Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

Álgebra - Curso de Verão - UFV

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Seja $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Mostre que Q_8 é um grupo e que $Q_8 \cong \mathcal{Q}$, onde

$$\mathcal{Q} = \{I, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3\},$$

I é a matriz identidade e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

com $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

Exercício 2: Calcule todos os subgrupos grupos dados. Quais subgrupos são normais?

(a) S_3

(b) D_8

(c) D_6

(d) Q_8

Exercício 3: Seja G um grupo. Defina $G' = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$. Mostre que:

(a) G' é um subgrupo normal de G.

(b) G/G' é abeliano.

(c) G' é o menor subgrupo normal de G com esta propriedade, isto é, se $H \trianglelefteq G$ é tal que G/H é abeliano, então $G' \subseteq H$.

O subgrupo G' é chamado de **subgrupo de comutadores**.

Exercício 4: Seja G um grupo tal que $\{1\}$ e G são seus únicos subgrupos. Mostre que a ordem de G é um número primo.

Exercício 5: Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Se ϕ é injetivo, mostre que $|\phi(x)| = |x|$ para todo $x \in G$.

Exercício 6: Mostre que todo grupo quociente de um grupo cíclico é cíclico.

Exercício 7: Seja $\phi : G \to H$ um isomorfimo de grupos. Mostre que:

(a) Se $a \in G$ tem ordem infinita, então $\phi(a)$ também tem ordem infinita.

(b) Se $a \in G$ tem ordem n, então $\phi(a)$ também tem ordem n.

(c) Conclua que se G tem um elemento de ordem n e H não possui elemento com essa ordem, então $G \not\cong H$.

Exercício 8: Prove que um grupo G é abeliano, se e somente se, a função $f : G \to G$ dada por $f(a) = a^{-1}$ é um homomorfismo.

Exercício 9: Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Mostre que se $[G : H] = 2$, então $H \trianglelefteq G$.

Exercício 10: Sejam G e H grupos e $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Mostre que $\ker \phi \trianglelefteq G$.

Exercício 11: É verdade que se $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$?

Exercício 12: Seja G um grupo. Um isomorfismo $\phi : G \to G$ é chamado de um **automorfismo** de G. Seja $\operatorname{Aut} G = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ é um automorfismo de } G\}$. Mostre que $\operatorname{Aut} G$ é um grupo com a composição de funções.

Exercício 13: Sejam G um grupo e $\mathcal{I}_a : G \to G$, para $a \in G$ fixado, definido por $\mathcal{I}_a(x) = a^{-1}xa$.

(a) Mostre que $\mathcal{I}_a$ é um isomorfismo.

(b) Seja $\mathcal{I}(G) = \{\mathcal{I}_a \mid a \in G\} \subseteq \operatorname{Aut}(G)$. Mostre que $\mathcal{I}(G)$ é um subgrupo normal de $\operatorname{Aut}(G)$.

Exercício 14: Considere a função

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : (G, \cdot) &\to (\mathcal{I}(G), \circ) \\ a &\mapsto \mathcal{I}_a. \end{aligned}$$

Por definição, $\mathcal{I}$ é uma função sobrejetora.

(a) Mostre que $\mathcal{I}$ é um homomorfismo de grupos.

(b) Mostre que $\ker \mathcal{I} = Z(G)$ e que $\mathcal{I}(G) \cong G/Z(G)$.

(c) Mostre que se G não é abeliano, então $\mathcal{I}(G)$ não é cíclico.

Exercício 15: Seja G um grupo finito e sejam $K < H < G$. Mostre que

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Exercício 16: Sejam G um grupo e a, $b \in G$. Mostre que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 17: Seja G um grupo. Mostre que se $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$, então

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}.$$

Exercício 18: Seja G um grupo. Mostre que se $K \leq H \leq G$ com $K \trianglelefteq G$ e $H \trianglelefteq G$, então

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}.$$

Exercício 19: Sejam G e H grupos e $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Mostre que se $|x| < \infty$, então $|\phi(x)|$ divide $|x|$.

Exercício 20: Mostre que todo grupo G tal que $|G| < 6$ é abeliano.

Exercício 21: Mostre que se G é um grupo de ordem 6, então ou G é cíclico ou $G \cong S_3$.

Exercício 22: Seja $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \neq 0\}$. Prove que G é um grupo com a composição de funções que é isomorfo ao subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 23: Seja p um número primo e G um p-grupo de ordem p^3. Prove que se G não é abeliano, então $|Z(G)| = p$.

Exercício 24: Seja G um grupo contendo apenas duas classes de conjugação. Mostre que $|G| = 2$, isto é, G é um grupo cíclico de ordem 2.

Exercício 25: Seja G um grupo tal que $|G| = 2p$, onde p é um número primo. Mostre que existe $H \trianglelefteq G$ tal que $|H| = p$.

Exercício 26: Seja G um grupo tal que $|G| = pq$, onde p e q são primos. Mostre que se G é abeliano e $p \neq q$, então G é cíclico.