Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

Álgebra - Curso de Verão - UFV

$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Seja G um grupo tal que $|G| = p(p+2)$, onde p e $p+2$ são primos (chamados **primos gêmeos**). Mostre que G é cíclico.

Exercício 2: Prove que todo grupo de ordem $5 \cdot 7 \cdot 47$ é cíclico.

Exercício 3: Seja G um grupo finito. Mostre que:

1. Se $|G| = 42$, então $n_7 = 1$.
2. Se $|G| = 48$, então G necessariamente contém um sugbrupo normal de ordem 8 ou de ordem 16.
3. Se $|G| = 36$, então G contém um subgrupo normal de ordem 9 ou 3.

Exercício 4: Sejam G um grupo, $|G| = p^m b$, com p número primo e p não divide b, K um p-subgrupo de Sylow de G e $H \trianglelefteq G$ tal que $K \subseteq H$. Mostre que $K \trianglelefteq H$ se, e somente se, $K \trianglelefteq G$ se, e somente se, $n_p = 1$.

Exercício 5: Prove que não existem grupos simples de ordem 28 ou 312.

Exercício 6: Sejam G um grupo finito tal que $|G| = p_1 p_2 \cdots p_r$ com $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e, para cada i, p_i é primo. Sabendo que grupos deste tipo não são simples, mostre que o p_r subgrupo de Sylow de G é normal.

Exercício 7: Sejam p um número primo e G um grupo não abeliano de ordem p^3. Mostre que $|Z(G)| = p$. Mostre que $Z(G) = G'$ e que $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercício 8: Seja G um grupo de ordem $11^2 13^2$. Mostre que G é um grupo abeliano.

Exercício 9: Sejam G um p-grupo finito, isto é, $|G| = p^n$ e $H \leq G$. Mostre que:

1. Se $H \neq G$, então existe $x \in G$, $x \notin H$ tal que $x^{-1}Hx = H$. [Sugestão: Faça por indução sobre n usando as possibilidades de $Z(G)$ estar ou não contido em H.]
2. Se $|H| = p^{n-1}$, então H é normal em G.
3. Existe uma sequência de subgrupos $H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n$ tal que $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$ e H_{i+1}/H_i é ciclido de ordem p.