e2) Suponha que  $e$  seja a operação que multiplica a  $i$ -ésima de  $A$  por  $\alpha \in \mathbb{K}$ , onde  $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ .

Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja  $e'$  a operação que multiplica a linha  $i$  de  $e(A)$  por  $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ . Então

$$e'(e(A)) = A.$$

e3) Suponha que  $e$  seja a operação que substitui a linha  $i$  de  $A$  pela linha  $i$  mais  $\alpha$  vezes a linha  $j$ . Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja  $e'$  a operação que substitui a linha  $i$  de  $e(A)$  pela linha  $i$  mais  $(-\alpha)$  vezes a linha  $j$ . Então

$$e'(e(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} + (-\alpha)a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} + (-\alpha)a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} + (-\alpha)a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e assim

$$e'(e(A)) = A.$$

Portanto cada operação elementar sobre linhas possui uma operação inversa.  $\diamond$

**Definição 1.3.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $m \times n$ , dizemos que  $B$  é **linha-equivalente** a  $A$ , se  $B$  for obtida de  $A$  através de uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de  $A$ .

**Notação 1.3.1.**  $A \rightarrow B$  ou  $A \sim B$ .

**Exemplo 1.3.1.** A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é linha equivalente à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\leftarrow +]{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mid \times -1 \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.** Se  $X_1$  e  $X_2$  são duas soluções de

$$AX = 0,$$

então  $\alpha X_1 + \beta X_2$  também é solução de  $AX = 0$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

**Teorema 1.4.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $m \times n$  que são linha-equivalentes, então os sistemas homogêneos de equações lineares  $AX = 0$  e  $BX = 0$  têm exatamente as mesmas soluções.

**Prova:** Suponha que podemos obter a matriz  $B$  à partir da matriz  $A$  por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_r = B.$$

Nesta situação, para provar que  $AX = 0$  e  $BX = 0$  tem as mesmas soluções basta provar que  $A_i X = 0$  e  $A_{i+1} X = 0$  tem as mesmas soluções, isto é, que uma operação elementar sobre linhas não altera o conjunto das soluções.

Assim podemos supor que  $B$  é obtida de  $A$  por meio de uma única operação elementar. Qualquer que seja a operação elementar,  $e_1$  ou  $e_2$  ou  $e_3$ , cada equação do sistema  $BX = 0$  será uma combinação das equações do sistema  $AX = 0$ . Como a inversa de uma operação elementar sobre linhas é ainda uma operação elementar sobre linhas, cada equação de  $AX = 0$  também será uma combinação das equações em  $BX = 0$ . Logo toda solução de  $AX = 0$  também é solução de  $BX = 0$  e toda solução de  $BX = 0$  também é solução de  $AX = 0$ , como queríamos.  $\diamond$

**Exemplo 1.3.2.** Considere o sistema homogêneo  $AX = 0$ , onde:

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ . Para encontrar a solução deste sistema só precisamos encontrar uma matriz  $B$  que seja linha equivalente à  $A$  e que seja mais fácil de determinar a solução do sistema resultante. Assim, vamos executar as operações elementares em  $A$  de modo a simplificá-la:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \times -1/2 \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -(7/2) \\ 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + (1/2)x_3 - (7/2)x_4 = 0 \\ (15)/2x_3 - (55/2)x_4 = 0 \end{cases}.$$

Isolando  $x_3$  na última equação temos a solução dada por

$$S = \left\{ \left( -\frac{17}{3}x_4, \frac{5}{3}x_4, \frac{11}{3}x_4, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.  $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Temos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^i \\ \leftarrow_+ \\ \leftarrow_+ \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+2i \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \mid \times \frac{3-2i}{13} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow^{-(2+i)}_+ \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é  $x_1 = x_2 = 0$ .

**Definição 1.4.** Uma matriz  $R$   $m \times n$  é chamada de **linha-reduzida** se:

(i) o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula de  $R$  é  $1_{\mathbb{K}}$ .

(ii) cada coluna de  $R$  que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos.

**Exemplo 1.4.1.** 1. Um exemplo de uma matriz linha-reduzida é a matriz identidade  $n \times n$ . Tal matriz pode ser definida por

$$I = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

O símbolo  $\delta_{ij}$  é chamada **símbolo de Kronecher** e será utilizado com certa frequência.

2. As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não são linha-reduzidas.

**Teorema 1.5.** Toda matriz  $m \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida.

**Prova:** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Se todo elemento na primeira linha de  $A$  é  $0_{\mathbb{K}}$ , então a condição (a) de (1.4) está satisfeita no que diz respeito a linha 1. Se a linha 1 tem um elemento não nulo, seja  $r$  o menor inteiro positivo  $j$  tal que  $a_{ir} \neq 0$ . Multiplique a linha 1 por  $a_{ir}^{-1}$  e condição (a) de (1.4) está satisfeita em relação a linha 1. Agora, para cada  $i \geq 2$ , somemos  $-a_{ir}$  vezes a linha 1 à linha  $i$ . Assim o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorre na coluna  $r$ , este elemento é  $1_{\mathbb{K}}$ , e todos os outros elementos da coluna  $r$  são nulos.

Considere agora a matriz que resultou das operações acima. Se todo elemento na linha 2 é nulo, nada há a fazer. Se algum elemento na linha 2 é não nulo, multiplicamos a linha 2 por um escalar de modo que o primeiro elemento não nulo da linha 2 seja  $1_{\mathbb{K}}$ . Caso o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorra na coluna  $r$ , o primeiro elemento não nulo da linha 2 não pode ocorrer na coluna  $r$ . Digamos então que ele ocorra na coluna  $r'$ . Somando múltiplos

adequados da linha 2 às diversas linhas, podemos fazer com que todos os elementos da coluna  $r'$  seja nulos, com exceção do elemento  $1_{\mathbb{K}}$  da linha 2. O importante a ser observado é: ao efetuarmos estas últimas operações, não alteramos os elementos da linha 1 na colunas 1, 2,  $\dots$ ,  $r$ ; além disso, não alteramos nenhum elemento da coluna  $r$ . É claro que, se a linha 1 fosse identicamente nula, as operações com a linha 2 não afetariam a linha 1.

Operando com uma linha de cada vez da maneira acima, é evidente que, com uma quantidade finita de passos, chegamos a uma matriz linha-reduzida.  $\diamond$

**Definição 1.5.** Uma matriz  $R$   $m \times n$  é chamada uma **matriz linha-reduzida à forma em escada** se:

1.  $R$  é linha-reduzida;
2. toda linha de  $R$  cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem uma elemento não-nulo;
3. se as linhas 1, 2,  $\dots$ ,  $r$  são as linhas não-nulas de  $R$  e se o primeiro elemento não-nulo da linha  $i$  ocorre na coluna  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ .

**Exemplo 1.5.1.** 1. A matriz identidade e a matriz nula são linha-reduzidas à forma escada;

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Não é linha-reduzida à forma escada.}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Não é linha-reduzida à forma escada.}$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ É linha-reduzida à forma escada.}$$

**Teorema 1.6.** Toda matriz  $A$   $m \times n$  é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada.

**Prova:** Sabemos que  $A$  é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida. Portanto, basta notar que, efetuando uma quantidade finita de permutações das linhas de uma matriz linha-reduzida, podemos transformá-la numa matriz linha-reduzida à forma em escada.  $\diamond$

**Definição 1.6.** Dada uma matriz  $A$   $m \times n$ , seja  $B$   $m \times n$  a matriz linha-reduzida à forma em escada linha-equivalente a  $A$ . O **posto** de  $A$ , denotado por  $p$ , é o número de linhas não-nulas de  $B$ . A **nulidade** de  $A$  é o número  $n - p$ .

**Exemplo 1.6.1.** Qual o posto e a nulidade da matriz  $A$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Precisamos primeiro reduzir  $A$  a sua forma escada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right]^{-1} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (1/2) \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left[ \begin{array}{c} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -4 \end{array} \right]_{-2}^{-4} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \mid \times 1/8 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left[ \begin{array}{c} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -2 \end{array} \right]_{-3}^{-2} \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo o posto de  $A$  é  $p = 3$  e a nulidade é  $n - p = 4 - 3 = 1$ .

Considere o sistema

$$AX = B \tag{1.6}$$

onde  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $B$  é uma matriz  $m \times 1$ , ambas com entradas no corpo  $\mathbb{K}$  e  $X$  é uma matriz  $n \times 1$ . Observe que, enquanto um sistema homogêneo  $AX = 0$  sempre admite a solução

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}},$$

um sistema não homogêneo pode ter:

1. Uma única solução  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Neste caso dizemos que o sistema é **possível e determinado**.
2. Mais de uma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**. Caso o corpo  $\mathbb{K}$  tenha infinitos elementos, o sistema terá infinitas soluções.
3. Nenhuma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **impossível**.

Com o objetivo de resolver o sistema (1.6) vamos começar formando a matriz ampliada

$$P = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}.$$

Sabemos que  $P$  é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada  $R$ . A última coluna de  $R$  contém elementos  $z_1, z_2, \dots, z_m$  que são resultados das operações elementares aplicadas à matriz  $P$ . Seja

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

Então  $R$  pode ser escrita como  $R = [R' | Z]$ . Como no caso homogêneo, é possível mostrar que os sistemas

$$AX = B \text{ e } R'X = Z$$

possuem exatamente as mesmas soluções.

As possibilidades para as soluções de tal sistema são descritas no seguinte teorema:



**Teorema 1.7.** *Considere o sistema*

$$AX = B$$

onde  $A$  é uma matriz  $m \times n$  e  $B$  é uma matriz  $m \times 1$ , ambas com entradas no corpo  $\mathbb{K}$  e  $X$  é uma matriz  $n \times 1$ . Então:

1. O sistema tem solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
2. Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto  $p$  e  $p = n$ , então a solução é única.
3. Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto  $p$  e  $p < n$ , então podemos escolher  $n - p$  variáveis, e as outras  $p$  variáveis serão dadas em função destas  $n - p$  variáveis escolhidas.

O número  $n - p$  é chamado de **grau de liberdade** e as  $n - p$  variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

**Prova:** 1ª Parte: *Se existe solução para o sistema, então a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto:* Para mostrar isso, vamos provar que se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes tiverem postos diferentes, então o sistema não terá solução. Observe primeiro que o posto da matriz ampliada não pode ser menor que o posto da matriz dos coeficientes uma vez que a matriz ampliada é formada a partir da matriz dos coeficientes. Assim o único caso possível é que o posto da matriz ampliada ser maior que o posto da matriz dos coeficientes. Então esta matriz, quando reduzida à forma em escada deve conter uma linha da forma

$$\left( 0_{\mathbb{K}} \quad 0_{\mathbb{K}} \quad \cdots \quad 0_{\mathbb{K}} \quad | \quad z_r \right)$$

onde  $z_r \neq 0_{\mathbb{K}}$ . Logo o sistema associado a essa matriz tem uma equação do tipo

$$0_{\mathbb{K}}x_1 + 0_{\mathbb{K}}x_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}x_n = z_r$$

o que é impossível. Logo não existe solução.

2ª Parte: *Se o posto é igual, então existe solução:* Nesta situação podem ocorrer dois casos:

1. Se  $p = n$ , então a matriz linha-reduzida à forma em escada tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & z_n \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema será

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_n = z_n.$$

2. Se  $p \neq n$ , então devemos ter  $p < n$ . Caso  $p > n$ , como a matriz está na forma escada o elemento  $1_{\mathbb{K}}$  deve ocorrer em duas linhas diferentes, mas na mesma coluna. Mas neste caso, podemos anular uma destas linhas repetidas. Logo,  $p < n$ . Neste caso a matriz na forma escada pode ter a forma:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+1} & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+1} & a_{2p+2} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+1} & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - a_{1p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2 = z_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - a_{2p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+1}x_{p+1} - a_{pp+2}x_{p+2} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  as variáveis livres.

(b) Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+2} & a_{1p+3} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+2} & a_{2p+3} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+2} & a_{pp+3} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_2 = z_1 - a_{1p+2}x_{p+2} - a_{1p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_3 = z_2 - a_{2p+2}x_{p+2} - a_{2p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+2}x_{p+2} - a_{pp+3}x_{p+3} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo  $x_1, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  as variáveis livres.

Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que para qualquer posto  $p < n$  teremos um sistema com mais de uma solução e  $n - p$  variáveis livres.

Portanto a condição (i) do teorema está provada.

Observe que os itens (ii) e (iii) foram automaticamente demonstrados nos itens (a) e (b) anteriores.

Logo o teorema está provado.  $\diamond$

**Exemplo 1.6.2.** *Encontre a solução dos seguintes sistemas lineares:*

$$1. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

**Solução:** A matriz dos coeficientes deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir  $A$  à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de  $A$  é  $p = 1$  e a nulidade é 2, ou seja, temos duas variáveis livres, a saber  $y$  e  $z$ . Logo a solução é dada por

$$x = -3y - z; \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Que pode ser escrita como

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-3y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

$$2. \quad \begin{cases} \bar{1}x + \bar{4}y + \bar{2}z = \bar{6} \\ \bar{1}x + \bar{5}y + \bar{2}z = \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{4} \\ \bar{4}x + \bar{5}y + \bar{1}z = \bar{5} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}_7.$$

**Solução:** A matriz ampliada do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir  $A$  a forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{6}} \xrightarrow{\bar{5}} \xrightarrow{\bar{3}} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\bar{3}} \xrightarrow{\bar{5}} \xrightarrow{\bar{4}} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de  $A$  é  $p = 2$  e a nulidade é 1. Logo temos uma única variável livre que é  $z$ . A solução então é dada por

$$x = \bar{1} + \bar{5}z, \quad y = \bar{3}, \quad z \in \mathbb{Z}_7.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_7\} = \{(\bar{1} + \bar{5}z, \bar{3}, z) \mid z \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Tal conjunto contém exatamente 7 soluções distintas.

$$3. \quad \begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{7} \\ \bar{3}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{9} \\ \bar{1}x_1 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4 = \bar{6} \\ \bar{5}x_1 + \bar{1}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{9} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}_{11}.$$

**Solução:** A matriz ampliada do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir  $A$  à forma em escada:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix} &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \bar{8} \quad \leftarrow \bar{9} \quad \leftarrow \bar{6} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \bar{10} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ | \times \bar{3} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \bar{10} \quad \leftarrow \bar{7} \quad \leftarrow \bar{8} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{10} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} & \bar{9} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ | \times \bar{9} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{10} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \bar{10} \quad \leftarrow \bar{9} \quad \leftarrow \bar{1} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{8} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim o posto de  $A$  é  $p = 4$  e a nulidade é  $0$ . Logo o sistema tem uma única solução dada por

$$x_1 = \bar{6}, x_2 = \bar{4}, x_3 = \bar{8}, x_4 = \bar{4}.$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Q}.$$

**Solução:** A matriz dos coeficientes deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir  $A$  à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow_{+} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow_{+} \\ \leftarrow_{+} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema não tem solução. Note que o posto da matriz ampliada é  $p = 3$  e a posto da matriz dos coeficientes é 2.

## 1.4 Matrizes e Determinantes

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Denotamos por  $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$  o conjunto de todas as matrizes  $p \times q$  com entradas em  $\mathbb{K}$ . A soma e o produtos de matrizes são definidos de modo usual.

Quando  $p = q = n$ , dizemos que uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , que denotaremos simplesmente por  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , é **quadrada**. Tal conjunto tem elemento neutro para a multiplicação de matrizes que é a **matriz identidade**  $I_n$  dada por

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

**Definição 1.7.** Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Uma matriz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $BA = I_n$  é chamada uma **inversa à esquerda** de  $A$ ; uma matriz  $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AC = I_n$  é chamada uma **inversa à direita** de  $A$ . Se  $AB = BA = I_n$ , então  $A$  é chamada **invertível**.

**Proposição 1.7.1.** Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  possui uma inversa à esquerda  $B$  e uma inversa à direita  $C$ , então  $B = C$ .

**Proposição 1.7.2.** Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Se  $A$  é invertível, então  $A^{-1}$  também o é e  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

2. Se  $A$  e  $B$  são invertíveis, então  $AB$  também o é e  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Dada uma matriz  $A$  como encontrar sua inversa? Por exemplo, para  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como achar

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

tal que  $AB = BA = I_2$ ? Queremos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então os seguintes sistemas para resolver:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases}.$$

Assim podemos considerar a matriz ampliada contendo colunas correspondentes a cada um dos sistemas e reduzi-la à forma em escada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (-1/2) \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

é tal que  $AB = BA = I_2$ .

Portanto, determinar se uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  possui inversa ou não é equivalente à resolver um sistema linear. Assim, temos o seguinte resultado:



**Teorema 1.8.** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  *$A$  é invertível;*
2. *O sistema homogêneo  $AX = 0$  possui somente a solução trivial;*
3. *O sistema  $AX = Y$ , onde  $Y$  é uma matriz  $n \times 1$ , possui uma única solução para qualquer  $Y$ .*

**Corolário 1.8.1.** *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é invertível e se uma sequência de operações elementares sobre linhas reduz  $A$  à matriz unidade, então essa mesma sequência de operações elementares sobre linhas quando aplicadas à matriz  $I_n$ , resulta em  $A^{-1}$ .*

**Exemplo 1.7.1.** *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Determine a inversa de  $A$ , se existir.*

**Solução:** *Temos*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ | -1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ | 1/3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo  $A$  é invertível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Faremos agora a definição de **determinante** de modo indutivo na ordem de uma dada matriz quadrada  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 1$ .

Se  $n = 1$ , então a matriz  $A \in \mathbb{M}_1(\mathbb{K})$  é da forma

$$A = (a_{11})$$

e neste caso definimos

$$\det A = a_{11} \in \mathbb{K}.$$

Suponha que  $n > 1$  e que  $\det B$  esteja definido para todas as matrizes  $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$  com  $p < n$  e seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Para cada  $(i, j)$ , defina a matriz  $A_{ij}$  formada a partir de  $A$  retirando-se a sua  $i$ -ésima linha e a sua  $j$ -ésima coluna. É claro que  $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$  e portanto  $\det A_{ij}$  está definido. Defina então

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \in \mathbb{K}.$$

**Exemplo 1.7.2.** 1. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

*Fixada a linha 1, temos*

$$\det A = \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = ad - bc.$$

*Obteríamos o mesmo resultado se considerássemos a linha 2.*

2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 2, temos

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} \\ &= (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22} + (-1)^{2+3} a_{23} \det A_{23} \\ &= -a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Daí

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Propriedades do determinante: Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Temos

1.  $\det(AB) = \det A \det B$ ,
2.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ ,
3.  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

**Observação 1.7.1.** É possível mostrar que o determinante também pode ser definido a partir das colunas de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Teorema 1.9.** Uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é invertível se, e somente se,  $\det A \neq 0_{\mathbb{K}}$ .



---

## CAPÍTULO 2

---

# ESPAÇOS VETORIAIS

Em todo este capítulo  $\mathbb{K}$  denotará um corpo.

**Definição 2.1.** *Um conjunto não vazio  $V$  é um **espaço vetorial** sobre um corpo  $\mathbb{K}$  se em seus elementos, chamados **vetores**, estiverem definidas duas operações satisfazendo:*

*A) A cada par  $u, w \in V$  corresponde um vetor  $u + w \in V$ , chamado **soma** de  $u$  e  $w$ , de modo que:*

*A1)  $u + w = w + u$ , para todos  $u, w \in V$ ;*

*A2)  $(u + w) + v = u + (w + v)$ , para todos  $u, w$  e  $v \in V$ ;*

*A3) Existe em  $V$  um vetor, denominado **vetor nulo** e denotado por  $0_V$ , tal que*

$$0_V + u = u$$

*para todo  $u \in V$ .*

*A4) Para cada vetor  $u \in V$ , existe um vetor em  $V$ , denotado por  $-u$  tal que*

$$u + (-u) = 0_V.$$

M) A cada par  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $u \in V$ , corresponde um vetor  $\alpha \cdot u \in V$ , denominado **produto por escalar** de  $\alpha$  por  $u$  de modo que:

M1)  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$  para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e todo  $u \in V$ ;

M2)  $1_{\mathbb{K}}v = v$  para todo  $v \in V$ , onde  $1_{\mathbb{K}}$  é o elemento neutro da multiplicação em  $\mathbb{K}$ .

D1)  $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todos  $u, w \in V$ ;

D2)  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ , para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e todo  $u \in V$ .

**Observação 2.1.1.** Vamos usar a expressão  **$\mathbb{K}$ -espaço vetorial** para nos referir a um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

**Exemplo 2.1.1.** 1. Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

2. Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Considere o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

e define

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$  para todos  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ ;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Com estas operações  $\mathbb{K}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Assim temos:
  - $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ;
  - $\mathbb{C}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ ;
  - $(\mathbb{Z}_p)^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Z}_p$ .

3.  $\mathbb{C}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  se definirmos:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$  para todos  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ ;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e todo  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

4. O conjunto  $\mathbb{Q}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ , mas não é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .  
(Por quê?)

5. Considere o conjunto dos polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n; n \geq 0\}.$$

Dados  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ , suponha que  $n < m$  e defina:

- $(p+q)(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha p)(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0.$

Assim  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

6. O conjunto das matrizes  $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com a soma usual de matrizes e a multiplicação por escalar usual.

**Definição 2.2.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

1. Um vetor  $w \in V$  é uma **combinação linear** dos vetores  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  se existirem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

2. Seja  $\mathcal{B}$  um subconjunto de  $V$ . Dizemos que  $\mathcal{B}$  é um **conjunto gerador** (ou que  $\mathcal{B}$  gera  $V$ ) se todo elemento de  $V$  for uma combinação linear de uma quantidade finita de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Exemplo 2.2.1.** 1. O vetor  $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  é uma combinação linear dos vetores  $u_1 = (1, 2, 3)$ ,  $u_2 = (0, 1, 2)$  e  $u_3 = (-1, 0, 1)$ . De fato, precisamos encontrar  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tais que:

$$(1, 1, 1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

encontramos que suas soluções são dadas por

$$\alpha = 1 + \gamma$$

$$\beta = -1 - 2\gamma$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Logo o vetor  $(1, 1, 1)$  é de fato uma combinação linear dos vetores  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ . Podemos tomar, por exemplo,  $\gamma = 2$  e escrever

$$(1, 1, 1) = 3(1, 2, 3) - 7(0, 1, 2) + 2(-1, 0, 1).$$

2. O vetor  $(1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$  não é uma combinação linear dos vetores  $u_1 = (1, 2, 3)$ ,  $u_2 = (0, 1, 2)$  e  $u_3 = (-1, 0, 1)$ . De fato, suponha que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  são tais que:

$$(1, -2, 2) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}.$$

A matriz linha-reduzida à forma em escada deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e portanto o sistema é impossível. Logo o vetor  $(1, -2, 2)$  não é uma combinação linear dos vetores  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .



3. Considere o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ . Dado um vetor  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  podemos escrever

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Assim qualquer vetor de  $\mathbb{R}^3$  é uma combinação linear dos vetores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Logo o conjunto  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é um conjunto gerador para  $\mathbb{R}^3$ .

4.  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (-1, 0, 0), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1)\}$  também é um conjunto gerador para  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. De fato, dado  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , queremos encontrar  $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \mathbb{R}$  tais que

$$(a, b, c) = x_1(1, 0, 1) + x_2(1, 1, 0) + x_3(1, 1, 1) + x_4(-1, 0, 0) + x_5(-1, -1, 0) + x_6(-1, -1, -1).$$

O que fornece o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = a \\ x_2 + x_3 - x_5 - x_6 = b \\ x_1 + x_3 - x_6 = c \end{cases}$$

cuja matriz linha-reduzida à forma em escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & b + c - a \end{bmatrix},$$

assim o sistema é possível e indeterminado, com posto 3 e nulidade 3. Sua solução é descrita pela equações

$$x_1 = a - b + x_4$$

$$x_2 = a - c + x_4 + x_5$$

$$x_3 = b + c - a - x_4 + x_6$$

onde  $x_4, x_5$  e  $x_6 \in \mathbb{R}$ . Portanto  $\mathcal{B}_1$  é um conjunto gerador para  $\mathbb{R}^3$ .

5. Seja  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  o conjunto dos polinômios em  $\mathbb{R}$ . O subconjunto  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  é um conjunto gerador de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  visto como um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

6. O conjunto  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  gera  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. No entanto, este conjunto não gera  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial pois, por exemplo,  $(i, 0)$  não é combinação linear dos vetores em  $\mathcal{B}$ . De fato, se  $\alpha$  e  $\beta$  são tais que

$$(i, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

então  $\alpha = i$  o que é impossível em  $\mathbb{R}$ .

**Observação 2.2.1.** 1. Por convenção diremos que o conjunto vazio gera o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\{0\}$ .

2. Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador. (Qual?)

**Definição 2.3.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\mathcal{B}$  um subconjunto de  $V$ .

1. Dizemos que  $\mathcal{B}$  é **linearmente independente** ou simplesmente **L.I.**, se o único meio de escrevermos

$$0_V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

onde  $u_i \in \mathcal{B}$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  é tomando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ .

2. Dizemos que o conjunto  $\mathcal{B}$  é **linearamente dependente** ou simplesmente **L.D.**, se existem vetores distintos  $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{B}$  e escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

**Exemplo 2.3.1.** 1. Seja  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, 1)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ . Considerando  $\mathbb{C}^2$  como um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, então  $\mathcal{B}$  é L.D. pois

$$(0, 0) = 0(1, 0) + 0(i, 0) + 1(0, 1) + i(0, i).$$

Agora, considerando  $\mathbb{C}^2$  com um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, o conjunto  $\mathcal{B}$  é L.I.. De fato, se  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  são tais que

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(i, 0) + \gamma(0, 1) + \delta(0, i)$$

então  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ .

2. Considerando  $\mathbb{R}^2$  como um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, o conjunto  $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$  é L.D. pois

$$(0, 0) = \frac{1}{2}(1, -1) - (1, 0) + \frac{1}{2}(1, 1).$$

**Observação 2.3.1.** 1. Por convenção, o conjunto vazio é L.I.

2. Todo conjunto contendo o vetor nulo é L.D.  
 3. Todo espaço vetorial não-nulo possui um conjunto L.I. não vazio. (Qual?)  
 4. Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I.

**Definição 2.4.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $V$  é uma **base** de  $V$  se:

- i)  $\mathcal{B}$  for um conjunto gerador de  $V$ ;  
 ii)  $\mathcal{B}$  for L.I.

**Exemplo 2.4.1.** 1.  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

2.  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.  
 3.  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.  
 4. Considere  $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$  como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Sabemos que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

gera  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Suponha que existam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

para todo  $x \in \mathbb{C}$ . Como um polinômio de grau  $n$  em  $\mathbb{C}$  não pode ter mais do que  $n$  raízes, então  $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$  e portanto  $\mathcal{B}$  é L.I. Logo  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ .

**Observação 2.4.1.** Pelas Observações 2.2.1 item 1 e 2.3.1 item 1, o conjunto vazio é uma base do  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\{0\}$ .

**Definição 2.5.** Dizemos que um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é **finitamente gerado** se ele possui um conjunto gerador finito.

**Proposição 2.5.1.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Suponha que  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  seja um conjunto gerador de  $V$ . Então todo conjunto L.I de vetores de  $V$  tem no máximo  $m$  elementos.

**Prova:** Vamos provar que todo conjunto de elementos de  $V$  que contenha mais do que  $m$  vetores é L.D. Para tanto, seja  $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  com  $n > m$ . Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  é um conjunto gerador de  $V$ , então existem escalares  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$  tais que para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  temos

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i.$$

Assim queremos mostrar que existem escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$

Suponha que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{12} + \dots + \lambda_n \alpha_{1n} = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{m1} + \lambda_2 \alpha_{m2} + \dots + \lambda_n \alpha_{mn} = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são as incógnitas e  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ . Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, então a matriz linha-reduzida à forma em escada do sistema (2.1) tem posto menor que  $n$ , ou seja, o sistema (2.1) tem solução não trivial. Assim existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  não todos nulos tais que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

ou seja, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Portanto o conjunto  $\mathcal{A}$  é L.D., como queríamos.  $\diamond$

**Corolário 2.0.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de  $V$  têm o mesmo número de elementos.*

**Prova:** Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  duas bases de  $V$ . Como  $V$  é finitamente gerado, segue da Proposição 2.5.1 que  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  são finitos pois são L.I e possuem  $m$  e  $m'$  elementos, respectivamente.

Considerando  $\mathcal{B}$  como conjunto gerador de  $V$  e  $\mathcal{B}'$  L.I., segue da Proposição 2.5.1 que  $m' \leq m$ . Por outro lado, considerando  $\mathcal{B}'$  como conjunto gerador de  $V$  e  $\mathcal{B}$  L.I., segue da Proposição 2.5.1 que  $m \leq m'$ .

Logo  $m = m'$ , ou seja, duas bases têm sempre o mesmo número de elementos.  $\diamond$

**Definição 2.6.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Se  $V$  admite uma base finita, então chamamos de **dimensão** de  $V$ , e denotamos por  $\dim_{\mathbb{K}} V$ , o número de elementos em tal base.*

**Exemplo 2.6.1.** 1.  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ ;

2.  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ ;

3.  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ ;

4.  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ .

**Corolário 2.0.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensão  $n \geq 1$ . Seja  $\mathcal{B}$  um subconjunto de  $V$  com  $n$  elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ ;
2.  $\mathcal{B}$  é L.I.;
3.  $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador de  $V$ .

**Proposição 2.6.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e considere  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  um conjunto L.I. em  $V$ . Se existir  $u \in V$  que não seja combinação linear dos elementos de  $\mathcal{B}$ , então  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$  é L.I.*

**Prova:** Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  escalares tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u = 0_u.$$

Se  $\alpha_{n+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$  então podemos escrever

$$u = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) u_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) u_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) u_n$$

e então  $u$  é combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$  o que contradiz nossa hipótese. Assim  $\alpha_{n+1} = 0_{\mathbb{K}}$  e daí obtemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_u.$$

Mas  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é L.I, logo  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ . Portanto,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$  é L.I.  $\diamond$

**Teorema 2.1.** *Todo espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado possui uma base.*

**Prova:** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado. Então  $V$  possui um conjunto gerador finito, digamos com  $m$  elementos,  $m > 1$ . Seja  $u_1 \in V$ ,  $u_1 \neq 0_V$ . Então  $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}$  é L.I. Se  $\mathcal{B}_1$  gera  $V$  então  $\mathcal{B}_1$  é uma base de  $V$ . Caso contrário, existe  $u_2 \in V$  tal que  $u_2$  não é um múltiplo escalar de  $u_1$ . Pela Proposição 2.6.1,  $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2\}$  é L.I. Novamente, se  $\mathcal{B}_2$  gera  $V$ , então  $\mathcal{B}_2$  é uma base de  $V$ . Caso contrário, existe  $u_3 \in V$  tal que  $u_3$  não é uma combinação linear de  $u_1$  e  $u_2$ . Daí,  $\mathcal{B}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$  é L.I. Continuando com este processo chegamos a uma base de  $V$  ou obtemos conjuntos L.I. com um número arbitrário de elementos. A segunda opção não é possível por causa da Proposição 2.5.1. Portanto, com este processo obtemos uma base de  $V$ .  $\diamond$

**Teorema 2.2.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial finitamente gerado e seja  $\mathcal{B}$  um conjunto L.I. em  $V$ . Então existe uma base de  $V$  contendo  $\mathcal{B}$ .*

**Proposição 2.6.2.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$  e seja  $\mathcal{B} \subseteq V$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ ;
- (ii) Cada elemento de  $V$  se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Prova:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponha que  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  seja um base de  $V$ . Em particular  $\mathcal{B}$  gera  $V$ . Seja  $u \in V$  e suponha que existam escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$  tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i.$$

Daí

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0_V$$

e como  $\mathcal{B}$  é L.I segue que  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$  como queríamos.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Agora suponha que cada elemento de  $V$  se escreva de maneira única como combinação linear de elementos de  $\mathcal{B}$ . Assim,  $\mathcal{B}$  gera  $V$ . Resta mostrar que  $\mathcal{B}$  é L.I. Sejam então  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Como  $0_V = 0_{\mathbb{K}} u_1 + \dots + 0_{\mathbb{K}} u_n$ , segue então da unicidade que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$  e daí  $\mathcal{B}$  é L.I. Portanto,  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ .

◇

## 2.1 Subespaços

**Definição 2.7.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um subconjunto não vazio  $W$  de  $V$  é um **subespaço vetorial** de  $V$  se a restrição das operações de  $V$  a  $W$  torna  $W$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.*

**Exemplo 2.7.1.** a) *O subconjunto  $W = \{0_V\}$  é um subespaço vetorial de qualquer espaço vetorial  $V$ . O próprio  $V$  como subconjunto de  $V$  é também um subespaço vetorial. Estes dois subespaços são chamados de **subespaços triviais**.*

b) *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $w \in V$ . Então o conjunto  $\mathbb{K}w = \{\alpha w \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$  é um subespaço vetorial de  $V$ .*

**Teorema 2.3.** *Um subconjunto não vazio  $W$  de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se, para cada par de vetores  $u_1, u_2 \in W$  e cada escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$ , temos que  $\lambda u_1 + u_2 \in W$ .*

**Prova:** Exercício! ◇

**Exemplo 2.7.2.** 1.  $V = \mathbb{R}^5$ ;  $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço de  $V$ .

$$2. V = M_n(\mathbb{K}); UT_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\} \text{ é um subespaço de } V.$$

3.  $V = \mathbb{R}^2$ ;  $W = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$  não é subespaço. Por exemplo,  $u = (1, 1)$ ,  $v = (2, 4) \in W$  e no entanto  $u + v \notin W$ .

**Proposição 2.7.1.** *Se  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  então*

a)  $W_1 \cap W_2$  é um subespaço vetorial de  $V$ . De fato,  $W_1 \cap W_2$  é um subespaço tanto de  $W_1$  quanto de  $W_2$ .

b)  $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Prova:** Exercício! ◇

**Proposição 2.7.2.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial não nulo e de dimensão finita. Se  $W$  é um subespaço não trivial de  $V$ , então  $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$ .*

**Prova:** Seja  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  uma base de  $W$ . Em particular  $\mathcal{B}$  é um conjunto L.I. de  $V$ . Como  $W \neq V$ , existe  $u \in V$  tal que  $u \notin W$  e assim  $u$  não é gerado pelos elementos de  $\mathcal{B}$ . Daí pela Proposição 2.6.1,  $\{w_1, \dots, w_n, u\}$  é L.I.. Logo, uma base de  $V$  conterà mais elementos que o conjunto  $\mathcal{B}$ , isto é,  $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$ . ◇

**Proposição 2.7.3.** *Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial,  $W_1$  e  $W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ , ambos de dimensão finita. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$



**Prova:** Vamos supor primeiro que  $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$ . Como  $W_1$  e  $W_2$  são de dimensão finita, então  $W_1 \cap W_2$  e  $W_1 + W_2$  também o são. Assim seja  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  uma base de  $W_1 \cap W_2$ . Como  $W_1 \cap W_2$  é um subespaço vetorial tanto de  $W_1$  como de  $W_2$ , pelo Teorema 2.2 podemos estender  $\mathcal{B}$  a uma base de  $W_1$  e a uma base de  $W_2$ . Sejam  $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r\}$  uma base de  $W_1$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_p\}$  uma base de  $W_2$ . Note que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_2$ . Vamos então mostrar que  $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_p\}$  é uma base de  $W_1 + W_2$ . Primeiro mostraremos que  $\mathcal{A}$  gera  $W_1 + W_2$ .

Seja  $v \in W_1 + W_2$ . Então  $v = x + y$  onde  $x \in W_1$  e  $y \in W_2$ . Mas  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são bases de  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j \\ y &= \sum_{i=1}^n \delta_i w_i + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l \end{aligned}$$

com  $\alpha_i, \beta_j, \delta_i, \gamma_l \in \mathbb{K}$ . Daí

$$v = x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \delta_i) w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l$$

e então  $\mathcal{A}$  gera  $W_1 + W_2$ .

Agora, precisamos mostrar que  $\mathcal{A}$  é L.I.. Considere então a soma

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = 0_V$$

onde  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in \mathbb{K}$ . Assim

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^r (-\beta_j) v_j \in W_1 \cap W_2 \quad (2.2)$$

pois é uma combinação linear de elementos de  $\mathcal{B}_1$  e de  $\mathcal{B}_2$ , simultaneamente. Logo, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i) w_i = 0_V.$$

Mas  $\mathcal{B}$  é L.I., daí  $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$ . Assim podemos reescrever (2.2) como

$$\sum_{i=1}^n (-\alpha_i)w_i + \sum_{j=1}^r (-\beta_j)v_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

Mas  $\mathcal{B}_1$  é L.I., donde  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0_{\mathbb{K}}$ . Isto é,  $\mathcal{A}$  é L.I..

Portanto  $\mathcal{A}$  é uma base de  $W_1 + W_2$  e assim

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Se  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ , sejam  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  bases de  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente. Analogamente ao caso anterior, mostra-se que  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  é uma base de  $W_1 + W_2$ .  $\diamond$

**Definição 2.8.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ . O **subespaço gerado** por  $S$  é definido como o subconjunto de  $V$  formado por todas as combinações lineares de  $u_1, \dots, u_n$ . Denotaremos tal conjunto por*

$$[u_1, \dots, u_n] = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

**Proposição 2.8.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ . O conjunto  $[v_1, \dots, v_n]$  é um  $\mathbb{K}$ -subespaço vetorial de  $V$ .*

**Exemplo 2.8.1.** 1. Dado  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em  $\mathbb{C}$ , seja  $\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$ . Então

$$[1, x, x^2, x^3, x^4] = \{a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^4\} = \{f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \mid \deg f(x) \leq 4\}$$

é um subespaço de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ .

2. Considere  $\mathbb{R}^5$  como um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e seja  $\{(1, 2, 0, 3, 0); (0, 0, 1, 4, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\}$ . Então

$$[(1, 2, 0, 3, 0); (0, 0, 1, 4, 0); (0, 0, 0, 0, 1)] = \{(\alpha, 2\alpha, \beta, 3\alpha + 4\beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^5$ .

3. Considere  $W = [(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)]$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Determinar  $\dim_{\mathbb{R}} W$ .

**Solução:** Inicialmente, vamos verificar se o conjunto  $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)\}$  é L.I. ou L.D.. Para isso, sejam  $x, y$  e  $z \in \mathbb{R}$  tais que

$$x(1, 2, 3) + y(0, 1, 2) + z(-1, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Assim vemos que  $x = z$  e  $y = -2z$  são soluções para o sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e com isso  $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)\}$  é L.D. Daí  $\dim_{\mathbb{R}} W \leq 2$ . Agora note que  $(1, 2, 3)$  não é múltiplo escalar de  $(0, 1, 2)$ . Logo,  $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2)\}$  é L.I. e então  $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ .

4. Mostre que

$$S = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \\ \overline{5} \\ \overline{3} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{5} \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{5} \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para  $\mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7)$  como  $\mathbb{Z}_7$ -espaço vetorial.

**Solução:** Uma base de  $\mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7)$  é dada por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\},$$

daí  $\dim_{\mathbb{Z}_7} \mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7) = 5$ . Assim como  $S$  possui 5 elementos, basta mostrar que  $S$  é

*L.I.. O que é imediato pois*

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

*só é possível se  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \bar{0}$ .*

5. Seja  $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ . Determine uma base de  $V$  contendo os polinômios

$$p_1(x) = 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4$$

$$p_2(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4$$

$$p_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4.$$

**Solução:** Sabemos que  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  é uma base de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ . Tal base é chamada de **base canônica** de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ . Assim  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = 5$ . Para determinar uma base contendo  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  e  $p_3(x)$ , começamos determinando se tais vetores são L.I. ou L.D.. Para isso montamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em  $A$  para reduzi-la a forma em escada

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{---} -2 \text{---} \\ \leftarrow + \\ \text{---} + \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{---} -1 \text{---} \\ \leftarrow + \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M. \end{aligned}$$

Como a matrix  $M$  não possui nenhuma linha nula, então  $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$  é L.I. em  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ . Observe que  $M$  não tem 1 na segunda e quarta colunas. Assim vamos

adicionar a  $M$  uma linha com 1 na segunda coluna e outra com 1 na quarta coluna, obtendo

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim  $\mathcal{B}' = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), x, x^3\}$  forma uma base de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  contendo  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  e  $p_3(x)$ .

6. Considere  $V = \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ . Verifique se o conjunto formado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 11 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

é L.D. ou L.I. em  $V$ .

**Solução:** Considere a matriz  $M$  formada pelas entradas das matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  escritas como linhas de  $M$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em  $M$ :

$$\begin{aligned} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} & \mid \times -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como a terceira linha é nula, então o vetor  $A_3$  é uma combinação linear de  $A_1$  e  $A_2$ , ou seja,  $\{A_1, A_2, A_3\}$  é L.D..

## 2.2 Espaços de dimensão infinita

**Definição 2.9.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer.*

1. Uma **relação de ordem parcial sobre  $X$** , que denotaremos por  $\prec$ , é uma relação que satisfaz:
  - (a)  $y \prec y$  para todo  $y \in X$  (propriedade reflexiva);
  - (b) Se  $y \prec z$  e  $z \prec t$  com  $y, z, t \in X$ , então  $y \prec t$  (propriedade transitiva);
  - (c) Se  $y \prec z$  e  $z \prec y$ , com  $y, z \in X$ , então  $y = z$  (propriedade antissimétrica).
2. Uma **relação de ordem total sobre  $X$**  é uma relação de ordem parcial  $\prec$  sobre  $X$  com a propriedade que para quaisquer  $y, z \in X$ , ou  $y \prec z$  ou  $z \prec y$ .
3. Um **conjunto parcialmente ordenado** é um par  $(X, \prec)$  consistindo de um conjunto  $X$  e uma ordem parcial  $\prec$  sobre o mesmo. De modo análogo, definimos um **conjunto totalmente ordenado**.
4. Considere  $(X, \prec)$  um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento  $\alpha \in X$  é denominado **maximal** se  $\alpha \prec \beta$ , para  $\beta \in X$ , então  $\alpha = \beta$ .
5. Seja  $A \subseteq X$ . Um elemento  $m \in X$  é denominado uma **cota superior para  $A$**  se  $x \prec m$ , para todo  $x \in A$ .

**Exemplo 2.9.1.** 1. A ordem natural do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ ,  $\leq$ , é uma relação de ordem total.

2. Considere em  $\mathbb{N}$  a seguinte relação:  $a \prec b$  se, e somente se,  $a = kb$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $\prec$  é uma relação de ordem parcial em  $\mathbb{N}$ .

**Solução:** De fato,

- (a)  $a \prec a$  pois  $a = a1$ .
- (b) Se  $a \prec b$  e  $b \prec c$  então  $a = k_1b$  e  $b = k_2c$ . Daí  $a = (k_1k_2)c$ , ou seja,  $a \prec c$ .
- (c) Se  $a \prec b$  e  $b \prec a$ , então  $a = k_1b$  e  $b = k_2a$ . Logo  $k_1 = k_2 = 1$  e assim  $a = b$ .

A ordem não é total pois, por exemplo, 2 e 3 não são comparáveis.

Agora considere o subconjunto

$$\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Tal conjunto é totalmente ordenado por  $\prec$ . O conjunto  $\mathcal{P}_1 = \{2, 4, 8, 3, 9, 27\}$  é parcialmente ordenado por  $\prec$  e possui dois elementos maximais que são 8 e 27.

3. Seja  $\mathcal{A}$  uma coleção qualquer de conjuntos. A inclusão de conjuntos,  $\subseteq$ , é uma relação de ordem parcial sobre  $\mathcal{A}$ . Não é, de modo geral, uma ordem total.
4. Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{P}(X)$  a classe de todos os subconjuntos de  $X$ . Então  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  é um conjunto parcialmente ordenado. Seja  $\mathcal{B}$  qualquer classe de subconjuntos de  $X$ , então a união de todos os conjuntos  $A \in \mathcal{B}$  é uma cota superior para  $\mathcal{B}$ . Por exemplo, para  $X = \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{P}(X)$  formado por todos os subconjuntos de  $\mathbb{N}$ . Considere  $\mathcal{B}$  dado por

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A = \{2k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Assim  $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{2k\}$  é uma cota superior para  $\mathcal{B}$ .

**Lema 2.9.0.1** (Lema de Zorn). *Seja  $X$  um conjunto parcialmente ordenado com a propriedade que cada subconjunto totalmente ordenado admite uma cota superior. Então  $X$  contém um elemento maximal.*

**Teorema 2.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $\mathcal{C}$  um conjunto L.I. em  $V$ . Então existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  contendo  $\mathcal{C}$ .*

**Prova:** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $\mathcal{C}$  um subconjunto L.I. de  $V$ . Considere  $\mathcal{P}$  a classe de todos os subconjuntos L.I. em  $V$  que contenham  $\mathcal{C}$ . É claro que  $\mathcal{P}$  é não vazio, já que o próprio conjunto  $\mathcal{C}$  pertence a  $\mathcal{P}$ . Além disso,  $\mathcal{P}$  é parcialmente ordenado por inclusão. Para usar o Lema de Zorn, precisamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{P}$  tem uma cota superior. Com esse objetivo, considere  $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  um subconjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{P}$ . O candidato natural para cota superior de  $\mathcal{D}$  é a

união de todos os conjuntos  $\mathcal{A}_\alpha$  em  $\mathcal{D}$ . Precisamos mostrar que  $\mathcal{A} = \cup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  é L.I.. Seja então  $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um subconjunto finito de  $\mathcal{A}$ . Daí para cada  $i = 1, \dots, n$  existe  $\alpha_i \in I$  tal que  $v_i \in \mathcal{A}_{\alpha_i}$ . Como  $\mathcal{A}$  é totalmente ordenado, podemos reorganizar os índices  $i$  de tal modo que  $\mathcal{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$ . Agora cada  $\mathcal{A}_{\alpha_i}$  é L.I. pois pertencem a  $\mathcal{P}$ , então como  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$ , segue que  $\mathcal{L}$  também é L.I.. Como  $\mathcal{L}$  é qualquer conjunto finito, segue que  $\mathcal{A}$  é L.I.. Assim  $\mathcal{D}$  possui uma cota superior. Segue do Lema de Zorn que  $\mathcal{P}$  tem elemento maximal, que vamos chamar de  $\mathcal{B}$ . Provemos que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ . Primeiro como  $\mathcal{B}$  é um elemento de  $\mathcal{P}$ , então  $\mathcal{B}$  é L.I.. Resta então provar que  $\mathcal{B}$  gera  $V$ . Para isso, suponha que existe  $w \in V$  que não é gerado por  $\mathcal{B}$ . Assim  $\mathcal{B} \cup \{w\}$  é L.I.. Mas  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{w\}$  o que é impossível pois  $\mathcal{B}$  é elemento maximal. Logo tal  $w$  não existe. Portanto  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ .  $\diamond$



---

---

## CAPÍTULO 3

---

# TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Em todo esse capítulo  $\mathbb{K}$  denotará um corpo.

---

### 3.1 Conceitos Básicos

---

**Definição 3.1.** *Sejam  $(V, +, \cdot)$  e  $(W, \oplus, \otimes)$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : V \rightarrow W$  é uma **transformação linear** se*

1.  $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$  para todos  $u_1, u_2 \in V$ ;

2.  $T(\lambda \cdot u) = \lambda \otimes T(u)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e todo  $u \in V$ .

**Observação 3.1.1.** *Para simplificar a notação, vamos adotar os mesmos símbolos para indicar a soma e o produto por escalar nos espaços vetoriais que aparecerão no decorrer do texto. No entanto, o leitor deve estar ciente que estes símbolos podem ter significados diferentes, dependendo do espaço vetorial em questão.*

**Lema 3.1.0.1.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ . Então uma função  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todos  $u_1, u_2 \in V$  e todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Deixada a cargo do leitor. ◇

**Lema 3.1.0.2.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então:*

1.  $T(0_V) = 0_W$ , onde  $0_V$  e  $0_W$  denotam os vetores nulos de  $V$  e  $W$ , respectivamente.
2.  $T(-u) = -T(u)$ , para cada  $u \in V$ .
3.  $T(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^m T(u_i)$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  e  $u_i \in V$  para  $i = 1, \dots, m$ .

**Prova:**

1. Note que

$$0_W + T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$

ou seja,  $T(0_V) = 0_W$ .

2. Basta observar que  $-u = (-1_{\mathbb{K}})u$  e daí

$$T(-u) = T((-1_{\mathbb{K}})u) = -1_{\mathbb{K}}T(u) = -T(u).$$

3. Por indução em  $m$ . Se  $m = 2$ , então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2).$$

Suponha que para  $m = p$  tenhamos

$$T\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^p T(u_i).$$

Vamos mostra que é válido para  $m = p + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i u_i\right) &= T\left(\left[\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right] + \alpha_{p+1} u_{p+1}\right) = T\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right) + T(\alpha_{p+1} u_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i T(u_i) + \alpha_{p+1} T(u_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i T(u_i). \end{aligned}$$



**Exemplo 3.1.1.** 1. Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. A função  $T : V \rightarrow W$  dada por  $T(u) = 0_W$  para todo  $u \in V$  é uma transformação linear.

2. Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. A função  $T : V \rightarrow V$  dada por  $T(u) = u$  para todo  $u \in V$  é uma transformação linear.

3. Considere  $\mathbb{R}$  como um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , defina  $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $T_a(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $T_a$  é uma transformação linear. Agora, seja  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x) = e^x$ . Então  $T$  não é uma transformação linear pois  $T(0) \neq 0$ .

4. Sejam  $\mathbb{K}^3$  e  $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Defina  $T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$  por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & c - b \end{bmatrix}.$$

Então  $T$  é uma transformação linear. De fato, dados  $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{K}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  temos

$$\begin{aligned} T(\lambda(a, b, c) + (d, e, f)) &= T(\lambda a + d, \lambda b + e, \lambda c + f) \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda a + d) + (\lambda b + e) & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & (\lambda c + f) - (\lambda b + e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda c - \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d + e & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & f - e \end{bmatrix} \\ &= \lambda T(a, b, c) + T(d, e, f). \end{aligned}$$

5. Seja  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e considere  $D : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$  dado por

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Então  $D$  é uma transformação linear.

6. Seja  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função contínua}\}$ . É imediato verificar que  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  é um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Defina  $T : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Então  $T$  é uma transformação linear.

7. Sejam  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Defina  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

É imediato verificar que  $T$  é uma transformação linear. Denote por  $e_i$  o elemento de  $\mathbb{K}^n$  contendo 1 em  $\mathbb{K}$  na posição  $i$  e 0 nas demais. Então  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $\mathbb{K}^n$  e

$$T(e_i) = a_i$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Agora, se  $S : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  é uma transformação linear, então pelo Lema 3.1.0.2 item (c)

$$S(x_1, \dots, x_n) = S\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n S(e_i) x_i$$

onde  $S(e_i) \in \mathbb{K}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Logo qualquer transformação linear de  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  é da forma

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

para determinados escalares  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Isto é, para determinarmos a transformação  $T$  só precisamos conhecer seus valores na base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{K}^n$ .

**Teorema 3.1.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é uma base de  $V$  e se  $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ , então existe uma única transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T(u_i) = w_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Prova:** Dado  $v \in V$ , como  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é uma base de  $V$ , então sabemos que existem únicos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Defina então  $T : V \rightarrow W$  por

$$T(v) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

A unicidade dos escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  garantem que  $T$  está bem definida, isto é, um mesmo elemento de  $V$  não pode ter duas imagens distintas.

Agora, note que  $T(u_i) = w_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Assim precisamos mostrar que  $T$  é linear. Sejam  $v_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ ,  $v_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Então

$$T(\lambda v_1 + v_2) = T\left(\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^n \beta_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i =$$

Logo  $T$  é uma transformação linear.

Resta agora mostrar que  $T$  é única. Suponha que exista uma transformação linear  $S : V \rightarrow W$  tal que  $S(u_i) = w_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Para  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$  temos

$$S(v) = S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S(u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = T(v)$$

para todo  $v \in V$ . Logo  $T = S$ , isto é, existe uma única transformação linear que satisfaz as condições do teorema.  $\diamond$

**Exemplo 3.1.2.** Os vetores  $v_1 = (1, 2)$  e  $v_2 = (3, 4)$  são L.I em  $\mathbb{R}^2$  e assim formam uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Assim pelo Teorema 3.1, sabemos que existe uma única transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(v_1) = T(1, 2) = (3, 2, 1)$$

$$T(v_2) = T(3, 4) = (6, 5, 4).$$

Determine  $T(1, 0)$ .

**Solução:** Inicialmente escrevemos  $(1, 0)$  como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ :

$$(1, 0) = \alpha(1, 2) + \beta(3, 4).$$

Obtendo  $\alpha = -2$  e  $\beta = 1$ . Assim

$$T(1, 0) = T(-2(1, 2) + (3, 4)) = -2T(1, 2) + T(3, 4) = (0, 1, 2).$$

**Definição 3.2.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear.

1. O conjunto

$$\ker T = \{u \in V \mid T(u) = 0_W\}$$

é chamado de **kernel** ou **núcleo** de  $T$ . (O núcleo de  $T$  também pode ser denotado por  $\text{Nuc } T$ .)

2. O conjunto

$$\text{Im } T = \{u \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } T(v) = u\}$$

é chamado de **imagem** de  $T$ .

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então:*

1.  $\ker T$  é um subespaço de  $V$ ;
2.  $\text{Im } T$  é um subespaço de  $W$ .

**Prova:**

1. Inicialmente  $\ker T \neq \emptyset$  pois  $T(0_V) = 0_W$ , ou seja,  $0_V \in \ker T$ . Agora, sejam  $u_1, u_2 \in \ker T$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Precisamos mostrar que  $\lambda u_1 + u_2 \in \ker T$ , isto é, precisamos mostrar que  $\lambda u_1 + u_2 \in \ker T$ . Temos

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2) = 0_W.$$

Logo,  $\ker T$  é um subespaço de  $V$ .

2. Inicialmente  $0_W \in \text{Im } T$  pois  $0_W = T(0_V)$  e daí  $\text{Im } T \neq \emptyset$ . Sejam  $w_1, w_2 \in \text{Im } T$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Então existem  $u_1, u_2 \in V$  tais que  $w_1 = T(u_1)$  e  $w_2 = T(u_2)$ . Assim

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda T(u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1 + u_2)$$

e então  $\lambda w_1 + w_2 \in \text{Im } T$ . Portanto,  $\text{Im } T$  é um subespaço de  $W$ .

◇

**Exemplos 3.2.1.** 1. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  dada por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c - b \end{bmatrix}.$$

Determine  $\ker T$  e  $\text{Im } T$ .

**Solução:** Temos

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se, e só se,  $a = -b$  e  $c = b$ . Daí

$$\ker T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b, c = b\} = \{(-b, b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Note que  $\{(1, 1, 1)\}$  é uma base de  $\ker T$ , ou seja,  $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$ .

Agora,

$$\operatorname{Im} T = \{v \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{existe } u \in \mathbb{R}^3 \text{ de modo que } T(u) = v\}$$

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim temos

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e é fácil ver que

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerado de  $\operatorname{Im} T$ . No entanto tal conjunto não é L.I.. Mas o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de  $\operatorname{Im} T$ , ou seja,  $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2$ . Observe que

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

2. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x, y) = x + y$ . Determine  $\ker T$  e  $\operatorname{Im} T$ .

**Solução:** Temos

$$\ker T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

$$\ker T = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Assim  $\{(1, -1)\}$  é uma base de  $\ker T$ , ou seja,  $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$ .

Agora

$$\operatorname{Im} T = \{w \in \mathbb{R} \mid \text{existe } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y) = w\}.$$

Assim dado  $w \in \mathbb{R}$  um número real qualquer, tome o elemento  $(w, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Temos  $T(w, 0) = w + 0 = w$ . Logo  $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$  e então  $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 1$ .

Novamente temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

**Definição 3.3.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear.

1. Dizemos que  $T$  é **injetora** se dados  $u_1, u_2 \in V$  tais que  $T(u_1) = T(u_2)$ , então  $u_1 = u_2$ . De modo equivalente, se  $u_1, u_2 \in V$  são tais que  $u_1 \neq u_2$ , então  $T(u_1) \neq T(u_2)$ .
2. Dizemos que  $T$  é **sobrejetora** se  $\operatorname{Im} T = W$ . Em outras palavras,  $T$  é **sobrejetora** se para todo  $w \in W$ , existe  $u \in V$  tal que  $T(u) = w$ .
3. Se  $T$  é injetora e sobrejetora, então dizemos que  $T$  é um **isomorfismo**.

**Exemplos 3.3.1.** 1. A transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x, y) = x + y$  é sobrejetora, mas não é injetora.

2. A transformação linear  $T : V \rightarrow V$  dada por  $T(u) = u$  é injetora e sobrejetora, ou seja, é um isomorfismo.

**Proposição 3.3.1.** Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então  $T$  é injetora se, e somente se,  $\ker T = \{0_V\}$ .

**Prova:** Suponha que  $T$  é injetora. Queremos mostrar que  $\ker T = \{0_V\}$ . Seja então  $u \in \ker T$ . Então  $T(u) = 0_W$ . Mas  $T(0_V) = 0_W$  e como  $T$  é injetora devemos ter  $u = 0_V$ . Logo  $\ker T = \{0_V\}$ .



Agora suponha que  $\ker T = \{0_V\}$ . Queremos mostrar que  $T$  é injetora. Para isso, sejam  $u_1, u_2 \in V$  tais que  $T(u_1) = T(u_2)$ . Então

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \\ T(u_1) - T(u_2) &= 0_W \\ T(u_1 - u_2) &= 0_W, \end{aligned}$$

isto é,  $u_1 - u_2 \in \ker T$ . Mas  $\ker T = \{0_V\}$ , logo  $u_1 = u_2$ . Portanto  $T$  é injetora.  $\diamond$

**Exemplo 3.3.1.** *Seja  $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$  dada por*

$$\begin{aligned} T(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) &= \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; T(0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \\ T(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) &= \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; T(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*É fácil ver que  $\ker T = \{(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}})\}$ . Além disso,*

$$\operatorname{Im} T = \left[ \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \right] = \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

*Daí  $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = 4$  e novamente*

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = 4 = \dim_c pK\mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

**Lema 3.3.1.1.** *Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Se  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  é uma base de  $V$ , então  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  gera  $\operatorname{Im} T$ .*

**Prova:** Seja  $w \in \operatorname{Im} T$ . Por definição, existe  $u \in V$  tal que  $T(u) = w$ . Como  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ , então existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ . Daí

$$w = T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n),$$

ou seja, todo vetor de  $\operatorname{Im} T$  é uma combinação linear de  $T(u_1), \dots, T(u_n)$ . Portanto  $\operatorname{Im} T = [T(u_1), \dots, T(u_n)]$  como queríamos.  $\diamond$

**Exemplo 3.3.2.** Considere  $\mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais e seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$T(a + bi, c + di) = (a - c, b + 2d, a + b - c + 2d)$$

onde  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ . É fácil ver que  $T$  é uma transformação linear. Seja  $\{(1, 0); (i, 0); (0, 1); (0, i)\}$  uma base de  $\mathbb{C}^2$ . Temos pelo Lema 3.3.1.1 que  $\{T(1, 0); T(i, 0); T(0, 1); T(0, i)\}$  gera  $\text{Im } T$ . Agora

$$T(1, 0) = (1, 0, 1); \quad T(i, 0) = (0, 1, 1)$$

$$T(0, 1) = (-1, 0, -1); \quad T(0, i) = (0, 2, 2)$$

e temos

$$T(1, 0) = -T(0, 1)$$

$$T(i, 0) = 2T(0, i).$$

Observe que  $T(1, 0)$  não é múltiplo de  $T(0, i)$ . Logo o conjunto  $\{T(1, 0); T(0, i)\}$  é uma base de  $\text{Im } T$ .

**Teorema 3.2** (Teorema do Núcleo e da Imagem). Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais com  $\dim_{\mathbb{K}} V$  finita. Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

**Prova:** Suponha primeiro que  $\ker T \neq \{0_V\}$ . Seja  $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $\ker T$ . Podemos completar o conjunto  $\mathcal{B}_1$  até obter uma base  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r\}$  de  $V$ . Para demonstrar o teorema precisamos encontrar uma base de  $W$  com  $r$  elementos. Considere então os seguintes elementos de  $W$ :

$$T(u_1), \dots, T(u_n), T(v_1), \dots, T(v_r).$$

Como  $u_i \in \ker T$ , então  $T(u_i) = 0_W$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim pelo Lema 3.3.1.1,  $\mathcal{B}_2 = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$  é um conjunto gerador de  $\text{Im } T$ . Precisamos mostrar que  $\mathcal{B}_2$  é L.I. para que seja uma base de  $\text{Im } T$ . Para isso, sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  tais que

$$\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_r T(v_r) = 0_W.$$

Daí  $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \ker T$ . Então existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

ou seja,  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$  pois  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r\}$  é uma base de  $V$ . Portanto  $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$  é uma base de  $\text{Im } T$ . Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

Agora, se  $\ker T = \{0_V\}$ , considere  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$ . De maneira análoga ao caso anterior, mostra-se que  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é uma base de  $\text{Im } T$ . Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

◇

## 3.2 Isomorfismos

**Definição 3.4.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Se  $T$  é um isomorfismo, então dizemos que  $V$  e  $W$  são **espaços vetoriais isomorfos** e denotamos por  $V \cong W$ .*

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  tais que  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$  e seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $T$  é um isomorfismo.
2.  $T$  é injetora.
3.  $T$  é sobrejetora.

**Prova:** As implicações  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$  seguem da definição de isomorfismo.

$(ii) \Rightarrow (i)$  Suponha que  $T$  é injetora. Queremos mostrar que  $T$  é um isomorfismo. Assim só precisamos mostrar que  $T$  é sobrejetora. Como  $T$  é injetora, então pela Proposição 3.3.1, temos  $\ker T = \{0_V\}$ . Assim, pelo Teorema 3.2 temos

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n,$$

logo  $\text{Im } T = W$ , isto é,  $T$  é sobrejetora. Assim  $T$  é um isomorfismo.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Suponha que  $T$  é sobrejetora. Queremos mostrar que  $T$  é um isomorfismo. Para isso, basta mostrar que  $T$  é injetora. Como  $T$  é sobrejetora, então  $\text{Im } T = W$  e daí  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T = n$ . Assim, pelo Teorema 3.2 devemos ter  $\dim_{\mathbb{K}} \ker T = 0$ , ou seja,  $\ker T = \{0_V\}$  e então  $T$  é injetora. Logo,  $T$  é um isomorfismo.

◇

**Exemplos 3.4.1.** 1. Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y) = (-y, x, x + y)$ . Pelo Teorema 3.2, sabemos que  $T$  não pode ser sobrejetora, logo  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T \leq 2$ . Agora

$$(x, y) \in \ker T \Leftrightarrow T(x, y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (-y, x, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Daí  $\ker T = \{(0, 0)\}$  e então  $T$  é injetora.

Temos

$$\text{Im } T = \{(-y, x, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que

$$(-y, x, x + y) = y(-1, 0, 1) + x(0, 1, 1)$$

e então  $\{(-1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$  gera  $\text{Im } T$  e como estes vetores não são múltiplos um do outro, eles formam uma base para  $\text{Im } T$ . Assim  $\text{Im } T = [(-1, 0, 1); (0, 1, 1)]$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2$ .

2. Considere o espaço vetorial  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  sobre  $\mathbb{C}$  e seja  $\mathcal{D} : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$  dada por  $\mathcal{D}(p(x)) = p'(x)$  a derivada de  $p(x)$ . Observe que  $\ker \mathcal{D} = \{p(x) = a \mid a \in \mathbb{C}\}$ . Além disso,  $\text{Im } \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{C})$  pois todo elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  tem uma primitiva.

3. Seja

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}, i \geq 1\}$$

onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Defina

$$\bullet (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$\bullet \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n, \dots)$$

para todos  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  e todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ . É fácil ver que  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Defina  $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dada por

$$T((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = ((a_i)_{i+1 \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, \dots, a_n, \dots).$$

É imediato ver que  $T$  é uma transformação linear. Além disso,  $T$  é sobrejetora pois dada uma sequência  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , considere  $x = (0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Temos

$$T(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots),$$

assim  $\text{Im } T = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Além disso,  $T$  não é injetora pois dado  $(x_1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  temos

$$T(x_1, 0, 0, \dots, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

e então

$$\ker T = \{(x_1, 0, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in \mathbb{K}\}.$$

**Teorema 3.3.** *Dois  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

**Prova:** Se ambos os espaços forem nulos, nada há a fazer. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  tais que  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$ . Seja  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Pelo Teorema 3.1 sabemos que existe uma única transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Vamos mostrar que  $T$  é sobrejetora e daí pela Proposição 3.4.1 será um isomorfismo. Para isto, seja  $y \in W$ , um elemento qualquer de  $W$ . Como  $\mathcal{B}$  é uma base de  $W$ , existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$$

Seja  $x \in V$  dado por

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

pois  $\mathcal{A}$  é uma base de  $V$ . Temos

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = y,$$

logo  $\text{Im } T = W$ , ou seja,  $T$  é sobrejetora.

Portanto  $V$  e  $W$  são isomorfos. ◇

**Corolário 3.3.1.** *Todo  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$  é isomorfo a  $\mathbb{K}^n$ .*

**Exemplos 3.4.2.** 1.  $\mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n+1}$ .

2.  $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{pq}$ .

### 3.3 Transformações Lineares e Matrizes

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n \geq 1$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Sabemos que cada elemento de  $V$  se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{B}$ , isto é, dado  $u \in V$  existem únicos escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Assim vamos fixar uma ordem para os elementos da base  $\mathcal{B}$  e por isso vamos chamá-la de **base ordenada** de  $V$ . Pela unicidade dos elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  acima, podemos denotar o vetor  $u$  por

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

e dizemos que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são as **coordenadas de  $u$  em relação à base ordenada  $\mathcal{B}$** .

**Exemplos 3.4.3.** 1. Considere  $V = \mathbb{C}^2$  como um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e seja  $\mathcal{B} = \{(1, i); (i, 0)\}$  uma base de  $\mathbb{C}^2$  (Verifique!). Dado o vetor  $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$ , quais suas coordenadas em relação a tal base?

**Solução:** As coordenadas de  $v$  em relação à base  $\mathcal{B}$  serão  $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2)_{\mathcal{B}}$  onde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$  são tais que

$$v = \alpha_1(1, i) + \alpha_2(i, 0).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos  $\alpha_1 = 1 - 2i$  e  $\alpha_2 = 3 + i$ . Assim

$$[v]_{\mathcal{B}} = (1 - 2i, 3 + i)_{\mathcal{B}}.$$

2. Agora considere  $V = \mathbb{C}^2$  como um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e seja  $\mathcal{A} = \{(1, 1); (i, 0); (1, i); (0, 1)\}$  uma base de  $\mathbb{C}^2$  (Verifique!). Dado o vetor  $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$ , quais suas coordenadas em relação a tal base?

**Solução:** As coordenadas de  $v$  em relação à base  $\mathcal{A}$  serão  $[v]_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{\mathcal{A}}$  onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$  são tais que

$$v = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(i, 0) + \alpha_3(1, i) + \alpha_4(0, 1).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$  e  $\alpha_4 = 3$ . Assim

$$[v]_{\mathcal{A}} = (-1, 1, 1, 3)_{\mathcal{A}}.$$

Agora, sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  tais que  $\dim_{\mathbb{K}} V = p \geq 1$  e  $\dim_{\mathbb{K}} W = q \geq 1$ . Vamos fixar bases ordenadas  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_q\}$  de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação lineares. Sabemos pelo Teorema 3.1 que  $T$  fica completamente determinada se conhecermos seus valores na base de  $V$ . Assim

$$\begin{aligned} T(v_1) &= b_{11}w_1 + b_{21}w_2 + \dots + b_{q1}w_q = \sum_{i=1}^q b_{i1}w_i \\ T(v_2) &= b_{12}w_1 + b_{22}w_2 + \dots + b_{q2}w_q = \sum_{i=1}^q b_{i2}w_i \\ &\vdots \\ T(v_p) &= b_{1p}w_1 + b_{2p}w_2 + \dots + b_{qp}w_q = \sum_{i=1}^q b_{ip}w_i \end{aligned}$$

para certos  $b_{ij} \in \mathbb{K}$  onde  $1 \leq i \leq q$  e  $1 \leq j \leq p$ .

Agora, seja  $x \in V$ . Então

$$x = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_pv_p$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ . Daí

$$\begin{aligned}
 T(x) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_p T(v_p) \\
 &= \alpha_1 \sum_{i=1}^q b_{i1} w_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^q b_{i2} w_i + \dots + \alpha_p \sum_{i=1}^q b_{ip} w_i \\
 &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \left( \sum_{i=1}^q b_{ij} w_i \right) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (\alpha_j b_{ij} w_i) \\
 &= \sum_{i=1}^q \left( \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{ij} \right) w_i.
 \end{aligned}$$

Note que os escalares  $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{1j}$ ,  $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{2j}$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{qj}$  são as coordenadas do vetor  $T(x)$  em relação à base  $\mathcal{B}_2$ , isto é,

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = \left( \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{1j}, \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{qj} \right).$$

Por outro lado,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{q1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{q2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{qp} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \dots + b_{q1}\alpha_p \\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \dots + b_{q2}\alpha_p \\ \vdots \\ b_{1p}\alpha_1 + b_{2p}\alpha_2 + \dots + b_{qp}\alpha_p \end{bmatrix}$$

e daí podemos escrever

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

onde  $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$ .

Agora seja  $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$  onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{bmatrix}.$$

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $p \geq 1$  e  $W$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $q \geq 1$ . Tome  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$  bases ordenadas de  $V$  e



$W$ , respectivamente. Defina  $T : V \rightarrow W$  por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{q1}w_q \\ &\vdots \\ T(v_p) &= a_{1p}w_1 + a_{2p}w_2 + \cdots + a_{qp}w_q. \end{aligned}$$

Então  $T$  é uma transformação linear tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo  $x \in V$ .

Assim provamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.** *Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensões  $p \geq 1$  e  $q \geq 1$ , respectivamente. Sejam  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  bases ordenadas de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Então para cada transformação linear  $T : V \rightarrow W$ , existe uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$  tal que*

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo vetor  $x \in V$ . Além disso, a cada matriz  $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$  corresponde uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$  tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo  $x \in V$ .

**Definição 3.5.** A matriz  $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$  do Teorema 3.4 é chamada de **matriz da transformação linear**  $T$  com respeito às bases ordenadas  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  e será denotada por

$$A = [T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}.$$

No caso em que  $V = W$  e  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ , denotaremos  $[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$  simplesmente por  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

**Exemplos 3.5.1.** 1. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x, 0).$$

Considere  $\mathbb{R}^2$  com a base canônica  $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$ . Encontre  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

**Solução:** Temos

$$T(e_1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$T(e_2) = (0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1).$$

Logo a matriz de  $T$  é

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  temos

$$(x, y) = xe_1 + ye_2$$

e então

$$[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (x, y)_{\mathcal{B}}.$$

Assim podemos escrever

$$[T(x, y)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[(x, y)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [(x, y)]_{\mathcal{B}}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Considere as bases  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 3); (1, 4)\}$ . Encontre  $[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ .

**Solução:** Temos

$$T(1, 1, 1) = (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4)$$

$$T(1, 1, 0) = (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4)$$

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4)$$

e daí

$$[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora considerando as bases  $\mathcal{B}_3 = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}_4 = \{(1, 0); (0, 1)\}$  obtemos

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1)$$

e assim a matriz de  $T$  será

$$[T]_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.5.** *Sejam  $F : V \rightarrow W$  e  $G : W \rightarrow U$  duas transformações lineares onde  $V$ ,  $W$  e  $U$  são  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensões  $p$ ,  $q$  e  $r$ , respectivamente. Fixe bases ordenadas  $\mathcal{B}_V$ ,  $\mathcal{B}_W$  e  $\mathcal{B}_U$  para  $V$ ,  $W$  e  $U$ , respectivamente. Então  $(G \circ F) : V \rightarrow U$  dada por  $(G \circ F)(v) = G(F(v))$  é uma transformação linear e*

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U} = [G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} [F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}.$$

**Prova:** É imediato verificar que  $G \circ F$  é uma transformação linear.

Sejam  $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_p\}$ ,  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$  e  $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_r\}$  bases ordenadas para  $V$ ,  $W$  e  $U$ , respectivamente. Considere as matrizes

1.  $[F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})_{q \times p}$  onde  $F(v_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} w_i$  para  $j = 1, \dots, p$ ;
2.  $[G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} = (b_{ij})_{r \times q}$  onde  $G(w_j) = \sum_{i=1}^r b_{ij} u_i$  para  $j = 1, \dots, q$ ;
3.  $[G \circ F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U} = (c_{ij})_{r \times p}$  onde  $(G \circ F)(v_j) = \sum_{i=1}^r c_{ij} u_i$  para  $j = 1, \dots, p$ .

Vamos calcular  $(G \circ F)(v_j)$

$$\begin{aligned} (G \circ F)(v_j) &= G(F(v_j)) = G\left(\sum_{i=1}^q a_{ij}w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^q a_{ij}G(w_i) = \sum_{i=1}^q a_{ij} \sum_{k=1}^r b_{ki}w_i \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^q b_{ki}a_{ij}w_i. \end{aligned}$$

Assim da unicidade dos escalares obtemos

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^q b_{ki}a_{ij}$$

para  $j = 1, \dots, p$  e  $k = 1, \dots, r$ . Isto é, para cada par  $(j, k)$  o elemento  $c_{kj}$  da matriz  $[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$  é o elemento na posição  $(k, j)$  da matriz resultante da multiplicação de  $[G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U}$  por  $[F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U}$ . Portanto

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = [G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} [F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U}$$

como queríamos.  $\diamond$

Vamos tratar, principalmente, com a representação por matrizes de transformações lineares de um espaço em si mesmo. Lembre-se que esta matriz muda de acordo com a escolha da base. Assim, deve-se prestar atenção sempre à base escolhida. Assim como um espaço vetorial pode ter várias bases distintas, o que acontecerá com a matriz representante de uma transformação linear quando mudamos a base ordenada? Vamos considerar  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear sobre o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita  $V$  e sejam

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$$

bases ordenadas de  $V$ . Qual a relação entre as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}_1}$  e  $[T]_{\mathcal{B}_2}$ ?

Para responder a esta questão, primeiro vamos determinar uma relação entre  $[x]_{\mathcal{B}_1}$  e  $[x]_{\mathcal{B}_2}$ , para todo  $x \in V$ . Como  $\mathcal{B}_1$  é uma base de  $V$ , então existem  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n \\ &\vdots \\ w_n &= \alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Agora, dado  $x \in V$ , existem  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$x = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n.$$

Daí

$$\begin{aligned} x &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n) + \dots + (\alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n) \\ &= (\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \dots + \beta_n\alpha_{1n})v_1 + \dots + (\beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \dots + \beta_n\alpha_{nn})v_n \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{1j} v_1 + \dots + \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{nj} v_n \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{ij} \right) v_i. \end{aligned}$$

Assim as coordenadas de  $x$  em relação à base  $\mathcal{B}_1$  são

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{nj} \end{bmatrix}.$$

Seja  $P$  a matriz cuja entrada  $(i, j)$  é o escalar  $\alpha_{ij}$ , isto é,

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então podemos escrever

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = P[x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Mais ainda, como  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são bases de  $V$ , então  $[x]_{\mathcal{B}_1} = [0_V]_{\mathcal{B}_1}$  se, e somente se,  $[x]_{\mathcal{B}_2} = [0_V]_{\mathcal{B}_2}$ .

Logo  $P$  possui inversa. Assim mostramos o seguinte teorema:

**Teorema 3.6.** *Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  bases ordenadas de  $V$ . Então existe uma única matriz  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , necessariamente invertível tal que*

$$1. [x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2}$$

$$2. [x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo  $x \in V$ . As colunas de  $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$  são dadas por

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_2}$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Além disso, também temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.7.** *Seja  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  uma matriz invertível. Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$  e  $\mathcal{B}_1$  uma base ordenada de  $V$ . Então existe uma única base ordenada  $\mathcal{B}_2$  de  $V$  tal que*

$$1. [x]_{\mathcal{B}_1} = P[\mathcal{B}_1]_{\mathcal{B}_2}$$

$$2. [x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo  $x \in V$ .

**Definição 3.6.** *A matriz  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  do Teorema 3.7 é chamada de **matriz de mudança de base** e é denotada por  $P = [I]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ .*

Agora, sejam  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear,  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$  bases ordenadas de  $V$ . Sabemos que existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível tal que

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2} \tag{3.1}$$

para todo  $x \in V$ . Mas, para todo  $x \in V$  temos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B}_1} [x]_{\mathcal{B}_1}. \tag{3.2}$$

Aplicando (3.1) ao vetor  $T(x)$  obtemos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}. \tag{3.3}$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3):

$$[T]_{\mathcal{B}_1} [x]_{\mathcal{B}_1} = [T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}$$

$$[T]_{\mathcal{B}_1} P[x]_{\mathcal{B}_2} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}$$

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1} P[x]_{\mathcal{B}_2} = [T(x)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2} [x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Daí

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B}_2}$$

o que responde nossa pergunta.

Por outro lado, sabemos que existe uma única transformação linear  $G : V \rightarrow V$  tal que

$$G(v_i) = w_i$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Mais ainda, tal transformação linear é um isomorfismo. Afirmamos que a matriz  $P$  acima é exatamente a matriz de  $G$  em relação à base  $\mathcal{B}_1$ . De fato, as entradas de  $P$  são definidas por

$$w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$$

e como  $G(v_i) = w_i$  podemos escrever

$$G(v_i) = w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$$

e então por definição  $[G]_{\mathcal{B}_1} = P$ . Desse modo, temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.8.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita,  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$  bases ordenadas de  $V$ . Suponha que  $T : V \rightarrow V$  é uma transformação linear. Se  $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é uma matriz com colunas*

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_1}$$

então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P.$$

Alternativamente, se  $G$  é o isomorfismo de  $V$  definido por  $G(v_i) = w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = ([G]_{\mathcal{B}_1})^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}[G]_{\mathcal{B}_1}.$$

**Definição 3.7.** *Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Dizemos que  $B$  é **semelhante** a  $A$  sobre  $\mathbb{K}$  se existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

**Exemplos 3.7.1.** 1. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y) = (x, 0)$ . Sabemos que com relação à base  $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$  a matriz de  $T$  é

$$[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, seja  $\mathcal{B}_2$  a base de  $\mathbb{R}^2$  formada por

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 1); w_2 = (2, 1)\}.$$

Então

$$w_1 = e_1 + e_2$$

$$w_2 = 2e_1 + e_2.$$

Assim  $P$  é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P$$

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja  $\mathcal{D} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  a transformação derivada. Considere a base  $\mathcal{B}_1 = \{f_1 = 1; f_2 = x; f_3 = x^2; f_4 = x^3\}$ . Tome  $t \in \mathbb{R}$  e defina

$$\mathcal{B}_2 = \{g_1 = 1; g_2 = (x + t); g_3 = (x + t)^3; g_4 = (x + t)^3\}.$$



*Assim*

$$g_1 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$g_2 = tf_1 + xf_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$g_3 = t^2f_1 + 2tf_2 + 1f_3 + 0f_4$$

$$g_4 = t^3f_1 + 3t^2f_2 + 3tf_3 + 1f_4$$

*e então*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*é invertível com*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Agora*

$$D(f_1) = 0$$

$$D(f_2) = 1$$

$$D(f_3) = 2x$$

$$D(f_4) = 3x^2$$

*e então*

$$[D]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Logo*

$$[D]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[D]_{\mathcal{B}_1}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

# CAPÍTULO 4

---

## FORMAS CANÔNICAS

---

Sejam  $(V, \boxplus, \boxminus)$  e  $(W, \oplus, \otimes)$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ . Denote por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Dados  $T, G \in \mathcal{L}(V, W)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  defina

- $(T + G)(u) = T(u) \oplus G(u)$
- $(\lambda T)(u) = \lambda \otimes T(u)$

para todo  $u \in V$ . É fácil verificar que  $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. O vetor nulo é a transformação linear  $0 : V \rightarrow W$  tal que  $0(u) = 0_W$  para todo  $u \in V$ . Dado  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ , o vetor oposto é  $(-T) : V \rightarrow W$  definido por  $(-T)(u) = -T(u)$  para todo  $u \in V$ .

**Teorema 4.1.** *Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais com dimensões  $p$  e  $q$ , respectivamente. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = \dim_{\mathbb{K}} V \dim_{\mathbb{K}} W.$$

**Prova:** Sejam  $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_p\}$  e  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Para cada par  $(i, j)$  com  $1 \leq i \leq q$  e  $1 \leq j \leq p$  vamos definir uma transformação linear

$T_{(i,j)} : V \rightarrow W$  por

$$T_{(i,j)}(v_r) = \begin{cases} w_i & \text{se } r = j \\ 0_W & \text{se } r \neq j \end{cases}, \quad (4.1)$$

isto é,  $T_{(i,j)}(v_r) = \delta_{jr}w_i$ , onde  $\delta_{jr}$  é o símbolo de Kronecker ( $\delta_{jr} = 1_{\mathbb{K}}$  se  $r = j$  e  $\delta_{jr} = 0_{\mathbb{K}}$  se  $r \neq j$ ). Sabemos que existe uma única transformação linear que satisfaz (4.1) para cada  $(i,j)$ . Assim obtemos um conjunto

$$\mathcal{A} = \{T_{(1,1)}; T_{(1,2)}; \dots; T_{(1,p)}; \dots; T_{(q,1)}; \dots; T_{(q,p)}\} \quad (4.2)$$

com  $pq$  elementos. Vamos mostrar que  $\mathcal{A}$  é uma base de  $\mathcal{L}(V, W)$ . Primeiro, seja  $G \in \mathcal{L}(V, W)$  e considere a matriz  $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})$  com relação às bases  $\mathcal{B}_V$  e  $\mathcal{B}_W$ . Assim  $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$  é dada por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{q1}w_q = \sum_{i=1}^q a_{i1}w_i \\ &\vdots \\ T(v_p) &= a_{1p}w_1 + \dots + a_{qp}w_q = \sum_{i=1}^q a_{ip}w_i, \end{aligned}$$

ou simplesmente,  $G(v_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij}w_i$  para  $j = 1, \dots, p$ . Considere agora a transformação linear  $H : V \rightarrow W$  dada por

$$H = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}T_{(i,j)}.$$

Vamos mostrar que  $G = H$ . Para isso, basta mostrar que  $G(v_j) = H(v_j)$  para  $v_j \in \mathcal{B}_V$ . Temos

$$\begin{aligned} H(v_j) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}T_{(i,j)}(v_j) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}\delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^p (a_{i1}\delta_{1r}w_i + a_{i2}\delta_{2r}w_i + \dots + a_{ip}\delta_{pr}w_i) \\ &= \sum_{i=1}^q a_{ij}w_i = G(v_j) \end{aligned}$$

para cada  $j = 1, \dots, p$ . Portanto  $G = H$  e assim  $\mathcal{A}$  gera  $\mathcal{L}(V, W)$ .

Mostremos agora que  $\mathcal{A}$  é L.I. em  $\mathcal{L}(V, W)$ . Para isso, sejam  $b_{ij} \in \mathbb{K}$  com  $1 \leq i \leq q$  e  $1 \leq j \leq p$  tais que

$$S = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} T_{(i,j)} = 0.$$

Assim  $S(v_j) = 0_W$  para todo  $j = 1, \dots, p$ . Daí

$$\begin{aligned} 0_W = S(v_j) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} T_{(i,j)}(v_j) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^p (b_{i1} \delta_{1r} w_i + b_{i2} \delta_{2r} w_i + \dots + b_{ip} \delta_{pr} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^q b_{ij} w_i \end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, p$ . Isto é,

$$\begin{aligned} b_{11} w_1 + \dots + b_{q1} w_q &= 0_W \\ \vdots \\ b_{1p} w_1 + \dots + b_{qp} w_q &= 0_W \end{aligned}$$

e como  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$  é L.I. em  $W$ , então  $b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$  para todo  $1 \leq i \leq q$  e  $1 \leq j \leq p$ . Logo  $\mathcal{A}$  é L.I. e assim uma base para  $\mathcal{L}(V, W)$ . Portanto

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = \dim_{\mathbb{K}} V \dim_{\mathbb{K}} W$$

como queríamos. ◇

**Corolário 4.1.1.** *Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensões  $p$  e  $q$ , respectivamente. Então  $\mathcal{L}(V, W)$  é isomorfo a  $M_{q \times p}(\mathbb{K})$ .*

**Definição 4.1.** (i) *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um **operador linear** é uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$ .*

(ii) *Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear, denotamos  $T \circ T$  por  $T^2$  e mais geralmente*

$$\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n = T^n.$$

*Além disso,  $T^0 = Id : V \rightarrow V$  o operador tal que  $Id(u) = u$  para todo  $u \in V$ .*

---

## 4.1 Operadores Diagonalizáveis

---

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e suponha que exista uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda_2 & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

com  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v_i]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_i \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Isto é,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

**Definição 4.2.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear.*

(i) Um **autovalor** de  $T$  é um elemento  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que existe um vetor não nulo  $u \in V$  com  $T(u) = \lambda u$ .

(ii) Se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ , então todo vetor não nulo  $u \in V$  tal que

$$T(u) = \lambda u$$

é chamado de **autovetor** de  $T$  **associado** ao autovalor  $\lambda$ . Denotaremos por  $\text{Aut}_T(\lambda)$  o subespaço gerado por todos os autovetores associados a  $\lambda$ . Assim

$$\text{Aut}_T(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}.$$

(iii) Suponha que  $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$ . Dizemos que  $T$  é **diagonalizável** se existir uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diagonal, isto é, tem a forma (4.3). Tal fato equivale a dizer que existe uma base formada por autovetores.

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Vamos determinar um método para encontrar todos os autovalores de  $T$ , caso existam.

Se  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um autovalor, então existe  $u \in V$ ,  $u \neq 0_V$  tal que  $T(u) = \lambda u$ . Assim, seja  $\text{Id} : V \rightarrow V$  o operador identidade. Temos

$$T(u) = \lambda u$$

$$T(u) = \lambda \text{Id}(u)$$

$$T(u) - \lambda \text{Id}(u) = 0_V$$

$$(T - \lambda \text{Id})(u) = 0_V$$

isto é,  $u \in \ker(T - \lambda \text{Id})$ . Reciprocamente, se  $u \in \ker(T - \lambda \text{Id})$  e  $u \neq 0_V$ , então  $T(u) = \lambda u$ . Logo

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T, \text{ se, e somente, } \ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0_V\}.$$

Agora, seja  $\mathcal{A}$  uma base qualquer de  $V$  e considere a matriz  $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$  do operador  $T - \lambda \text{Id} \in \mathcal{L}(V, V)$ . Como  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , se  $T - \lambda \text{Id}$  é injetor, então  $T - \lambda \text{Id}$  é um isomorfismo e daí invertível. Isto é,  $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$  é uma matriz invertível. Mas se  $\lambda \in \mathbb{K}$  é autovalor, então  $\ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0_V\}$ , ou seja,  $T - \lambda \text{Id}$  não é injetora e conseqüentemente não pode ser um isomorfismo. Logo a matriz  $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$  não é invertível. Assim

$$\det[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Portanto,  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um autovalor de  $T$  se, e somente se,

$$\det[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

**Proposição 4.2.1.** *Sejam  $\lambda \in \mathbb{K}$  um autovalor do operador linear  $T : V \rightarrow V$ . Então*

$$\text{Aut}_T(\lambda) = \ker(T - \lambda Id).$$

Seja  $x$  uma variável. Temos

$$[T - xId]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{B}} - x[Id]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde  $[T]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$   $a_{ij} \in \mathbb{K}$  para  $1 \leq i, j \leq n$ . Assim  $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$  é um polinômio de grau  $n$  com coeficiente em  $\mathbb{K}$ . O termo  $x^n$  aparece com coeficiente  $\pm 1_{\mathbb{K}}$ . Portanto,  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda$  é uma raiz de

$$\det[T - xId]_{\mathcal{A}}.$$

Agora, seja  $\mathcal{B}$  uma outra base de  $V$ . Sabemos que existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  invertível tal que

$$[T - xId]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P.$$

Então

$$\det([T - xId]_{\mathcal{B}}) = \det(P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P) = \det(P^{-1}) \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) \det(P) = \det[T - xId]_{\mathcal{A}}$$

uma vez que  $\det(P^{-1}) \det(P) = 1_{\mathbb{K}}$ . Logo o polinômio  $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$  não depende da base escolhida para  $V$ .

**Definição 4.3.** *Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita,  $T \in \mathcal{L}(V, V)$  um operador linear e  $\mathcal{A}$  uma base de  $V$ . Chamamos o polinômio  $\det([T - xId]_{\mathcal{A}})$  de **polinômio característico** de  $T$  e o denotamos por  $p_T(x)$ .*

**Exemplo 4.3.1.** 1. *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear dado por  $T(x, y) = (-y, x)$ . Encontre os autovalores de  $T$  e os autoespaços associados, se existirem.*



**Solução:** Vamos considerar a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  dada por  $\mathcal{A} = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$ . Temos

$$T(1, 0) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(1, 0) \quad (4.5)$$

$$T(1, 0) = (-1, 0) = -1(1, 0) + 0(1, 0). \quad (4.6)$$

Daí

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1.$$

Como  $p_T(x)$  não possui raízes em  $\mathbb{R}$ , segue que  $T$  não possui autovalores.

2. Seja  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  o operador linear dado por  $T(x, y) = (-y, x)$ . Encontre os autovalores de  $T$  e os autoespaços associados, se existirem, considerando  $\mathbb{C}^2$  com um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

**Solução:** Considere a base canônica  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{C}^2$ . É imediato verificar que o polinômio característico de  $T$  é  $p_T(x) = x^2 + 1$ , cujas raízes são  $\pm i$ . Assim  $T$  possui 2 autovalores distintos e para cada um deles vamos encontrar o autoespaço associado.

- Para  $\lambda_1 = i$  temos:

$$[T - iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

e assim  $(x, y) \in \text{Aut}_T(i)$  se, e só se,

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é,  $x = iy$ . Logo

$$\text{Aut}_T(i) = \{(iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(i, 1)].$$

Assim,  $\mathcal{B}_1 = \{(i, 1)\}$  é uma base de  $\text{Aut}_T(i)$  e daí  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_T(i) = 1$ .

- Para  $\lambda_1 = -i$  temos:

$$[T + iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

e assim  $(x, y) \in \text{Aut}_T(-i)$  se, e só se,

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é,  $x = -iy$ . Logo

$$\text{Aut}_T(-i) = \{(-iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(-i, 1)].$$

Assim,  $\mathcal{B}_2 = \{(-i, 1)\}$  é uma base de  $\text{Aut}_T(-i)$  e daí  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_T(-i) = 1$ .

Agora o conjunto  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(i, 1), (-i, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^2$  e nesta base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

3. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma base qualquer de  $\mathbb{R}^3$ . Determine, caso exista, uma base de  $\mathbb{R}^3$  tal que o operador  $T$  seja diagonalizável.

**Solução:** Temos

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = (3 - x)^2(-1 - x)$$

e assim os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ .

- Para  $\lambda_1 = 3$  temos que  $(x, y, z) \in \text{Aut}_T(3)$  se, e só se,

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\text{Aut}_T(3) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

e então  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0)\}$  é uma base de  $\text{Aut}_T(3)$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(3) = 1$ .

- Para  $\lambda_2 = -1$  temos que  $(x, y, z) \in \text{Aut}_T(-1)$  se, e só se,

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\text{Aut}_T(-1) = \{(z/16, -5z/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1/16, -5/4, 1)]$$

e então  $\mathcal{B}_2 = \{(1/16, -5/4, 1)\}$  é uma base de  $\text{Aut}_T(-1)$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(-1) = 1$ .

Note que o conjunto  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  é L.I. mas não é uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso o operador  $T$  não é diagonalizável.

4. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma base qualquer de  $\mathbb{R}^3$ . Determinar se  $T$  é diagonalizável.

**Solução:** Temos

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = -(x+1)^2(x+2)$$

e assim os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Cálculos simples mostram que

$$\text{Aut}_T(-1) = [(1, 0, 2); (0, 1, 2)]$$

$$\text{Aut}_T(-2) = [(1, -1, 1)].$$

É fácil verificar que o conjunto  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2); (0, 1, 2); (1, -1, 1)\}$  é L.I, logo uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Nesta base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo  $T$  é diagonalizável.

**Teorema 4.2.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, r \geq 1$ , autovalores de  $T$ , dois a dois distintos.*

- (i) *Se  $u_1 + \dots + u_r = 0_V$  com  $u_i \in \text{Aut}_T(\lambda_i); i = 1, \dots, r$ ; então  $u_i = 0_V$  para todo  $i$ .*
- (ii) *Para cada  $i = 1, \dots, r$  seja  $\mathcal{B}_i$  um conjunto linearmente independente contido em  $\text{Aut}_T(\lambda_i)$ . Então  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  é L.I. em  $V$ .*

**Prova:**

- (i) A prova será por indução em  $r \geq 1$ . Se  $r = 1$ , nada há a fazer. Seja  $r > 1$  e suponha que o teorema seja válido para todo  $j < r$ . Vamos mostrar que também é válido para  $j = r$ . Temos

$$u_1 + u_2 + \dots + u_r = 0_V \quad (4.7)$$

com  $u_i \in \text{Aut}_T(\lambda_i)$ .

Aplicando  $T$  em (4.7) obtemos

$$0_V = T(u_1) + T(u_2) + \dots + T(u_r) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r. \quad (4.8)$$

Agora multiplicando (4.7) por  $\lambda_1$  e subtraindo de (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_2 + \lambda_1 u_r - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_r u_r &= 0_V \\ (\lambda_1 - \lambda_2) u_2 - \dots - (\lambda_1 - \lambda_r) u_r &= 0_V. \end{aligned}$$

Mas por hipótese de indução, segue que  $(\lambda_1 - \lambda_i) u_i = 0$  para  $i = 2, \dots, r$ . Como  $\lambda_i \neq \lambda_j$  se  $i \neq j$ , então  $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$  e então  $u_i = 0_V$  para  $i = 2, \dots, r$ . Logo  $u_1 = 0_V$  e o resultado está provado.

- (ii) Para cada  $i$ , seja  $\mathcal{B}_i = \{u_{i1}, \dots, u_{in_i}\}$ . Vamos mostrar que o subconjunto de  $V$  dado por  $\mathcal{B} = \{u_{11}, \dots, u_{1n_1}, u_{21}, \dots, u_{2n_2}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{rn_r}\}$  é L.I. em  $V$ . Para isso sejam  $\alpha_{in_i} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, r$  tais que

$$\alpha_{11} u_{11} + \dots + \alpha_{1n_1} u_{1n_1} + \dots + \alpha_{r1} u_{r1} + \dots + \alpha_{rn_r} u_{rn_r} = 0_V.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} \in \text{Aut}_T(\lambda_i)$$

para  $i = 1, \dots, r$ . Daí segue do item (a) que

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} = 0_V$$

para  $i = 1, \dots, r$ . Como  $\mathcal{B}_i$  é L.I. para  $i = 1, \dots, r$ , então  $\alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$  para  $i = 1, \dots, r$  e  $j = 1, \dots, n_i$ . Portanto  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  é L.I. em  $V$ .

◇

**Corolário 4.2.1.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são todos os autovalores de  $T$ , então  $T$  é diagonalizável se, e somente se,*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i).$$

**Definição 4.4.** *Seja  $\lambda$  um autovalor de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos que*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$$

com  $q(\lambda) \neq 0$ , seja o polinômio característico de  $T$ .

- (i) O número  $m$  é chamada de **multiplicidade algébrica** de  $\lambda$  e o denotamos por  $ma(\lambda)$ .
- (ii) Chamamos de **multiplicidade geométrica** de  $\lambda$  à dimensão do subespaço  $\text{Aut}_T(\lambda)$  e indicamos tal número por  $mg(\lambda)$ .

**Observação 4.4.1.** *A multiplicidade algébrica de um autovalor  $\lambda$  é o maior índice  $j$  tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^j q(x)$$

com  $q(\lambda) \neq 0$ ;

**Exemplo 4.4.1.** (i)  $p_T(x) = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$ ,  $ma(2) = 2$

$$(ii) \ p_T(x) = (x+1)^3(x-2), \ ma(2) = 1, \ ma(-1) = 3.$$

**Proposição 4.4.1.** *Seja  $\lambda$  um autovalor de  $T : V \rightarrow V$ , onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então  $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ .*

**Prova:** Seja  $W = \text{Aut}_T(\lambda)$  e assumamos que  $\dim \mathbb{K}W = r$ . Sejam  $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_r\}$  uma base de  $W$  e  $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$  contendo  $\mathcal{B}_W$ . Como  $T(w_i) = \lambda w_i$  para  $i = 1, \dots, r$ ; podemos escrever  $[T]_{\mathcal{B}_V}$  na forma

$$[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} \lambda & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{r+1r+1} & \dots & b_{r+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{nr+1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{B}_V}) = (x - \lambda)^r \det(A_2).$$

Por definição,  $ma(\lambda)$  é o maior índice  $j$  tal que  $(x - \lambda)^j$  divide  $p_T(x)$ . Portanto,  $mg(\lambda) = r \leq ma(\lambda)$ .  $\diamond$

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que  $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  são distintos. Da definição de  $p_T(x)$  temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n_1 + \dots + n_r.$$

Assim, pela proposição anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$$

se, e somente se,  $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$  para  $i = 1, \dots, r$ . Assim temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.3.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $T$  é diagonalizável.

(ii)  $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$ ,  $n_i \geq 1$  e  $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$  para cada  $i = 1, \dots, r$ .

(iii)  $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$ .

## 4.2 Subespaços $T$ -invariantes

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma base qualquer de  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que  $T$  é diagonalizável e os autoespaços de  $T$  são

$$\text{Aut}_T(-1) = [(1, 0, 2); (0, 1, 2)]$$

$$\text{Aut}_T(-2) = [(1, -1, 1)].$$

Seja  $u \in \text{Aut}_T(-1)$ . Assim existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$u = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 2)$$

e daí

$$T(u) = \alpha T(1, 0, 2) + \beta T(0, 1, 2) = -\alpha(1, 0, 2) - \beta(0, 1, 2) \in \text{Aut}_T(-1).$$

Logo, para todo  $u \in \text{Aut}_T(-1)$ ,  $T(u) \in \text{Aut}_T(-1)$ . Em outras palavras

$$T(\text{Aut}_T(-1)) \subseteq \text{Aut}_T(-1).$$

Analogamente, para todo  $u \in \text{Aut}_T(-2)$ ,  $T(u) \in \text{Aut}_T(-2)$ . Em outras palavras

$$T(\text{Aut}_T(-2)) \subseteq \text{Aut}_T(-2).$$

Agora, seja  $W = [(1, 0, 0)]$ . Primeiramente, podemos escrever

$$(1, 0, 0) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(1, -1, 1)$$

tomando  $\alpha = 3$  e  $\beta = \gamma = -2$ . Daí

$$T(1, 0, 0) = (1, -2, 14) \notin W$$

e então  $T(W) \not\subseteq W$ .

**Definição 4.5.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e seja  $W \subseteq V$  um subespaço de  $V$ . Dizemos que  $W$  é um **subespaço T-invariante** de  $V$  se  $T(W) \subseteq W$ , isto é,  $T(u) \in W$  para todo  $u \in W$ .*

**Exemplo 4.5.1.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.*

1. *Os subespaços triviais de  $V$  são T-invariantes.*
2. *Os subespaços  $\ker T$  e  $\text{Im } T$  são T-invariantes. De fato, se  $u \in \ker T$ , então  $T(u) = 0_V \in \ker T$ . Assim  $T(\ker T) \subseteq \ker T$ . Agora, se  $w \in \text{Im } T$ , então existe  $u \in V$  tal que  $T(u) = w$ . Assim  $T(w) = T(T(u))$ , logo  $T(w) \in \text{Im } T$  para todo  $w \in \text{Im } T$ .*
3. *Se  $\lambda$  for um autovalor de  $T$ , então  $\text{Aut}_T(\lambda)$  é um subespaço T-invariante.*
4. *Se  $W$  é um subespaço T-invariante, então  $T : W \rightarrow W$  é um operador linear.*
5. *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear cuja matriz em relação à base canônica  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Então os únicos subespaços T-invariantes são os triviais. De fato, qualquer outro espaço T-invariante teria dimensão 1, isto é, se  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ , T-invariante então  $W = [v]$ . Daí  $v$  seria um autovetor de  $T$ . Mas*

$$p_T(x) = x^2 + 1$$

*que não possui raízes em  $\mathbb{R}$ . Logo,  $T$  não possui subespaço T-invariante não trivial.*

**Definição 4.6.** *Sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços vetoriais de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $W_1 + W_2$  é uma **soma direta** se  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ . Neste caso escreveremos  $W_1 \oplus W_2$ .*



**Exemplo 4.6.1.** 1. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços de  $\mathbb{C}^4$  com bases  $\{(1, 2, 0, i); (i, 0, 0, 1)\}$  e  $\{(0, 0, 3, 1)\}$ , respectivamente. Seja  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in W_1 \cap W_2$ . Temos

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \alpha(1, 2, 0, i) + \beta(i, 0, 0, 1) = \gamma(0, 0, 3, 1)$$

donde  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Logo  $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$  e portanto  $W_1 + W_2$  é uma soma direta e escrevemos  $W_1 \oplus W_2$ .

2. Sejam  $W_1 = [(0, 1)]$  e  $W_2 = [(1, 1)]$  subespaços de  $\mathbb{R}^2$ . Temos que se  $(x, y) \in W_1 \cap W_2$ , então

$$(x, y) = \alpha(0, 1) = \beta(1, 1)$$

e daí  $\alpha = \beta = 0$ . Logo,  $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$  e então  $W_1 + W_2$  é uma soma direta. Mais ainda

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1 \oplus W_2) = \dim_{\mathbb{R}} W_1 + \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$$

e portanto,

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2.$$

**Definição 4.7.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços de  $V$ . Dizemos que  $V$  é a **soma direta** de  $W_1$  e  $W_2$  se

$$1. W_1 \cap W_2 = \{0_V\};$$

$$2. W_1 + W_2 = V.$$

Neste caso escrevemos

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

**Proposição 4.7.1.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $W_1, W_2$  dois subespaços de  $V$ . Então  $V = W_1 \oplus W_2$  se, e só, se cada elemento  $u \in V$  se escreve de maneira única como uma soma  $x_1 + x_2$ , onde  $x_1 \in W_1$  e  $x_2 \in W_2$ .

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Vamos supor que  $V = W_1 \oplus W_2$ . Segue então que cada elemento  $u \in V$  se escreve como soma de um elemento de  $W_1$  com um elemento de  $W_2$ . Suponha agora que  $u = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$  onde  $x_1, y_1 \in W_1$  e  $x_2, y_2 \in W_2$ . Daí

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$$

pois  $x_1 - y_1 \in W_1$  e  $y_2 - x_2 \in W_2$ . Mas  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ , logo  $x_1 = y_1$  e  $x_2 = y_2$ , como queríamos.

( $\Leftarrow$ ) Como cada elemento de  $V$  é uma soma de elementos de  $W_1$  com elementos de  $W_2$ , logo  $V = W_1 + W_2$ . Seja  $u \in W_1 + W_2$  com  $u \neq 0_V$ . Assim como  $0_V \in W_1$  temos

$$u = 0_V + u$$

considerando  $u \in W_2$ . Por outro lado,  $0_V \in W_2$ , daí

$$u = u + 0_V$$

considerando  $u \in W_1$ . Logo  $u$  pode ser escrito de duas maneiras distintas, o que contradiz nossa hipótese. Logo  $u = 0_V$ , isto é,  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ . Portanto,  $V = W_1 \oplus W_2$ .

◇

**Proposição 4.7.2.** *Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial não nulo e de dimensão finita e  $W_1$  um subespaço não nulo de  $V$ . Então existe um subespaço  $W_2$  de  $V$  tal que  $V = W_1 \oplus W_2$ .*

**Prova:** Se  $V = W_1$  não há nada a fazer, pois basta escolher  $W_2 = \{0_V\}$ . Suponha então que  $V \neq W_1$ . Seja  $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_m\}$  uma base de  $W_1$ . Sabemos que podemos estender  $\mathcal{B}_1$  a uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$ . Seja  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$  contendo  $\mathcal{B}_1$ . Defina

$$W_2 = [u_1, \dots, u_n]$$

o subespaço gerado por  $u_1, \dots, u_n$ . Como  $\mathcal{B}$  gera  $V$ , então  $V = W_1 + W_2$ . Seja  $v \in W_1 \cap W_2$ . Então existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  tais que

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$$

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n,$$

isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_n u_n = 0_V$$

e então  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$  pois  $\mathcal{B}$  é L.I.. Assim  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$  e portanto  $V = W_1 \oplus W_2$ .  $\diamond$

**Exemplo 4.7.1.** 1. Sejam  $V = \mathbb{R}^3$  e  $W_1 = [(1, 0, 0)]$ . Então podemos tomar  $W_2 = [(0, 1, 0); (0, 0, 1)]$  e teremos  $V = W_1 \oplus W_2$ . Também podemos tomar  $W_3 = [(1, 1, 1); (0, 0, 1)]$  e assim  $V = W_1 \oplus W_3$ .

2. Sejam  $V = M_2(\mathbb{R})$  e  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Tomando

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

temos  $V = W_1 \oplus W_2$ .

---

## 4.3 Polinômio Minimal

---

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear sobre um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$ . Para cada  $i \geq 0$  definindo

$$T^i = \begin{cases} \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{i \text{ vezes}}, & i \geq 1 \\ Id, & i = 0, \end{cases}$$

então  $T^i \in \mathcal{L}(V, V)$ . Mas,  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, V) = n^2$ , assim existe  $r \geq 1$  tal que o conjunto  $\{T^0, T, T^2, \dots, T^{r-1}\}$  é L.I., mas  $\{T^0, T, T^2, \dots, T^r\}$  é L.D.. Logo existem escalares  $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$  tais que

$$T^r = a_0 T^0 + a_1 T^1 + \cdots + a_{r-1} T^{r-1},$$

ou seja,

$$T^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i.$$

Assim

$$T^r(u) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i(u)$$

para todo  $u \in V$ .

Defina

$$m_T(x) = x^r - a_{r-1}x^{r-1} - \cdots - a_1x - a_0.$$

Do exposto anteriormente segue que

$$m_T(T(u)) = 0_V$$

para todo  $u \in V$ .

**Definição 4.8.** O **polinômio minimal** de um operador linear  $T$  em  $\mathcal{L}(V, V)$  é o polinômio mônico  $m_T(x)$  de menor grau tal que  $m_T(T(u)) = 0_V$  para todo  $u \in V$ . Assim, se o grau de  $m_T(x)$  é  $r$ , então o coeficiente de  $x^r$  é 1.

**Exemplo 4.8.1.** Seja  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$  dado por

$$T(a, b, c) = (a, a + b, c).$$

Temos  $T \neq \lambda Id$  e

$$T^2(a, b, c) = T(T(a, b, c)) = T(a, a + b, c) = (a, 2a + b, c) = 2(a, a + b, c) - (a, b, c)$$

isto é,

$$T^2(a, b, c) = 2T(a, b, c) - Id(a, b, c).$$

Assim o polinômio minimal de  $T$  é

$$m_T(x) = (x - 1)^2.$$

**Teorema 4.4.** Seja  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ , onde  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ . Os polinômios característico e minimal de  $T$  possuem exatamente as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.

**Exemplo 4.8.2.** Seja  $T$  o operador sobre  $\mathbb{R}^n$  representado em relação à base canônica pela matriz  $A$  dada. Encontre o polinômio minimal de  $T$ .

$$1. A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}, n = 3$$

**Solução:** O polinômio característico de  $T$  é

$$p_T(x) = (x - 1)(x - 2)^2.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$(x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)^2.$$

Temos

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}, A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

e assim

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = [0]_{3 \times 3}.$$

Logo o polinômio minimal de  $T$  é

$$m_T(x) = (x - 1)(x - 2).$$

Note que  $p_T(x) = m_T(x)(x - 2)$  e assim  $p_T(A) = [0]_{3 \times 3}$ .

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, n = 4.$$

**Solução:** O polinômio característico de  $T$  é

$$p_T(x) = (x - 3)(x - 2)^3.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$f(x) = (x - 3)(x - 2), g(x) = (x - 3)(x - 2)^2, h(x) = (x - 3)(x - 2)^3.$$

*Temos*

$$f(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Agora*

$$g(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Logo o polinômio minimal de  $T$  é*

$$m_T(x) = (x - 3)(x - 2)^2.$$

*Note que  $p_T(x) = m_T(x)(x - 2)$  e assim  $p_T(A) = [0]_{4 \times 4}$ .*

$$3. A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ onde } a \neq 0, n = 2.$$

**Solução:** *O polinômio característico de  $T$  é*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^2.$$

*Assim o polinômio minimal será da forma*

$$(x - \lambda), (x - \lambda)^2;$$

*Como  $T \neq \lambda Id$ , então segue que  $m_T(x) = p_T(x)$  e daí  $p_T(A) = [0]_{2 \times 2}$ .*

**Teorema 4.5** (Cayley-Hamilton). *Seja  $T$  um operador linear sobre um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$  de dimensão finita. Se  $p_T(x)$  é o polinômio característico de  $T$ , então  $p_T(T(u)) = 0_V$  para todo  $u \in V$ . Em particular, o polinômio característico  $p_T(x)$  é um múltiplo do polinômio minimal  $m_T(x)$  de  $T$ .*

Seja  $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  o operador linear dado por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Considere também os seguintes subespaços de  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$W_1 = \left[ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$W_2 = \left[ e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Temos

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1, T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

assim  $W_1$  é um subespaço  $T$ -invariante. Seja então  $T_1 = T : W_1 \rightarrow W_1$  e  $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$  uma base de  $W_1$ . Temos

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_2, T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

assim  $W_2$  é um subespaço  $T$ -invariante. Seja então  $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$  e  $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$  uma base de  $W_2$ . Temos

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é fácil ver que  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$  e assim  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  é uma base de  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ .

Assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}.$$

Neste caso dizemos que  $T$  é a **soma direta** dos operadores  $T_1$  e  $T_2$  e escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Além disso temos

$$\begin{aligned} T_1^2(e_1) &= T_1(T(e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T_1^2(e_2) &= T_1(T(e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

assim  $T_1^2 = 0$ .

Note também que  $T_2$  é invertível pois leva uma base de  $W_2$  em uma base de  $W_2$ . Desse modo o operador  $T$  pode ser escrito como a soma direta

$$T = T_1 \oplus T_2$$

onde  $T_1^2 = 0$  e  $T_2$  é invertível. O operador  $T_1$  é chamado de **nilpotente** de índice de nilpotência 2.

**Definição 4.9.** *Seja  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$  onde  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e suponha que  $W_i$  seja  $T$ -invariante para  $i = 1, \dots, r$ . Sejam  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$  bases de  $W_1, \dots, W_r$ , respectivamente. Como  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$  é uma base de  $V$  então*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}$$

onde  $T_i = T : W_i \rightarrow W_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Neste caso escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$$

e dizemos que  $T$  é a **soma direta dos operadores**  $T_1, \dots, T_r$ .

**Definição 4.10.** *Uma operador linear  $T : V \rightarrow V$  é chamado de **nilpotente** se existir um  $r > 0$  tal que  $T^r = 0$ . O **índice de nilpotência** de um operador nilpotente será o menor inteiro  $i$  tal que  $T^i = 0$ .*



**Observação 4.10.1.** Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear nilpotente, então  $\ker T \neq \{0_V\}$ . De fato, se  $T$  é nilpotente de índice  $i \geq 1$ , então existe  $u \in V$  tal que  $T^i(u) = 0_V$  e  $T^{i-1}(u) \neq 0_V$ . Assim

$$0_V = T^i(u) = T(T^{i-1}(u)),$$

isto é,  $T^{i-1}(u) \in \ker T$ .

**Exemplo 4.10.1.** 1. Seja  $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  o operador derivação. É fácil ver que  $D$  é nilpotente de índice de nilpotência 4.

2. Seja  $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  o operador derivação. É fácil ver que  $D$  é nilpotente de índice de nilpotência  $n + 1$ .

3. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que  $T$  é nilpotente de índice de nilpotência 2.

**Teorema 4.6.** Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então  $T$  é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.

**Observação 4.10.2.** O Teorema 4.6 não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. Por exemplo, seja  $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  o operador linear dado por  $T(p(x)) = xp(x)$ . Suponha que  $T = T_1 \oplus T_2$ , onde  $T_1$  é nilpotente e  $T_2$  é invertível. Primeiro note que para todo  $l \geq 1$ ,  $\ker T^l = \{0\}$ , logo  $T$  não é nilpotente. Assim  $T_2 \neq 0$ . Seja  $W_2$  um subespaço  $T$ -invariante tal que  $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$  seja invertível. Logo  $T_2$  é sobrejetora. Tome  $q(x) \in W_2$  um polinômio mônico de menor grau possível. Como  $T_2$  é sobrejetora, então existe  $p(x) \in W_2$  tal que

$$xp(x) = T_2(p(x)) = q(x).$$

Mas o grau de  $xp(x)$  é maior que o grau de  $q(x)$ , o que é um absurdo. Logo  $T_2$  não é sobrejetora, ou seja,  $T$  não pode ser decomposta com uma soma de um operador nilpotente com um invertível.

**Proposição 4.10.1.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear nilpotente de índice de nilpotência  $r \geq 1$  e  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Se  $u \in V$  é tal que  $T^{r-1}(u) \neq 0_V$ , então*

1. *O conjunto  $\{u, T(u), \dots, T^{r-1}(u)\}$  é L.I..*
2. *Existe um subespaço  $T$ -invariante  $W$  de  $V$  tal que  $V = U \oplus W$ , onde  $U$  é o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial dado por  $U = [u, T(u), \dots, T^{r-1}(u)]$ .*

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$ . Suponha que  $T$  seja nilpotente de índice de nilpotência  $r \geq 1$ . É imediato que  $r \leq n$ . Além disso, como  $T^{r-1} \neq 0$ , existe  $u \in V$ ,  $u \neq 0_V$  tal que  $T^{r-1}(u) \neq 0_V$ . Daí, se  $r = n$ , então pela Proposição 4.10.1, o conjunto  $\mathcal{B} = \{u, T(u), \dots, T^{n-1}(u)\}$  é uma base de  $V$ . Com relação à essa base temos

$$\begin{aligned} T(u) &= 0u + 1T(u) + 0T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \\ T(T(u)) &= 0u + 0T(u) + 1T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \\ &\vdots \\ T^n(u) &= 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \end{aligned}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, se o polinômio característico de  $T$  é  $p_T(x) = (x - \lambda)^n$ , então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, 4.5, o operador  $T - \lambda Id$  é nilpotente. Se o seu índice de nilpotência for

$n$ , então existirá uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  terá a forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

**Definição 4.11.** Um **bloco de Jordan**  $r \times r$  em  $\lambda$  é a matrix  $J_r(\lambda)$  em  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  que tem  $\lambda$  na diagonal principal e 1 na diagonal abaixo da principal, isto é,

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r}.$$

**Teorema 4.7.** Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear nilpotente com índice de nilpotência  $r \geq 1$ , onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos  $p, m_1, \dots, m_p$  e vetores  $u_1, \dots, u_p$  tais que

- (a)  $r = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p$ .
- (b) O conjunto  $\mathcal{B} = \{u_1, T(u_1), \dots, T^{r-1}(u_1); \dots; u_p, T(u_p), \dots, T^{r-1}(u_p)\}$  é uma base de  $V$ .
- (c)  $T^{m_i}(u_i) = 0_V$  para cada  $i = 1, \dots, p$ .
- (d) Se  $S$  for um operador linear em um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $W$  de dimensão finita, então os inteiros  $p, m_1, \dots, m_p$  associados a  $S$  e a  $T$  são iguais se, e somente se, existir um isomorfismo  $\Phi : V \rightarrow W$  com  $\Phi T \Phi^{-1} = S$ .

**Teorema 4.8.** Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, onde  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

onde  $m_i \geq 1$  e  $\lambda_i \neq \lambda_j$  se  $i \neq j$ . Então  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  onde para cada  $i = 1, \dots, r$  temos:

$$(a) \dim_{\mathbb{K}} W_i = m_i$$

(b) O subespaço  $W_i$  é  $T$ -invariante

(c) A restrição do operador  $\lambda_i Id - T$  à  $W_i$  é nilpotente.

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear sobre um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita tal que seu polinômio característico seja dado por

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

com  $r \geq 1$  e  $\lambda_i \neq \lambda_j$  se  $i \neq j$ . Pelo Teorema 4.8, existe uma decomposição  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) de seu enunciado. Agora, para cada  $i = 1, \dots, r$  considere  $T_i = T - \lambda_i Id : W_i \rightarrow W_i$ . Pelo item (c) do Teorema 4.8,  $T_i$  é nilpotente. Seja  $\alpha_i$  o índice de nilpotência de  $T_i$ . Assim

$$T_i^{\alpha_i} = 0$$

$$(T - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = 0$$

e então  $T_i$  é raiz do polinômio  $(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$  para  $i = 1, \dots, r$ . Seja  $f(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$ . Pela definição de índice de nilpotência,  $f(x)$  é o polinômio de menor grau tal que suas raízes são  $T_1, \dots, T_r$ . Logo  $T$  é uma raiz de  $f(x)$ , isto é,  $f(x)$  é o polinômio minimal de  $T$ . Portanto o índice de nilpotência de  $T_i$  é determinado pelo polinômio minimal  $m_T(x)$ .

Como  $T_i$  é nilpotente, pelo item (b) do Teorema 4.7, existe uma base  $\mathcal{B}_i$  de  $W_i$  e números  $p_i, m_{i_1} \geq m_{i_2} \geq \cdots \geq m_{i_{p_i}}$  tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i_1}}(\lambda_i) & & & \\ & J_{m_{i_2}}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_{i_{p_i}}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

onde para cada  $i = 1, \dots, r$  e  $j = 1, \dots, p_i$

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ , então  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$  é uma base de  $V$ . Em relação à essa base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & & & \\ & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

A matriz (4.9) é chamada **forma de Jordan** associada ao operador linear  $T$ . Os números  $p_i, m_{ij}, i = 1, \dots, r$  e  $j = 1, \dots, p_i$  são completamente determinados por  $T$ . Mais ainda, pelo item (d) do Teorema 4.7, dois operadores lineares  $S \in \mathcal{L}(V, V)$  e  $T \in \mathcal{L}(W, W)$  têm a mesma forma de Jordan se, e somente se, existir um isomorfismo  $\Phi : V \rightarrow W$  tal que  $\Phi^{-1}S\Phi = T$ .

**Exemplo 4.11.1.** 1. Seja  $T : \mathbb{K}^7 \rightarrow \mathbb{K}^7$  um operador linear tal que seu polinômio característico é  $p_T(x) = (x - 2)^4(x - 3)^3$ . Encontre a(s) possível(is) forma(s) de Jordan associadas a  $T$ .

**Solução:** Como  $p_T(x) = (x - 2)^4(x - 3)^3$ , então  $V = W_1 \oplus W_2$  onde  $\dim_{\mathbb{K}} W_1 = 4$  e  $\dim_{\mathbb{K}} W_2 = 3$ . Assim  $T = T_1 \oplus T_2$ , onde  $T_1 = T : W_1 \rightarrow W_1$  e  $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$ . Agora,  $(T_1 - 2I_4)$  é nilpotente de índice de nilpotência  $r \leq 4$ . Se  $r = 1$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se  $r = 2$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \text{ou} \quad [T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \\ & & & 2 \end{array} \right].$$

Se  $r = 3$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array} \right].$$

Se  $r = 4$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

O operador  $(T_2 - 3I_3)$  é nilpotente de índice de nilpotência  $r \leq 3$ .

Se  $r = 1$ , então

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \left[ \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Se  $r = 2$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 1 & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array} \right].$$

Se  $r = 3$ , então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[ \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Logo existem 15 possíveis formas de Jordan para  $T$ .

2. Seja  $T : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$  tal que  $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ .

**Solução:** As possíveis formas são

$$\begin{aligned}
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Seja  $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$  tal que em relação à base canônica,  $T$  seja representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de  $T$ .

**Solução:** Primeiramente temos que

$$p_T(x) = x^4.$$

Cálculos simples mostram que  $m_T(x) = x^2$ . Assim a forma de Jordan de  $T$  possui um

bloco de Jordan de tamanho 2 associado a 0. Agora,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -0,4 \\ -0,4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(a) = 2$ , isto é, existem dois blocos de Jordan. Portanto, existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right].$$

4. Seja  $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  o operador linear representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de  $T$ .

**Solução:** Inicialmente, como  $[T]$  é uma matriz triangular, seu polinômio característico será

$$p_T(x) = (x + 1)^5(x + 4).$$

Um cálculo simples, mostra que

$$m_T(x) = (x + 1)^3(x + 4)$$

logo a forma de Jordan de  $T$  possui um bloco de Jordan de tamanho 3, associado à  $-1$  e um bloco de Jordan de tamanho 1, associado à  $4$ . Desse modo a forma de Jordan de



$T$  será

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar agora,  $\text{Aut}_T(-1)$  para decidir qual será a forma de Jordan de  $T$ .

Temos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -3 \quad -2 \quad -1 \quad -2 \quad -7 \end{array} \rightsquigarrow \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \quad -3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde obtemos que  $\text{Aut}_T(-1) = \{(x_1, x_2, -2x_2, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Logo obtemos  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(-1) = 2$  e portanto a forma de Jorda de  $T$  é

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

**Observação 4.11.1.** 1. Se um operador linear  $T : V \rightarrow V$ , onde  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , é tal que

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

com  $r \geq 1$  e  $\lambda_i \neq \lambda_j$  se  $i \neq j$ . Se  $T - \lambda_i \text{Id}$  é nilpotente de índice de nilpotência  $\alpha_i$ , então existe um bloco de Jordan de tamanho  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

2. A dimensão de  $\text{Aut}_T(\lambda_i)$  é igual ao número de blocos de Jordan  $J_{\alpha_i}(\lambda_i)$  de tamanho  $\alpha_i$  que aparece em  $T$ .

3. A base que gera a forma de Jordan é chamada de **base de Jordan**.

---

## 4.4 Como encontrar a base de Jordan

---

Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear tal que sua forma de Jordan seja

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é a base de Jordan, temos

$$T(v_1) = 3v_1 + v_2$$

$$T(v_2) = 3v_2 + v_3$$

$$T(v_3) = 3v_3,$$

isto é,

$$(T - 3Id)(v_1) = v_2$$

$$(T - 3Id)(v_2) = v_3$$

$$(T - 3Id)(v_3) = 0.$$

Assim para achar a base de Jordan precisamos de:

1. Achar todos os autovetores correspondentes a um certo autovalor, isto é, encontrar  $\text{Aut}_T(\lambda)$ .
2. O número de autovetores L.I. associados ao autovalor  $\lambda$  é igual ao número de blocos de Jordan associados à  $\lambda$ .
3. Resolver a equação  $(T - \lambda Id)(u) = v_\lambda$  onde  $v_\lambda$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda$  para cada autovetor diferente.

Vamos aplicar este método para o caso de matrizes  $3 \times 3$ . Neste caso temos três situações para analisar:

1. Existem 3 autovetores L.I.

Por exemplo, para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de  $A$ .

**Solução:** *O polinômio característico é*

$$p_A(x) = (x - 5)(x - 3)^2$$

*e daí*

$$\text{Aut}_A(5) = [e_1 = (1, 2, 1)]$$

$$\text{Aut}_A(3) = [e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (-1, 0, 1)].$$

Assim a forma de Jordan de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde  $J_1(5) = [5]$  e  $J_1(3) = [3]$ .

2. Existem 2 autovetores L.I.

Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Temos

$$p_A(x) = (x - 1)^3 \quad e \quad m_A(x) = (x - 1)^2.$$

Assim temos pelo menos um bloco de Jordan de tamanho 2. Além disso,

$$\text{Aut}_A(1) = [e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, -1)]$$

e daí temos duas possíveis formas de Jordan para  $A$ , a saber:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos procurar uma base que gere a matriz  $B$ . Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é a base de Jordan que produz a matriz  $B$ , então temos

$$A(v_1) = v_1 + v_2$$

$$A(v_2) = v_2$$

$$A(v_3) = v_3$$

e assim

$$(A - I_3)(v_1) = v_2$$

$$(A - I_3)(v_2) = 0$$

$$(A - I_3)(v_3) = 0.$$

Deste modo podemos escolher  $v_2$  e  $v_3$  como autovetores de  $A$ . Digamos que

$$v_2 = (0, 1, -1) \quad e \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

Precisamos encontrar  $v_1 = (x, y, z)$  tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

O sistema associado é

$$\begin{bmatrix} y + z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é impossível. Assim vamos tomar

$$v_2 = (1, 0, 0) \quad e \quad v_3 = (0, 1, -1).$$

Precisamos encontrar  $v_1 = (x, y, z)$  tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

Resolvendo o sistema associado encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1).$$

Tomando  $x = y = 0$  o vetor procurado é  $v_1 = (0, 0, 1)$ . Assim na base  $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1); v_2 = (1, 0, 0); v_3 = (0, 1, -1)\}$  a forma de Jordan de  $A$  será como dado por  $B$ .

Escolhermos a ordem  $\mathcal{B}_1 = \{v_3, v_1, v_2\}$  obtemos

$$[A]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Existe 1 autovalor L.I.

Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** *Aqui*

$$p_A(x) = (x + 1)^3 = m_A(x).$$

*Deste modo existe um bloco de Jordan de tamanho 3. Além disso*

$$\text{Aut}_A(-1) = [e_1 = (1, 0, 0)].$$

*Assim a única possibilidade para a forma de Jordan é*

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Assim se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é a base de Jordan, então*

$$(A + I_3)(v_1) = v_2$$

$$(A + I_3)(v_2) = v_3$$

$$(A + I_3)(v_3) = 0.$$

*Tome  $v_3 = (1, 0, 0)$  e seja  $v_2 = (x, y, z)$ . Temos*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*donde*

$$v_2 = x(1, 0, 0) + (0, -1, 0).$$

*Podemos então tomar  $v_2 = (0, -1, 0)$ .*

Agora, precisamos encontrar  $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$  tal que  $(A + I_3)(v_1) = v_2$ . Do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + (0, 0, 1/2).$$

Tomando  $v_1 = (0, 0, 1/2)$  a base de Jordan será

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1/2); v_2 = (0, -1, 0); v_3 = (1, 0, 0)\}.$$





---

## CAPÍTULO 5

---

# ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Durante este capítulo o corpo base  $\mathbb{K}$  de um espaço vetorial  $V$  será sempre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definição 5.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um **produto interno** sobre  $V$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz as propriedades seguintes:*

1.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$  para todos  $u, v$  e  $w \in V$ .
2.  $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e todos  $u, w \in V$ .
3.  $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$  para todos  $u, w \in V$ . (Aqui,  $\overline{a + bi} = a - bi$ .)
4.  $\langle u, u \rangle > 0_{\mathbb{K}}$  se  $u \neq 0_V$ .

**Observação 5.1.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Temos*

1.  $\langle 0_V, w \rangle = \langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{K}}$  para todo  $w \in V$ .

*De fato,*

$$\langle 0_V, w \rangle = \langle 0_V + 0_V, w \rangle = \langle 0_V, w \rangle + \langle 0_V, w \rangle$$

*logo  $\langle 0_V, w \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ . Como  $\langle w, 0_V \rangle = \overline{\langle 0_V, w \rangle}$ , então  $\langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ .*

2.  $\langle w, w \rangle = 0_{\mathbb{K}}$  se, e somente se,  $w = 0_V$ .

3. No caso em  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a propriedade 3 da definição de produto interno torna-se:  $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$ .

**Exemplo 5.1.1.** 1. Em  $\mathbb{R}^3$  a função  $\langle ; \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz$$

é um produto interno.

**Solução:** De fato, dados  $(a, b, c), (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos:

$$(a) \quad \langle (a, b, c) + (x, y, z); (u, v, w) \rangle = \langle (a + x, b + y, c + z); (u, v, w) \rangle = (a + x)u + (b + y)v + (c + z)w = \langle (a, b, c); (u, v, w) \rangle + \langle (x, y, z); (u, v, w) \rangle.$$

$$(b) \quad \langle \lambda(a, b, c), (x, y, z) \rangle = \langle (\lambda a, \lambda b, \lambda c), (x, y, z) \rangle = \lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda \langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle$$

$$(c) \quad \langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz = \langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle.$$

$$(d) \quad \langle (a, b, c); (a, b, c) \rangle = a^2 + b^2 + c^2 > 0 \text{ para todo } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

2. Em  $\mathbb{C}^3$  a função  $\langle ; \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz$$

não é um produto interno.

**Solução:** De fato, por exemplo

$$\langle (i, 0, 0); (i, 0, 0) \rangle = i^2 = -1 < 0.$$

3. Em  $\mathbb{C}^3$  a função  $\langle ; \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}$$

é um produto interno.

4. Se  $V = \mathbb{R}^2$  então  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\langle (a, b); (x, y) \rangle = 2ax - ay - bx + by$$

é um produto interno.

5. De modo geral, em  $V = \mathbb{K}^n$  a função definida por

$$\langle (x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

é um produto interno em  $\mathbb{K}^n$ . Tal produto interno é chamada de **produto interno canônico** em  $\mathbb{K}^n$ .

6. Considere o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  o espaço das funções contínuas de  $[a, b]$  em  $\mathbb{K}$ . Defina

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

para  $f, g \in V$ . Tal função é um produto interno em  $V$  e é chamado de **produto interno canônico** em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

7. O **produto interno canônico** em  $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  é dado por

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

onde  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ .

**Definição 5.2.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para cada  $u \in V$ , chamamos de **norma** de  $u$  ao número real dado por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

**Observação 5.2.1.** Segue diretamente da definição de norma que:

1.  $\|u\| \geq 0$  para todo  $u \in V$ .
2.  $\|u\| = 0$  se, e somente se,  $u = 0_V$ .
3.  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo  $u \in V$ .

**Exemplo 5.2.1.** 1. Em  $\mathbb{R}^3$  considere o produto interno canônico. Dados  $u = (a, b, c)$  e  $v = (x, y, z)$  temos

$$\|u - v\| = \|(a - x, b - y, c - z)\| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}$$

indicará a distância entre  $u$  e  $v$ .

2. A norma de um vetor depende do produto interno escolhido. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  se considerarmos o produto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle_1 = 2x_1y_1 + 25x_2y_2.$$

Então  $\|(1, 0)\|_1 = \langle (1, 0); (1, 0) \rangle_1 = \sqrt{2}$  e  $\|(0, 1)\|_1 = \langle (0, 1); (0, 1) \rangle_1 = 5$ .

Agora, se considerarmos o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^2$ , temos  $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$ .

**Definição 5.3.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

1. Dizemos que  $u$  e  $w$  são vetores **ortogonais** se  $\langle u, w \rangle = 0$ .
2. Um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $V$  é chamado de **ortogonal** se os seus elementos são ortogonais dois a dois.
3. Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $V$  é **ortonormal** se for um conjunto ortogonal e se  $\|u\| = 1$  para todo  $u \in \mathcal{A}$ .

**Notação 5.3.1.** Usaremos a notação  $u \perp w$  para indicar que os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais.

**Observação 5.3.1.** O vetor nulo  $0_V$  é ortogonal a todos os elementos de  $V$  pois  $\langle 0_V, u \rangle = 0$  para todo  $u \in V$ . Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.

**Exemplo 5.3.1.** As bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  são conjunto ortonormais, considerando o produto interno canônico nestes espaços vetoriais.

**Proposição 5.3.1.** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e seja  $\mathcal{A}$  um subconjunto ortogonal de  $V$  formado por vetores não nulos.

(a) Se  $u \in [v_1, \dots, v_n]$  com  $v_i \in \mathcal{A}$  para  $i = 1, \dots, n$ , então

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

(b) O conjunto  $\mathcal{A}$  é L.I.

**Prova:**

(a) Seja  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  com  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Como  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é ortogonal temos

$$\langle u, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Assim

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

como queríamos.

(b) Suponha que existam escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  e vetores não nulos  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{A}$  tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Pelo item (a) temos

$$\alpha_i = \frac{\langle 0_V, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} = 0_K$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Portanto  $\mathcal{A}$  é L.I.

◇

**Corolário 5.0.1.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e seja  $\mathcal{A}$  uma base ortonormal de  $V$ . Então para  $u \in V$  temos*

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i$$

onde  $v_i \in \mathcal{A}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## 5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com um produto interno. Considere  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  um conjunto L.I. Vamos obter um novo conjunto L.I.  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  ortogonal e que gera o mesmo espaço vetorial que  $\mathcal{A}$ . Para tal fazemos:

1.  $w_1 = v_1$
2.  $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$

Como  $\{v_1, v_2\}$  é L.I., então  $w_2 \neq 0_V$ . Além disso,

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1; w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$$

e então  $w_1 \perp w_2$ .

3. Definidos  $w_1, \dots, w_k$ ,  $1 < k < n$  podemos definir  $w_{k+1}$  por

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

É fácil verificar que os vetores  $w_1, \dots, w_n$  definidos anteriormente são dois a dois ortogonais, logo  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  é um conjunto ortogonal. Mais ainda, pela Proposição 5.3.1, o conjunto  $\mathcal{B}$  é L.I. e  $w_i \in [v_1, \dots, v_n] = U$  para  $i = 1, \dots, n$ . Agora como  $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ , segue que  $\mathcal{B}$  é uma base para  $U$ , como queríamos.

**Exemplo 5.3.2.** 1. *Seja  $V = \mathbb{C}^3$  com o produto interno canônico. Determinar uma base ortogonal de  $\mathbb{C}^3$  contendo o vetor  $(1, 2i, 0)$ .*

**Solução:** *Primeiro obtemos uma base de  $\mathbb{C}^3$  contendo  $(1, 2i, 0)$ . Por exemplo, podemos considerar a base  $\{v_1 = (1, 2i, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$ . Defina  $w_1 = v_1 =$*

$(1, 2i, 0)$ , assim

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0, 1, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0), (1, 2i, 0) \rangle}{\|(1, 2i, 0)\|^2} (1, 2i, 0) = (0, 1, 0) + \frac{2i}{5} (1, 2i, 0)$$

$$w_2 = \left( \frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 2i, 0) \rangle}{\|(1, 2i, 0)\|^2} (1, 2i, 0) - \frac{\langle (0, 0, 1), (2i/5, 1/5, 0) \rangle}{\|(2i/5, 1/5, 0)\|^2} (2i/5, 1/5, 0)$$

$$w_3 = (0, 0, 1).$$

Portanto o conjunto

$$\left\{ (1, 2i, 0); \left( \frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right); (0, 0, 1) \right\}$$

é uma base ortogonal de  $\mathbb{C}^3$ .

2. Seja  $\{(1, 1, 1); (0, 2, 1); (0, 0, 1)\}$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Encontrar uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ , em relação ao produto interno canônico.

**Solução:** Defina  $w_1 = (1, 1, 1)$ . Temos

$$w_2 = (0, 2, 1) - \frac{\langle (0, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$$

$$w_3 = (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle}{\|(-1, 1, 0)\|^2} (-1, 1, 0) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1)$$

$$w_3 = (-1/3, -1/3, 2/3).$$

Portanto o conjunto  $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1); (-1, 1, 0); (-1/3, -1/3, 2/3)\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 5.1.** Todo espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$  com produto interno possui uma base ortonormal.

**Prova:** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$  com produto interno. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe uma base ortogonal para  $V$ . Seja  $\{w_1, \dots, w_n\}$  tal base. Assim

$$\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$$

é uma base ortonormal, como queríamos.  $\diamond$

Deste teorema temos o seguinte: Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja  $\{w_1, \dots, w_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Se

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

$$v = \sum_{j=1}^n \beta_j w_j$$

então

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^n \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}. \quad (5.1)$$

Deste fato segue que

**Corolário 5.1.1.** *Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  e  $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n\}$  duas bases ortonormais de  $V$ . Se  $M$  é a matriz mudança de base de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{A}$ , então*

$$M \overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n.$$

**Prova:** Seja  $M = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  a matriz mudança de base de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{A}$ . Então para  $i, j = 1, \dots, n$  temos

$$v_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} u_k$$

$$v_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} u_k.$$

Agora, de (5.1) temos

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \overline{\alpha_{kj}}$$

para cada  $1 \leq i, j \leq n$ . Logo

$$M \overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n$$

como queríamos.  $\diamond$



---

# BIBLIOGRAFIA

- [1] Flávio U. Coelho e Mary L. Lourenço, *Um curso de Álgebra Linear*, Editora EdUSP, 2<sup>a</sup> edição, 2007.
- [2] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1976.
- [3] J. Boldrini, S. Costa, V. Figueiredo, H. Wetzler, *Álgebra Linear*, Editora Harbra, 3<sup>a</sup> edição, 1980.
- [4] Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, *Elementary Linear Algebra*, D. C. Heath and Company, 1988.
- [5] Salahoddin Shokranian, *Álgebra 1*, Editora Ciência Moderna, 2010.
- [6] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, 1992.



---

# ÍNDICE REMISSIVO

- Autovalor, 86
- Autovetor, 87
- Corpos, 5
  - Finitos, 8
- Cota Superior, 54
- Elemento
  - Maximal, 54
- Espaço Vetorial, 37
  - Base, 43
  - Combinação linear, 39
  - Conjunto gerador, 39
  - Conjunto L.D., 42
  - Conjunto L.I., 42
  - Dimensão, 45
  - Finitamente gerado, 44
- Jordan
  - Base de, 114
  - Bloco de , 107
  - Forma de, 109
- Lema de Zorn , 55
- Matriz
  - Linha Equivalente, 18
  - Linha-reduzida, 20
  - Na forma escada, 22
  - Quadrada, 31
- Multiplicidade
  - Algébrica, 93
  - Geométrica, 93
- Nulidade
  - de uma matriz, 23
- Operações Elementares, 13
  - Sobre Matrizes, 15
- Operador Linear, 85
  - Nilpotente, 104
- Polinômio
  - Característico, 88
  - Minimal, 100
- Posto

- de uma matriz, 23
- Produto interno, 121
- Relação de Ordem
  - Parcial, 54
  - Total, 54
- Sistema Linear, 12
- Sistemas Equivalentes, 14
- Soma direta, 96
- Subespaço, 47
  - $T$ -invariante, 96
  - gerado, 50
- Transformação Linear
  - Diagonalizável, 87