Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

Álgebra - Curso de Verão - UFV

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

Exercício 1: Escreva as permutações abaixo como produtos de ciclos disjuntos e calcule suas ordens:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $(123)(45)(16879)(15)$

(d) $(12)(123)(12)$

Exercício 2: Calcule $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ nos exemplos seguintes:

(a) $\sigma = (135)(12)$, $\alpha = (1579)$

(b) $\sigma = (579)$, $\alpha = (123)(34)$

(c) $\sigma = (12)(34)$, $\alpha = (123)(45)$

Exercício 3: Encontre uma permutação σ tal que $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ nos seguintes casos:

(a) $\alpha = (12)(34)$, $\beta = (56)(13)$

(b) $\alpha = (123)(78)$, $\beta = (257)(13)$

(c) $\alpha = (12)(34)(578)$, $\beta = (18)(23)(456)$

Exercício 4: Escreva cada elemento de S_4 como um produto de ciclos disjuntos. Escreva cada elemento de S_4 como um produto de transposições.

Exercício 5: Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in S_n$ ciclos disjuntos de comprimentos $r_1, \ldots, r_t$ respectivamente. Mostre que o produto $\alpha_1 \cdots \alpha_t$ tem ordem igual a $mmc\{r_1, \ldots, r_t\}$.

Exercício 6: Sejam p um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

(a) Todo elemento de ordem p no grupo S_p é um p-ciclo.

(b) S_p não tem elemento de ordem kp com $k \geq 2$.

(c) Se t é um inteiro positivo, mostre que o grupo S_n possui elementos de ordem p^t se, e somente se, $n \geq p^t$.

Exercício 7: Mostre que as possíveis ordens de elementos do grupo S_7 pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}$.

Exercício 8: Use as idéias da do Lema sobre conjugação de permutações em S_n nos itens abaixo.

(a) Sejam a, b, i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Mostre que existe um 3-ciclo σ, envolvendo a e b e mais uma letra, tal que $\sigma(aij)\sigma^{-1} = \sigma(bak)\sigma^{-1}$ para algum k. Conclua que $(aij) \in \langle (abl) \mid l \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{a, b\} \rangle$.

(b) Dados a, k, l, $m \in \{1, \ldots, n\}$ distintos, sabemos que existe $\sigma \in S_n$ tal que $(klm) = \sigma(akm)\sigma^{-1}$ para algum k. Mostre que σ pode ser escolhido igual a um 3-ciclo envolvendo a letra a e mais duas letras.

(c) Sejam a, $b \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Conclua que

$$\langle 3 - ciclos \rangle = \langle (abl) \mid l \notin \{a, b\} \rangle.$$

Logo $A_n = \langle (abl) \mid l \notin \{a, b\} \rangle$.

Exercício 9: Se $\sigma \in S_n$ fixa algum j isto é, $\sigma(j) = j$, onde $1 \leq j \leq n$, defina $\beta \in S_{n-1}$ por $\beta(i) = \sigma(i)$ para todo $i \neq j$. Mostre que $(-1)^\beta = (-1)^\sigma$.

Exercício 10: Se $\sigma \in S_n$ é um r-ciclo, mostre que $(-1)^\sigma = (-1)^{r-1}$.

Exercício 11: Mostre que um r-ciclo é um permutação par se, e somente se, r é ímpar.