Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

# Álgebra - Curso de Verão - UFV

## $3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios – 2015

Prof. José Antônio O. Freitas

**Exercício 1:** Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in S_n$ ciclos disjuntos de comprimentos $r_1, \ldots, r_t$ respectivamente. Mostre que o produto $\alpha_1 \cdots \alpha_t$ tem ordem igual a $mmc\{r_1, \ldots, r_t\}$.

**Exercício 2:** Sejam $p$ um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

1. Todo elemento de ordem $p$ no grupo $S_p$ é um p-ciclo.
2. $S_p$ não tem elemento de ordem $kp$ com $k \geq 2$.
3. Se $t$ é um inteiro positivo, mostre que o grupo $S_n$ possui elementos de ordem $p^t$ se, e somente se, $n \geq p^t$.

**Exercício 3:** Mostre que as possíveis ordens de elementos do grupo $S_7$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}$.

**Exercício 4:** Se $\sigma \in S_n$ é um $r$-ciclo, mostre que $(-1)^{\sigma} = (-1)^{r-1}$.

**Exercício 5:** Escreva cada elemento de $S_4$ como um produto de ciclos disjuntos. Escreva cada elemento de $S_4$ como um produto de transposições.

**Exercício 6:** Use as idéias da do Lema sobre conjugação de permutações em $S_n$ nos itens abaixo.

1. Sejam $a, b, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Mostre que existe um 3-ciclo $\sigma$, envolvendo $a$ e $b$ e mais uma letra, tal que $\sigma(aij)\sigma^{-1} = \sigma(bak)\sigma^{-1}$ para algum $k$. Conclua que $(aij) \in \langle (abl) \mid l \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{a, b\} \rangle$.
2. Dados $a, k, l, m \in \{1, \ldots, n\}$ distintos, sabemos que existe $\sigma \in S_n$ tal que $(klm) = \sigma(akm)\sigma^{-1}$ para algum $k$. Mostre que $\sigma$ pode ser escolhido igual a um 3-ciclo envolvendo a letra $a$ e mais duas letras.
3. Sejam $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Conclua que
$$\langle 3 - ciclos \rangle = \langle (abl) \mid l \notin \{a, b\} \rangle.$$
Logo $A_n = \langle (abl) \mid l \notin \{a, b\} \rangle$.