Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

Álgebra - Curso de Verão - UFV

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Determine a ordem de cada elemento de D_4. Determine todos os subgrupos de D_4.
Exercício 2: Seja G um grupo. Defina $G' = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$. Mostre que

(a) G' é um subgrupo normal de G.

(b) G/G' é abeliano.

(c) G' é o menor subgrupo normal de G com esta propriedade, isto é, se $H \trianglelefteq G$ é tal que G/H é abeliano, então $G' \subseteq H$.

O subgrupo G' é chamado de **subgrupo de comutadores**.

Exercício 3: Seja G um grupo tal que $\{1\}$ e G são seus únicos subgrupos. Mostre que a ordem de G é um número primo.

Exercício 4: Prove que um grupo G é abeliano, se e somente se, a função $f : G \to G$ dada por $f(a) = a^-1$ é um homomorfismo.

Exercício 5: Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Mostre que se $[G : H] = 2$, então $H \trianglelefteq G$.

Exercício 6: Sejam G e H grupos e $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Mostre que $\ker \phi \trianglelefteq G$.

Exercício 7: É verdade que se $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$?

Exercício 8: Seja G um grupo. Um isomorfismo $\phi : G \to G$ é chamado de um **automorfismo** de G. Seja $\operatorname{Aut} G = \{\phi : G \to G \mid \phi$ é um automorfismo de $G\}$. Mostre que $\operatorname{Aut} G$ é um grupo com a composição de funções.

Exercício 9: Sejam G um grupo e $\mathcal{I}_a : G \to G$, para $a \in G$ fixado, definido por $\mathcal{I}_a(x) = a^{-1}xa$.

(a) Mostre que $\mathcal{I}_a$ é um isomorfismo.

(b) Seja $\mathcal{I}(G) = \{\mathcal{I}_a \mid a \in G\} \subseteq \operatorname{Aut}(G)$. Mostre que $\mathcal{I}(G)$ é um subgrupo normal de $\operatorname{Aut}(G)$.

Exercício 10: Considere a função

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : (G, \cdot) &\to (\mathcal{I}(G), \circ) \\ a &\mapsto \mathcal{I}_a. \end{aligned}$$

Por definição, $\mathcal{I}$ é uma função sobrejetora.

(a) Mostre que $\mathcal{I}$ é um homomorfismo de grupos.

(b) Mostre que $\ker \mathcal{I} = Z(G)$ e que $\mathcal{I}(G) \cong G/Z(G)$.

(c) Mostre que se G não é abeliano, então $\mathcal{I}(G)$ não é cíclico.

Exercício 11: Seja G um grupo finito e sejam $K < H < G$. Mostre que

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Exercício 12: Sejam G um grupo e a, $b \in G$. Mostre que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 13: Seja G um grupo. Mostre que se $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$, então

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}.$$

Exercício 14: Seja G um grupo. Mostre que se $K \leq H \leq G$ com $K \trianglelefteq G$ e $H \trianglelefteq G$, então

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}.$$

Exercício 15: Sejam G e H grupos e $\phi : G \to H$ um homomorfismo. Mostre que se $|x| < \infty$, ento $|\phi(x)|$ divide $|x|$.

Exercício 16: Mostre que todo grupo G tal que $|G| < 6$ abeliano.