

*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	Á	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	M	R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	A	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	T	*	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	U	L	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n	I	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	B	N	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	E	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*

Notas de Aula 1/2017¹

José Antônio O. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília - UnB

¹ Este texto está licenciado sob uma **Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil** http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt_BR.

SUMÁRIO

1	Sistemas Lineares E Matrizes	5
1.1	Corpos	5
1.2	Corpos Finitos	8
1.3	Sistemas Lineares	12
1.4	Matrizes e Determinantes	31
2	Espaços Vetoriais	37
2.1	Subespaços	47
2.2	Espaços de dimensão infinita	54
3	Transformações Lineares	57
3.1	Conceitos Básicos	57
3.2	Isomorfismos	67
3.3	Transformações Lineares e Matrizes	70
4	Formas Canônicas	83
4.1	Operadores Diagonalizáveis	86
4.2	Subespaços T-invariantes	95
4.3	Polinômio Minimal	99

4.4	Como encontrar a base de Jordan	114
5	Espaços com produto interno	121
5.1	Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt	126
	Bibliografia	129
	Índice Remissivo	131

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

1.1 Corpos

Definição 1.1. Um conjunto não vazio \mathbb{K} é chamado de **corpo** se em \mathbb{K} podemos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e \cdot (multiplicação) de modo que

$$a + b \in \mathbb{K}$$

$$a \cdot b \in \mathbb{K}$$

para todos $a, b \in \mathbb{K}$ e que satisfaçam as seguintes propriedades:

A1) **Comutatividade da soma:** $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathbb{K}$;

A2) **Associatividade da soma:** $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$;

A3) **Elemento neutro da soma:** Existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por $0_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente 0 e chamado de **elemento neutro da adição**, que satisfaz

$$a + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$. (Elemento neutro da soma)

A4) **Elemento oposto da soma:** Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por $-a$ e chamado de **oposto** de a ou **inverso aditivo** de a tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_{\mathbb{K}}.$$

M1) **Comutatividade da multiplicação:** $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in \mathbb{K}$;

M2) **Associatividade da multiplicação:** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$;

M3) **Elemento neutro da multiplicação:** Existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por $1_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente 1 e chamado de **elemento neutro da multiplicação** ou **unidade**, que satisfaz

$$a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a$$

para todo $a \in \mathbb{K}$.

M4) **Elemento inverso da multiplicação:** Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por a^{-1} e chamado de **inverso multiplicativo** de a tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_{\mathbb{K}}.$$

D) **Distributividade da soma em relação à multiplicação:** $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para todos a, b e $c \in \mathbb{K}$.

Para simplificar a notação vamos escrever

$$a \cdot b = ab.$$

Denotamos um corpo \mathbb{K} pela terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Quando não houver chance de confusão em relação às operações de soma e multiplicação envolvidas no corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, vamos simplesmente dizer que \mathbb{K} é um corpo.

Exemplo 1.1.1. 1. São exemplos de corpos os conjuntos: \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} com as operações de soma e multiplicações usuais destes conjuntos.

2. O conjunto \mathbb{Z} com a soma e multiplicações usuais não é um corpo, pois por exemplo, não existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $2b = 1$.

3. Seja

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dados $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, defina

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aqui o elemento neutro da adição é 0, o elemento neutro da multiplicação é 1, o oposto aditivo de $a + b\sqrt{2}$ é $-a - b\sqrt{2}$ e o inverso multiplicativo de $a + b\sqrt{2}$ é $\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ para $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Propriedades importantes: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Então

1. O elemento neutro da soma é único.

Solução: De fato, suponha que 0_1 e 0_2 sejam elementos neutros da soma em \mathbb{K} . Temos

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

2. O oposto aditivo de cada elemento de \mathbb{K} é único.

Solução: Sejam b e c elementos opostos de a , então

$$b = b + 0_{\mathbb{K}} = b + (c + a) = (b + a) + c = 0_{\mathbb{K}} + c = c.$$

3. Vale a lei do cancelamento, isto é, se $a + b = a + c$ então $b = c$.

4. Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$.

Solução: De fato,

$$a \cdot 0_{\mathbb{K}} = a \cdot (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) = a \cdot 0_{\mathbb{K}} + a \cdot 0_{\mathbb{K}},$$

logo pela lei do cancelamento, $a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ como queríamos.

5. O elemento neutro da multiplicação é único.

Solução: De fato, suponha que 1_a e 1_b sejam elementos neutros da multiplicação. Então

$$1_a = 1_a \cdot 1_b = 1_b.$$

6. O inverso de um elemento não nulo é único.

Solução: Dado $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, suponha que $b, c \in \mathbb{K}$ sejam tais que

$$ab = 1 \quad ac = 1.$$

Então

$$b = 1b = (ac)b = c(ab) = c1 = c.$$

7. Se $a \in \mathbb{K}$ é tal que $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ e $ab = ac$, então $b = c$.

8. Se $ab = 0_{\mathbb{K}}$, com a e $b \in \mathbb{K}$, então $a = 0_{\mathbb{K}}$ ou $b = 0_{\mathbb{K}}$.

Solução: Suponha que $a \neq 0_{\mathbb{K}}$, então existe a^{-1} . Daí

$$ab = 0_{\mathbb{K}}$$

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0_{\mathbb{K}}$$

$$1b = 0_{\mathbb{K}}$$

$$b = 0_{\mathbb{K}}.$$

Observação 1.1.1. Os elementos de um corpo qualquer \mathbb{K} são chamados de **escalares**.

1.2 Corpos Finitos

Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Dado $a \in \mathbb{Z}$, sempre é possível escrever

$$a = bp + r,$$

onde $b, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r \leq p-1$. Assim quando efetuamos a divisão inteira de qualquer número inteiro a por p os possíveis restos são: $0, 1, 2, \dots, p-1$.

Assim vamos considerar o seguinte conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{bp \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots\} \\ \bar{1} &= \{bp + 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 1, \pm 2p + 1, \pm 3p + 1, \dots\} \\ \bar{2} &= \{bp + 2 \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm p + 2, \pm 2p + 2, \pm 3p + 2, \dots\} \\ &\vdots \\ \overline{p-1} &= \{bp + (p-1) \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{(b+1)p - 1 \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{cp - 1 \mid c \in \mathbb{Z}\} = \{-1, \pm p - 1, \pm 2p - 1, \pm 3p - 1, \dots\}.\end{aligned}$$

defina em \mathbb{Z}_p a soma \oplus e a multiplicação \otimes por: para $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$

$$\begin{aligned}\bar{a} \oplus \bar{b} &= \overline{a+b} \\ \bar{a} \otimes \bar{b} &= \overline{ab},\end{aligned}$$

onde sob a barra estamos usando a soma e multiplicação usuais dos inteiros. Para determinar o valor de $\overline{a+b}$ e de \overline{ab} , encontramos o resto da divisão inteira de $a+b$ por p e de ab por p . Logo

$$\begin{aligned}\bar{a} \oplus \bar{b} &\in \mathbb{Z}_p \\ \bar{a} \otimes \bar{b} &\in \mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.2. Para $p = 3$ os possíveis restos na divisão inteira são: 0, 1 e 2. Daí

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

e temos

$$\begin{aligned}\bar{0} \oplus \bar{0} &= \bar{0} & \bar{2} \oplus \bar{0} &= \bar{0} \oplus \bar{2} = \overline{0+2} = \bar{2} \\ \bar{1} \oplus \bar{0} &= \bar{0} \oplus \bar{1} = \overline{0+1} = \bar{1} & \bar{2} \oplus \bar{1} &= \bar{1} \oplus \bar{2} = \overline{1+2} = \bar{3} = \bar{0}\end{aligned}$$

$$\bar{2} \oplus \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{1} \otimes \bar{1} = \overline{1 \cdot 1} = \bar{1}$$

$$\bar{0} \otimes \bar{0} = \overline{0 \cdot 0} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \bar{2} = \overline{2 \cdot 1} = \bar{2}$$

$$\bar{0} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \bar{0} = \overline{0 \cdot 1} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{0} = \bar{2} \otimes \bar{0} = \overline{2 \cdot 0} = \bar{0}$$

$$\bar{2} \otimes \bar{2} = \overline{2 \cdot 2} = \bar{4} = \bar{1}$$

Note que a soma \oplus e o produto \otimes em \mathbb{Z}_3 são comutativos, a soma possui elemento neutro que é $\bar{0}$, todo elemento possui oposto aditivo. A multiplicação possui unidade que é $\bar{1}$ e todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo. É simples verificar que a soma e o produto em \mathbb{Z}_3 são associativos e o produto é distributivo em relação à soma. Portanto, $(\mathbb{Z}_3, \oplus, \otimes)$ é um corpo. Além disso, em tal corpo temos

$$(\bar{1} \oplus \bar{1}) \oplus \bar{1} = (\overline{1+1}) \oplus \bar{1} = \bar{2} \oplus \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}.$$

e $\bar{1} \neq \bar{0}$.

Teorema 1.1. Para todo $p \in \mathbb{Z}$, p número primo, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ é um corpo.

Prova: Dados $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_p$ temos:

$$A1) \quad \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \bar{b} \oplus \bar{a};$$

$$A2) \quad (\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c} = (\overline{a+b}) \oplus \bar{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c})$$

A3) Temos que $\bar{0} \in \mathbb{Z}_p$ e para todo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$:

$$\bar{0} \oplus \bar{a} = \bar{a} \oplus \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}.$$

Logo $\bar{0}$ é o elemento neutro da adição em \mathbb{Z}_p .

A4) Dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, tome $\overline{p-a} \in \mathbb{Z}_p$, pois $0 \leq p-a \leq p-1$. Assim

$$\bar{a} \oplus \overline{p-a} = \overline{p-a} \oplus \bar{a} = \overline{(p-a)+a} = \bar{p} = \bar{0}.$$

Logo todo elemento de \mathbb{Z}_p possui oposto aditivo.

$$M1) \quad \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \bar{b} \otimes \bar{a}.$$

$$\text{M2)} \quad (\bar{a} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{c} = (\overline{a \cdot b}) \otimes \bar{c} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \bar{a} \otimes (\bar{b} \otimes \bar{c}).$$

M3) O elemento $\bar{1} \in \mathbb{Z}_p$ é tal que

$$\bar{1} \otimes \bar{a} = \bar{a} \otimes \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}$$

para todo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$.

M4) Primeiramente, como p é um número primo então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + py = 1$$

para todo $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Logo,

$$\overline{ax + py} = \bar{1}$$

$$\overline{ax} \oplus \overline{py} = \bar{1}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{x} + \bar{p} \otimes \bar{y} = \bar{1}$$

$$\bar{a} \otimes \bar{x} = \bar{1}$$

uma vez que $\bar{p} = \bar{0}$. Como \bar{x} é obtido pelo resto da divisão inteira de x por p , então $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p$. Observe que $x \neq 0$ pois $p \geq 2$ e $x \neq p$ pois senão $(a+p)y = 1$ o que é impossível uma vez que $p \geq 2$. Logo $\bar{x} \neq 0$ e assim todo elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ possui inverso multiplicativo.

$$\text{D)} \quad \bar{a} \otimes (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \otimes (\overline{b+c}) = \overline{a \cdot (b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} \oplus \overline{ac} = \bar{a} \otimes \bar{b} \oplus \bar{a} \otimes \bar{c}.$$

Portanto, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ é um corpo, como queríamos demonstrar. \diamond

Observação 1.1.2. 1. Se p não for um número primo, $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes)$ pode não ser corpo.

Por exemplo, em \mathbb{Z}_6 temos $\bar{2} \neq \bar{0}$ e $\bar{3} \neq \bar{0}$, mas

$$\bar{2} \otimes \bar{3} = \overline{2 \cdot 3} = \bar{6} = \bar{0}.$$

2. Para simplificar a notação vamos denotar \oplus por $+$ e \otimes por \cdot . Assim vamos dizer simplesmente que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ é um corpo.

1.3 Sistemas Lineares

Seja \mathbb{K} um corpo. Consideremos o problema de determinar n escalares, ou seja, n elementos x_1, x_2, \dots, x_n em \mathbb{K} que satisfaçam as condições

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

onde b_1, \dots, b_m e a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ são elementos de \mathbb{K} previamente conhecidos. Chamamos (1.1) de um **sistema de m equações lineares a n incógnitas**. Toda n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) de elementos de \mathbb{K} que satisfazem a cada uma das equações de (1.1) é chamada de uma **solução** do sistema.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0_{\mathbb{K}} \in K$, dizemos que o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \quad (1.2)$$

é um **sistema linear homogêneo**, ou que cada uma de suas equações é homogênea. Observe que tal sistema sempre possui solução, a saber, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$.

O método mais importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método do **escalonamento**. Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde o corpo considerado é \mathbb{R} .

Observe que multiplicando a segunda equação de (1.3) por -2 e somando o resultado à primeira equação obtemos

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

o que resulta em $x_2 = -x_3$. Agora se multiplicarmos a primeira equação de (1.3) por 3 e somarmos com a segunda, obtemos

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

e daí $x_1 = -x_3$.

Assim para que uma terna (x_1, x_2, x_3) de números reais seja solução de (1.3) deve satisfazer

$$x_1 = x_2 = -x_3.$$

Por outro lado, qualquer terna da forma $(a, a, -a)$ é solução de (1.3). Portanto a solução de (1.3) é da forma

$$(a, a, -a)$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

No caso de um sistema linear da forma (1.1), o processo de eliminação de variáveis será feito mediante o uso de 3 tipos de operações. São elas:

- e_1) Troca da posição de duas equações.
- e_2) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo.
- e_3) Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Estas três operações são chamadas de **operações elementares**.

Exemplo 1.1.3. *Considere o seguinte sistema sobre o corpo \mathbb{R} :*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Efetuada operações elementares podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\
 & \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow (-1/3)L_2 \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ -7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 7L_2 \\
 & \sim \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + (2/3)x_3 = (-2/3) \\ -(1/3)x_3 = -(2/3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim encontramos

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

Definição 1.2. Dois sistemas de equações lineares são chamados de **equivalentes** se, e somente, se toda solução de qualquer um dos sistemas é solução do outro.

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

com o objetivo de simplificar sua notação vamos escrevê-lo na forma

$$AX = B \quad (1.5)$$

onde

1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad ; \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

é chamada **matriz dos coeficientes do sistema**;

2.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

3.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1} \quad ; \quad b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{K}.$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (1.1) é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que é chamada de **matriz ampliada do sistema** ou **matriz aumentada do sistema**.

Na forma matricial as operações elementares são descritas como:

e_1) Trocar a i -ésima linha de A pela j -ésima linhas de A : $L_i \leftrightarrow L_j$;

e_2) Multiplicação da i -ésima linha de A por um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ não nulo: $L_i \rightarrow \alpha L_i$;

e_3) Substituição da i -ésima linha de A pela i -ésima linha mais α vezes a j -ésima linha:

$$L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j.$$

Observação 1.2.1. Denotaremos a matriz

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

onde $0_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da soma no corpo \mathbb{K} , simplesmente por 0.

Uma razão para nos restringirmos a estes três tipos simples de operações sobre linhas é que, tendo efetuado uma tal operação e sobre uma matriz A , podemos desfazer essa operação efetuando uma operação de mesmo tipo sobre $e(A)$.

Teorema 1.2. *A cada operação elementar sobre linhas e , corresponde uma operação elementar sobre linhas e' , do mesmo tipo que e , tal que $e'(e(A)) = A$ para qualquer matriz A . Em outras palavras, a operação inversa de uma operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas do mesmo tipo.*

Prova: Vamos verificar que cada uma das operações elementares possui uma operação inversa. Seja A uma matriz $m \times n$ sobre o corpo \mathbb{K}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e1) Suponha que e seja a operação que troca a linha i pela linha j de A . Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Então, seja e' a operação que troca a linha i pela linha j de $e(A)$. Assim

$$e'(e(A)) = A$$

como queríamos.

e2) Suponha que e seja a operação que multiplica a i -ésima de A por $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja e' a operação que multiplica a linha i de $e(A)$ por $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$. Então

$$e'(e(A)) = A.$$

e3) Suponha que e seja a operação que substitui a linha i de A pela linha i mais α vezes a linha j . Temos

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seja e' a operação que substitui a linha i de $e(A)$ pela linha i mais $(-\alpha)$ vezes a linha j . Então

$$e'(e(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} + (-\alpha)a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} + (-\alpha)a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{jn} + (-\alpha)a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

e assim

$$e'(e(A)) = A.$$

Portanto cada operação elementar sobre linhas possui uma operação inversa. \diamond

Definição 1.3. Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é **linha-equivalente** a A , se B for obtida de A através de uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de A .

Notação 1.3.1. $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

Exemplo 1.3.1. A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é linha equivalente à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\leftarrow +]{\text{ } -4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\text{ } 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mid \times -1 \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\text{ } -4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Teorema 1.3. Se X_1 e X_2 são duas soluções de

$$AX = 0,$$

então $\alpha X_1 + \beta X_2$ também é solução de $AX = 0$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.4. Se A e B são matrizes $m \times n$ que são linha-equivalentes, então os sistemas homogêneos de equações lineares $AX = 0$ e $BX = 0$ têm exatamente as mesmas soluções.

Prova: Suponha que podemos obter a matriz B à partir da matriz A por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_r = B.$$

Nesta situação, para provar que $AX = 0$ e $BX = 0$ tem as mesmas soluções basta provar que $A_i X = 0$ e $A_{i+1} X = 0$ tem as mesmas soluções, isto é, que uma operação elementar sobre linhas não altera o conjunto das soluções.

Assim podemos supor que B é obtida de A por meio de uma única operação elementar. Qualquer que seja a operação elementar, e_1 ou e_2 ou e_3 , cada equação do sistema $BX = 0$ será uma combinação das equações do sistema $AX = 0$. Como a inversa de uma operação elementar sobre linhas é ainda uma operação elementar sobre linhas, cada equação de $AX = 0$ também será uma combinação das equações em $BX = 0$. Logo toda solução de $AX = 0$ também é solução de $BX = 0$ e toda solução de $BX = 0$ também é solução de $AX = 0$, como queríamos. \diamond

Exemplo 1.3.2. Considere o sistema homogêneo $AX = 0$, onde:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Para encontrar a solução deste sistema só precisamos encontrar uma matriz B que seja linha equivalente à A e que seja mais fácil de determinar a solução do sistema resultante. Assim, vamos executar as operações elementares em A de modo a simplificá-la:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \times -1/2 \\ \leftarrow \times -1/2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + (1/2)x_3 - (7/2)x_4 = 0 \\ (15)/2x_3 - (55/2)x_4 = 0 \end{cases}.$$

Isolando x_3 na última equação temos a solução dada por

$$S = \left\{ \left(-\frac{17}{3}x_4, \frac{5}{3}x_4, \frac{11}{3}x_4, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Temos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^i \\ \leftarrow_+ \\ \leftarrow_+ \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+2i \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \mid \times \frac{3-2i}{13} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^{-(2+i)} \\ \leftarrow_+ \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x_1 = x_2 = 0$.

Definição 1.4. Uma matriz R $m \times n$ é chamada de **linha-reduzida** se:

(i) o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula de R é $1_{\mathbb{K}}$.

(ii) cada coluna de R que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos.

Exemplo 1.4.1. 1. Um exemplo de uma matriz linha-reduzida é a matriz identidade $n \times n$. Tal matriz pode ser definida por

$$I = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

O símbolo δ_{ij} é chamada **símbolo de Kronecher** e será utilizado com certa frequência.

2. As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não são linha-reduzidas.

Teorema 1.5. Toda matriz $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{K} é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida.

Prova: Seja A uma matriz $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{K} . Se todo elemento na primeira linha de A é $0_{\mathbb{K}}$, então a condição (a) de (1.4) está satisfeita no que diz respeito a linha 1. Se a linha 1 tem um elemento não nulo, seja r o menor inteiro positivo j tal que $a_{ir} \neq 0$. Multiplique a linha 1 por a_{ir}^{-1} e condição (a) de (1.4) está satisfeita em relação a linha 1. Agora, para cada $i \geq 2$, somemos $-a_{ir}$ vezes a linha 1 à linha i . Assim o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorre na coluna r , este elemento é $1_{\mathbb{K}}$, e todos os outros elementos da coluna r são nulos.

Considere agora a matriz que resultou das operações acima. Se todo elemento na linha 2 é nulo, nada há a fazer. Se algum elemento na linha 2 é não nulo, multiplicamos a linha 2 por um escalar de modo que o primeiro elemento não nulo da linha 2 seja $1_{\mathbb{K}}$. Caso o primeiro elemento não nulo da linha 1 ocorra na coluna r , o primeiro elemento não nulo da linha 2 não pode ocorrer na coluna r . Digamos então que ele ocorra na coluna r' . Somando múltiplos

adequados da linha 2 às diversas linhas, podemos fazer com que todos os elementos da coluna r' seja nulos, com exceção do elemento $1_{\mathbb{K}}$ da linha 2. O importante a ser observado é: ao efetuarmos estas últimas operações, não alteramos os elementos da linha 1 na colunas 1, 2, \dots , r ; além disso, não alteramos nenhum elemento da coluna r . É claro que, se a linha 1 fosse identicamente nula, as operações com a linha 2 não afetariam a linha 1.

Operando com uma linha de cada vez da maneira acima, é evidente que, com uma quantidade finita de passos, chegamos a uma matriz linha-reduzida. \diamond

Definição 1.5. Uma matriz R $m \times n$ é chamada uma **matriz linha-reduzida à forma em escada** se:

1. R é linha-reduzida;
2. toda linha de R cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem uma elemento não-nulo;
3. se as linhas 1, 2, \dots , r são as linhas não-nulas de R e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i , $i = 1, \dots, r$, então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Exemplo 1.5.1. 1. A matriz identidade e a matriz nula são linha-reduzidas à forma escada;

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Não é linha-reduzida à forma escada.}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Não é linha-reduzida à forma escada.}$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ É linha-reduzida à forma escada.}$$

Teorema 1.6. Toda matriz A $m \times n$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada.

Prova: Sabemos que A é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida. Portanto, basta notar que, efetuando uma quantidade finita de permutações das linhas de uma matriz linha-reduzida, podemos transformá-la numa matriz linha-reduzida à forma em escada. \diamond

Definição 1.6. Dada uma matriz A $m \times n$, seja B $m \times n$ a matriz linha-reduzida à forma em escada linha-equivalente a A . O **posto** de A , denotado por p , é o número de linhas não-nulas de B . A **nulidade** de A é o número $n - p$.

Exemplo 1.6.1. Qual o posto e a nulidade da matriz A , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Precisamos primeiro reduzir A a sua forma escada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right]^{-1} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (1/2) \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -4 \end{array} \right]_{-2}^{-4} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \mid \times 1/8 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -2 \end{array} \right]_{-3}^{-2} \end{array} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo o posto de A é $p = 3$ e a nulidade é $n - p = 4 - 3 = 1$.

Considere o sistema

$$AX = B \tag{1.6}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo \mathbb{K} e X é uma matriz $n \times 1$. Observe que, enquanto um sistema homogêneo $AX = 0$ sempre admite a solução

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}},$$

um sistema não homogêneo pode ter:

1. Uma única solução $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e determinado**.
2. Mais de uma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**. Caso o corpo \mathbb{K} tenha infinitos elementos, o sistema terá infinitas soluções.
3. Nenhuma solução. Neste caso dizemos que o sistema é **impossível**.

Com o objetivo de resolver o sistema (1.6) vamos começar formando a matriz ampliada

$$P = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}.$$

Sabemos que P é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma em escada R . A última coluna de R contém elementos z_1, z_2, \dots, z_m que são resultados das operações elementares aplicadas à matriz P . Seja

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}.$$

Então R pode ser escrita como $R = [R' | Z]$. Como no caso homogêneo, é possível mostrar que os sistemas

$$AX = B \text{ e } R'X = Z$$

possuem exatamente as mesmas soluções.

As possibilidades para as soluções de tal sistema são descritas no seguinte teorema:

Teorema 1.7. *Considere o sistema*

$$AX = B$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $m \times 1$, ambas com entradas no corpo \mathbb{K} e X é uma matriz $n \times 1$. Então:

1. *O sistema tem solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*
2. *Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p = n$, então a solução é única.*
3. *Se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto p e $p < n$, então podemos escolher $n - p$ variáveis, e as outras p variáveis serão dadas em função destas $n - p$ variáveis escolhidas.*

O número $n - p$ é chamado de **grau de liberdade** e as $n - p$ variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

Prova: 1ª Parte: *Se existe solução para o sistema, então a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes têm o mesmo posto:* Para mostrar isso, vamos provar que se a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes tiverem postos diferentes, então o sistema não terá solução. Observe primeiro que o posto da matriz ampliada não pode ser menor que o posto da matriz dos coeficientes uma vez que a matriz ampliada é formada a partir da matriz dos coeficientes. Assim o único caso possível é que o posto da matriz ampliada ser maior que o posto da matriz dos coeficientes. Então esta matriz, quando reduzida à forma em escada deve conter uma linha da forma

$$\left(0_{\mathbb{K}} \quad 0_{\mathbb{K}} \quad \cdots \quad 0_{\mathbb{K}} \quad | \quad z_r \right)$$

onde $z_r \neq 0_{\mathbb{K}}$. Logo o sistema associado a essa matriz tem uma equação do tipo

$$0_{\mathbb{K}}x_1 + 0_{\mathbb{K}}x_2 + \cdots + 0_{\mathbb{K}}x_n = z_r$$

o que é impossível. Logo não existe solução.

2ª Parte: *Se o posto é igual, então existe solução:* Nesta situação podem ocorrer dois casos:

1. Se $p = n$, então a matriz linha-reduzida à forma em escada tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & z_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & z_n \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema será

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_n = z_n.$$

2. Se $p \neq n$, então devemos ter $p < n$. Caso $p > n$, como a matriz está na forma escada o elemento $1_{\mathbb{K}}$ deve ocorrer em duas linhas diferentes, mas na mesma coluna. Mas neste caso, podemos anular uma destas linhas repetidas. Logo, $p < n$. Neste caso a matriz na forma escada pode ter a forma:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+1} & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+1} & a_{2p+2} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+1} & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - a_{1p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2 = z_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - a_{2p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+1}x_{p+1} - a_{pp+2}x_{p+2} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ as variáveis livres.

(b) Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

$$\begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1p+2} & a_{1p+3} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2p+2} & a_{2p+3} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} & a_{pp+2} & a_{pp+3} & \cdots & a_{pn} & z_p \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}.$$

Neste caso teremos

$$\begin{cases} x_2 = z_1 - a_{1p+2}x_{p+2} - a_{1p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_3 = z_2 - a_{2p+2}x_{p+2} - a_{2p+3}x_{p+3} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_p = z_p - a_{pp+2}x_{p+2} - a_{pp+3}x_{p+3} + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá mais de uma solução, sendo $x_1, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ as variáveis livres.

Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que para qualquer posto $p < n$ teremos um sistema com mais de uma solução e $n - p$ variáveis livres.

Portanto a condição (i) do teorema está provada.

Observe que os itens (ii) e (iii) foram automaticamente demonstrados nos itens (a) e (b) anteriores.

Logo o teorema está provado. \diamond

Exemplo 1.6.2. *Encontre a solução dos seguintes sistemas lineares:*

$$1. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Solução: A matriz dos coeficientes deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \leftarrow + \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 1$ e a nulidade é 2, ou seja, temos duas variáveis livres, a saber y e z . Logo a solução é dada por

$$x = -3y - z; \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Que pode ser escrita como

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-3y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

$$2. \quad \begin{cases} \bar{1}x + \bar{4}y + \bar{2}z = \bar{6} \\ \bar{1}x + \bar{5}y + \bar{2}z = \bar{2} \\ \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{4} \\ \bar{4}x + \bar{5}y + \bar{1}z = \bar{5} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}_7.$$

Solução: A matriz ampliada do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A a forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{6}} \xrightarrow{\bar{5}} \xrightarrow{\bar{3}} \\ \leftarrow + \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\bar{3}} \xrightarrow{\bar{5}} \xrightarrow{\bar{4}} \\ \leftarrow + \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Assim o posto de A é $p = 2$ e a nulidade é 1. Logo temos uma única variável livre que é z . A solução então é dada por

$$x = \bar{1} + \bar{5}z, \quad y = \bar{3}, \quad z \in \mathbb{Z}_7.$$

O conjunto solução é

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_7\} = \{(\bar{1} + \bar{5}z, \bar{3}, z) \mid z \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Tal conjunto contém exatamente 7 soluções distintas.

$$3. \quad \begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{7} \\ \bar{3}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{2}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{9} \\ \bar{1}x_1 + \bar{4}x_3 + \bar{3}x_4 = \bar{6} \\ \bar{5}x_1 + \bar{1}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{9} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Z}_{11}.$$

Solução: A matriz ampliada do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix} &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \bar{8} \quad \leftarrow \bar{9} \quad \leftarrow \bar{6} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \bar{10} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ | \times \bar{3} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{8} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \bar{10} \quad \leftarrow \bar{7} \quad \leftarrow \bar{8} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{10} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} & \bar{9} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ | \times \bar{9} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{10} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \bar{10} \quad \leftarrow \bar{9} \quad \leftarrow \bar{1} \end{array} \\
 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{8} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Assim o posto de A é $p = 4$ e a nulidade é 0 . Logo o sistema tem uma única solução dada por

$$x_1 = \bar{6}, x_2 = \bar{4}, x_3 = \bar{8}, x_4 = \bar{4}.$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{Q}.$$

Solução: A matriz dos coeficientes deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares para reduzir A à forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow_{+} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow_{+} \\ \leftarrow_{+} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema não tem solução. Note que o posto da matriz ampliada é $p = 3$ e a posto da matriz dos coeficientes é 2.

1.4 Matrizes e Determinantes

Seja \mathbb{K} um corpo. Denotamos por $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $p \times q$ com entradas em \mathbb{K} . A soma e o produtos de matrizes são definidos de modo usual.

Quando $p = q = n$, dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, que denotaremos simplesmente por $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, é **quadrada**. Tal conjunto tem elemento neutro para a multiplicação de matrizes que é a **matriz identidade** I_n dada por

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}.$$

Definição 1.7. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$ é chamada uma **inversa à esquerda** de A ; uma matriz $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_n$ é chamada uma **inversa à direita** de A . Se $AB = BA = I_n$, então A é chamada **invertível**.

Proposição 1.7.1. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui uma inversa à esquerda B e uma inversa à direita C , então $B = C$.

Proposição 1.7.2. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Se A é invertível, então A^{-1} também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Se A e B são invertíveis, então AB também o é e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dada uma matriz A como encontrar sua inversa? Por exemplo, para $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como achar

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

tal que $AB = BA = I_2$? Queremos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então os seguintes sistemas para resolver:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases}.$$

Assim podemos considerar a matriz ampliada contendo colunas correspondentes a cada um dos sistemas e reduzi-la à forma em escada:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mid \times (-1/2) \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

é tal que $AB = BA = I_2$.

Portanto, determinar se uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui inversa ou não é equivalente à resolver um sistema linear. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.8. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é invertível;*
2. *O sistema homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial;*
3. *O sistema $AX = Y$, onde Y é uma matriz $n \times 1$, possui uma única solução para qualquer Y .*

Corolário 1.8.1. *Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e se uma sequência de operações elementares sobre linhas reduz A à matriz unidade, então essa mesma sequência de operações elementares sobre linhas quando aplicadas à matriz I_n , resulta em A^{-1} .*

Exemplo 1.7.1. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a inversa de A , se existir.

Solução: *Temos*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ | -1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ | 1/3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \right] \end{array} \\
 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Faremos agora a definição de **determinante** de modo indutivo na ordem de uma dada matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então a matriz $A \in \mathbb{M}_1(\mathbb{K})$ é da forma

$$A = (a_{11})$$

e neste caso definimos

$$\det A = a_{11} \in \mathbb{K}.$$

Suponha que $n > 1$ e que $\det B$ esteja definido para todas as matrizes $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$ com $p < n$ e seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Para cada (i, j) , defina a matriz A_{ij} formada a partir de A retirando-se a sua i -ésima linha e a sua j -ésima coluna. É claro que $A_{ij} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ e portanto $\det A_{ij}$ está definido. Defina então

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 1.7.2. 1. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 1, temos

$$\det A = \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = ad - bc.$$

Obteríamos o mesmo resultado se considerássemos a linha 2.

2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K}).$$

Fixada a linha 2, temos

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} \\ &= (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22} + (-1)^{2+3} a_{23} \det A_{23} \\ &= -a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Daí

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Propriedades do determinante: Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

1. $\det(AB) = \det A \det B$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
3. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Observação 1.7.1. É possível mostrar que o determinante também pode ser definido a partir das colunas de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Teorema 1.9. Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0_{\mathbb{K}}$.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

Em todo este capítulo \mathbb{K} denotará um corpo.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio V é um **espaço vetorial** sobre um corpo \mathbb{K} se em seus elementos, chamados **vetores**, estiverem definidas duas operações satisfazendo:*

*A) A cada par $u, w \in V$ corresponde um vetor $u + w \in V$, chamado **soma** de u e w , de modo que:*

A1) $u + w = w + u$, para todos $u, w \in V$;

A2) $(u + w) + v = u + (w + v)$, para todos u, w e $v \in V$;

*A3) Existe em V um vetor, denominado **vetor nulo** e denotado por 0_V , tal que*

$$0_V + u = u$$

para todo $u \in V$.

A4) Para cada vetor $u \in V$, existe um vetor em V , denotado por $-u$ tal que

$$u + (-u) = 0_V.$$

M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot u \in V$, denominado **produto por escalar** de α por u de modo que:

M1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$;

M2) $1_{\mathbb{K}}v = v$ para todo $v \in V$, onde $1_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação em \mathbb{K} .

D1) $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos $u, w \in V$;

D2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.

Observação 2.1.1. Vamos usar a expressão **\mathbb{K} -espaço vetorial** para nos referir a um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} .

Exemplo 2.1.1. 1. Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

2. Seja \mathbb{K} um corpo. Considere o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

e define

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ para todos $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Com estas operações \mathbb{K}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Assim temos:
 - \mathbb{R}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} ;
 - \mathbb{C}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} ;
 - $(\mathbb{Z}_p)^n$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p .

3. \mathbb{C}^n é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} se definirmos:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ para todos $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$;
- $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

4. O conjunto \mathbb{Q} é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} , mas não é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .
(Por quê?)

5. Considere o conjunto dos polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n; n \geq 0\}.$$

Dados $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ em $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, suponha que $n < m$ e defina:

- $(p+q)(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$
- $(\alpha p)(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0.$

Assim $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial.

6. O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ com coeficientes em \mathbb{K} é um \mathbb{K} -espaço vetorial com a soma usual de matrizes e a multiplicação por escalar usual.

Definição 2.2. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

1. Um vetor $w \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

2. Seja \mathcal{B} um subconjunto de V . Dizemos que \mathcal{B} é um **conjunto gerador** (ou que \mathcal{B} gera V) se todo elemento de V for uma combinação linear de uma quantidade finita de elementos de \mathcal{B} .

Exemplo 2.2.1. 1. O vetor $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ e $u_3 = (-1, 0, 1)$. De fato, precisamos encontrar α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(1, 1, 1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

encontramos que suas soluções são dadas por

$$\alpha = 1 + \gamma$$

$$\beta = -1 - 2\gamma$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$. Logo o vetor $(1, 1, 1)$ é de fato uma combinação linear dos vetores u_1 , u_2 e u_3 . Podemos tomar, por exemplo, $\gamma = 2$ e escrever

$$(1, 1, 1) = 3(1, 2, 3) - 7(0, 1, 2) + 2(-1, 0, 1).$$

2. O vetor $(1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ não é uma combinação linear dos vetores $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ e $u_3 = (-1, 0, 1)$. De fato, suponha que α , β e $\gamma \in \mathbb{R}$ são tais que:

$$(1, -2, 2) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha - \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + \gamma).$$

Assim resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}.$$

A matriz linha-reduzida à forma em escada deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e portanto o sistema é impossível. Logo o vetor $(1, -2, 2)$ não é uma combinação linear dos vetores u_1 , u_2 e u_3 .

3. Considere o \mathbb{R} -espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Dado um vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Assim qualquer vetor de \mathbb{R}^3 é uma combinação linear dos vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Logo o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto gerador para \mathbb{R}^3 .

4. $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (-1, 0, 0), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1)\}$ também é um conjunto gerador para \mathbb{R}^3 como \mathbb{R} -espaço vetorial. De fato, dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, queremos encontrar $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = x_1(1, 0, 1) + x_2(1, 1, 0) + x_3(1, 1, 1) + x_4(-1, 0, 0) + x_5(-1, -1, 0) + x_6(-1, -1, -1).$$

O que fornece o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = a \\ x_2 + x_3 - x_5 - x_6 = b \\ x_1 + x_3 - x_6 = c \end{cases}$$

cuja matriz linha-reduzida à forma em escada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & b + c - a \end{bmatrix},$$

assim o sistema é possível e indeterminado, com posto 3 e nulidade 3. Sua solução é descrita pela equações

$$x_1 = a - b + x_4$$

$$x_2 = a - c + x_4 + x_5$$

$$x_3 = b + c - a - x_4 + x_6$$

onde x_4, x_5 e $x_6 \in \mathbb{R}$. Portanto \mathcal{B}_1 é um conjunto gerador para \mathbb{R}^3 .

5. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios em \mathbb{R} . O subconjunto $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ visto como um \mathbb{R} -espaço vetorial.

6. O conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ gera \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espaço vetorial. No entanto, este conjunto não gera \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espaço vetorial pois, por exemplo, $(i, 0)$ não é combinação linear dos vetores em \mathcal{B} . De fato, se α e β são tais que

$$(i, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

então $\alpha = i$ o que é impossível em \mathbb{R} .

Observação 2.2.1. 1. Por convenção diremos que o conjunto vazio gera o \mathbb{K} -espaço vetorial $\{0\}$.

2. Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador. (Qual?)

Definição 2.3. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e \mathcal{B} um subconjunto de V .

1. Dizemos que \mathcal{B} é **linearmente independente** ou simplesmente **L.I.**, se o único meio de escrevermos

$$0_V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

onde $u_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, 2, \dots, n$ é tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$.

2. Dizemos que o conjunto \mathcal{B} é **linearamente dependente** ou simplesmente **L.D.**, se existem vetores distintos $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{B}$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Exemplo 2.3.1. 1. Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, 1)\} \subseteq \mathbb{C}^2$. Considerando \mathbb{C}^2 como um \mathbb{C} -espaço vetorial, então \mathcal{B} é L.D. pois

$$(0, 0) = 0(1, 0) + 0(i, 0) + 1(0, 1) + i(0, i).$$

Agora, considerando \mathbb{C}^2 com um \mathbb{R} -espaço vetorial, o conjunto \mathcal{B} é L.I.. De fato, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ são tais que

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(i, 0) + \gamma(0, 1) + \delta(0, i)$$

então $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

2. Considerando \mathbb{R}^2 como um \mathbb{R} -espaço vetorial, o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ é L.D. pois

$$(0, 0) = \frac{1}{2}(1, -1) - (1, 0) + \frac{1}{2}(1, 1).$$

Observação 2.3.1. 1. Por convenção, o conjunto vazio é L.I.

2. Todo conjunto contendo o vetor nulo é L.D.
 3. Todo espaço vetorial não-nulo possui um conjunto L.I. não vazio. (Qual?)
 4. Todo subconjunto de um conjunto L.I. é L.I.

Definição 2.4. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Dizemos que um subconjunto \mathcal{B} de V é uma **base** de V se:

- i) \mathcal{B} for um conjunto gerador de V ;
 ii) \mathcal{B} for L.I.

Exemplo 2.4.1. 1. $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 como \mathbb{R} -espaço vetorial.

2. $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espaço vetorial.
 3. $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espaço vetorial.
 4. Considere $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ como \mathbb{C} -espaço vetorial. Sabemos que o conjunto

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

gera $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ como \mathbb{C} -espaço vetorial. Suponha que existam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Como um polinômio de grau n em \mathbb{C} não pode ter mais do que n raízes, então $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e portanto \mathcal{B} é L.I. Logo \mathcal{B} é uma base de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Observação 2.4.1. Pelas Observações 2.2.1 item 1 e 2.3.1 item 1, o conjunto vazio é uma base do \mathbb{K} -espaço vetorial $\{0\}$.

Definição 2.5. Dizemos que um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} é **finitamente gerado** se ele possui um conjunto gerador finito.

Proposição 2.5.1. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Suponha que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V . Então todo conjunto L.I de vetores de V tem no máximo m elementos.

Prova: Vamos provar que todo conjunto de elementos de V que contenha mais do que m vetores é L.D. Para tanto, seja $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ com $n > m$. Como $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V , então existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tais que para cada $j = 1, 2, \dots, n$ temos

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i.$$

Assim queremos mostrar que existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Agora,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i.$$

Suponha que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$. Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{12} + \dots + \lambda_n \alpha_{1n} = 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{m1} + \lambda_2 \alpha_{m2} + \dots + \lambda_n \alpha_{mn} = 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as incógnitas e $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, então a matriz linha-reduzida à forma em escada do sistema (2.1) tem posto menor que n , ou seja, o sistema (2.1) tem solução não trivial. Assim existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ não todos nulos tais que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}},$$

ou seja, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ não todos nulos de modo que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Portanto o conjunto \mathcal{A} é L.D., como queríamos. \diamond

Corolário 2.0.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial não nulo e finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam \mathcal{B} e \mathcal{B}' duas bases de V . Como V é finitamente gerado, segue da Proposição 2.5.1 que \mathcal{B} e \mathcal{B}' são finitos pois são L.I e possuem m e m' elementos, respectivamente.

Considerando \mathcal{B} como conjunto gerador de V e \mathcal{B}' L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m' \leq m$. Por outro lado, considerando \mathcal{B}' como conjunto gerador de V e \mathcal{B} L.I., segue da Proposição 2.5.1 que $m \leq m'$.

Logo $m = m'$, ou seja, duas bases têm sempre o mesmo número de elementos. \diamond

Definição 2.6. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. Se V admite uma base finita, então chamamos de **dimensão** de V , e denotamos por $\dim_{\mathbb{K}} V$, o número de elementos em tal base.*

Exemplo 2.6.1. 1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$;

2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$;

3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$;

4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Corolário 2.0.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} e de dimensão $n \geq 1$. Seja \mathcal{B} um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. \mathcal{B} é uma base de V ;
2. \mathcal{B} é L.I.;
3. \mathcal{B} é um conjunto gerador de V .

Proposição 2.6.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto L.I. em V . Se existir $u \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , então $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$ é L.I.*

Prova: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ escalares tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u = 0_u.$$

Se $\alpha_{n+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$ então podemos escrever

$$u = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) u_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) u_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) u_n$$

e então u é combinação linear de u_1, \dots, u_n o que contradiz nossa hipótese. Assim $\alpha_{n+1} = 0_{\mathbb{K}}$ e daí obtemos

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_u.$$

Mas $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é L.I, logo $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$ é L.I. \diamond

Teorema 2.1. *Todo espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado possui uma base.*

Prova: Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial não-nulo e finitamente gerado. Então V possui um conjunto gerador finito, digamos com m elementos, $m > 1$. Seja $u_1 \in V$, $u_1 \neq 0_V$. Então $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}$ é L.I. Se \mathcal{B}_1 gera V então \mathcal{B}_1 é uma base de V . Caso contrário, existe $u_2 \in V$ tal que u_2 não é um múltiplo escalar de u_1 . Pela Proposição 2.6.1, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2\}$ é L.I. Novamente, se \mathcal{B}_2 gera V , então \mathcal{B}_2 é uma base de V . Caso contrário, existe $u_3 \in V$ tal que u_3 não é uma combinação linear de u_1 e u_2 . Daí, $\mathcal{B}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I. Continuando com este processo chegamos a uma base de V ou obtemos conjuntos L.I. com um número arbitrário de elementos. A segunda opção não é possível por causa da Proposição 2.5.1. Portanto, com este processo obtemos uma base de V . \diamond

Teorema 2.2. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial finitamente gerado e seja \mathcal{B} um conjunto L.I. em V . Então existe uma base de V contendo \mathcal{B} .*

Proposição 2.6.2. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} \subseteq V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \mathcal{B} é uma base de V ;
- (ii) Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de \mathcal{B} .

Prova:

(i) \Rightarrow (ii) Suponha que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ seja um base de V . Em particular \mathcal{B} gera V . Seja $u \in V$ e suponha que existam escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i.$$

Daí

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0_V$$

e como \mathcal{B} é L.I segue que $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ como queríamos.

(ii) \Rightarrow (i) Agora suponha que cada elemento de V se escreva de maneira única como combinação linear de elementos de \mathcal{B} . Assim, \mathcal{B} gera V . Resta mostrar que \mathcal{B} é L.I. Sejam então $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Como $0_V = 0_{\mathbb{K}} u_1 + \dots + 0_{\mathbb{K}} u_n$, segue então da unicidade que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ e daí \mathcal{B} é L.I. Portanto, \mathcal{B} é uma base de V .

◇

2.1 Subespaços

Definição 2.7. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. Um subconjunto não vazio W de V é um **subespaço vetorial** de V se a restrição das operações de V a W torna W um \mathbb{K} -espaço vetorial.*

Exemplo 2.7.1. a) *O subconjunto $W = \{0_V\}$ é um subespaço vetorial de qualquer espaço vetorial V . O próprio V como subconjunto de V é também um subespaço vetorial. Estes dois subespaços são chamados de **subespaços triviais**.*

b) *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $w \in V$. Então o conjunto $\mathbb{K}w = \{\alpha w \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ é um subespaço vetorial de V .*

Teorema 2.3. *Um subconjunto não vazio W de um \mathbb{K} -espaço vetorial V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores $u_1, u_2 \in W$ e cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\lambda u_1 + u_2 \in W$.*

Prova: Exercício! ◇

Exemplo 2.7.2. 1. $V = \mathbb{R}^5$; $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V .

$$2. V = M_n(\mathbb{K}); UT_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\} \text{ é um subespaço de } V.$$

3. $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço. Por exemplo, $u = (1, 1)$, $v = (2, 4) \in W$ e no entanto $u + v \notin W$.

Proposição 2.7.1. *Se W_1 e W_2 são subespaços de um \mathbb{K} -espaço vetorial V então*

a) $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V . De fato, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço tanto de W_1 quanto de W_2 .

b) $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V .

Prova: Exercício! ◇

Proposição 2.7.2. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial não nulo e de dimensão finita. Se W é um subespaço não trivial de V , então $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$.*

Prova: Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W . Em particular \mathcal{B} é um conjunto L.I. de V . Como $W \neq V$, existe $u \in V$ tal que $u \notin W$ e assim u não é gerado pelos elementos de \mathcal{B} . Daí pela Proposição 2.6.1, $\{w_1, \dots, w_n, u\}$ é L.I.. Logo, uma base de V conterà mais elementos que o conjunto \mathcal{B} , isto é, $\dim_{\mathbb{K}} W < \dim_{\mathbb{K}} V$. ◇

Proposição 2.7.3. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial, W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V , ambos de dimensão finita. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Prova: Vamos supor primeiro que $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$. Como W_1 e W_2 são de dimensão finita, então $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ também o são. Assim seja $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial tanto de W_1 como de W_2 , pelo Teorema 2.2 podemos estender \mathcal{B} a uma base de W_1 e a uma base de W_2 . Sejam $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r\}$ uma base de W_1 e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_p\}$ uma base de W_2 . Note que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_2$. Vamos então mostrar que $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_p\}$ é uma base de $W_1 + W_2$. Primeiro mostraremos que \mathcal{A} gera $W_1 + W_2$.

Seja $v \in W_1 + W_2$. Então $v = x + y$ onde $x \in W_1$ e $y \in W_2$. Mas \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bases de W_1 e W_2 , respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j \\ y &= \sum_{i=1}^n \delta_i w_i + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l \end{aligned}$$

com $\alpha_i, \beta_j, \delta_i, \gamma_l \in \mathbb{K}$. Daí

$$v = x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \delta_i) w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l$$

e então \mathcal{A} gera $W_1 + W_2$.

Agora, precisamos mostrar que \mathcal{A} é L.I.. Considere então a soma

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^r \beta_j v_j + \sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = 0_V$$

onde $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in \mathbb{K}$. Assim

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^r (-\beta_j) v_j \in W_1 \cap W_2 \quad (2.2)$$

pois é uma combinação linear de elementos de \mathcal{B}_1 e de \mathcal{B}_2 , simultaneamente. Logo, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

isto é,

$$\sum_{l=1}^p \gamma_l u_l + \sum_{i=1}^n (-\lambda_i) w_i = 0_V.$$

Mas \mathcal{B} é L.I., daí $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Assim podemos reescrever (2.2) como

$$\sum_{i=1}^n (-\alpha_i)w_i + \sum_{j=1}^r (-\beta_j)v_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

Mas \mathcal{B}_1 é L.I., donde $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0_{\mathbb{K}}$. Isto é, \mathcal{A} é L.I..

Portanto \mathcal{A} é uma base de $W_1 + W_2$ e assim

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases de W_1 e W_2 , respectivamente. Analogamente ao caso anterior, mostra-se que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $W_1 + W_2$. \diamond

Definição 2.8. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$. O **subespaço gerado** por S é definido como o subconjunto de V formado por todas as combinações lineares de u_1, \dots, u_n . Denotaremos tal conjunto por*

$$[u_1, \dots, u_n] = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Proposição 2.8.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. O conjunto $[v_1, \dots, v_n]$ é um \mathbb{K} -subespaço vetorial de V .*

Exemplo 2.8.1. 1. Dado $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ o \mathbb{C} -espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em \mathbb{C} , seja $\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Então

$$[1, x, x^2, x^3, x^4] = \{a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^4\} = \{f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \mid \deg f(x) \leq 4\}$$

é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

2. Considere \mathbb{R}^5 como um \mathbb{R} -espaço vetorial e seja $\{(1, 2, 0, 3, 0); (0, 0, 1, 4, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Então

$$[(1, 2, 0, 3, 0); (0, 0, 1, 4, 0); (0, 0, 0, 0, 1)] = \{(\alpha, 2\alpha, \beta, 3\alpha + 4\beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^5 .

3. Considere $W = [(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)]$ um \mathbb{R} -espaço vetorial. Determinar $\dim_{\mathbb{R}} W$.

Solução: Inicialmente, vamos verificar se o conjunto $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)\}$ é L.I. ou L.D.. Para isso, sejam x, y e $z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1, 2, 3) + y(0, 1, 2) + z(-1, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Assim vemos que $x = z$ e $y = -2z$ são soluções para o sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e com isso $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (-1, 0, 1)\}$ é L.D. Daí $\dim_{\mathbb{R}} W \leq 2$. Agora note que $(1, 2, 3)$ não é múltiplo escalar de $(0, 1, 2)$. Logo, $\{(1, 2, 3); (0, 1, 2)\}$ é L.I. e então $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

4. Mostre que

$$S = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{3} \\ \overline{4} \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \\ \overline{5} \\ \overline{3} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{6} \\ \overline{5} \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{5} \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7)$ como \mathbb{Z}_7 -espaço vetorial.

Solução: Uma base de $\mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7)$ é dada por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\},$$

daí $\dim_{\mathbb{Z}_7} \mathbb{M}_{5 \times 1}(\mathbb{Z}_7) = 5$. Assim como S possui 5 elementos, basta mostrar que S é

L.I.. O que é imediato pois

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

só é possível se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \bar{0}$.

5. Seja $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Determine uma base de V contendo os polinômios

$$p_1(x) = 1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4$$

$$p_2(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3 + 3x^4$$

$$p_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4.$$

Solução: Sabemos que $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ é uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Tal base é chamada de **base canônica** de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Assim $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = 5$. Para determinar uma base contendo $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, começamos determinando se tais vetores são L.I. ou L.D.. Para isso montamos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em A para reduzi-la a forma em escada

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{---} -2 \\ \leftarrow + \\ \text{---} + \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{---} -1 \\ \leftarrow + \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{---} -1 \\ \leftarrow + \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M. \end{aligned}$$

Como a matrix M não possui nenhuma linha nula, então $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é L.I. em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Observe que M não tem 1 na segunda e quarta colunas. Assim vamos

adicionar a M uma linha com 1 na segunda coluna e outra com 1 na quarta coluna, obtendo

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim $\mathcal{B}' = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), x, x^3\}$ forma uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ contendo $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

6. Considere $V = \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Verifique se o conjunto formado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 11 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

é L.D. ou L.I. em V .

Solução: Considere a matriz M formada pelas entradas das matrizes A_1 , A_2 e A_3 escritas como linhas de M

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares em M :

$$\begin{aligned} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} & \mid \times -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 11 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{---}^{-1} \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{---}^2 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como a terceira linha é nula, então o vetor A_3 é uma combinação linear de A_1 e A_2 , ou seja, $\{A_1, A_2, A_3\}$ é L.D..

2.2 Espaços de dimensão infinita

Definição 2.9. *Seja X um conjunto qualquer.*

1. Uma **relação de ordem parcial sobre X** , que denotaremos por \prec , é uma relação que satisfaz:
 - (a) $y \prec y$ para todo $y \in X$ (propriedade reflexiva);
 - (b) Se $y \prec z$ e $z \prec t$ com $y, z, t \in X$, então $y \prec t$ (propriedade transitiva);
 - (c) Se $y \prec z$ e $z \prec y$, com $y, z \in X$, então $y = z$ (propriedade antissimétrica).
2. Uma **relação de ordem total sobre X** é uma relação de ordem parcial \prec sobre X com a propriedade que para quaisquer $y, z \in X$, ou $y \prec z$ ou $z \prec y$.
3. Um **conjunto parcialmente ordenado** é um par (X, \prec) consistindo de um conjunto X e uma ordem parcial \prec sobre o mesmo. De modo análogo, definimos um **conjunto totalmente ordenado**.
4. Considere (X, \prec) um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento $\alpha \in X$ é denominado **maximal** se $\alpha \prec \beta$, para $\beta \in X$, então $\alpha = \beta$.
5. Seja $A \subseteq X$. Um elemento $m \in X$ é denominado uma **cota superior para A** se $x \prec m$, para todo $x \in A$.

Exemplo 2.9.1. 1. A ordem natural do conjunto dos números reais \mathbb{R} , \leq , é uma relação de ordem total.

2. Considere em \mathbb{N} a seguinte relação: $a \prec b$ se, e somente se, $a = kb$ para $k \in \mathbb{N}$. Então \prec é uma relação de ordem parcial em \mathbb{N} .

Solução: De fato,

- (a) $a \prec a$ pois $a = a1$.
- (b) Se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a = k_1b$ e $b = k_2c$. Daí $a = (k_1k_2)c$, ou seja, $a \prec c$.
- (c) Se $a \prec b$ e $b \prec a$, então $a = k_1b$ e $b = k_2a$. Logo $k_1 = k_2 = 1$ e assim $a = b$.

A ordem não é total pois, por exemplo, 2 e 3 não são comparáveis.

Agora considere o subconjunto

$$\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Tal conjunto é totalmente ordenado por \prec . O conjunto $\mathcal{P}_1 = \{2, 4, 8, 3, 9, 27\}$ é parcialmente ordenado por \prec e possui dois elementos maximais que são 8 e 27.

3. Seja \mathcal{A} uma coleção qualquer de conjuntos. A inclusão de conjuntos, \subseteq , é uma relação de ordem parcial sobre \mathcal{A} . Não é, de modo geral, uma ordem total.
4. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ a classe de todos os subconjuntos de X . Então $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Seja \mathcal{B} qualquer classe de subconjuntos de X , então a união de todos os conjuntos $A \in \mathcal{B}$ é uma cota superior para \mathcal{B} . Por exemplo, para $X = \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}(X)$ formado por todos os subconjuntos de \mathbb{N} . Considere \mathcal{B} dado por

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A = \{2k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Assim $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{2k\}$ é uma cota superior para \mathcal{B} .

Lema 2.9.0.1 (Lema de Zorn). *Seja X um conjunto parcialmente ordenado com a propriedade que cada subconjunto totalmente ordenado admite uma cota superior. Então X contém um elemento maximal.*

Teorema 2.4. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e seja \mathcal{C} um conjunto L.I. em V . Então existe uma base \mathcal{B} de V contendo \mathcal{C} .*

Prova: Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e \mathcal{C} um subconjunto L.I. de V . Considere \mathcal{P} a classe de todos os subconjuntos L.I. em V que contenham \mathcal{C} . É claro que \mathcal{P} é não vazio, já que o próprio conjunto \mathcal{C} pertence a \mathcal{P} . Além disso, \mathcal{P} é parcialmente ordenado por inclusão. Para usar o Lema de Zorn, precisamos mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{P} tem uma cota superior. Com esse objetivo, considere $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{P} . O candidato natural para cota superior de \mathcal{D} é a

união de todos os conjuntos \mathcal{A}_α em \mathcal{D} . Precisamos mostrar que $\mathcal{A} = \cup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ é L.I.. Seja então $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um subconjunto finito de \mathcal{A} . Daí para cada $i = 1, \dots, n$ existe $\alpha_i \in I$ tal que $v_i \in \mathcal{A}_{\alpha_i}$. Como \mathcal{A} é totalmente ordenado, podemos reorganizar os índices i de tal modo que $\mathcal{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$. Agora cada \mathcal{A}_{α_i} é L.I. pois pertencem a \mathcal{P} , então como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_n}$, segue que \mathcal{L} também é L.I.. Como \mathcal{L} é qualquer conjunto finito, segue que \mathcal{A} é L.I.. Assim \mathcal{D} possui uma cota superior. Segue do Lema de Zorn que \mathcal{P} tem elemento maximal, que vamos chamar de \mathcal{B} . Provemos que \mathcal{B} é uma base de V . Primeiro como \mathcal{B} é um elemento de \mathcal{P} , então \mathcal{B} é L.I.. Resta então provar que \mathcal{B} gera V . Para isso, suponha que existe $w \in V$ que não é gerado por \mathcal{B} . Assim $\mathcal{B} \cup \{w\}$ é L.I.. Mas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{w\}$ o que é impossível pois \mathcal{B} é elemento maximal. Logo tal w não existe. Portanto \mathcal{B} é uma base de V . \diamond

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Em todo esse capítulo \mathbb{K} denotará um corpo.

3.1 Conceitos Básicos

Definição 3.1. *Sejam $(V, +, \cdot)$ e (W, \oplus, \otimes) espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Uma função $T : V \rightarrow W$ é uma **transformação linear** se*

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$ para todos $u_1, u_2 \in V$;
2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \otimes T(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.

Observação 3.1.1. *Para simplificar a notação, vamos adotar os mesmos símbolos para indicar a soma e o produto por escalar nos espaços vetoriais que aparecerão no decorrer do texto. No entanto, o leitor deve estar ciente que estes símbolos podem ter significados diferentes, dependendo do espaço vetorial em questão.*

Lema 3.1.0.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} . Então uma função $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todos $u_1, u_2 \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Prova: Deixada a cargo do leitor. ◇

Lema 3.1.0.2. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:*

1. $T(0_V) = 0_W$, onde 0_V e 0_W denotam os vetores nulos de V e W , respectivamente.
2. $T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in V$.
3. $T(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^m T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in V$ para $i = 1, \dots, m$.

Prova:

1. Note que

$$0_W + T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$

ou seja, $T(0_V) = 0_W$.

2. Basta observar que $-u = (-1_{\mathbb{K}})u$ e daí

$$T(-u) = T((-1_{\mathbb{K}})u) = -1_{\mathbb{K}}T(u) = -T(u).$$

3. Por indução em m . Se $m = 2$, então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2).$$

Suponha que para $m = p$ tenhamos

$$T\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^p T(u_i).$$

Vamos mostra que é válido para $m = p + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i u_i\right) &= T\left(\left[\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right] + \alpha_{p+1} u_{p+1}\right) = T\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i\right) + T(\alpha_{p+1} u_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i T(u_i) + \alpha_{p+1} T(u_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i T(u_i). \end{aligned}$$



Exemplo 3.1.1. 1. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais. A função $T : V \rightarrow W$ dada por $T(u) = 0_W$ para todo $u \in V$ é uma transformação linear.

2. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. A função $T : V \rightarrow V$ dada por $T(u) = u$ para todo $u \in V$ é uma transformação linear.

3. Considere \mathbb{R} como um \mathbb{R} -espaço vetorial. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $T_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então T_a é uma transformação linear. Agora, seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = e^x$. Então T não é uma transformação linear pois $T(0) \neq 0$.

4. Sejam \mathbb{K}^3 e $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ \mathbb{K} -espaços vetoriais. Defina $T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & c - b \end{bmatrix}.$$

Então T é uma transformação linear. De fato, dados $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{K}^3$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} T(\lambda(a, b, c) + (d, e, f)) &= T(\lambda a + d, \lambda b + e, \lambda c + f) \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda a + d) + (\lambda b + e) & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & (\lambda c + f) - (\lambda b + e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a + \lambda b & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda c - \lambda b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d + e & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & f - e \end{bmatrix} \\ &= \lambda T(a, b, c) + T(d, e, f). \end{aligned}$$

5. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ um \mathbb{C} -espaço vetorial e considere $D : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dado por

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Então D é uma transformação linear.

6. Seja $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função contínua}\}$. É imediato verificar que $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é um \mathbb{R} -espaço vetorial. Defina $T : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Então T é uma transformação linear.

7. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Defina $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

É imediato verificar que T é uma transformação linear. Denote por e_i o elemento de \mathbb{K}^n contendo $1_{\mathbb{K}}$ na posição i e $0_{\mathbb{K}}$ das demais. Então $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de \mathbb{K}^n e

$$T(e_i) = a_i$$

para $i = 1, \dots, n$. Agora, se $S : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é uma transformação linear, então pelo Lema 3.1.0.2 item (c)

$$S(x_1, \dots, x_n) = S\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n S(e_i) x_i$$

onde $S(e_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$. Logo qualquer transformação linear de $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é da forma

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

para determinados escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Isto é, para determinarmos a transformação T só precisamos conhecer seus valores na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{K}^n .

Teorema 3.1. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais. Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de V e se $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$, então existe uma única transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T(u_i) = w_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Prova: Dado $v \in V$, como $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de V , então sabemos que existem únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Defina então $T : V \rightarrow W$ por

$$T(v) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

A unicidade dos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ garante que T está bem definida, isto é, um mesmo elemento de V não pode ter duas imagens distintas.

Agora, note que $T(u_i) = w_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Assim precisamos mostrar que T é linear. Sejam $v_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, $v_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T(\lambda v_1 + v_2) &= T\left(\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^n \beta_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i \\ &= \lambda T(v_1) + T(v_2). \end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear.

Resta mostrar que T é única. Suponha que exista uma transformação linear $S : V \rightarrow W$ tal que $S(u_i) = w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Para $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ temos

$$S(v) = S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S(u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = T(v)$$

para todo $v \in V$. Logo $T = S$, isto é, existe uma única transformação linear que satisfaz as condições do teorema. \diamond

Exemplo 3.1.2. Os vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ são L.I em \mathbb{R}^2 e assim formam uma base de \mathbb{R}^2 . Assim pelo Teorema 3.1, sabemos que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(v_1) = T(1, 2) = (3, 2, 1)$$

$$T(v_2) = T(3, 4) = (6, 5, 4).$$

Determine $T(1, 0)$.

Solução: Inicialmente escrevemos $(1, 0)$ como combinação linear de v_1 e v_2 :

$$(1, 0) = \alpha(1, 2) + \beta(3, 4).$$

Obtendo $\alpha = -2$ e $\beta = 1$. Assim

$$T(1, 0) = T(-2(1, 2) + (3, 4)) = -2T(1, 2) + T(3, 4) = (0, 1, 2).$$

Definição 3.2. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

1. O conjunto

$$\ker T = \{u \in V \mid T(u) = 0_W\}$$

é chamado de **kernel** ou **núcleo** de T . (O núcleo de T também pode ser denotado por $\text{Nuc } T$.)

2. O conjunto

$$\text{Im } T = \{u \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } T(v) = u\}$$

é chamado de **imagem** de T .

Proposição 3.2.1. *Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:*

1. $\ker T$ é um subespaço de V ;
2. $\text{Im } T$ é um subespaço de W .

Prova:

1. Inicialmente $\ker T \neq \emptyset$ pois $T(0_V) = 0_W$, ou seja, $0_V \in \ker T$. Agora, sejam $u_1, u_2 \in \ker T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Precisamos mostrar que $\lambda u_1 + u_2 \in \ker T$, isto é, precisamos mostrar que $T(\lambda u_1 + u_2) = 0_W$. Temos

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2) = 0_W.$$

Logo, $\ker T$ é um subespaço de V .

2. Inicialmente $0_W \in \text{Im } T$ pois $0_W = T(0_V)$ e daí $\text{Im } T \neq \emptyset$. Sejam $w_1, w_2 \in \text{Im } T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem $u_1, u_2 \in V$ tais que $w_1 = T(u_1)$ e $w_2 = T(u_2)$. Assim

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda T(u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1) + T(u_2) = T(\lambda u_1 + u_2)$$

e então $\lambda w_1 + w_2 \in \text{Im } T$. Portanto, $\text{Im } T$ é um subespaço de W .

◇

Exemplos 3.2.1. 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix}.$$

Determine $\ker T$ e $\text{Im } T$.

Solução: Temos

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se, e só se, $a = -b$ e $c = b$. Daí

$$\ker T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b, c = b\} = \{(-b, b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base de $\ker T$, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$.

Agora,

$$\text{Im } T = \{v \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{existe } u \in \mathbb{R}^3 \text{ de modo que } T(u) = v\}$$

$$\text{Im } T = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim temos

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e é fácil ver que

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador de $\text{Im } T$. No entanto tal conjunto não é L.I.. Mas o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\text{Im } T$, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2$. Observe que

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x + y$. Determine $\ker T$ e $\text{Im } T$.

Solução: Temos

$$\ker T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

$$\ker T = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Assim $\{(1, -1)\}$ é uma base de $\ker T$, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$.

Agora

$$\text{Im } T = \{w \in \mathbb{R} \mid \text{existe } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y) = w\}.$$

Assim dado $w \in \mathbb{R}$ um número real qualquer, tome o elemento $(w, 0) \in \mathbb{R}^2$. Temos $T(w, 0) = w + 0 = w$. Logo $\text{Im } T = \mathbb{R}$ e então $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 1$.

Novamente temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2.$$

Definição 3.3. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.

1. Dizemos que T é **injetora** se dados $u_1, u_2 \in V$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$, então $u_1 = u_2$.
De modo equivalente, se $u_1, u_2 \in V$ são tais que $u_1 \neq u_2$, então $T(u_1) \neq T(u_2)$.
2. Dizemos que T é **sobrejetora** se $\text{Im } T = W$. Em outras palavras, T é **sobrejetora** se para todo $w \in W$, existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$.
3. Se T é injetora e sobrejetora, então dizemos que T é um **isomorfismo**.

Exemplos 3.3.1. 1. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = x + y$ é sobrejetora, mas não é injetora.

2. A transformação linear $T : V \rightarrow V$ dada por $T(u) = u$ é injetora e sobrejetora, ou seja, é um isomorfismo.

Proposição 3.3.1. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, $\ker T = \{0_V\}$.

Prova: Suponha que T é injetora. Queremos mostrar que $\ker T = \{0_V\}$. Seja então $u \in \ker T$. Então $T(u) = 0_W$. Mas $T(0_V) = 0_W$ e como T é injetora devemos ter $u = 0_V$. Logo $\ker T = \{0_V\}$.

Agora suponha que $\ker T = \{0_V\}$. Queremos mostrar que T é injetora. Para isso, sejam $u_1, u_2 \in V$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Então

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \\ T(u_1) - T(u_2) &= 0_W \\ T(u_1 - u_2) &= 0_W, \end{aligned}$$

isto é, $u_1 - u_2 \in \ker T$. Mas $\ker T = \{0_V\}$, logo $u_1 = u_2$. Portanto T é injetora. \diamond

Exemplo 3.3.1. Seja $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ dada por

$$\begin{aligned} T(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) &= \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; T(0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \\ T(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) &= \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; T(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}) = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É fácil ver que $\ker T = \{(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}})\}$. Além disso,

$$\operatorname{Im} T = \left[\begin{bmatrix} 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \end{bmatrix} \right] = \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Daí $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = 4$ e novamente

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} T = 4 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}_2(\mathbb{K}).$$

Lema 3.3.1.1. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de V , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $\operatorname{Im} T$.

Prova: Seja $w \in \operatorname{Im} T$. Por definição, existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Como \mathcal{B} é uma base de V , então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Daí

$$w = T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n),$$

ou seja, todo vetor de $\text{Im } T$ é uma combinação linear de $T(u_1), \dots, T(u_n)$. Portanto $\text{Im } T = [T(u_1), \dots, T(u_n)]$ como queríamos. \diamond

Exemplo 3.3.2. Considere \mathbb{C}^2 e \mathbb{R}^3 como \mathbb{R} -espaços vetoriais e seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(a + bi, c + di) = (a - c, b + 2d, a + b - c + 2d)$$

onde a, b e $c \in \mathbb{R}$. É fácil ver que T é uma transformação linear. Seja $\{(1, 0); (i, 0); (0, 1); (0, i)\}$ uma base de \mathbb{C}^2 . Temos pelo Lema 3.3.1.1 que $\{T(1, 0); T(i, 0); T(0, 1); T(0, i)\}$ gera $\text{Im } T$. Agora

$$T(1, 0) = (1, 0, 1); \quad T(i, 0) = (0, 1, 1)$$

$$T(0, 1) = (-1, 0, -1); \quad T(0, i) = (0, 2, 2)$$

e temos

$$T(1, 0) = -T(0, 1)$$

$$T(i, 0) = 2T(0, i).$$

Observe que $T(1, 0)$ não é múltiplo de $T(0, i)$. Logo o conjunto $\{T(1, 0); T(0, i)\}$ é uma base de $\text{Im } T$.

Teorema 3.2 (Teorema do Núcleo e da Imagem). Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais com $\dim_{\mathbb{K}} V$ finita. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

Prova: Suponha primeiro que $\ker T \neq \{0_V\}$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $\ker T$. Podemos completar o conjunto \mathcal{B}_1 até obter uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r\}$ de V . Para demonstrar o teorema precisamos encontrar uma base de W com r elementos. Considere então os seguintes elementos de W :

$$T(u_1), \dots, T(u_n), T(v_1), \dots, T(v_r).$$

Como $u_i \in \ker T$, então $T(u_i) = 0_W$ para $i = 1, \dots, n$. Assim pelo Lema 3.3.1.1, $\mathcal{B}_2 = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ é um conjunto gerador de $\text{Im } T$. Precisamos mostrar que \mathcal{B}_2 é L.I. para que seja uma base de $\text{Im } T$. Para isso, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_r T(v_r) = 0_W.$$

Daí $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \ker T$. Então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

ou seja, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ pois $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r\}$ é uma base de V . Portanto $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ é uma base de $\text{Im } T$. Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

Agora, se $\ker T = \{0_V\}$, considere $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V . De maneira análoga ao caso anterior, mostra-se que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de $\text{Im } T$. Logo

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker T + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T.$$

◇

3.2 Isomorfismos

Definição 3.4. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{K} e seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se T é um isomorfismo, então dizemos que V e W são **espaços vetoriais isomorfos** e denotamos por $V \cong W$.*

Proposição 3.4.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$ e seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T é um isomorfismo.
2. T é injetora.
3. T é sobrejetora.

Prova: As implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ seguem da definição de isomorfismo.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que T é injetora. Queremos mostrar que T é um isomorfismo. Assim só precisamos mostrar que T é sobrejetora. Como T é injetora, então pela Proposição 3.3.1, temos $\ker T = \{0_V\}$. Assim, pelo Teorema 3.2 temos

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n,$$

logo $\text{Im } T = W$, isto é, T é sobrejetora. Assim T é um isomorfismo.

(iii) \Rightarrow (i) Suponha que T é sobrejetora. Queremos mostrar que T é um isomorfismo. Para isso, basta mostrar que T é injetora. Como T é sobrejetora, então $\text{Im } T = W$ e daí $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } T = n$. Assim, pelo Teorema 3.2 devemos ter $\dim_{\mathbb{K}} \ker T = 0$, ou seja, $\ker T = \{0_V\}$ e então T é injetora. Logo, T é um isomorfismo.

◇

Exemplos 3.4.1. 1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (-y, x, x + y)$. Pelo Teorema 3.2, sabemos que T não pode ser sobrejetora, logo $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T \leq 2$. Agora

$$(x, y) \in \ker T \Leftrightarrow T(x, y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (-y, x, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Daí $\ker T = \{(0, 0)\}$ e então T é injetora.

Temos

$$\text{Im } T = \{(-y, x, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que

$$(-y, x, x + y) = y(-1, 0, 1) + x(0, 1, 1)$$

e então $\{(-1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$ gera $\text{Im } T$ e como estes vetores não são múltiplos um do outro, eles formam uma base para $\text{Im } T$. Assim $\text{Im } T = [(-1, 0, 1); (0, 1, 1)]$ e $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } T = 2$.

2. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{C} e seja $\mathcal{D} : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dada por $\mathcal{D}(p(x)) = p'(x)$ a derivada de $p(x)$. Observe que $\ker \mathcal{D} = \{p(x) = a \mid a \in \mathbb{C}\}$. Além disso, $\text{Im } \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{C})$ pois todo elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ tem uma primitiva.

3. Seja

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}, i \geq 1\}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Defina

$$\bullet (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$\bullet \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n, \dots)$$

para todos $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$. É fácil ver que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial. Defina $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$T((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = ((a_i)_{i+1 \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, \dots, a_n, \dots).$$

É imediato ver que T é uma transformação linear. Além disso, T é sobrejetora pois dada uma sequência $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, considere $x = (0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Temos

$$T(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots),$$

assim $\text{Im } T = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Além disso, T não é injetora pois dado $(x_1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ temos

$$T(x_1, 0, 0, \dots, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

e então

$$\ker T = \{(x_1, 0, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in \mathbb{K}\}.$$

Teorema 3.3. *Dois \mathbb{K} -espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

Prova: Se ambos os espaços forem nulos, nada há a fazer. Sejam V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n < \infty$. Seja $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V e W , respectivamente. Pelo Teorema 3.1 sabemos que existe uma única transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para $i = 1, \dots, n$.

Vamos mostrar que T é sobrejetora e daí pela Proposição 3.4.1 será um isomorfismo. Para isto, seja $y \in W$, um elemento qualquer de W . Como \mathcal{B} é uma base de W , existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$$

Seja $x \in V$ dado por

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

pois \mathcal{A} é uma base de V . Temos

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = y,$$

logo $\text{Im } T = W$, ou seja, T é sobrejetora.

Portanto V e W são isomorfos. ◇

Corolário 3.3.1. *Todo \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ é isomorfo a \mathbb{K}^n .*

Exemplos 3.4.2. 1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n+1}$.

2. $\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{pq}$.

3.3 Transformações Lineares e Matrizes

Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão $n \geq 1$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Sabemos que cada elemento de V se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , isto é, dado $u \in V$ existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Assim vamos fixar uma ordem para os elementos da base \mathcal{B} e por isso vamos chamá-la de **base ordenada** de V . Pela unicidade dos elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ acima, podemos denotar o vetor u por

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

e dizemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as **coordenadas de u em relação à base ordenada \mathcal{B}** .

Exemplos 3.4.3. 1. Considere $V = \mathbb{C}^2$ como um \mathbb{C} -espaço vetorial e seja $\mathcal{B} = \{(1, i); (i, 0)\}$ uma base de \mathbb{C}^2 (Verifique!). Dado o vetor $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$, quais suas coordenadas em relação a tal base?

Solução: As coordenadas de v em relação à base \mathcal{B} serão $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2)_{\mathcal{B}}$ onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$ são tais que

$$v = \alpha_1(1, i) + \alpha_2(i, 0).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos $\alpha_1 = 1 - 2i$ e $\alpha_2 = 3 + i$. Assim

$$[v]_{\mathcal{B}} = (1 - 2i, 3 + i)_{\mathcal{B}}.$$

2. Agora considere $V = \mathbb{C}^2$ como um \mathbb{R} -espaço vetorial e seja $\mathcal{A} = \{(1, 1); (i, 0); (1, i); (0, 1)\}$ uma base de \mathbb{C}^2 (Verifique!). Dado o vetor $v = (i, 2 + i) \in \mathbb{C}^2$, quais suas coordenadas em relação a tal base?

Solução: As coordenadas de v em relação à base \mathcal{A} serão $[v]_{\mathcal{A}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{\mathcal{A}}$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ são tais que

$$v = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(i, 0) + \alpha_3(1, i) + \alpha_4(0, 1).$$

Resolvendo o sistema resultante obtemos $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 3$. Assim

$$[v]_{\mathcal{A}} = (-1, 1, 1, 3)_{\mathcal{A}}.$$

Agora, sejam V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} tais que $\dim_{\mathbb{K}} V = p \geq 1$ e $\dim_{\mathbb{K}} W = q \geq 1$. Vamos fixar bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_q\}$ de V e W , respectivamente. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação lineares. Sabemos pelo Teorema 3.1 que T fica completamente determinada se conhecermos seus valores na base de V . Assim

$$\begin{aligned} T(v_1) &= b_{11}w_1 + b_{21}w_2 + \dots + b_{q1}w_q = \sum_{i=1}^q b_{i1}w_i \\ T(v_2) &= b_{12}w_1 + b_{22}w_2 + \dots + b_{q2}w_q = \sum_{i=1}^q b_{i2}w_i \\ &\vdots \\ T(v_p) &= b_{1p}w_1 + b_{2p}w_2 + \dots + b_{qp}w_q = \sum_{i=1}^q b_{ip}w_i \end{aligned}$$

para certos $b_{ij} \in \mathbb{K}$ onde $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$.

Agora, seja $x \in V$. Então

$$x = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_pv_p$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$. Daí

$$\begin{aligned}
 T(x) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_p T(v_p) \\
 &= \alpha_1 \sum_{i=1}^q b_{i1} w_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^q b_{i2} w_i + \dots + \alpha_p \sum_{i=1}^q b_{ip} w_i \\
 &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \left(\sum_{i=1}^q b_{ij} w_i \right) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (\alpha_j b_{ij} w_i) \\
 &= \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{ij} \right) w_i.
 \end{aligned}$$

Note que os escalares $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{1j}$, $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{2j}$, \dots , $\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{qj}$ são as coordenadas do vetor $T(x)$ em relação à base \mathcal{B}_2 , isto é,

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{1j}, \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^p \alpha_j b_{qj} \right).$$

Por outro lado,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{q1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{q2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{qp} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \dots + b_{q1}\alpha_p \\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \dots + b_{q2}\alpha_p \\ \vdots \\ b_{1p}\alpha_1 + b_{2p}\alpha_2 + \dots + b_{qp}\alpha_p \end{bmatrix}$$

e daí podemos escrever

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

onde $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$.

Agora seja $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{bmatrix}.$$

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão $p \geq 1$ e W um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão $q \geq 1$. Tome $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_q\}$ bases ordenadas de V e W ,

respectivamente. Defina $T : V \rightarrow W$ por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{q1}w_q \\ &\vdots \\ T(v_p) &= a_{1p}w_1 + a_{2p}w_2 + \cdots + a_{qp}w_q. \end{aligned}$$

Então T é uma transformação linear tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo $x \in V$.

Assim provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensões $p \geq 1$ e $q \geq 1$, respectivamente. Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases ordenadas de V e W , respectivamente. Então para cada transformação linear $T : V \rightarrow W$, existe uma matriz $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$ tal que*

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo vetor $x \in V$. Além disso, a cada matriz $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$ corresponde uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_2} = A[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo $x \in V$.

Definição 3.5. *A matriz $A \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$ do Teorema 3.4 é chamada de **matriz da transformação linear** T com respeito às bases ordenadas \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 e será denotada por*

$$A = [T]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}.$$

No caso em que $V = W$ e $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, denotaremos $[T]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}$ simplesmente por $[T]_{\mathcal{B}}$.

Exemplos 3.5.1. 1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x, 0).$$

Considere \mathbb{R}^2 com a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$. Encontre $[T]_{\mathcal{B}}$.

Solução: Temos

$$T(e_1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$T(e_2) = (0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1).$$

Logo a matriz de T é

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$(x, y) = xe_1 + ye_2$$

e então

$$[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (x, y)_{\mathcal{B}}.$$

Assim podemos escrever

$$[T(x, y)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[(x, y)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [(x, y)]_{\mathcal{B}}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 3); (1, 4)\}$. Encontre $[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

Solução: Temos

$$T(1, 1, 1) = (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4)$$

$$T(1, 1, 0) = (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4)$$

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4)$$

e daí

$$[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora considerando as bases $\mathcal{B}_3 = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}_4 = \{(1, 0); (0, 1)\}$ obtemos

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1)$$

e assim a matriz de T será

$$[T]_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.5. *Sejam $F : V \rightarrow W$ e $G : W \rightarrow U$ duas transformações lineares onde V , W e U são \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensões p , q e r , respectivamente. Fixe bases ordenadas \mathcal{B}_V , \mathcal{B}_W e \mathcal{B}_U para V , W e U , respectivamente. Então $(G \circ F) : V \rightarrow U$ dada por $(G \circ F)(v) = G(F(v))$ é uma transformação linear e*

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U} = [G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} [F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}.$$

Prova: É imediato verificar que $G \circ F$ é uma transformação linear.

Sejam $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_p\}$, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$ e $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_r\}$ bases ordenadas para V , W e U , respectivamente. Considere as matrizes

1. $[F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})_{q \times p}$ onde $F(v_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} w_i$ para $j = 1, \dots, p$;
2. $[G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} = (b_{ij})_{r \times q}$ onde $G(w_j) = \sum_{i=1}^r b_{ij} u_i$ para $k = 1, \dots, r$;
3. $[G \circ F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U} = (c_{ij})_{r \times p}$ onde $(G \circ F)(v_j) = \sum_{i=1}^r c_{ij} u_i$ para $k = 1, \dots, r$.

Vamos calcular $(G \circ F)(v_j)$

$$\begin{aligned} (G \circ F)(v_j) &= G(F(v_j)) = G\left(\sum_{i=1}^q a_{ij}w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^q a_{ij}G(w_i) = \sum_{i=1}^q a_{ij} \sum_{k=1}^r b_{ki}w_i \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^q b_{ki}a_{ij}w_i. \end{aligned}$$

Assim da unicidade dos escalares obtemos

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^q b_{ki}a_{ij}$$

para $j = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, r$. Isto é, para cada par (j, k) o elemento c_{kj} da matriz $[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$ é o elemento na posição (k, j) da matriz resultante da multiplicação de $[G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U}$ por $[F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U}$. Portanto

$$[(G \circ F)]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = [G]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U} [F]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U}$$

como queríamos. \diamond

Vamos tratar, principalmente, com a representação por matrizes de transformações lineares de um espaço em si mesmo. Lembre-se que esta matriz muda de acordo com a escolha da base. Assim, deve-se prestar atenção sempre à base escolhida. Assim como um espaço vetorial pode ter várias bases distintas, o que acontecerá com a matriz representante de uma transformação linear quando mudamos a base ordenada? Vamos considerar $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear sobre o \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita V e sejam

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$$

bases ordenadas de V . Qual a relação entre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}_1}$ e $[T]_{\mathcal{B}_2}$?

Para responder a esta questão, primeiro vamos determinar uma relação entre $[x]_{\mathcal{B}_1}$ e $[x]_{\mathcal{B}_2}$, para todo $x \in V$. Como \mathcal{B}_1 é uma base de V , então existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n \\ &\vdots \\ w_n &= \alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Agora, dado $x \in V$, existem $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n.$$

Daí

$$\begin{aligned} x &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n) + \dots + (\alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n) \\ &= (\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \dots + \beta_n\alpha_{1n})v_1 + \dots + (\beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \dots + \beta_n\alpha_{nn})v_n \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_{1j}v_1 + \dots + \sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_{nj}v_n \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_{ij} \right) v_i. \end{aligned}$$

Assim as coordenadas de x em relação à base \mathcal{B}_1 são

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_{nj} \end{bmatrix}.$$

Seja P a matriz cuja entrada (i, j) é o escalar α_{ij} , isto é,

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então podemos escrever

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = P[x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Mais ainda, como \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bases de V , então $[x]_{\mathcal{B}_1} = [0_V]_{\mathcal{B}_1}$ se, e somente se, $[x]_{\mathcal{B}_2} = [0_V]_{\mathcal{B}_2}$.

Logo P possui inversa. Assim mostramos o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases ordenadas de V . Então existe uma única matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, necessariamente invertível tal que*

$$1. [x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2}$$

$$2. [x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo $x \in V$. As colunas de $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ são dadas por

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_2}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Além disso, também temos o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Seja $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e \mathcal{B}_1 uma base ordenada de V . Então existe uma única base ordenada \mathcal{B}_2 de V tal que*

$$1. [x]_{\mathcal{B}_1} = P[\mathcal{B}_1]_{\mathcal{B}_2}$$

$$2. [x]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}_1}$$

para todo $x \in V$.

Definição 3.6. *A matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ do Teorema 3.7 é chamada de **matriz de mudança de base** e é denotada por $P = [I]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.*

Agora, sejam $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases ordenadas de V . Sabemos que existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que

$$[x]_{\mathcal{B}_1} = P[x]_{\mathcal{B}_2} \tag{3.1}$$

para todo $x \in V$. Mas, para todo $x \in V$ temos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B}_1} [x]_{\mathcal{B}_1}. \tag{3.2}$$

Aplicando (3.1) ao vetor $T(x)$ obtemos

$$[T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}. \tag{3.3}$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3):

$$[T]_{\mathcal{B}_1} [x]_{\mathcal{B}_1} = [T(x)]_{\mathcal{B}_1} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}$$

$$[T]_{\mathcal{B}_1} P[x]_{\mathcal{B}_2} = P[T(x)]_{\mathcal{B}_2}$$

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1} P[x]_{\mathcal{B}_2} = [T(x)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2} [x]_{\mathcal{B}_2}.$$

Daí

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1} = [T]_{\mathcal{B}_2}$$

o que responde nossa pergunta.

Por outro lado, sabemos que existe uma única transformação linear $G : V \rightarrow V$ tal que

$$G(v_i) = w_i$$

para $i = 1, \dots, n$. Mais ainda, tal transformação linear é um isomorfismo. Afirmamos que a matriz P acima é exatamente a matriz de G em relação à base \mathcal{B}_1 . De fato, as entradas de P são definidas por

$$w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$$

e como $G(v_i) = w_i$ podemos escrever

$$G(v_i) = w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$$

e então por definição $[G]_{\mathcal{B}_1} = P$. Desse modo, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão finita, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases ordenadas de V . Suponha que $T : V \rightarrow V$ é uma transformação linear. Se $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz com colunas*

$$P_j = [w_j]_{\mathcal{B}_1}$$

então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P.$$

Alternativamente, se G é o isomorfismo de V definido por $G(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$ então

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = ([G]_{\mathcal{B}_1})^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}[G]_{\mathcal{B}_1}.$$

Definição 3.7. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Dizemos que B é **semelhante** a A sobre \mathbb{K} se existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemplos 3.7.1. 1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. Sabemos que com relação à base $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$ a matriz de T é

$$[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, seja \mathcal{B}_2 a base de \mathbb{R}^2 formada por

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1, 1); w_2 = (2, 1)\}.$$

Então

$$w_1 = e_1 + e_2$$

$$w_2 = 2e_1 + e_2.$$

Assim P é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}P$$

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $\mathcal{D} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ a transformação derivada. Considere a base $\mathcal{B}_1 = \{f_1 = 1; f_2 = x; f_3 = x^2; f_4 = x^3\}$. Tome $t \in \mathbb{R}$ e defina

$$\mathcal{B}_2 = \{g_1 = 1; g_2 = (x + t); g_3 = (x + t)^2; g_4 = (x + t)^3\}.$$

Assim

$$g_1 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$g_2 = tf_1 + xf_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$g_3 = t^2f_1 + 2tf_2 + 1f_3 + 0f_4$$

$$g_4 = t^3f_1 + 3t^2f_2 + 3tf_3 + 1f_4$$

e então

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível com

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora

$$D(f_1) = 0$$

$$D(f_2) = 1$$

$$D(f_3) = 2x$$

$$D(f_4) = 3x^2$$

e então

$$[D]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$[D]_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[D]_{\mathcal{B}_1}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 4

FORMAS CANÔNICAS

Sejam (V, \boxplus, \boxminus) e (W, \oplus, \otimes) espaços vetoriais sobre \mathbb{K} . Denote por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Dados $T, G \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ defina

- $(T + G)(u) = T(u) \oplus G(u)$
- $(\lambda T)(u) = \lambda \otimes T(u)$

para todo $u \in V$. É fácil verificar que $(\mathcal{L}(V, W), +, \cdot)$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial. O vetor nulo é a transformação linear $0 : V \rightarrow W$ tal que $0(u) = 0_W$ para todo $u \in V$. Dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, o vetor oposto é $(-T) : V \rightarrow W$ definido por $(-T)(u) = -T(u)$ para todo $u \in V$.

Teorema 4.1. *Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais com dimensões p e q , respectivamente. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = (\dim_{\mathbb{K}} V)(\dim_{\mathbb{K}} W).$$

Prova: Sejam $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$ bases de V e W , respectivamente. Para cada par (i, j) com $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$ vamos definir uma transformação linear

$T_{(i,j)} : V \rightarrow W$ por

$$T_{(i,j)}(v_r) = \begin{cases} w_i & \text{se } r = j \\ 0_W & \text{se } r \neq j \end{cases}, \quad (4.1)$$

isto é, $T_{(i,j)}(v_r) = \delta_{jr}w_i$, onde δ_{jr} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{jr} = 1_{\mathbb{K}}$ se $r = j$ e $\delta_{jr} = 0_{\mathbb{K}}$ se $r \neq j$). Sabemos que existe uma única transformação linear que satisfaz (4.1) para cada (i,j) . Assim obtemos um conjunto

$$\mathcal{A} = \{T_{(1,1)}; T_{(1,2)}; \dots; T_{(1,p)}; \dots; T_{(q,1)}; \dots; T_{(q,p)}\} \quad (4.2)$$

com pq elementos. Vamos mostrar que \mathcal{A} é uma base de $\mathcal{L}(V, W)$. Primeiro, seja $G \in \mathcal{L}(V, W)$ e considere a matriz $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (a_{ij})$ com relação às bases \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W . Assim $[G]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$ é dada por

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{q1}w_q = \sum_{i=1}^q a_{i1}w_i \\ &\vdots \\ T(v_p) &= a_{1p}w_1 + \dots + a_{qp}w_q = \sum_{i=1}^q a_{ip}w_i, \end{aligned}$$

ou simplesmente, $G(v_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij}w_i$ para $j = 1, \dots, p$. Considere agora a transformação linear $H : V \rightarrow W$ dada por

$$H = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}T_{(i,j)}.$$

Vamos mostrar que $G = H$. Para isso, basta mostrar que $G(v_j) = H(v_j)$ para $v_j \in \mathcal{B}_V$. Temos

$$\begin{aligned} H(v_j) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}T_{(i,j)}(v_j) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ij}\delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^p (a_{i1}\delta_{1r}w_i + a_{i2}\delta_{2r}w_i + \dots + a_{ip}\delta_{pr}w_i) \\ &= \sum_{i=1}^q a_{ij}w_i = G(v_j) \end{aligned}$$

para cada $j = 1, \dots, p$. Portanto $G = H$ e assim \mathcal{A} gera $\mathcal{L}(V, W)$.

Mostremos agora que \mathcal{A} é L.I. em $\mathcal{L}(V, W)$. Para isso, sejam $b_{ij} \in \mathbb{K}$ com $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$ tais que

$$S = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} T_{(i,j)} = 0.$$

Assim $S(v_j) = 0_W$ para todo $j = 1, \dots, p$. Daí

$$\begin{aligned} 0_W = S(v_j) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} T_{(i,j)}(v_j) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} \delta_{jr}(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^p (b_{i1} \delta_{1r} w_i + b_{i2} \delta_{2r} w_i + \dots + b_{ip} \delta_{pr} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^q b_{ij} w_i \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, p$. Isto é,

$$\begin{aligned} b_{11} w_1 + \dots + b_{q1} w_q &= 0_W \\ \vdots \\ b_{1p} w_1 + \dots + b_{qp} w_q &= 0_W \end{aligned}$$

e como $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_q\}$ é L.I. em W , então $b_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $1 \leq i \leq q$ e $1 \leq j \leq p$. Logo \mathcal{A} é L.I. e assim uma base para $\mathcal{L}(V, W)$. Portanto

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, W) = pq = (\dim_{\mathbb{K}} V)(\dim_{\mathbb{K}} W)$$

como queríamos. ◇

Corolário 4.1.1. *Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensões p e q , respectivamente. Então $\mathcal{L}(V, W)$ é isomorfo a $M_{q \times p}(\mathbb{K})$.*

Definição 4.1. (i) *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. Um **operador linear** é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$.*

(ii) *Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, denotamos $T \circ T$ por T^2 e mais geralmente*

$$\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n = T^n.$$

Além disso, $T^0 = Id : V \rightarrow V$ o operador tal que $Id(u) = u$ para todo $u \in V$.

4.1 Operadores Diagonalizáveis

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda_2 & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$. Assim

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v_i]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \lambda_i \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

para $i = 1, \dots, n$. Isto é,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i$$

para $i = 1, \dots, n$.

Definição 4.2. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear.*

(i) Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $u \in V$ com $T(u) = \lambda u$.

(ii) Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $u \in V$ tal que

$$T(u) = \lambda u$$

é chamado de **autovetor** de T **associado** ao autovalor λ . Denotaremos por $\text{Aut}_T(\lambda)$ o subespaço gerado por todos os autovetores associados a λ . Assim

$$\text{Aut}_T(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}.$$

(iii) Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é **diagonalizável** se existir uma base \mathcal{B} de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal, isto é, tem a forma (4.3). Tal fato equivale a dizer que existe uma base formada por autovetores.

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Vamos determinar um método para encontrar todos os autovalores de T , caso existam.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor, então existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T(u) = \lambda u$. Assim, seja $\text{Id} : V \rightarrow V$ o operador identidade. Temos

$$T(u) = \lambda u$$

$$T(u) = \lambda \text{Id}(u)$$

$$T(u) - \lambda \text{Id}(u) = 0_V$$

$$(T - \lambda \text{Id})(u) = 0_V$$

isto é, $u \in \ker(T - \lambda \text{Id})$. Reciprocamente, se $u \in \ker(T - \lambda \text{Id})$ e $u \neq 0_V$, então $T(u) = \lambda u$. Logo

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T, \text{ se, e somente, } \ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0_V\}.$$

Agora, seja \mathcal{A} uma base qualquer de V e considere a matriz $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$ do operador $T - \lambda \text{Id} \in \mathcal{L}(V, V)$. Como $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, se $T - \lambda \text{Id}$ é injetor, então $T - \lambda \text{Id}$ é um isomorfismo e daí invertível. Isto é, $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$ é uma matriz invertível. Mas se $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor, então $\ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0_V\}$, ou seja, $T - \lambda \text{Id}$ não é injetora e conseqüentemente não pode ser um isomorfismo. Logo a matriz $[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}}$ não é invertível. Assim

$$\det[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se,

$$\det[T - \lambda \text{Id}]_{\mathcal{A}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Proposição 4.2.1. *Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor do operador linear $T : V \rightarrow V$. Então*

$$\text{Aut}_T(\lambda) = \ker(T - \lambda Id).$$

Seja x uma variável. Temos

$$[T - xId]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{B}} - x[Id]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde $[T]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Assim $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ é um polinômio de grau n com coeficiente em \mathbb{K} . O termo x^n aparece com coeficiente $\pm 1_{\mathbb{K}}$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, λ é uma raiz de

$$\det[T - xId]_{\mathcal{A}}.$$

Agora, seja \mathcal{B} uma outra base de V . Sabemos que existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que

$$[T - xId]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P.$$

Então

$$\det([T - xId]_{\mathcal{B}}) = \det(P^{-1}[T - xId]_{\mathcal{A}}P) = \det(P^{-1}) \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) \det(P) = \det[T - xId]_{\mathcal{A}}$$

uma vez que $\det(P^{-1}) \det(P) = 1_{\mathbb{K}}$. Logo o polinômio $\det[T - xId]_{\mathcal{A}}$ não depende da base escolhida para V .

Definição 4.3. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ um operador linear e \mathcal{A} uma base de V . Chamamos o polinômio $\det([T - xId]_{\mathcal{A}})$ de **polinômio característico** de T e o denotamos por $p_T(x)$.*

Exemplo 4.3.1. 1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Encontre os autovalores de T e os autoespaços associados, se existirem.*

Solução: Vamos considerar a base canônica de \mathbb{R}^2 dada por $\mathcal{A} = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\}$. Temos

$$T(1, 0) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(1, 0) \quad (4.5)$$

$$T(1, 0) = (-1, 0) = -1(1, 0) + 0(1, 0). \quad (4.6)$$

Daí

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = \det \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1.$$

Como $p_T(x)$ não possui raízes em \mathbb{R} , segue que T não possui autovalores.

2. Seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Encontre os autovalores de T e os autoespaços associados, se existirem, considerando \mathbb{C}^2 com um \mathbb{C} -espaço vetorial.

Solução: Considere a base canônica \mathcal{A} de \mathbb{C}^2 . É imediato verificar que o polinômio característico de T é $p_T(x) = x^2 + 1$, cujas raízes são $\pm i$. Assim T possui 2 autovalores distintos e para cada um deles vamos encontrar o autoespaço associado.

- Para $\lambda_1 = i$ temos:

$$[T - iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

e assim $(x, y) \in \text{Aut}_T(i)$ se, e só se,

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = iy$. Logo

$$\text{Aut}_T(i) = \{(iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(i, 1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_1 = \{(i, 1)\}$ é uma base de $\text{Aut}_T(i)$ e daí $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_T(i) = 1$.

- Para $\lambda_1 = -i$ temos:

$$[T + iId]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

e assim $(x, y) \in \text{Aut}_T(-i)$ se, e só se,

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x = -iy$. Logo

$$\text{Aut}_T(-i) = \{(-iy, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \in \mathbb{C}\} = [(-i, 1)].$$

Assim, $\mathcal{B}_2 = \{(-i, 1)\}$ é uma base de $\text{Aut}_T(-i)$ e daí $\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_T(-i) = 1$.

Agora o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(i, 1), (-i, 1)\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 e nesta base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde \mathcal{A} é uma base qualquer de \mathbb{R}^3 . Determine, caso exista, uma base de \mathbb{R}^3 tal que o operador T seja diagonalizável.

Solução: Temos

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = (3 - x)^2(-1 - x)$$

e assim os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

- Para $\lambda_1 = 3$ temos que $(x, y, z) \in \text{Aut}_T(3)$ se, e só se,

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\text{Aut}_T(3) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

e então $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0)\}$ é uma base de $\text{Aut}_T(3)$ e $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(3) = 1$.

- Para $\lambda_2 = -1$ temos que $(x, y, z) \in \text{Aut}_T(-1)$ se, e só se,

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\text{Aut}_T(-1) = \{(z/16, -5z/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1/16, -5/4, 1)]$$

e então $\mathcal{B}_2 = \{(1/16, -5/4, 1)\}$ é uma base de $\text{Aut}_T(-1)$ e $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(-1) = 1$.

Note que o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é L.I. mas não é uma base de \mathbb{R}^3 . Neste caso o operador T não é diagonalizável.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde \mathcal{A} é uma base qualquer de \mathbb{R}^3 . Determinar se T é diagonalizável.

Solução: Temos

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{A}}) = -(x+1)^2(x+2)$$

e assim os autovalores de T são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Cálculos simples mostram que

$$\text{Aut}_T(-1) = [(1, 0, 2); (0, 1, 2)]$$

$$\text{Aut}_T(-2) = [(1, -1, 1)].$$

É fácil verificar que o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2); (0, 1, 2); (1, -1, 1)\}$ é L.I, logo uma base de \mathbb{R}^3 . Nesta base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo T é diagonalizável.

Teorema 4.2. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r, r \geq 1$, autovalores de T , dois a dois distintos.*

- (i) *Se $u_1 + \dots + u_r = 0_V$ com $u_i \in \text{Aut}_T(\lambda_i); i = 1, \dots, r$; então $u_i = 0_V$ para todo i .*
- (ii) *Para cada $i = 1, \dots, r$ seja \mathcal{B}_i um conjunto linearmente independente contido em $\text{Aut}_T(\lambda_i)$. Então $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I. em V .*

Prova:

- (i) A prova será por indução em $r \geq 1$. Se $r = 1$, nada há a fazer. Seja $r > 1$ e suponha que o teorema seja válido para todo $j < r$. Vamos mostrar que também é válido para $j = r$. Temos

$$u_1 + u_2 + \dots + u_r = 0_V \quad (4.7)$$

com $u_i \in \text{Aut}_T(\lambda_i)$.

Aplicando T em (4.7) obtemos

$$0_V = T(u_1) + T(u_2) + \dots + T(u_r) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r. \quad (4.8)$$

Agora multiplicando (4.7) por λ_1 e subtraindo de (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_2 + \lambda_1 u_r - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_r u_r &= 0_V \\ (\lambda_1 - \lambda_2) u_2 - \dots - (\lambda_1 - \lambda_r) u_r &= 0_V. \end{aligned}$$

Mas por hipótese de indução, segue que $(\lambda_1 - \lambda_i) u_i = 0$ para $i = 2, \dots, r$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, então $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ e então $u_i = 0_V$ para $i = 2, \dots, r$. Logo $u_1 = 0_V$ e o resultado está provado.

- (ii) Para cada i , seja $\mathcal{B}_i = \{u_{i1}, \dots, u_{in_i}\}$. Vamos mostrar que o subconjunto de V dado por $\mathcal{B} = \{u_{11}, \dots, u_{1n_1}, u_{21}, \dots, u_{2n_2}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{rn_r}\}$ é L.I. em V . Para isso sejam $\alpha_{in_i} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, r$ tais que

$$\alpha_{11} u_{11} + \dots + \alpha_{1n_1} u_{1n_1} + \dots + \alpha_{r1} u_{r1} + \dots + \alpha_{rn_r} u_{rn_r} = 0_V.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} \in \text{Aut}_T(\lambda_i)$$

para $i = 1, \dots, r$. Daí segue do item (a) que

$$\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{ij} = 0_V$$

para $i = 1, \dots, r$. Como \mathcal{B}_i é L.I. para $i = 1, \dots, r$, então $\alpha_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, n_i$. Portanto $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I. em V .

◇

Corolário 4.2.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são todos os autovalores de T , então T é diagonalizável se, e somente se,*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i).$$

Definição 4.4. *Seja λ um autovalor de um operador linear $T : V \rightarrow V$ onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos que*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$$

com $q(\lambda) \neq 0$, seja o polinômio característico de T .

- (i) O número m é chamada de **multiplicidade algébrica** de λ e o denotamos por $ma(\lambda)$.
- (ii) Chamamos de **multiplicidade geométrica** de λ à dimensão do subespaço $\text{Aut}_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.

Observação 4.4.1. *A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é o maior índice j tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^j q(x)$$

com $q(\lambda) \neq 0$;

Exemplo 4.4.1. (i) $p_T(x) = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$, $ma(2) = 2$

$$(ii) \ p_T(x) = (x+1)^3(x-2), \ ma(2) = 1, \ ma(-1) = 3.$$

Proposição 4.4.1. *Seja λ um autovalor de $T : V \rightarrow V$, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.*

Prova: Seja $W = \text{Aut}_T(\lambda)$ e assumamos que $\dim_{\mathbb{K}} W = r$. Sejam $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ uma base de W e $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ uma base de V contendo \mathcal{B}_W . Como $T(w_i) = \lambda w_i$ para $i = 1, \dots, r$; podemos escrever $[T]_{\mathcal{B}_V}$ na forma

$$[T]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} \lambda & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \dots & 0_{\mathbb{K}} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & \lambda & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{r+1r+1} & \dots & b_{r+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \dots & 0_{\mathbb{K}} & b_{nr+1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$p_T(x) = \det([T - xId]_{\mathcal{B}_V}) = (x - \lambda)^r \det(A_2).$$

Por definição, $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x - \lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = r \leq ma(\lambda)$. \diamond

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ são distintos. Da definição de $p_T(x)$ temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n_1 + \dots + n_r.$$

Assim, pela proposição anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$$

se, e somente se, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para $i = 1, \dots, r$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é diagonalizável.

(ii) $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_r)^{n_r}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para cada $i = 1, \dots, r$.

(iii) $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$.

4.2 Subespaços T -invariantes

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador tal que

$$[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

onde \mathcal{A} é uma base qualquer de \mathbb{R}^3 . Sabemos que T é diagonalizável e os autoespaços de T são

$$\text{Aut}_T(-1) = [(1, 0, 2); (0, 1, 2)]$$

$$\text{Aut}_T(-2) = [(1, -1, 1)].$$

Seja $u \in \text{Aut}_T(-1)$. Assim existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 2)$$

e daí

$$T(u) = \alpha T(1, 0, 2) + \beta T(0, 1, 2) = -\alpha(1, 0, 2) - \beta(0, 1, 2) \in \text{Aut}_T(-1).$$

Logo, para todo $u \in \text{Aut}_T(-1)$, $T(u) \in \text{Aut}_T(-1)$. Em outras palavras

$$T(\text{Aut}_T(-1)) \subseteq \text{Aut}_T(-1).$$

Analogamente, para todo $u \in \text{Aut}_T(-2)$, $T(u) \in \text{Aut}_T(-2)$. Em outras palavras

$$T(\text{Aut}_T(-2)) \subseteq \text{Aut}_T(-2).$$

Agora, seja $W = [(1, 0, 0)]$. Primeiramente, podemos escrever

$$(1, 0, 0) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(1, -1, 1)$$

tomando $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = -2$. Daí

$$T(1, 0, 0) = (1, -2, 14) \notin W$$

e então $T(W) \not\subseteq W$.

Definição 4.5. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V . Dizemos que W é um **subespaço T-invariante** de V se $T(W) \subseteq W$, isto é, $T(u) \in W$ para todo $u \in W$.*

Exemplo 4.5.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial.*

1. *Os subespaços triviais de V são T-invariantes.*
2. *Os subespaços $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ são T-invariantes. De fato, se $u \in \ker T$, então $T(u) = 0_V \in \ker T$. Assim $T(\ker T) \subseteq \ker T$. Agora, se $w \in \operatorname{Im} T$, então existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Assim $T(w) = T(T(u))$, logo $T(w) \in \operatorname{Im} T$ para todo $w \in \operatorname{Im} T$.*
3. *Se λ for um autovalor de T , então $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante.*
4. *Se W é um subespaço T-invariante, então $T : W \rightarrow W$ é um operador linear.*
5. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então os únicos subespaços T-invariantes são os triviais. De fato, qualquer outro espaço T-invariante teria dimensão 1, isto é, se W é um subespaço de \mathbb{R}^2 , T-invariante então $W = [v]$. Daí v seria um autovetor de T . Mas

$$p_T(x) = x^2 + 1$$

que não possui raízes em \mathbb{R} . Logo, T não possui subespaço T-invariante não trivial.

Definição 4.6. *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um \mathbb{K} -espaço vetorial V . Dizemos que $W_1 + W_2$ é uma **soma direta** se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Neste caso escreveremos $W_1 \oplus W_2$.*

Exemplo 4.6.1. 1. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços de \mathbb{C}^4 com bases $\{(1, 2, 0, i); (i, 0, 0, 1)\}$ e $\{(0, 0, 3, 1)\}$, respectivamente. Seja $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in W_1 \cap W_2$. Temos

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \alpha(1, 2, 0, i) + \beta(i, 0, 0, 1) = \gamma(0, 0, 3, 1)$$

donde $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e portanto $W_1 + W_2$ é uma soma direta e escrevemos $W_1 \oplus W_2$.

2. Sejam $W_1 = [(0, 1)]$ e $W_2 = [(1, 1)]$ subespaços de \mathbb{R}^2 . Temos que se $(x, y) \in W_1 \cap W_2$, então

$$(x, y) = \alpha(0, 1) = \beta(1, 1)$$

e daí $\alpha = \beta = 0$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$ e então $W_1 + W_2$ é uma soma direta. Mais ainda

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_1 \oplus W_2) = \dim_{\mathbb{R}} W_1 + \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$$

e portanto,

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2.$$

Definição 4.7. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial e sejam W_1 e W_2 dois subespaços de V . Dizemos que V é a **soma direta** de W_1 e W_2 se

$$1. W_1 \cap W_2 = \{0_V\};$$

$$2. W_1 + W_2 = V.$$

Neste caso escrevemos

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Proposição 4.7.1. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V . Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e só, se cada elemento $u \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $x_1 + x_2$, onde $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2$.

Prova:

(\Rightarrow) Vamos supor que $V = W_1 \oplus W_2$. Segue então que cada elemento $u \in V$ se escreve como soma de um elemento de W_1 com um elemento de W_2 . Suponha agora que $u = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ onde $x_1, y_1 \in W_1$ e $x_2, y_2 \in W_2$. Daí

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$$

pois $x_1 - y_1 \in W_1$ e $y_2 - x_2 \in W_2$. Mas $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, logo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, como queríamos.

(\Leftarrow) Como cada elemento de V é uma soma de elementos de W_1 com elementos de W_2 , logo $V = W_1 + W_2$. Seja $u \in W_1 + W_2$ com $u \neq 0_V$. Assim como $0_V \in W_1$ temos

$$u = 0_V + u$$

considerando $u \in W_2$. Por outro lado, $0_V \in W_2$, daí

$$u = u + 0_V$$

considerando $u \in W_1$. Logo u pode ser escrito de duas maneiras distintas, o que contradiz nossa hipótese. Logo $u = 0_V$, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Portanto, $V = W_1 \oplus W_2$.

◇

Proposição 4.7.2. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial não nulo e de dimensão finita e W_1 um subespaço não nulo de V . Então existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Prova: Se $V = W_1$ não há nada a fazer, pois basta escolher $W_2 = \{0_V\}$. Suponha então que $V \neq W_1$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_m\}$ uma base de W_1 . Sabemos que podemos estender \mathcal{B}_1 a uma base \mathcal{B} de V . Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V contendo \mathcal{B}_1 . Defina

$$W_2 = [u_1, \dots, u_n]$$

o subespaço gerado por u_1, \dots, u_n . Como \mathcal{B} gera V , então $V = W_1 + W_2$. Seja $v \in W_1 \cap W_2$. Então existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ tais que

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$$

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n,$$

isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_n u_n = 0_V$$

e então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$ pois \mathcal{B} é L.I.. Assim $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ e portanto $V = W_1 \oplus W_2$. \diamond

Exemplo 4.7.1. 1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = [(1, 0, 0)]$. Então podemos tomar $W_2 = [(0, 1, 0); (0, 0, 1)]$ e teremos $V = W_1 \oplus W_2$. Também podemos tomar $W_3 = [(1, 1, 1); (0, 0, 1)]$ e assim $V = W_1 \oplus W_3$.

2. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Tomando

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

temos $V = W_1 \oplus W_2$.

4.3 Polinômio Minimal

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Para cada $i \geq 0$ se definirmos

$$T^i = \begin{cases} \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{i \text{ vezes}}, & i \geq 1 \\ Id, & i = 0, \end{cases}$$

então $T^i \in \mathcal{L}(V, V)$. Mas, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V, V) = n^2$, assim existe $r \geq 1$ tal que o conjunto $\{T^0, T, T^2, \dots, T^{r-1}\}$ é L.I., mas $\{T^0, T, T^2, \dots, T^r\}$ é L.D.. Logo existem escalares a_0, a_1, \dots, a_{r-1} tais que

$$T^r = a_0 T^0 + a_1 T^1 + \cdots + a_{r-1} T^{r-1},$$

ou seja,

$$T^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i.$$

Assim

$$T^r(u) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i(u)$$

para todo $u \in V$.

Defina

$$m_T(x) = x^r - a_{r-1}x^{r-1} - \cdots - a_1x - a_0.$$

Do exposto anteriormente segue que

$$m_T(T(u)) = 0_V$$

para todo $u \in V$.

Definição 4.8. O **polinômio minimal** de um operador linear T em $\mathcal{L}(V, V)$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Assim, se o grau de $m_T(x)$ é r , então o coeficiente de x^r é 1.

Exemplo 4.8.1. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ dado por

$$T(a, b, c) = (a, a + b, c).$$

Temos $T \neq \lambda Id$ e

$$T^2(a, b, c) = T(T(a, b, c)) = T(a, a + b, c) = (a, 2a + b, c) = 2(a, a + b, c) - (a, b, c)$$

isto é,

$$T^2(a, b, c) = 2T(a, b, c) - Id(a, b, c).$$

Assim o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x - 1)^2.$$

Teorema 4.4. Seja $T \in \mathcal{L}(V, V)$, onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Os polinômios característico e minimal de T possuem exatamente as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.

Exemplo 4.8.2. Seja T o operador sobre \mathbb{R}^n representado em relação à base canônica pela matriz A dada. Encontre o polinômio minimal de T .

$$1. A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}, n = 3$$

Solução: O polinômio característico de T é

$$p_T(x) = (x - 1)(x - 2)^2.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$(x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)^2.$$

Temos

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}, A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

e assim

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = [0]_{3 \times 3}.$$

Logo o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x - 1)(x - 2).$$

Note que $p_T(x) = m_T(x)(x - 2)$ e assim $p_T(A) = [0]_{3 \times 3}$.

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, n = 4.$$

Solução: O polinômio característico de T é

$$p_T(x) = (x - 3)(x - 2)^3.$$

Assim os possíveis candidatos a polinômio minimal são

$$f(x) = (x - 3)(x - 2), g(x) = (x - 3)(x - 2)^2, h(x) = (x - 3)(x - 2)^3.$$

Temos

$$f(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora

$$g(A) = (A - 3I_4)(A - 2I_4)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinômio minimal de T é

$$m_T(x) = (x - 3)(x - 2)^2.$$

Note que $p_T(x) = m_T(x)(x - 2)$ e assim $p_T(A) = [0]_{4 \times 4}$.

$$3. \ A = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ onde } a \neq 0, \ n = 2.$$

Solução: *O polinômio característico de T é*

$$p_T(x) = (x - \lambda)^2.$$

Assim o polinômio minimal será da forma

$$(x - \lambda), \ (x - \lambda)^2;$$

Como $T \neq \lambda Id$, então segue que $m_T(x) = p_T(x)$ e daí $p_T(A) = [0]_{2 \times 2}$.

Teorema 4.5 (Cayley-Hamilton). *Seja T um operador linear sobre um \mathbb{K} -espaço vetorial V de dimensão finita. Se $p_T(x)$ é o polinômio característico de T , então $p_T(T(u)) = 0_V$ para todo $u \in V$. Em particular, o polinômio característico $p_T(x)$ é um múltiplo do polinômio minimal $m_T(x)$ de T .*

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left[e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$W_2 = \left[e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Temos

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1, T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

assim W_1 é um subespaço T -invariante. Seja então $T_1 = T : W_1 \rightarrow W_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ uma base de W_1 . Temos

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_2, T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

assim W_2 é um subespaço T -invariante. Seja então $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$ uma base de W_2 . Temos

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é fácil ver que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ e assim $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}.$$

Neste caso dizemos que T é a **soma direta** dos operadores T_1 e T_2 e escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Além disso temos

$$\begin{aligned} T_1^2(e_1) &= T_1(T(e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T_1^2(e_2) &= T_1(T(e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

assim $T_1^2 = 0$.

Note também que T_2 é invertível pois leva uma base de W_2 em uma base de W_2 . Desse modo o operador T pode ser escrito como a soma direta

$$T = T_1 \oplus T_2$$

onde $T_1^2 = 0$ e T_2 é invertível. O operador T_1 é chamado de **nilpotente** de índice de nilpotência 2.

Definição 4.9. *Seja $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e suponha que W_i seja T -invariante para $i = 1, \dots, r$. Sejam $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ bases de W_1, \dots, W_r , respectivamente. Como $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V então*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}$$

onde $T_i = T : W_i \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, r$. Neste caso escrevemos

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$$

e dizemos que T é a **soma direta dos operadores** T_1, \dots, T_r .

Definição 4.10. *Uma operador linear $T : V \rightarrow V$ é chamado de **nilpotente** se existir um $r > 0$ tal que $T^r = 0$. O **índice de nilpotência** de um operador nilpotente será o menor inteiro i tal que $T^i = 0$.*

Observação 4.10.1. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear nilpotente, então $\ker T \neq \{0_V\}$. De fato, se T é nilpotente de índice $i \geq 1$, então existe $u \in V$ tal que $T^i(u) = 0_V$ e $T^{i-1}(u) \neq 0_V$. Assim

$$0_V = T^i(u) = T(T^{i-1}(u)),$$

isto é, $T^{i-1}(u) \in \ker T$.

Exemplo 4.10.1. 1. Seja $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o operador derivação. É fácil ver que D é nilpotente de índice de nilpotência 4.

2. Seja $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o operador derivação. É fácil ver que D é nilpotente de índice de nilpotência $n + 1$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que T é nilpotente de índice de nilpotência 2.

Teorema 4.6. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.

Observação 4.10.2. O Teorema 4.6 não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. Por exemplo, seja $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(p(x)) = xp(x)$. Suponha que $T = T_1 \oplus T_2$, onde T_1 é nilpotente e T_2 é invertível. Primeiro note que para todo $l \geq 1$, $\ker T^l = \{0\}$, logo T não é nilpotente. Assim $T_2 \neq 0$. Seja W_2 um subespaço T -invariante tal que $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$ seja invertível. Logo T_2 é sobrejetora. Tome $q(x) \in W_2$ um polinômio mônico de menor grau possível. Como T_2 é sobrejetora, então existe $p(x) \in W_2$ tal que

$$xp(x) = T_2(p(x)) = q(x).$$

Mas o grau de $xp(x)$ é maior que o grau de $q(x)$, o que é um absurdo. Logo T_2 não é sobrejetora, ou seja, T não pode ser decomposta com uma soma de um operador nilpotente com um invertível.

Proposição 4.10.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice de nilpotência $r \geq 1$ e V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Se $u \in V$ é tal que $T^{r-1}(u) \neq 0_V$, então*

1. *O conjunto $\{u, T(u), \dots, T^{r-1}(u)\}$ é L.I..*
2. *Existe um subespaço T -invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde U é o \mathbb{K} -espaço vetorial dado por $U = [u, T(u), \dots, T^{r-1}(u)]$.*

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Suponha que T seja nilpotente de índice de nilpotência $r \geq 1$. É imediato que $r \leq n$. Além disso, como $T^{r-1} \neq 0$, existe $u \in V$, $u \neq 0_V$ tal que $T^{r-1}(u) \neq 0_V$. Daí, se $r = n$, então pela Proposição 4.10.1, o conjunto $\mathcal{B} = \{u, T(u), \dots, T^{n-1}(u)\}$ é uma base de V . Com relação à essa base temos

$$\begin{aligned} T(u) &= 0u + 1T(u) + 0T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \\ T(T(u)) &= 0u + 0T(u) + 1T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \\ &\vdots \\ T^n(u) &= 0u + 0T(u) + 0T^2(u) + \dots + 0T^{n-1}(u) \end{aligned}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, se o polinômio característico de T é $p_T(x) = (x - \lambda)^n$, então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, 4.5, o operador $T - \lambda Id$ é nilpotente. Se o seu índice de nilpotência for

n , então existirá uma base \mathcal{B} de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ terá a forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Definição 4.11. Um **bloco de Jordan** $r \times r$ em λ é a matrix $J_r(\lambda)$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ que tem λ na diagonal principal e 1 na diagonal abaixo da principal, isto é,

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r}.$$

Teorema 4.7. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $r \geq 1$, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos p, m_1, \dots, m_p e vetores u_1, \dots, u_p tais que

- (a) $r = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p$.
- (b) O conjunto $\mathcal{B} = \{u_1, T(u_1), \dots, T^{r-1}(u_1); \dots; u_p, T(u_p), \dots, T^{r-1}(u_p)\}$ é uma base de V .
- (c) $T^{m_i}(u_i) = 0_V$ para cada $i = 1, \dots, p$.
- (d) Se S for um operador linear em um \mathbb{K} -espaço vetorial W de dimensão finita, então os inteiros p, m_1, \dots, m_p associados a S e a T são iguais se, e somente se, existir um isomorfismo $\Phi : V \rightarrow W$ com $\Phi T \Phi^{-1} = S$.

Teorema 4.8. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

onde $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Então $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ onde para cada $i = 1, \dots, r$ temos:

$$(a) \dim_{\mathbb{K}} W_i = m_i$$

(b) O subespaço W_i é T -invariante

(c) A restrição do operador $\lambda_i Id - T$ à W_i é nilpotente.

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita tal que seu polinômio característico seja dado por

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Pelo Teorema 4.8, existe uma decomposição $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) de seu enunciado. Agora, para cada $i = 1, \dots, r$ considere $T_i = T - \lambda_i Id : W_i \rightarrow W_i$. Pelo item (c) do Teorema 4.8, T_i é nilpotente. Seja α_i o índice de nilpotência de T_i . Assim

$$T_i^{\alpha_i} = 0$$

$$(T - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = 0$$

e então T_i é raiz do polinômio $(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ para $i = 1, \dots, r$. Seja $f(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$. Pela definição de índice de nilpotência, $f(x)$ é o polinômio de menor grau tal que suas raízes são T_1, \dots, T_r . Logo T é uma raiz de $f(x)$, isto é, $f(x)$ é o polinômio minimal de T . Portanto o índice de nilpotência de T_i é determinado pelo polinômio minimal $m_T(x)$.

Como T_i é nilpotente, pelo item (b) do Teorema 4.7, existe uma base \mathcal{B}_i de W_i e números $p_i, m_{i_1} \geq m_{i_2} \geq \cdots \geq m_{i_{p_i}}$ tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i_1}}(\lambda_i) & & & \\ & J_{m_{i_2}}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_{i_{p_i}}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

onde para cada $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, p_i$

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V . Em relação à essa base temos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & & & \\ & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

A matriz (4.9) é chamada **forma de Jordan** associada ao operador linear T . Os números $p_i, m_{ij}, i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, p_i$ são completamente determinados por T . Mais ainda, pelo item (d) do Teorema 4.7, dois operadores lineares $S \in \mathcal{L}(V, V)$ e $T \in \mathcal{L}(W, W)$ têm a mesma forma de Jordan se, e somente se, existir um isomorfismo $\Phi : V \rightarrow W$ tal que $\Phi^{-1}S\Phi = T$.

Exemplo 4.11.1. 1. Seja $T : \mathbb{K}^7 \rightarrow \mathbb{K}^7$ um operador linear tal que seu polinômio característico é $p_T(x) = (x - 2)^4(x - 3)^3$. Encontre a(s) possível(is) forma(s) de Jordan associadas a T .

Solução: Como $p_T(x) = (x - 2)^4(x - 3)^3$, então $V = W_1 \oplus W_2$ onde $\dim_{\mathbb{K}} W_1 = 4$ e $\dim_{\mathbb{K}} W_2 = 3$. Assim $T = T_1 \oplus T_2$, onde $T_1 = T : W_1 \rightarrow W_1$ e $T_2 = T : W_2 \rightarrow W_2$. Agora, $(T_1 - 2I_4)$ é nilpotente de índice de nilpotência $r \leq 4$. Se $r = 1$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $r = 2$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \text{ou} \quad [T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \\ & & & 2 \end{array} \right].$$

Se $r = 3$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array} \right].$$

Se $r = 4$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

O operador $(T_2 - 3I_3)$ é nilpotente de índice de nilpotência $r \leq 3$.

Se $r = 1$, então

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Se $r = 2$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 1 & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array} \right].$$

Se $r = 3$, então

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Logo existem 15 possíveis formas de Jordan para T .

2. Seja $T : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ tal que $p_T(x) = (x+1)^3(x-2)^2$.

Solução: As possíveis formas são

$$\begin{aligned}
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, & [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Seja $T : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ tal que em relação à base canônica, T seja representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T .

Solução: Primeiramente temos que

$$p_T(x) = x^4.$$

Cálculos simples mostram que $m_T(x) = x^2$. Assim a forma de Jordan de T possui um

bloco de Jordan de tamanho 2 associado a 0. Agora,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ -1/2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -0,4 \\ -0,4 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim $\dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(a) = 2$, isto é, existem dois blocos de Jordan. Portanto, existe uma base \mathcal{B} de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right].$$

4. Seja $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ o operador linear representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de T .

Solução: Inicialmente, como $[T]$ é uma matriz triangular, seu polinômio característico será

$$p_T(x) = (x + 1)^5(x + 4).$$

Um cálculo simples, mostra que

$$m_T(x) = (x + 1)^3(x + 4)$$

logo a forma de Jordan de T possui um bloco de Jordan de tamanho 3, associado à -1 e um bloco de Jordan de tamanho 1, associado à 4 . Desse modo a forma de Jordan de

T será

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar agora, $\text{Aut}_T(-1)$ para decidir qual será a forma de Jordan de T .

Temos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -3 \quad -2 \quad -1 \quad -2 \quad -7 \end{array} \rightsquigarrow \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \quad -3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde obtemos que $\text{Aut}_T(-1) = \{(x_1, x_2, -2x_2, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Logo obtemos $\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}_T(-1) = 2$ e portanto a forma de Jorda de T é

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}.$$

Observação 4.11.1. 1. Se um operador linear $T : V \rightarrow V$, onde $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, é tal que

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

com $r \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Se $T - \lambda_i \text{Id}$ é nilpotente de índice de nilpotência α_i , então existe um bloco de Jordan de tamanho α_i , $i = 1, \dots, r$.

2. A dimensão de $\text{Aut}_T(\lambda_i)$ é igual ao número de blocos de Jordan $J_{\alpha_i}(\lambda_i)$ de tamanho α_i que aparece em T .

3. A base que gera a forma de Jordan é chamada de **base de Jordan**.

4.4 Como encontrar a base de Jordan

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que sua forma de Jordan seja

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan, temos

$$T(v_1) = 3v_1 + v_2$$

$$T(v_2) = 3v_2 + v_3$$

$$T(v_3) = 3v_3,$$

isto é,

$$(T - 3Id)(v_1) = v_2$$

$$(T - 3Id)(v_2) = v_3$$

$$(T - 3Id)(v_3) = 0.$$

Assim para achar a base de Jordan precisamos de:

1. Achar todos os autovetores correspondentes a um certo autovalor, isto é, encontrar $\text{Aut}_T(\lambda)$.
2. O número de autovetores L.I. associados ao autovalor λ é igual ao número de blocos de Jordan associados à λ .
3. Resolver a equação $(T - \lambda Id)(u) = v_\lambda$ onde v_λ é o autovetor associado ao autovalor λ para cada autovetor diferente.

Vamos aplicar este método para o caso de matrizes 3×3 . Neste caso temos três situações para analisar:

1. Existem 3 autovetores L.I.

Por exemplo, para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de A .

Solução: *O polinômio característico é*

$$p_A(x) = (x - 5)(x - 3)^2$$

e daí

$$\text{Aut}_A(5) = [e_1 = (1, 2, 1)]$$

$$\text{Aut}_A(3) = [e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (-1, 0, 1)].$$

Assim a forma de Jordan de A é

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $J_1(5) = [5]$ e $J_1(3) = [3]$.

2. Existem 2 autovetores L.I.

Encontre a forma de Jorda e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Temos

$$p_A(x) = (x - 1)^3 \quad e \quad m_A(x) = (x - 1)^2.$$

Assim temos pelo menos um bloco de Jordan de tamanho 2. Além disso,

$$\text{Aut}_A(1) = [e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, -1)]$$

e daí temos duas possíveis formas de Jordan para A , a saber:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos procurar uma base que gere a matriz B . Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan que produz a matriz B , então temos

$$A(v_1) = v_1 + v_2$$

$$A(v_2) = v_2$$

$$A(v_3) = v_3$$

e assim

$$(A - I_3)(v_1) = v_2$$

$$(A - I_3)(v_2) = 0$$

$$(A - I_3)(v_3) = 0.$$

Deste modo podemos escolher v_2 e v_3 como autovetores de A . Digamos que

$$v_2 = (0, 1, -1) \quad e \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

O sistema associado é

$$\begin{bmatrix} y + z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é impossível. Assim vamos tomar

$$v_2 = (1, 0, 0) \quad e \quad v_3 = (0, 1, -1).$$

Precisamos encontrar $v_1 = (x, y, z)$ tal que

$$(A - I_3)(v_1) = v_2.$$

Resolvendo o sistema associado encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1).$$

Tomando $x = y = 0$ o vetor procurado é $v_1 = (0, 0, 1)$. Assim na base $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1); v_2 = (1, 0, 0); v_3 = (0, 1, -1)\}$ a forma de Jordan de A será como dado por B .

Escolhermos a ordem $\mathcal{B}_1 = \{v_3, v_1, v_2\}$ obtemos

$$[A]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Existe 1 autovalor L.I.

Encontre a forma de Jordan e a base correspondente para o operador representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução: *Aqui*

$$p_A(x) = (x + 1)^3 = m_A(x).$$

Deste modo existe um bloco de Jordan de tamanho 3. Além disso

$$\text{Aut}_A(-1) = [e_1 = (1, 0, 0)].$$

Assim a única possibilidade para a forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base de Jordan, então

$$(A + I_3)(v_1) = v_2$$

$$(A + I_3)(v_2) = v_3$$

$$(A + I_3)(v_3) = 0.$$

Tome $v_3 = (1, 0, 0)$ e seja $v_2 = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$v_2 = x(1, 0, 0) + (0, -1, 0).$$

Podemos então tomar $v_2 = (0, -1, 0)$.

Agora, precisamos encontrar $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que $(A + I_3)(v_1) = v_2$. Do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

encontramos

$$v_1 = x(1, 0, 0) + (0, 0, 1/2).$$

Tomando $v_1 = (0, 0, 1/2)$ a base de Jordan será

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 0, 1/2); v_2 = (0, -1, 0); v_3 = (1, 0, 0)\}.$$

CAPÍTULO 5

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Durante este capítulo o corpo base \mathbb{K} de um espaço vetorial V será sempre \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Definição 5.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. Um **produto interno** sobre V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades seguintes:*

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todos u, v e $w \in V$.
2. $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todos $u, w \in V$.
3. $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$ para todos $u, w \in V$. (Aqui, $\overline{a + bi} = a - bi$.)
4. $\langle u, u \rangle > 0_{\mathbb{K}}$ se $u \neq 0_V$.

Observação 5.1.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Temos*

1. $\langle 0_V, w \rangle = \langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ para todo $w \in V$.

De fato,

$$\langle 0_V, w \rangle = \langle 0_V + 0_V, w \rangle = \langle 0_V, w \rangle + \langle 0_V, w \rangle$$

logo $\langle 0_V, w \rangle = 0_{\mathbb{K}}$. Como $\langle w, 0_V \rangle = \overline{\langle 0_V, w \rangle}$, então $\langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{K}}$.

2. $\langle w, w \rangle = 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $w = 0_V$.

3. No caso em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a propriedade 3 da definição de produto interno torna-se: $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$.

Exemplo 5.1.1. 1. Em \mathbb{R}^3 a função $\langle ; \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz$$

é um produto interno.

Solução: De fato, dados $(a, b, c), (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

$$(a) \langle (a, b, c) + (x, y, z); (u, v, w) \rangle = \langle (a+x, b+y, c+z); (u, v, w) \rangle = (a+x)u + (b+y)v + (c+z)w = \langle (a, b, c); (u, v, w) \rangle + \langle (x, y, z); (u, v, w) \rangle.$$

$$(b) \langle \lambda(a, b, c), (x, y, z) \rangle = \langle (\lambda a, \lambda b, \lambda c), (x, y, z) \rangle = \lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda \langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle$$

$$(c) \langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz = \langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle.$$

$$(d) \langle (a, b, c); (a, b, c) \rangle = a^2 + b^2 + c^2 > 0 \text{ para todo } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

2. Em \mathbb{C}^3 a função $\langle ; \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = ax + by + cz$$

não é um produto interno.

Solução: De fato, por exemplo

$$\langle (i, 0, 0); (i, 0, 0) \rangle = i^2 = -1 < 0.$$

3. Em \mathbb{C}^3 a função $\langle ; \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle (a, b, c); (x, y, z) \rangle = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z}$$

é um produto interno.

4. Se $V = \mathbb{R}^2$ então $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle (a, b); (x, y) \rangle = 2ax - ay - bx + by$$

é um produto interno.

5. De modo geral, em $V = \mathbb{K}^n$ a função definida por

$$\langle (x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

é um produto interno em \mathbb{K}^n . Tal produto interno é chamada de **produto interno canônico** em \mathbb{K}^n .

6. Considere o \mathbb{K} -espaço vetorial $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{K} . Defina

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

para $f, g \in V$. Tal função é um produto interno em V e é chamado de **produto interno canônico** em $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

7. O **produto interno canônico** em $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é dado por

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

onde $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$.

Definição 5.2. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada $u \in V$, chamamos de **norma** de u ao número real dado por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Observação 5.2.1. Segue diretamente da definição de norma que:

1. $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$.
2. $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0_V$.
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.

Exemplo 5.2.1. 1. Em \mathbb{R}^3 considere o produto interno canônico. Dados $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ temos

$$\|u - v\| = \|(a - x, b - y, c - z)\| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}$$

indicará a distância entre u e v .

2. A norma de um vetor depende do produto interno escolhido. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 se considerarmos o produto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle_1 = 2x_1y_1 + 25x_2y_2.$$

Então $\|(1, 0)\|_1 = \langle (1, 0); (1, 0) \rangle_1 = \sqrt{2}$ e $\|(0, 1)\|_1 = \langle (0, 1); (0, 1) \rangle_1 = 5$.

Agora, se considerarmos o produto interno canônico de \mathbb{R}^2 , temos $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$.

Definição 5.3. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Dizemos que u e w são vetores **ortogonais** se $\langle u, w \rangle = 0$.
2. Um subconjunto \mathcal{A} de V é chamado de **ortogonal** se os seus elementos são ortogonais dois a dois.
3. Dizemos que um subconjunto \mathcal{A} de V é **ortonormal** se for um conjunto ortogonal e se $\|u\| = 1$ para todo $u \in \mathcal{A}$.

Notação 5.3.1. Usaremos a notação $u \perp w$ para indicar que os vetores u e v são ortogonais.

Observação 5.3.1. O vetor nulo 0_V é ortogonal a todos os elementos de V pois $\langle 0_V, u \rangle = 0$ para todo $u \in V$. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.

Exemplo 5.3.1. As bases canônicas de \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $M_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{C})$ são conjunto ortonormais, considerando o produto interno canônico nestes espaços vetoriais.

Proposição 5.3.1. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial com produto interno e seja \mathcal{A} um subconjunto ortogonal de V formado por vetores não nulos.

(a) Se $u \in [v_1, \dots, v_n]$ com $v_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \dots, n$, então

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

(b) O conjunto \mathcal{A} é L.I.

Prova:

(a) Seja $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é ortogonal temos

$$\langle u, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

para $j = 1, \dots, n$. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

para $j = 1, \dots, n$. Assim

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

como queríamos.

(b) Suponha que existam escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e vetores não nulos $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{A}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Pelo item (a) temos

$$\alpha_i = \frac{\langle 0_V, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} = 0_K$$

para $i = 1, \dots, n$. Portanto \mathcal{A} é L.I.

◇

Corolário 5.0.1. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial com produto interno e seja \mathcal{A} uma base ortonormal de V . Então para $u \in V$ temos*

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i$$

onde $v_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, \dots, n$.

5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial com um produto interno. Considere $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ um conjunto L.I. Vamos obter um novo conjunto L.I. $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ ortogonal e que gera o mesmo espaço vetorial que \mathcal{A} . Para tal fazemos:

1. $w_1 = v_1$
2. $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$

Como $\{v_1, v_2\}$ é L.I., então $w_2 \neq 0_V$. Além disso,

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1; w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$$

e então $w_1 \perp w_2$.

3. Definidos w_1, \dots, w_k , $1 < k < n$ podemos definir w_{k+1} por

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

É fácil verificar que os vetores w_1, \dots, w_n definidos anteriormente são dois a dois ortogonais, logo $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal. Mais ainda, pela Proposição 5.3.1, o conjunto \mathcal{B} é L.I. e $w_i \in [v_1, \dots, v_n] = U$ para $i = 1, \dots, n$. Agora como $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, segue que \mathcal{B} é uma base para U , como queríamos.

Exemplo 5.3.2. 1. *Seja $V = \mathbb{C}^3$ com o produto interno canônico. Determinar uma base ortogonal de \mathbb{C}^3 contendo o vetor $(1, 2i, 0)$.*

Solução: *Primeiro obtemos uma base de \mathbb{C}^3 contendo $(1, 2i, 0)$. Por exemplo, podemos considerar a base $\{v_1 = (1, 2i, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$. Defina $w_1 = v_1 =$*

$(1, 2i, 0)$, assim

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0, 1, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0), (1, 2i, 0) \rangle}{\|(1, 2i, 0)\|^2} (1, 2i, 0) = (0, 1, 0) + \frac{2i}{5} (1, 2i, 0)$$

$$w_2 = \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 &= (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 2i, 0) \rangle}{\|(1, 2i, 0)\|^2} (1, 2i, 0) \\ &\quad - \frac{\langle (0, 0, 1), (2i/5, 1/5, 0) \rangle}{\|(2i/5, 1/5, 0)\|^2} (2i/5, 1/5, 0) \end{aligned}$$

$$w_3 = (0, 0, 1).$$

Portanto o conjunto

$$\left\{ (1, 2i, 0); \left(\frac{2i}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right); (0, 0, 1) \right\}$$

é uma base ortogonal de \mathbb{C}^3 .

2. Seja $\{(1, 1, 1); (0, 2, 1); (0, 0, 1)\}$ uma base de \mathbb{R}^3 . Encontrar uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 , em relação ao produto interno canônico.

Solução: Defina $w_1 = (1, 1, 1)$. Temos

$$w_2 = (0, 2, 1) - \frac{\langle (0, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$$

$$w_3 = (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle}{\|(-1, 1, 0)\|^2} (-1, 1, 0) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1)$$

$$w_3 = (-1/3, -1/3, 2/3).$$

Portanto o conjunto $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1); (-1, 1, 0); (-1/3, -1/3, 2/3)\}$ é uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Teorema 5.1. Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.

Prova: Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe uma base ortogonal para V . Seja $\{w_1, \dots, w_n\}$ tal base. Assim

$$\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$$

é uma base ortonormal, como queríamos. \diamond

Deste teorema temos o seguinte: Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja $\{w_1, \dots, w_n\}$ uma base ortonormal de V . Se

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

$$v = \sum_{j=1}^n \beta_j w_j$$

então

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^n \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}. \quad (5.1)$$

Deste fato segue que

Corolário 5.1.1. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n\}$ duas bases ortonormais de V . Se M é a matriz mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{A} , então*

$$M \overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n.$$

Prova: Seja $M = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ a matriz mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{A} . Então para $i, j = 1, \dots, n$ temos

$$v_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} u_k$$

$$v_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} u_k.$$

Agora, de (5.1) temos

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \overline{\alpha_{kj}}$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$. Logo

$$M \overline{M}^t = \overline{M}^t M = I_n$$

como queríamos. \diamond

BIBLIOGRAFIA

- [1] Flávio U. Coelho e Mary L. Lourenço, *Um curso de Álgebra Linear*, Editora EdUSP, 2^a edição, 2007.
- [2] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1976.
- [3] J. Boldrini, S. Costa, V. Figueiredo, H. Wetzler, *Álgebra Linear*, Editora Harbra, 3^a edição, 1980.
- [4] Roland E. Larson, Bruce H. Edwards, *Elementary Linear Algebra*, D. C. Heath and Company, 1988.
- [5] Salahoddin Shokranian, *Álgebra 1*, Editora Ciência Moderna, 2010.
- [6] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, 1992.

ÍNDICE REMISSIVO

- Autovalor, 86
- Autovetor, 87
- Corpos, 5
 - Finitos, 8
- Cota Superior, 54
- Elemento
 - Maximal, 54
- Espaço Vetorial, 37
 - Base, 43
 - Combinação linear, 39
 - Conjunto gerador, 39
 - Conjunto L.D., 42
 - Conjunto L.I., 42
 - Dimensão, 45
 - Finitamente gerado, 44
- Jordan
 - Base de, 114
 - Bloco de , 107
 - Forma de, 109
- Lema de Zorn , 55
- Matriz
 - Linha Equivalente, 18
 - Linha-reduzida, 20
 - Na forma escada, 22
 - Quadrada, 31
- Multiplicidade
 - Algébrica, 93
 - Geométrica, 93
- Nulidade
 - de uma matriz, 23
- Operações Elementares, 13
 - Sobre Matrizes, 15
- Operador Linear, 85
 - Nilpotente, 104
- Polinômio
 - Característico, 88
 - Minimal, 100
- Posto

- de uma matriz, 23
- Produto interno, 121
- Relação de Ordem
 - Parcial, 54
 - Total, 54
- Sistema Linear, 12
- Sistemas Equivalentes, 14
- Soma direta, 96
- Subespaço, 47
 - T -invariante, 96
 - gerado, 50
- Transformação Linear
 - Diagonalizável, 87