



Álgebra - Curso de Verão - UFV

2ª Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Seja G um grupo tal que $x^1 = 1$ para todo $x \in G$. Mostre que G abeliano.

Exercício 2: Seja G um grupo. Defina $G' = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$. Mostre que

(a) G' um subgrupo normal de G .

(b) G/G' é abeliano.

(c) G' é o menor subgrupo normal de G com esta propriedade, isto é, se $H \trianglelefteq G$ é tal que G/H é abeliano, então $G' \subseteq H$.

O subgrupo G' chamado de **subgrupo de comutadores**.

Exercício 3: Seja G um grupo finito e sejam $K < H < G$. Mostre que

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Exercício 4: Sejam G um grupo e $a, b \in G$. Mostre que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^na$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 5: Seja G um grupo. Mostre que se $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$, ento

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}.$$

Exercício 6: Sem G um grupo. Mostre que se $K \leq H \leq G$ com $K \trianglelefteq G$ e $H \trianglelefteq G$, ento

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}.$$