



## Álgebra - Curso de Verão - UFV

### 4ª Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

**Exercício 1:** Seja  $G$  um grupo tal que  $|G| = p(p+2)$ , onde  $p$  e  $p+2$  são primos (chamados **primos gêmeos**). Mostre que  $G$  é cíclico.

**Exercício 2:** Prove que todo grupo de ordem  $5 \cdot 7 \cdot 47$  é cíclico.

**Exercício 3:** Seja  $G$  um grupo finito. Mostre que:

- (a) Se  $|G| = 42$ , então  $n_7 = 1$ .
- (b) Se  $|G| = 48$ , então  $G$  necessariamente contém um subgrupo normal de ordem 8 ou de ordem 16.
- (c) Se  $|G| = 36$ , então  $G$  contém um subgrupo normal de ordem 9 ou 3.

**Exercício 4:** Sejam  $G$  um grupo,  $|G| = p^m b$ , com  $p$  número primo e  $p$  não divide  $b$ ,  $K$  um  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$  e  $H \trianglelefteq G$  tal que  $K \subseteq H$ . Mostre que:

$$K \trianglelefteq H \Leftrightarrow K \trianglelefteq G \Leftrightarrow n_p = 1.$$

**Exercício 5:** Prove que não existem grupos simples de ordem 28 ou 312.

**Exercício 6:** Sejam  $G$  um grupo finito tal que  $|G| = p_1 p_2 \cdots p_r$  com  $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$  e, para cada  $i$ ,  $p_i$  é primo. Sabendo que grupos deste tipo não são simples, mostre que o  $p_r$ -subgrupo de Sylow de  $G$  é normal.

**Exercício 7:** Sejam  $p$  um número primo e  $G$  um grupo não abeliano de ordem  $p^3$ . Mostre que  $|Z(G)| = p$ . Mostre que  $Z(G) = G'$  e que  $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Exercício 8:** Seja  $G$  um grupo de ordem  $11^2 13^2$ . Mostre que  $G$  é um grupo abeliano.

**Exercício 9:** Sejam  $G$  um  $p$ -grupo finito, isto é,  $|G| = p^n$  e  $H \leq G$ . Mostre que:

- (a) Se  $H \neq G$ , então existe  $x \in G$ ,  $x \notin H$  tal que  $x^{-1} H x = H$ . [Sugestão: Faça por indução sobre  $n$  usando as possibilidades de  $Z(G)$  estar ou não contido em  $H$ .]
- (b) Se  $|H| = p^{n-1}$ , então  $H$  é normal em  $G$ .
- (c) Existe uma sequência de subgrupos  $H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n$  tal que  $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  e  $H_{i+1}/H_i$  é cíclico de ordem  $p$ .

**Exercício 10:** Sejam  $x, y, z \in G$ , onde  $G$  é um grupo. Mostre que:

- (a)  $[x, y]^{-1} = [y, x]$ .
- (b)  $[x, y]^z = [x^z, y^z]$ .
- (c)  $[x, y]z = z[x^z, y^z]$ .

(d)  $[x^y, z] = [x, z]^{[x, y]}[x, y, z]$ .

**Exercício 11:** Um grupo  $G$  é chamado de **perfeito** se  $G = G'$ . Prove que todo grupo que não é solúvel contém um subgrupo característico  $H \neq \{1\}$  que é perfeito.

**Exercício 12:** Sejam  $H$  e  $K$  dois subgrupos normais de um grupo  $G$ . Prove que se ambos  $H$  e  $K$  são solúveis, então o grupo  $HK$  também é solúvel.

**Exercício 13:** Prove que todo grupo de ordem 12 é solúvel.

**Exercício 14:** Sejam  $p \neq q$  dois números primos. Prove que todo grupo de ordem  $pq$  é solúvel.

**Exercício 15:** Seja  $G$  um grupo finito nilpotente de ordem  $n$ . Prove que, para cada divisor  $d$  de  $n$ ,  $G$  contém um subgrupo de ordem  $d$ .

**Exercício 16:** Seja  $H$  um subgrupo de um grupo finito nilpotente  $G$ . Definimos  $N_1 = N_G(H)$  e, indutivamente,  $N_i = N_G(N_{i-1})$ . Prove que existe um inteiro positivo  $k$  tal que  $N_k = G$ .

**Exercício 17:** Mostre que, se um grupo  $G$  é tal que  $G/Z(G)$  é nilpotente, então  $G$  é nilpotente.

**Exercício 18:** Sejam  $G$  e  $H$  grupos abelianos finitamente gerados. Prove que  $G \times G \cong H \times H$  se, e somente se,  $G \cong H$ .

**Exercício 19:** Sejam  $G$ ,  $H$  e  $K$  grupos abelianos finitamente gerados. Prove que  $G \times K \cong H \times K$  se, e somente se,  $G \cong H$ .

**Exercício 20:** Prove que vale a recíproca do Teorema de Lagrange para grupos abelianos finitos.

**Exercício 21:** Quantos grupos abelianos  $G$  existem, a menos de isomorfismo, de ordem:

- (a)  $|G| = 2700$
- (b)  $|G| = 7^2 11^2 13$
- (c)  $|G| = p^{10}$ , com  $p$  primo.

**Exercício 22:** Sejam  $G$  e  $H$  grupos abelianos de ordem  $p^n$ , com  $p$  primo. Mostre que:

- (a) Se  $pG = \{0\}$ , então  $G \cong \mathbb{Z}_p^n$ .
- (b)  $pG \cong pH$  se, e somente se,  $G \cong H$ .

**Exercício 23:** Quantos grupos abelianos  $G$  existem, a menos de isomorfismo, satisfazendo:

- (a)  $|G| = 3^5$ ,  $9G = \{0\}$  e  $3G \neq \{0\}$
- (b)  $|G| = 5^4$ ,  $25G = \{0\}$  e  $|5G| = 25$
- (c)  $|G| = 7^5 11^3$  e  $77G = \{0\}$
- (d)  $|G| = 32$ , para todo  $x \in G$  tem-se que  $|x| \leq 8$  e existe  $x \in G$  com  $|x| = 8$ .

**Exercício 24:** Quantos grupos abelianos finitamente gerados existem, a menos de isomorfismo, satisfazendo:

- (a)  $|T(G)| = 27$ ,  $\text{posto}(G) = 3$  e para todo  $x \in G$  tem-se que  $|x| = 3$  ou  $|x| = \infty$ .
- (b)  $|T(G)| = 25$ ,  $\text{posto}(G) = 4$  e  $5G$  **não** é livre.