



Notas de Aula 1/2015<sup>1</sup>

**José Antônio O. Freitas**  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília - UnB

---

<sup>1</sup> Este texto está licenciado sob uma **Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil** [http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt_BR).



---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Vetores</b>	<b>9</b>
1.1	Introdução . . . . .	9
1.2	Plano Cartesiano . . . . .	10
1.3	Vetores em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	11
1.3.1	Operações com Vetores . . . . .	14
1.3.2	Ângulo entre vetores e produto interno . . . . .	19
1.3.3	Projeção de Vetores . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Reta no Plano</b>	<b>31</b>
2.1	Equações da Reta . . . . .	31
2.2	Ângulo entre retas . . . . .	37
2.3	Distância de um ponto a uma reta . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Circunferências e Cônicas</b>	<b>41</b>
3.1	Equações da Circunferência . . . . .	41
3.2	Cônicas . . . . .	46
3.2.1	Elipse . . . . .	47
3.2.2	Hipérbole . . . . .	56
3.2.3	Parábola . . . . .	63

---

3.3	Rotação e Translação de Eixos . . . . .	67
3.3.1	Translação de eixos . . . . .	67
3.3.2	Rotação de eixos . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Vetores no Espaço</b>	<b>85</b>
4.0.3	Ângulo entre vetores e produto interno no espaço . . . . .	89
4.0.4	Produto Vetorial . . . . .	92
4.0.5	Produto Misto . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Reta e Plano no Espaço</b>	<b>99</b>
5.1	Equações do Plano . . . . .	99
5.2	Equações da Reta . . . . .	105
5.3	Interseções . . . . .	106
5.3.1	Entre retas . . . . .	106
5.3.2	Entre planos . . . . .	110
5.3.3	Entre retas e planos . . . . .	112
5.4	Distâncias . . . . .	115
5.4.1	Entre ponto e plano . . . . .	115
5.4.2	Entre um ponto e uma reta . . . . .	117
5.4.3	Entre retas . . . . .	118
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>123</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Plano cartesiano . . . . .	10
1.2	Coordenadas do ponto $P$ . . . . .	10
1.3	Distância entre dois pontos . . . . .	11
1.4	Seta representando o ponto $(\alpha, \beta)$ . . . . .	12
1.5	Vetor $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ . . . . .	12
1.6	Vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$ . . . . .	13
1.7	Vetor $\vec{AB}$ . . . . .	13
1.8	Vetores unitários: $\ \vec{u}\  = 1$ . . . . .	14
1.9	Vetores paralelos . . . . .	15
1.10	Soma de vetores . . . . .	15
1.11	Multiplicação por escalar . . . . .	17
1.12	Ângulo entre vetores . . . . .	19
1.13	Determinação de $\theta$ . . . . .	20
1.14	Lei dos cossenos . . . . .	20
1.15	Projeção ortogonal . . . . .	26
1.16	Vetor projeção . . . . .	27
1.17	Possibilidades para $\lambda$ . . . . .	28
1.18	Exemplo 1.10.1, exercício 2 . . . . .	29

2.1	Equação vetorial da reta . . . . .	32
2.2	Retas paralelas aos eixos . . . . .	36
2.3	Ângulo entre retas . . . . .	37
2.4	Distância de ponto a reta . . . . .	38
3.1	Circunferência . . . . .	42
3.2	Gráfico da função $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . . . . .	50
3.3	Elipse com focos no eixo $x$ e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . . . . .	51
3.4	Elipse com focos no eixo $y$ e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . . . . .	53
3.5	Retângulo fundamental . . . . .	55
3.6	Coroa Fundamental . . . . .	55
3.7	Região onde se encontram os pontos de uma elipse . . . . .	56
3.8	Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com assíntotas $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ . . . . .	61
3.9	Hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ com assíntotas $x = -\frac{a}{b}y$ e $x = \frac{a}{b}y$ . . . . .	63
3.10	Definição da Parábola . . . . .	64
3.11	Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ e reta diretriz $r : x = -p, p > 0$ . . . . .	65
3.12	Parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$ e reta diretriz $r : x = p, p > 0$ . . . . .	66
3.13	Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e reta diretriz $r : y = p, p > 0$ . . . . .	66
3.14	Parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4py$ e reta diretriz $r : y = -p, p > 0$ . . . . .	67
3.15	Translação de eixos . . . . .	69
3.16	Elipse $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$ . . . . .	70
3.17	Hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ . . . . .	71
3.18	Rotação de eixos: vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ . . . . .	72
3.19	Rotação dos eixos por um ângulo $\theta$ . . . . .	72
3.20	Elipse $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$ . . . . .	78
3.21	Parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ . . . . .	80
3.22	Hipérbole $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$ . . . . .	83
4.1	Sistema de coordenadas tridimensionais . . . . .	85
4.2	Coordenadas de um ponto no espaço tridimensional . . . . .	86

4.3	Distância entre pontos em $\mathbb{R}^3$	86
4.4	Ângulo entre vetores em $\mathbb{R}^3$	89
4.5	Interpretação geométrica do produto vetorial	96
4.6	Interpretação geométrica do produto misto	98
5.1	Equação do plano	100
5.2	Plano $z = 0$	101
5.3	Plano $y = 0$	102
5.4	Plano $x = 0$	103
5.5	Retas Paralelas	107
5.6	Retas Concorrentes	108
5.7	Retas Reversas	109
5.8	$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$	111
5.9	$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$	112
5.10	$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$	113
5.11	$r \cap \pi = \{P_0\}$	113
5.12	$r \cap \pi = \emptyset$	114
5.13	$r \subset \pi$	114
5.14	Distância entre ponto e plano	115
5.15	Distância entre ponto e reta	117
5.16	Distância entre retas reversas	119





---

# CAPÍTULO 1

---

## VETORES

---

---

### 1.1 Introdução

---

A Geometria Analítica é um método para tratar com problemas da Geometria. No caso do plano, tal método consiste em associar os pontos à pares ordenados de números reais, permitindo assim representar curvas do plano por equações em duas variáveis, de modo que a cada curva está associado uma equação, bem definida, do tipo  $f(x, y) = 0$  e a cada equação deste tipo associa-se uma curva bem definida no plano. Assim, as propriedades geométricas das curvas podem ser determinadas à partir de informações algébricas e analíticas da equação  $f(x, y) = 0$ .

Por exemplo, a equação  $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$  representa uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Nessa forma, não podemos dizer exatamente qual curva está equação representa. Mas utilizando-se de resultados da Álgebra Linear, podemos reescrever tal equação com

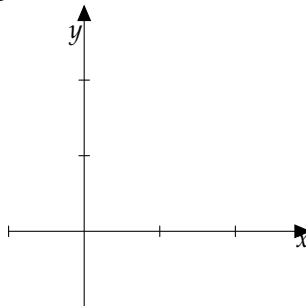
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é uma equação de uma elipse.

## 1.2 Plano Cartesiano

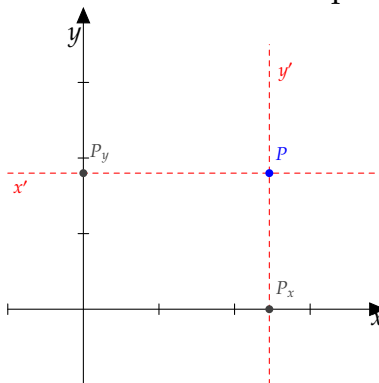
Vamos considerar o plano definido pelo par de retas perpendiculares  $x$  e  $y$  como abaixo:

Figura 1.1: Plano cartesiano



Seja  $P$  um ponto qualquer do plano. Por  $P$  podemos traçar uma única reta  $x'$  paralela à reta  $x$  e uma única reta  $y'$  paralela à reta  $y$ . Estas retas interceptam  $x$  e  $y$  em pontos  $P_x$  e  $P_y$ , respectivamente. Seja  $\alpha$  o número real correspondente a  $P_x$  e  $\beta$  o número real correspondente a  $P_y$ . Estes dois números determinam o ponto  $P$ , isto é, conhecendo  $\alpha$  e  $\beta$  podemos traçar as retas  $x'$  e  $y'$ . O ponto  $P$  é a interseção destas retas. Os números  $\alpha$  e  $\beta$  são chamados **abscissa** e **ordenada** do ponto  $P$ , respectivamente. Eles constituem as **coordenadas** de  $P$ .

Figura 1.2: Coordenadas do ponto  $P$

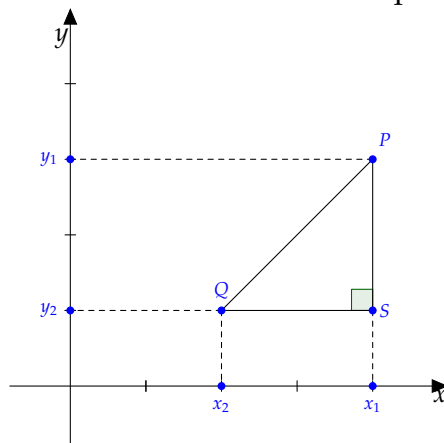


Denotaremos assim o ponto  $P$  por

$$P(\alpha, \beta).$$

Sejam  $P(x_1, y_1)$  e  $Q(x_2, y_2)$  pontos do plano. A partir de  $P$  e  $Q$  podemos construir o triângulo retângulo  $PQS$  como abaixo:

Figura 1.3: Distância entre dois pontos



Assim sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este número é chamado **distância** de  $P$  a  $Q$  e é indicado por  $d(P, Q)$ , isto é, por definição

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

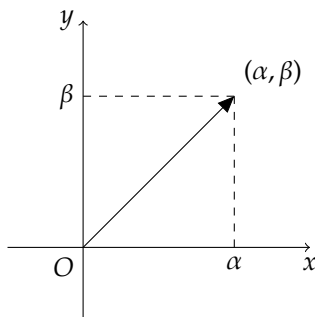
Dizemos que dois pontos  $P(x_1, y_1)$  e  $Q(x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

### 1.3 Vetores em $\mathbb{R}^2$

Sabemos que a cada par ordenado  $(\alpha, \beta)$  corresponde um ponto do plano. Assim se  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  podemos associar uma seta com origem em  $O(0, 0)$  e extremidade em  $(\alpha, \beta)$  como na figura abaixo:

Assim o par ordenado  $(\alpha, \beta)$  pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando representamos  $(\alpha, \beta)$  por uma seta, podemos associar a este para uma **direção**, um **sentido** e um **módulo**. A direção e o sentido do par  $(\alpha, \beta)$  são respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. O **módulo** do par  $(\alpha, \beta)$  é o número

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

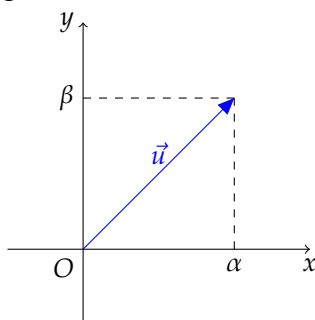
Figura 1.4: Seta representando o ponto  $(\alpha, \beta)$ .

que é o comprimento da seta.

Em geral, um objeto ao qual podemos associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um **vetor**. Denotaremos um vetor de extremidade em um ponto  $(\alpha, \beta)$  por

$$\vec{u} = (\alpha, \beta).$$

Esta notação significa que  $\vec{u}$  é a seta com início no ponto  $O(0, 0)$  e final no ponto  $(\alpha, \beta)$ .

Figura 1.5: Vetor  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ .

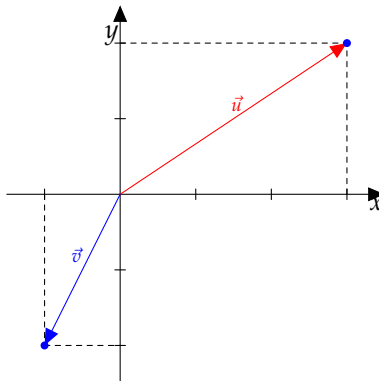
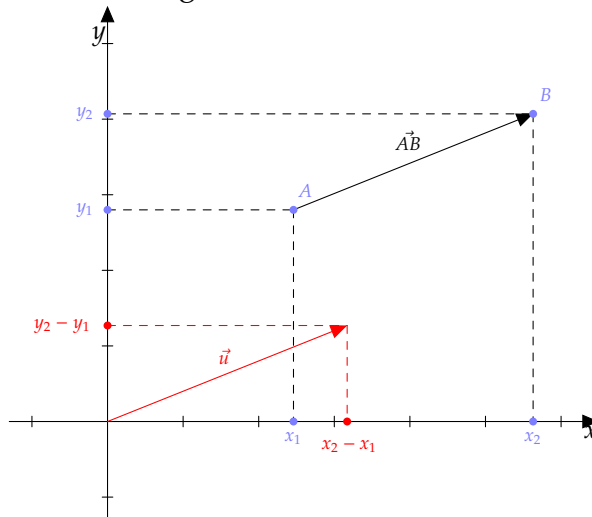
Por exemplo,  $\vec{u} = (3, 2)$  e  $\vec{v} = (-1, -2)$  são representados graficamente por:

O vetor que tem início e fim no ponto  $(0, 0)$  é chamado de **vetor nulo** e será denotado por

$$\vec{0} = (0, 0).$$

Podemos também representar um vetor por uma seta que não parte da origem. Por exemplo, os pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  determinam o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Figura 1.6: Vetores  $\vec{u} = (3, 2)$  e  $\vec{v} = (-1, -2)$ .Figura 1.7: Vetor  $\vec{AB}$ 

Assim a seta que representa o vetor  $\vec{AB}$  e a seta que representa o vetor  $\vec{u}$ , que tem início na origem e extremidade no ponto  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , têm o mesmo módulo, direção e sentido que  $\vec{AB}$ . Assim vamos representar o vetor  $\vec{AB}$  pela forma que for mais conveniente.

**Definição 1.1.** Seja  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  um vetor. A **norma** de  $\vec{u}$ , denotada por  $\|\vec{u}\|$ , é dada por

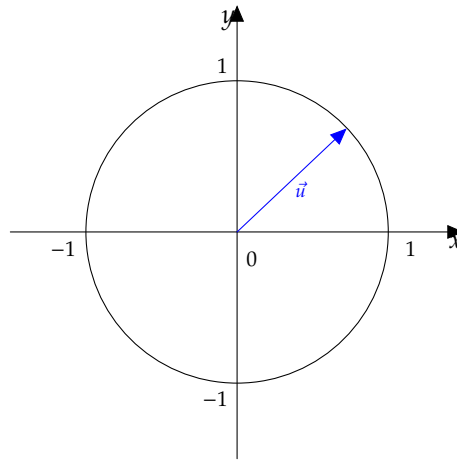
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Um vetor  $\vec{u}$  tal que

$$\|\vec{u}\| = 1$$

é chamado de **vetor unitário**.

Figura 1.8: Vetores unitários:  $\|\vec{u}\| = 1$



**Definição 1.2.** Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são **paralelos** (ou **colineares**) se a retas que contém estes vetores são paralelas (podendo ser coincidentes). Caso  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam paralelos, escreveremos  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ . Neste caso,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção, mas podem ter sentidos contrários.

### 1.3.1 Operações com Vetores

**Definição 1.3.** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  vetores. Então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

**Propriedades 1.3.1.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores quaisquer. As seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  [Associatividade]
- (ii)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  [Comutatividade]
- (iii) Existe um único vetor que somado a  $\vec{u}$  resulta no próprio vetor  $\vec{u}$ :

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Tal vetor é o vetor nulo. [Elemento Neutro]

Figura 1.9: Vetores paralelos



Figura 1.10: Soma de vetores



(iv) Para cada  $\vec{u}$ , existe um único vetor  $\vec{v}$  tal que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} = \vec{v} + \vec{u}.$$

O vetor  $\vec{v}$  é o vetor oposto de  $\vec{u}$ . [Elemento Oposto]

**Prova:** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3)$ . Temos

$$(i) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + \vec{w} = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \vec{u} + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

$$(ii) \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(iii) Usando o item (A2) basta verificar que  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ . De fato

$$\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = \vec{u}.$$

(iv) Novamente, pelo item (A2) basta verificar que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ . De fato, dado  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ , tomando  $\vec{v} = (-x_1, -y_1)$  temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0) = \vec{0}.$$

Portanto as propriedades são verdadeiras. ◇

**Definição 1.4.** O vetor  $\vec{v}$  do item (iv) da Definição 1.3.1 é chamado de **vetor oposto**.

**Definição 1.5.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  vetores. Então:

$$\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

**Observação 1.5.1.** 1. Sejam  $\vec{u}$  um vetor não-nulo e  $\lambda \neq 0$  um escalar. Então  $\vec{u} \parallel \lambda \vec{u}$ . Além disso, se  $\lambda > 0$ , então  $\vec{u}$  e  $\lambda \vec{u}$  são de mesmo sentido, e se  $\lambda < 0$  então  $\vec{u}$  e  $\lambda \vec{u}$  são de sentidos contrários.

2. Quando  $\lambda = -1$ , o vetor  $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$  é exatamente o vetor oposto de  $\vec{u}$ . Note que  $-\vec{u}$  tem a mesma direção que  $\vec{u}$ , mas sentido contrário.

**Propriedades 1.5.1.** Quaisquer que sejam os números reais  $\alpha$  e  $\beta$  e quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  valem as igualdades:

$$(i) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v};$$



Figura 1.11: Multiplicação por escalar



$$(ii) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

$$(iii) 1\vec{u} = \vec{u};$$

$$(iv) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}).$$

**Prova:** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$ . Temos:

$$(i) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

$$(ii) (\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

$$(iii) 1\vec{u} = 1(x_1, y_1) = (x_1, y_1) = \vec{u}.$$

(iv) Primeiro temos:

$$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1)) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = (\alpha\beta)\vec{u}.$$

Agora,

$$(\alpha\beta)\vec{u} = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = ((\beta\alpha)x_1, (\beta\alpha)y_1) = (\beta(\alpha x_1), \beta(\alpha y_1)) = \beta(\alpha\vec{u}).$$

$$\text{Logo } \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}).$$

Portanto as propriedades são válidas.  $\diamond$

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de  $\vec{u}$  como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplos 1.5.1.** Seja  $\vec{u} = (-2, 3)$  um vetor. Então

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \vec{v} &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left( \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right). \end{aligned}$$

**Proposição 1.5.1.** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  um vetor em  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , então  $\|\vec{u}\| \neq 0$ .
- (ii)  $\|\vec{u}\| = 0$  se, e somente se,  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- (iii)  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$ .

**Prova:**

- (i) Se  $\vec{u} \neq (0, 0) = \vec{0}$ , então  $x_1 \neq 0$  ou  $y_1 \neq 0$ . Daí

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0.$$

- (ii)  $\|\vec{u}\| = 0$  se, e somente se,  $x_1^2 + y_1^2 = 0$ , isto é,  $x_1 = y_1 = 0$ . Portanto  $\vec{u} = \vec{0}$ .

- (iii)  $\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(x_1, y_1)\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)} = |\alpha| \|\vec{u}\|$ .

$\diamond$

**Observação 1.5.2.** Dado um vetor não nulo  $\vec{u}$  o vetor

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

é um vetor unitário na direção de  $\vec{u}$  pois

$$\|\vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = 1.$$

**Definição 1.6.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não-nulos. Então  $\vec{u} = \vec{v}$  se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm normas iguais, são de mesma direção e de mesmo sentido.

**Proposição 1.6.1.** Dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos se, e somente se, existe um escalar  $\lambda$  tal que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$  (consequentemente,  $\lambda \neq 0$  e assim  $\vec{v} = \vec{u}/\lambda$ ).

**Prova:** Se  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ , então  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ . Agora, suponha que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos e de mesmo sentido, o caso em que têm sentidos contrários fica como exercício.

Seja

$$\lambda = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Vamos mostrar que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ . Inicialmente, sabemos que  $\vec{v}$  e  $\lambda\vec{v}$  são paralelos e têm o mesmo sentido pois  $\lambda > 0$ . Agora

$$\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.$$

Portanto  $\vec{u}$  e  $\lambda\vec{v}$  tem a mesma direção, o mesmo sentido e normas iguais, logo  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ , como queríamos.  $\diamond$

### 1.3.2 Ângulo entre vetores e produto interno

**Definição 1.7.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos. O **ângulo** entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é definido pelo ângulo  $\theta$  determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e que satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$ , quando os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são representados com a mesma origem.

Figura 1.12: Ângulo entre vetores



**Definição 1.8.** Quando o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é reto, isto é,  $\theta = \pi/2$ , ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos e  $\theta$  o ângulo entre eles.

Figura 1.13: Determinação de  $\theta$



Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo abaixo temos

Figura 1.14: Lei dos cossenos



$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta. \quad (1.1)$$

**Definição 1.9.** O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , indicado por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , é o número real tal que:

1. Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é nulo, então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .
2. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são nulos e  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta. \quad (1.2)$$

**Proposição 1.9.1.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores e  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

1. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são nulos, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

2. Qualquer que seja o vetor  $\vec{u}$ ,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v}$  se, e somente se,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

**Prova:**

1. Basta isolar  $\cos \theta$  na Definição 1.2.

2. Se  $\vec{u} = \vec{0}$ , então a igualdade é verdadeira. Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , então o ângulo entre o vetor  $\vec{u}$  e ele mesmo é  $\theta = 0$ , logo

$$1 = \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{u}\|}.$$

Logo

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é o vetor nulo, então  $\vec{u} \perp \vec{v}$  e  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ . Suponha  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Assim, se  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , então  $\theta = \pi/2$  e daí  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ . Agora, se  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , então

$$0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Logo devemos ter  $\cos \theta = 0$ , isto é,  $\theta = \pi/2$ . Portanto  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , como queríamos.

◇

Agora, como podemos encontrar o produto interno sem necessitar de determinar o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ? Substituindo o produto interno na equação (1.1) temos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

isto é,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \quad (1.3)$$

Se  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$ , então podemos reescrever (1.3) como

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2] \\ &= x_1x_2 + y_1y_2.\end{aligned}$$

Abacamos de demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.** *O produto interno de dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  é dado por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

**Exemplos 1.9.1.** 1. *Sejam  $\vec{u} = (1, 1)$  e  $\vec{v} = (1, 0)$ . Determine o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .*

**Solução:** Temos

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle (1, 1), (1, 0) \rangle = 2 + 0 = 1 \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1} \\ \cos \theta &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Assim,  $\theta = \pi/4$ .

2. *Encontre um vetor  $\vec{u} = (x, y)$  ortogonal a  $\vec{v} = (4, -1)$  e tal que  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ , onde  $\vec{w} = (1, 1)$ .*

**Solução:** Como  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são  $x = -1/5$  e  $y = -4/5$ . Logo  $\vec{u} = (-1/5, -4/5)$ .

**Proposição 1.9.2.** *Quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3)$  e qualquer que seja o número real  $\lambda$  temos*

$$(i) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$(ii) \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$(iii) \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(iv) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(v) \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0.$$

**Prova:**

(i)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle &= \langle \vec{u}, (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = (\lambda x_1)y_2 + (\lambda y_1)y_2 = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1y_2) + \lambda(y_1y_2) = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$(iii) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(iv) \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } x_1 \neq 0 \text{ ou } y_1 \neq 0. \text{ Daí } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 > 0, \text{ como queríamos.}$$

◇

**Observação 1.9.1.** 1. As propriedades (i) e (iii) Proposição 1.9.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores e escalares:

$$\langle \vec{u}, (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle.$$

2. Na igualdade  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  não podemos concluir que  $\vec{v} = \vec{w}$ . Por exemplo, para  $\vec{u} = (1, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, 1)$  e  $\vec{w} = (2, -5)$  temos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  e no entanto  $\vec{v} \neq \vec{w}$ . Mas podemos concluir que  $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ .

3. De  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  não podemos concluir que  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ . Por exemplo, para  $\vec{u} = (2, 1)$  e  $\vec{v} = (-2, 4)$  temos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e no entanto  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

**Exemplos 1.9.2.** Calcule o ângulo  $\alpha$  entre  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ , sabendo que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$  e que o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é  $\pi/4$ .

**Solução:** Temos

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{4}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 5 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 1 = 6 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 5 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 1 = 6 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \sqrt{5} \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e então

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| &= \sqrt{6 + \sqrt{10}} \\ \|\vec{u} - \vec{v}\| &= \sqrt{6 - \sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

$$\text{e então } \theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right).$$

**Proposição 1.9.3.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores.

1.  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  [Desigualdade de Scharwz]
2.  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  [Desigualdade Triangular]

**Prova:**



1. Se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  a desigualdade é verdadeira. Suponha então que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Temos

$$0 \leq |\cos \theta| \leq 1$$

e multiplicando essa inequação por  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  obtemos

$$0 \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

isto é,

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

como queríamos.

2. Se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , então a desigualdade é verdadeira. Suponha então que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Agora, usando o item (a) temos

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Portanto

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

◇

### 1.3.3 Projeção de Vetores

Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  vetores não nulos. Suponha que o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é tal que  $0 < \theta < \pi/2$ .

O vetor  $\vec{OP}$  é paralelo ao vetor  $\vec{u}$  e o vetor  $\vec{PA}$  é ortogonal ao vetor  $\vec{u}$ .

**Definição 1.10.** Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo. Dado qualquer vetor  $\vec{v}$ , o vetor  $\vec{OP}$  é chamado de **projeção ortogonal** de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ , e é indicado por  $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$  se satisfaz as seguintes condições:

Figura 1.15: Projeção ortogonal



1.  $\vec{OP} \parallel \vec{u}$
2.  $(\vec{v} - \vec{OP}) \perp \vec{u}$ .

Podemos também escrever

1.  $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} \parallel \vec{u}$
2.  $(\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}) \perp \vec{u}$ .

No caso acima temos

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

e então  $\|\vec{OP}\| = \|\vec{v}\| \cos \theta$ . Mas

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

e assim podemos escrever

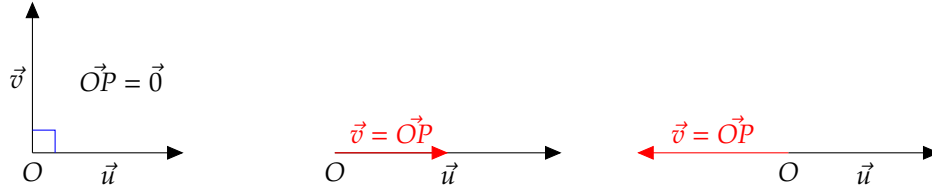
$$\|\vec{OP}\| = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|}.$$

Além disso, como  $\vec{OP}$  é paralelo a  $\vec{u}$  e de mesmo sentido, devemos ter  $\vec{OP} = \lambda \vec{u}$  com  $\lambda > 0$ . Daí  $\lambda = \|\vec{OP}\| / \|\vec{u}\|$  e então

$$\vec{OP} = \frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Esta construção só é válida no caso em que o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  satisfaz  $0 < \theta < \pi/2$ . Nos casos não podemos usar a construção envolvendo o ângulo  $\theta$  entre os vetores.

Figura 1.16: Vetor projeção



**Proposição 1.10.1.** *Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo. Qualquer que seja o vetor  $\vec{v}$ , existe e é única a projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ . Sua expressão em termos de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é dada por*

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

e sua norma é dada por

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}.$$

**Prova:** Seja  $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ . Da Definição 1.10, dizer que  $\vec{p}$  é a projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  significa que  $\vec{p}$  é um vetor tal que  $\vec{p} \parallel \vec{u}$  e  $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$ .

Como  $\vec{p} \parallel \vec{u}$ , então pela Proposição 1.6.1 existe um escalar  $\lambda$  tal que  $\vec{p} = \lambda \vec{u}$ . Assim qualquer vetor do tipo  $\lambda \vec{u}$  é um candidato para ser a projeção ortogonal. Mas, para que  $\vec{p}$  seja a projeção ortogonal, ele deve satisfazer  $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$ . Logo

$$(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow \langle (\vec{v} - \vec{p}), \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Assim existe um único  $\lambda$  que satisfaz a condição  $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$ , e daí o vetor  $\vec{p}$  é único. Portanto

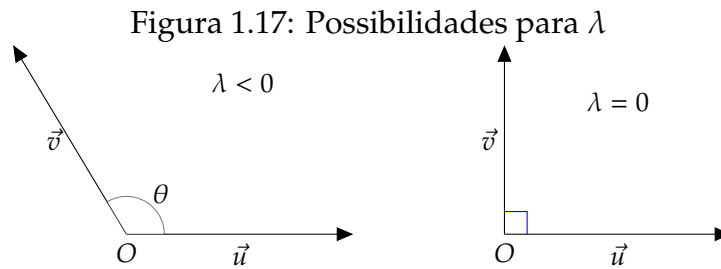
$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{p} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Além disso

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

como queríamos. ◇

**Observação 1.10.1.** *O escalar  $\lambda$  encontrado na proposição anterior pode ser negativo ou zero. Ele será negativo quando  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  e será zero quando  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .*



**Exemplos 1.10.1.** 1. Encontre a projeção ortogonal do vetor  $\vec{v} = (4, -1)$  sobre o vetor  $\vec{u} = (2, 1)$ .

**Solução:** Temos

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= 7 \\ \|\vec{u}\|^2 &= 5 \end{aligned}$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{7}{5}(2, 1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

Por outro lado,

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 7 \\ \|\vec{v}\|^2 &= 17 \end{aligned}$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{7}{17}(4, -1) = \left(\frac{28}{17}, -\frac{7}{17}\right).$$

2. Considere um triângulo ABC onde  $A(3, 3)$ ,  $B(0, 1)$  e  $C(1, 6)$ .

(a) Verifique que ABC é um triângulo retângulo em A.

- (b) Calcule a projeção do cateto BA sobre a hipotenusa BC.
- (c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.

**Solução:** Considere o triângulo abaixo

Figura 1.18: Exemplo 1.10.1, exercício 2



- (a) Basta verificar que  $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ . Assim como  $\vec{AB} = (-3, -2)$  e  $\vec{AC} = (-2, 3)$  temos

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = (-3)(-2) + (-2)3 = 0.$$

Logo ABC é um triângulo retângulo.

- (b) Temos  $\vec{BA} = (3, 2)$  e  $\vec{BC} = (1, 5)$ . Daí

$$\text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \frac{\langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle}{\|\vec{BC}\|^2} \vec{BC} = \frac{\langle (3, 2), (1, 5) \rangle}{\|(1, 5)\|^2} (1, 5) = \frac{13}{26} (1, 5).$$

$$\text{Assim } \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

- (c) Seja  $P(x_1, y_1)$  o pé da altura do triângulo ABC relativo ao vértice A. Então

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} \\ (x_1, y_1 - 1) &= \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Logo } P \left( \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right).$$



---

# CAPÍTULO 2

---

## RETA NO PLANO

---

### 2.1 Equações da Reta

---

Seja  $r$  uma reta do plano. Dados dois pontos  $A$  e  $B$  em  $r$  podemos considerar o vetor  $\vec{u} = \vec{AB}$ . Por definição diremos que a reta  $r$  e o vetor  $\vec{u}$  são paralelos. Assim temos a seguinte definição:

**Definição 2.1.** *Qualquer vetor não nulo e paralelo a uma dada reta  $r$  é chamado de **vetor diretor** de  $r$ .*

Seja  $\vec{u}$  um vetor diretor de uma reta  $r$  e seja  $A$  um ponto pertencente à reta  $r$ . Assim um ponto  $X$  pertence a reta  $r$  se, e somente se,  $\vec{AX} \parallel \vec{u}$ .

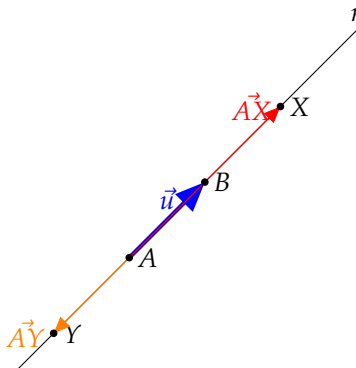
Ou seja, se e somente se, existe um número real  $\lambda$  tal que

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u}. \quad (2.1)$$

Assim para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  fica definido um ponto  $X$  na reta  $r$  e se  $X$  é um ponto da reta  $r$ , então existe um número real  $\lambda$  tal que  $\vec{AX} = \lambda \vec{u}$ .

**Definição 2.2.** *A equação (2.1) é chamada de **equação vetorial da reta  $r$**  ou **equação da reta  $r$  na forma vetorial**.*

Figura 2.1: Equação vetorial da reta



**Exemplos 2.2.1.** Seja  $r$  uma reta passando pelos pontos  $A(1, 2)$  e  $B(-1, 3)$ . Determine sua equação vetorial.

**Solução:** Um vetor diretor da reta  $r$  pode ser tomado como sendo  $\vec{u} = \vec{AB} = (-2, 1)$ . Assim a equação vetorial de  $r$  será:

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u} = \lambda(-2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podemos também tomar como vetor diretor de  $r$  o vetor  $\vec{v} = \vec{BA} = (2, -1)$ . Daí a equação vetorial de  $r$  será

$$\vec{AX} = \alpha \vec{v} = \alpha(2, -1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Observação 2.2.1.** Como o ponto e o vetor diretor de uma reta  $r$  são escolhidos arbitrariamente, existem infinitas equações vetoriais para uma mesma reta  $r$ . Por exemplo, se  $A$  e  $B$  são pontos distintos de uma reta  $r$ , então  $\vec{AB}$  e  $\vec{BA}$  são vetores diretores distintos de  $r$  e portanto temos as equações vetoriais

$$\vec{AX} = \lambda \vec{AB}$$

$$\vec{AX} = \alpha \vec{BA}.$$

Na verdade, qualquer vetor múltiplo do vetor  $\vec{AB}$  pode ser tomado como vetor diretor de  $r$ .

Agora, seja  $\vec{u} = (a, b)$  um vetor diretor de uma reta  $r$ . Dado um ponto  $A = (x_0, y_0)$  de  $r$  o ponto  $X = (x, y)$  pertence a reta  $r$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u}$$

$$(x - x_0, y - y_0) = (\lambda a, \lambda b).$$



Assim a reta  $r$  pode ser descrita pelas equações

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ x = y_0 + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

**Definição 2.3.** O sistema de equações (2.2) é chamado **sistema de equações paramétricas da reta  $r$**  ou **sistema de equações da reta  $r$  na forma paramétrica**.

**Exemplos 2.3.1.** 1. O sistema de equações

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

define uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $A(1, 2)$  e que possui vetor diretor  $\vec{u} = (2, -3)$ .

2. Seja  $r$  a reta dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

O ponto  $(11, 13)$  pertence a  $r$ ? E o ponto  $(5, 6)$ ?

**Solução:** Para que o ponto  $(11, 13)$  pertença a reta  $r$  é preciso que exista  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$11 = 2 + 3t$$

$$13 = 1 + 4t.$$

Cuja solução é  $t = 3$ . Logo o ponto  $(11, 13)$  pertence a reta  $r$ .

Para que o ponto  $(5, 6)$  pertença a reta  $r$  é preciso que exista  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$5 = 2 + 3t$$

$$6 = 1 + 4t.$$

Resolvendo, obtemos  $t = 1$  e  $t = 5/4$ . Logo o ponto  $(5, 6)$  não pertence a reta  $r$ .

Seja  $r$  uma reta com vetor diretor  $\vec{u} = (a, b)$ , onde  $ab \neq 0$  e que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Sabemos que sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \end{cases}$$

Isolando  $\lambda$  nas duas equações encontramos

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \quad \lambda = \frac{y - y_0}{b},$$

isto é, a equação

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (2.3)$$

determina se um ponto pertence a reta  $r$  ou não.

**Definição 2.4.** A equação (2.3) é chamada de *sistema de equações da reta  $r$  na forma simétrica* ou por abuso de linguagem, *equações da reta  $r$  na forma simétrica*.

**Exemplos 2.4.1.** Encontre a equação simétrica da reta  $r$  que passa pelos pontos  $A(-1, 2)$  e  $B(3, 4)$ . O ponto  $(0, 5/2)$  está na reta  $r$ ? E o ponto  $(1, 2)$ ?

**Solução:** Um vetor diretor para a reta  $r$  é dado por  $\vec{u} = \vec{AB} = (4, 2)$ . Assim usando o ponto  $A$  a equação simétrica de  $r$  é

$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{2}.$$

Como

$$\frac{0 + 1}{4} = \frac{\frac{5}{2} - 2}{2}$$

então o ponto  $(0, 5/2)$  está na reta  $r$ . Agora como

$$\frac{1 + 1}{4} \neq \frac{2 - 2}{2}$$

o ponto  $(1, 2)$  não está na reta  $r$ .

**Observação 2.4.1.** 1. Para que uma equação de uma reta  $r$  esteja na forma (2.2) é obrigatório que o coeficiente de  $x$  e  $y$  sejam 1. Assim, por exemplo a equação na forma

$$\begin{cases} 2x = 1 - 3\lambda \\ -y = 2 + \lambda \end{cases}$$

não será considerada como uma equação paramétrica de uma reta. Do mesmo modo, uma equação do tipo

$$\frac{2x - 7}{3} = \frac{y}{2}$$

não será considerada uma equação simétrica de uma reta  $r$  pois não está na forma (2.3).

2. Cada tipo de equação da reta apresenta suas vantagens. A forma vetorial descreve uma reta tanto no plano cartesiano como no espaço tridimensional e mesmo em espaços “maiores”. A forma paramétrica reduz o número de incógnitas com as quais precisamos trabalhar. Neste tipo de equação lidamos com somente uma incógnita em vez de duas. Já a forma simétrica exhibe qual a relação que as coordenadas dos pontos de uma reta devem satisfazer entre si.

Seja  $r$  uma reta que contém o ponto  $(x_0, y_0)$  e com vetor diretor  $\vec{u} = (a, b)$ . Sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Multiplicando a equação (2.4) por  $b$  e a equação (2.5) por  $a$  obtemos

$$bx = bx_0 + \lambda ab \quad (2.6)$$

$$ay = ay_0 + \lambda ab. \quad (2.7)$$

Fazendo (2.7) - (2.6) obtemos

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

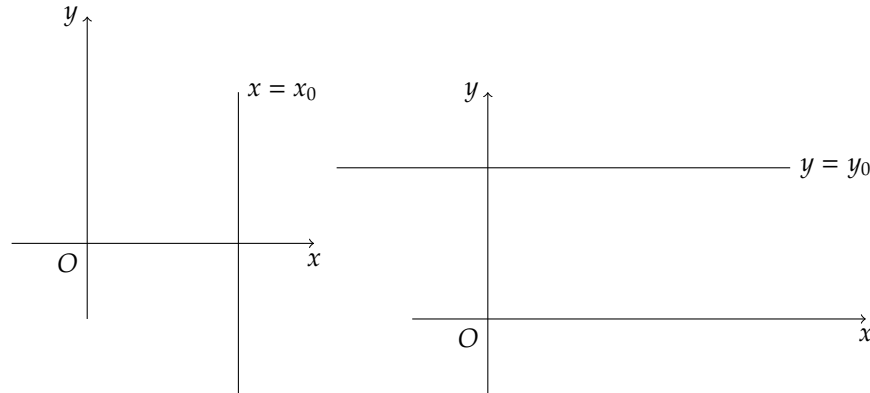
Agora note que  $ay_0 - bx_0$  é uma constante. Assim fazendo,  $c = ay_0 - bx_0$  podemos escrever

$$ay - bx = c \quad (2.8)$$

que é chamada de **equação cartesiana da reta  $r$** .

Observe que se o vetor diretor  $\vec{u} = (a, b)$  da reta  $r$  é tal que  $a = 0$ , obtemos a equação  $x = x_0$  e a reta  $r$  é paralela ao eixo  $y$ . Caso  $b = 0$ , obtemos  $y = y_0$  e a reta é paralela ao eixo  $x$ .

Figura 2.2: Retas paralelas aos eixos



Se  $a \neq 0$ , então podemos dividir a equação (2.8) por  $a$  obtendo

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo  $m = b/a$  e  $k = c/a$  temos a equação

$$y = mx + k,$$

onde  $m = b/a = \operatorname{tg} \theta$ .

Note que o vetor  $\vec{v} = (1, m)$  é paralelo à reta  $r$  de equação  $y = mx + k$ . De fato,

$$\vec{v} = (1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}(a, b) = \frac{1}{a}\vec{u}.$$

**Exemplos 2.4.2.** Determine as equações paramétricas e cartesianas da reta  $r$  definida pelos pontos  $A(1, 5)$  e  $B(2, 7)$ .

**Solução:** Um vetor diretor de  $r$  é dado por  $\vec{u} = \vec{AB} = (1, 2)$ . Assim  $m = b/a$  onde  $\vec{u} = (a, b)$  vale  $m = 2$ . Desse modo temos

$$y = 2x + k.$$

Como o ponto  $A = (1, 5)$  pertence a reta  $r$  devemos ter

$$5 = 2(1) + k$$

donde  $k = 3$ . Portanto a equação cartesiana de  $r$  será

$$y = 2x + 3.$$

A equação paramétrica será

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto A. As equações paramétricas de  $r$  também podem ser expressas como

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto B.

## 2.2 Ângulo entre retas

Sejam  $r$  uma reta passando pelo ponto  $A(x_1, y_1)$  e com vetor diretor  $\vec{u} = (a, b)$  e  $s$  uma reta passando pelo ponto  $B(x_2, y_2)$  e com vetor diretor  $\vec{v} = (c, d)$ . O **ângulo entre duas retas**  $r$  e  $s$  é definido como o menor ângulo entre o vetor diretor  $\vec{u}$  de  $r$  e o vetor diretor  $\vec{v}$  de  $s$ .

Figura 2.3: Ângulo entre retas



Assim o ângulo  $\theta$  entre  $r$  e  $s$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

**Exemplos 2.4.3.** Determine o ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  cujas equações são:

$$r : y = 2x - 2$$

$$s : y = -x + 4.$$

**Solução:** Temos  $m = b/a$ , onde  $a$  e  $b$  são as coordenadas do vetor diretor da reta em questão. Assim podemos tomar  $\vec{u} = (1, 2)$  como um vetor diretor de  $r$  e  $\vec{v} = (-1, 1)$  como um vetor diretor de  $s$ . Daí

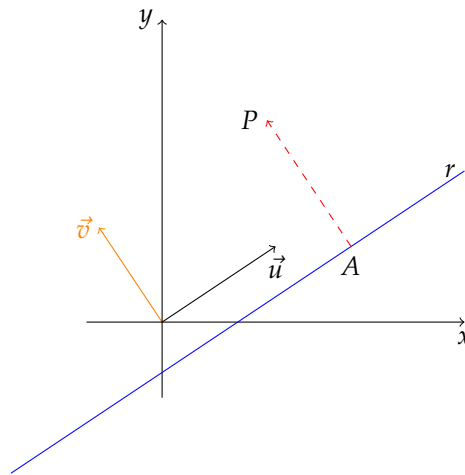
$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Logo } \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

## 2.3 Distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto  $P(x_0, y_0)$  à reta  $r$  de equação  $y = mx + k$  é definida como sendo a distância de  $P$  ao ponto  $A(x_1, y_1)$ , onde  $A$  é o pé da perpendicular à reta  $r$  passando pelo ponto  $P$ . Agora note que o vetor  $\vec{u} = (1, m)$  é paralelo à reta  $r$ . Além disso, o vetor

Figura 2.4: Distância de ponto a reta



$\vec{v} = (-m, 1)$  é tal que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , isto é,  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Portanto,  $\vec{PA} \parallel \vec{v}$  e então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{PA} = \lambda \vec{v}.$$

Logo

$$d(P, r) = \|\vec{AP}\| = \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = |\lambda| \sqrt{m^2 + 1}. \quad (2.9)$$

Assim para determinarmos  $d(P, r)$  basta conhecer  $\lambda$ . Agora,

$$\vec{PA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda(-m, 1)$$

donde

$$x_1 = x_0 - \lambda m$$

$$y_1 = y_0 + \lambda.$$

Como  $A(x_1, y_1)$  pertence a reta  $r$ , devemos ter

$$y_1 = mx_1 + k$$

$$y_0 + \lambda = m(x_0 - \lambda m) + k$$

$$y_0 + \lambda = mx_0 - \lambda m^2 + k$$

$$\lambda = \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2}.$$

Substituindo  $\lambda$  em (2.9)

$$d(P, r) = \left| \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2} \right| \sqrt{m^2 + 1}.$$

Portanto

$$d(P, r) = \frac{|mx_0 + k - y_0|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

é a expressão para a distância de um ponto  $P(x_0, y_0)$  até uma reta  $r$  de equação  $y = mx + k$ .

**Exemplos 2.4.4.** *Seja  $r$  a reta de equação  $y = 3x - 1$ . Qual a distância do ponto  $P(2, 2)$  à reta  $r$ ?*

**Solução:**

$$d(P, r) = \frac{|3(2) - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$





---

## CAPÍTULO 3

---

# CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS

---

### 3.1 Equações da Circunferência

---

**Definição 3.1.** A circunferência é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma mesma distância (denominada **raio**) de um dado ponto do plano (chamado **centro**).

Considere uma circunferência de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $r$ . Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer desta circunferência e seja  $\beta$  o ângulo formado pelos vetores  $\vec{CA}$  e  $\vec{CP}$ , onde  $A(x_0 + r, y_0)$ . Assim

$$\cos \beta = \frac{\langle \vec{CA}, \vec{CP} \rangle}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CP}\|}.$$

Mas  $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$ ,  $\vec{CA} = (r, 0)$  e  $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CP}\| = r$ , então

$$\cos \beta = \frac{(x - x_0)r}{r^2} = \frac{x - x_0}{r},$$

isto é,

$$x = x_0 + r \cos \beta \tag{3.1}$$

Agora, para os vetores  $\vec{CP}$  e  $\vec{CB}$ , onde  $B(x_0, y_0 + r)$  temos  $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$ ,  $\vec{CB} = (0, r)$

e  $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CB}\| = r$ , então

$$\cos \alpha = \frac{y - y_0}{r}. \quad (3.2)$$

Figura 3.1: Circunferência



Na Figura 3.1, considere o pé da perpendicular ao segmento CA passando por P e denote esse ponto por E. Agora, considere o pé da perpendicular ao segmento CB passando por P e denote esse ponto por D. Então os segmentos CD e EP têm o mesmo comprimento k. Daí

$$\cos \alpha = \frac{k}{r} = \sin \beta. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) obtemos:

$$\sin \beta = \frac{y - y_0}{r},$$

isto é,

$$y = y_0 + r \sin \beta. \quad (3.4)$$

Por outro lado, se um ponto  $P(x, y)$  satisfaz as equações (3.1) e (3.4), então

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta} = r$$

e então o ponto  $P$  pertence à circunferência de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $r$ .

**Definição 3.2.** *As equações*

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \beta \\ y = y_0 + r \sin \beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi]$$

são chamadas **equações paramétricas** da circunferência de centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $r$ .

Seja  $C$  uma circunferência com equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \beta \\ y = y_0 + r \sin \beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi].$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r \cos \beta \\ y - y_0 &= r \sin \beta. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &= r^2 \cos^2 \beta \\ (y - y_0)^2 &= r^2 \sin^2 \beta \end{aligned}$$

e somando obtemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (3.5)$$

que é a **equação cartesiana** da circunferência de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ . Podemos reescrever essa equação como

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (3.6)$$

Sejam  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  e  $P_3(x_3, y_3)$  três pontos não colineares, isto é, os vetores  $\vec{P_1P_2}$  e  $\vec{P_1P_3}$  não são paralelos. Nessa situação é possível obter uma circunferência contendo estes três pontos. Para isso considere a equação (3.6). Para que  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  pertençam a uma circunferência  $C$  devemos ter:

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Dá para encontrar a circunferência desejada, basta determinar os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Ou seja, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = -(x_1^2 + y_1^2) \\ ax_2 + by_2 + c = -(x_2^2 + y_2^2) \\ ax_3 + by_3 + c = -(x_3^2 + y_3^2). \end{cases}$$

Como os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  não são colineares, este sistema sempre possui solução única.

**Exemplos 3.2.1.** 1. Escreva a equação cartesiana da circunferência passando pelos pontos  $A(1, 1)$ ,  $B(1, -2)$  e  $C(2, 3)$ .

**Solução:** Temos

$$\vec{AB} = (0, -3)$$

$$\vec{AC} = (1, 2)$$

assim os pontos não são colineares e portanto definem uma circunferência. Para encontrá-la, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ a - 2b + c = -5 \\ 2a + 3b + c = -13 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = -13, \quad b = 1 \quad e \quad c = 10.$$

Logo

$$x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$$

é a equação procurada.

Agora, como

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

segue que

$$x_0 = 13/2, \quad y_0 = -1/2 \quad e \quad r^2 = 65/2.$$

Assim a equação cartesiana da circunferência será

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \cos \beta \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \sin \beta \end{cases}, \beta \in [0, 2\pi].$$

2. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos  $P_1(1, -1)$ ,  $P_2(0, 1)$  e  $P_3(1, 0)$ .

**Solução:** Primeiro note que

$$P_1\vec{P}_2 = (-1, 2)$$

$$P_1\vec{P}_3 = (0, 1).$$

Assim os pontos não são colineares, portanto tal circunferência existe. Para encontrá-la, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ b + c = -1 \\ a + c = -2. \end{cases}$$

A solução é  $a = b = 1$  e  $c = -2$ . Logo a circunferência tem equação

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

3. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos  $P_1(1, 3)$ ,  $P_2(3, -5)$  e  $P_3(2, -1)$ .

**Solução:** Note que

$$\vec{P_1P_2} = (2, -8)$$

$$\vec{P_1P_3} = (1, -4).$$

Assim  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são colineares e portanto os três pontos não definem uma circunferência.

## 3.2 Cônicas

**Definição 3.3.** Chama-se *cônica* o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  que satisfazem uma equação do segundo grau  $g(x, y) = 0$ , onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \quad (3.7)$$

Na equação (3.7) pelo menos um dos números  $a$ ,  $b$  e  $c$  é diferente de zero. Os termos  $ax^2$  e  $cy^2$  são os **termos quadráticos**, o termo  $bxy$  é o **termo quadrático misto**,  $dx$  e  $ey$  são os **termos lineares** e  $f$  é o **termo independente**.

A equação (3.7) pode representar:

- (1) um conjunto vazio:  $x^2 + y^2 = -1$ ;
- (2) um conjunto formado por um ponto:  $x^2 + y^2 = 0$ ;
- (3) a reunião de duas retas (paralelas ou concorrentes):  $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$ ;
- (4) uma circunferência:  $x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$ ;
- (5) uma elipse:  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ ;
- (6) uma hipérbole:  $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$ ;
- (7) uma parábola:  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .

Nos casos em que a equação (3.7) representar um conjunto vazio, um ponto, retas ou circunferências diremos que a cônica definida é uma **cônica degenerada**. Aqui vamos estudar as cônicas chamadas de elipse, hipérbole e parábola.

### 3.2.1 Elipse

**Definição 3.4.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos do plano,  $2c$  a distância entre  $F_1$  e  $F_2$  e  $a$  um número real tal que  $a > c$ . O lugar geométrico  $\mathcal{E}$  dos pontos  $P$  tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (3.8)$$

chama-se **elipse**. Cada um dos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado **foco** da elipse. O segmento  $F_1F_2$  é chamado **segmento focal**, seu ponto médio é o **centro** da elipse e  $2c$  é chamado **distância focal**. A reta passando por  $F_1$  e  $F_2$  chama-se **reta focal**.

Para obter a equação que descreve uma elipse vamos fixar os focos  $F_1$  e  $F_2$  como sendo  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Assim o centro dessa elipse estará na origem do plano cartesiano. Assim, seja  $P(x, y)$  um ponto pertencente à elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad (3.9)$$

isto é,

$$d(P, F_1) = 2a - d(P, F_2). \quad (3.10)$$

Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

e elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Fazendo  $b^2 = a^2 - c^2$ , podemos escrever

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividindo por  $a^2b^2$  obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.11)$$

Observe que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.12)$$

$$a > b > 0 \quad (3.13)$$

$$a > c > 0. \quad (3.14)$$

Assim todo ponto pertencente a elipse de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , deve satisfazer a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, seja  $Q(\alpha, \beta)$  um ponto tal que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Então  $\beta^2 = b^2 - (b^2/a^2)\alpha^2$  e daí

$$\begin{aligned} d^2(Q, F_1) &= (\alpha + c)^2 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2c\alpha + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 \\ &= \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$d^2(Q, F_2) = \left(\frac{c}{a}\alpha - a\right)^2.$$

Assim

$$d(Q, F_1) = \left|\frac{c}{a}\alpha + a\right| \quad (3.15)$$

$$d(Q, F_2) = \left|\frac{c}{a}\alpha - a\right|. \quad (3.16)$$

Como

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

então  $\alpha^2/a^2 \leq 1$ , isto é,  $|\alpha| \leq a$ . Mas  $c/a > 0$ , daí

$$\frac{c}{a} |\alpha| \leq c < a$$



logo

$$-a < \frac{c\alpha}{a} < a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{c}{a}\alpha + a &> 0 \\ \frac{c}{a}\alpha - a &< 0. \end{aligned}$$

Desse modo podemos escrever (3.15) e (3.16) como

$$\begin{aligned} d^2(Q, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d^2(Q, F_2) &= a - \frac{c}{a}\alpha. \end{aligned}$$

Assim

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

e então o ponto  $Q(\alpha, \beta)$  pertence à elipse de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ .

Os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  são chamados **parâmetros geométricos** da elipse. A equação (3.11) é chamada de **equação reduzida da elipse** de centro  $O(0, 0)$  e focos no eixo  $x$ . Indicamos tal elipse por

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Com isso provamos a seguinte proposição:

**Proposição 3.4.1.** *Um ponto  $P(x, y)$  é um ponto da elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*se, e somente se, as distâncias de  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  são*

$$\begin{aligned} d^2(P, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d^2(P, F_2) &= a - \frac{c}{a}\alpha. \end{aligned}$$

**Observação 3.4.1.** 1. A equação (3.11) só é válida para elipses com focos no eixo  $x$  e centro na origem. Mudanças nos focos ou no centro, resultarão em uma equação diferente para a elipse.

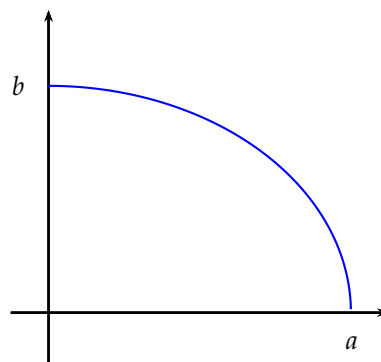
2. Se  $(x, y)$  satisfaz a equação (3.11), então  $(-x, -y)$ ,  $(-x, y)$  e  $(x, -y)$  também satisfazem a mesma equação. Assim a elipse é simétrica em relação ao eixo  $x$ , ao eixo  $y$  e ao centro do plano cartesiano.
3. O ponto  $(x, 0)$  pertence à elipse de equação (3.11) se, e somente se,  $x^2/a^2 = 1$ , isto é,  $x = \pm a$ . Além disso, o ponto  $(0, y)$  pertence à elipse de equação (3.11) se, e só se,  $y = \pm b$ . Portanto, a interseção de  $E$  com o eixo  $x$  são os pontos  $A_1(-a, 0)$  e  $A_2(a, 0)$  e a interseção com o eixo  $y$  são os pontos  $B_1(0, -b)$  e  $B_2(0, b)$ . Note que  $d(B_j, F_i) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$ , para  $i, j = 1, 2$ .
4. Não existe circunferência que contenha os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ . Caso existisse, tal circunferência teria dois diâmetros diferentes, cujos comprimento são dados pelos comprimentos dos segmentos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$ , o que é impossível. Portanto, como esses pontos pertencem a  $E$ , podemos afirmar que a elipse não é uma circunferência e nem o conjunto vazio.

Na equação (3.11), fazendo  $y \geq 0$  podemos escrever

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a].$$

Tal equação é uma função em  $x$ , contínua, decrescente e com concavidade para baixo em todo seu domínio. Assim seu gráfico é dado pela Figura 3.2.

Figura 3.2: Gráfico da função  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$



E como a elipse é simétrica, sua forma é dada pela Figura 3.3.

Figura 3.3: Elipse com focos no eixo  $x$  e centro na origem:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



**Definição 3.5.** Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  em que a reta focal intercepta a elipse e os pontos  $B_1$  e  $B_2$  em que a mediatriz do segmento focal intercepta a elipse são chamados de **vértices**. Os segmentos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  são chamados de **eixo maior** e **eixo menor** da elipse, respectivamente.

**Exemplos 3.5.1.** 1. A equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa uma elipse onde  $a = 3$ ,  $b = 2$ . Os focos são  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$  onde,  $a^2 = b^2 + c^2$ . Daí,  $c = \sqrt{5}$ . Logo  $F_1(-\sqrt{5}, 0)$  e  $F_2(\sqrt{5}, 0)$ . Os vértices são  $A_1(-3, 0)$ ,  $A_2(3, 0)$ ,  $B_1(0, -2)$  e  $B_2(0, 2)$ .

2. Encontre a equação da elipse cujos focos são  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(0, 4)$  e cujo eixo maior mede 7.

**Solução:** Como os focos não estão sobre o eixo  $x$ , não podemos usar a equação (3.11). Assim vamos utilizar a definição (3.8). Seja  $P(x, y)$  um ponto pertencente a tal elipse, então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 7.$$

Assim

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} &= 7 \\ (x+3)^2 + y^2 &= 49 - 14\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + x^2 + (y-4)^2 \\ (3x+4y-28)^2 &= \left[-7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right]^2 \\ 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 168x - 224y + 784 &= 49x^2 + 49y^2 - 392y + 784\end{aligned}$$

Portanto a elipse procurada tem equação

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y = 0.$$

3. Encontre a equação da elipse com focos  $F_1(0, -2)$  e  $F_2(0, 2)$  e tal que  $a = 3$ .

**Solução:** Neste caso,  $P(x, y)$  pertence à elipse se, e somente se,

$$\begin{aligned}d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 6 \\ \sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= 6 \\ (8y-36)^2 &= \left[-12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}\right]^2 \\ 64y^2 - 576y + 1296 &= 144x^2 + 144y^2 - 576y + 576 \\ 144x^2 + 80y^2 &= 720.\end{aligned}$$

Portanto a elipse procurada tem equação

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Proposição 3.5.1.** Uma equação da forma

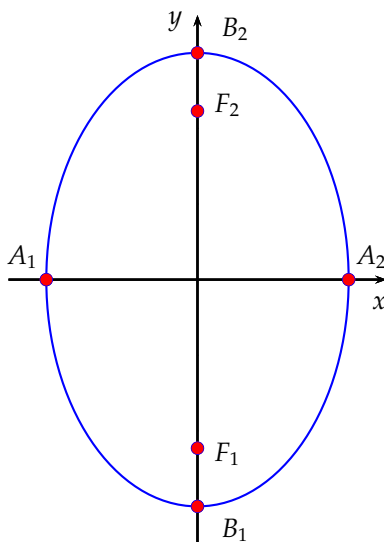
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.17}$$

descreve uma elipse se, e somente se, os números reais  $p$  e  $q$  são distintos e positivos.

**Corolário 3.0.1.** *Sejam  $O$  a origem do plano cartesiano,  $p$  e  $q$  números reais distintos e positivos. Seja  $E$  a elipse de equação (3.17) e parâmetros geométricos  $a$  e  $b$ .*

1. *Se  $p > q$ , então  $a^2 = p$ ,  $b^2 = q$  e  $E$  tem centro  $O$  e focos no eixo  $x$ .*
2. *Se  $q > p$ , então  $a^2 = q$ ,  $b^2 = p$  e  $E$  tem centro  $O$  e focos no eixo  $y$ .*

Figura 3.4: Elipse com focos no eixo  $y$  e centro na origem:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



**Exemplos 3.5.2.** *Para as equações dadas, encontre os focos, vértices e o comprimento do eixo maior e menor da elipse dada.*

1.  $16x^2 + y^2 = 1$

**Solução:** *Podemos escrever essa equação como*

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

e daí  $p = 1/16$  e  $q = 1$ . Como  $p < q$ , os focos estão no eixo  $y$ . Assim  $a = 1$  e  $b = 1/4$ . Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos  $c = \sqrt{15}/4$ . Logos

$$\begin{aligned} F_1\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right), \quad F_2\left(0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \\ A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1) \\ B_1\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad B_1\left(\frac{1}{4}, 0\right). \end{aligned}$$

2.  $25x^2 + 169y^2 = 9$

**Solução:** Podemos escrever essa equação como

$$\frac{x^2}{\frac{9}{25}} + \frac{y^2}{\frac{9}{169}} = 1$$

e daí  $p = 9/25$  e  $q = 9/169$ . Como  $p > q$ , os focos estão no eixo  $x$ . Assim  $a = 3/5$  e  $b = 3/13$ . Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos  $c = 36/65$ . Logos

$$\begin{aligned} F_1\left(-\frac{36}{65}\right), \quad F_2\left(\frac{36}{65}\right) \\ A_1\left(-\frac{3}{5}, 0\right), \quad A_2\left(\frac{3}{5}, 0\right) \\ B_1\left(0, -\frac{3}{13}\right), \quad B_1\left(0, \frac{3}{13}\right). \end{aligned}$$

Considere a elipse de equação reduzida

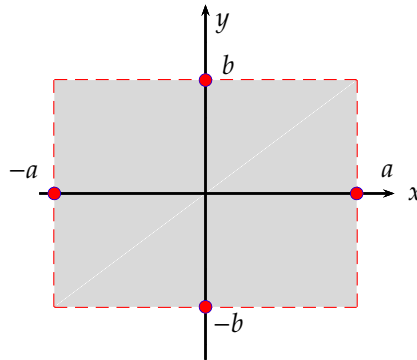
$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq 1 &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ \frac{y^2}{b^2} \leq 1 &\Leftrightarrow -b \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Portanto os pontos de  $\mathcal{E}$  estão dentro do retângulo. Esse retângulo é chamado de **retângulo fundamental** da elipse  $\mathcal{E}$ .

Figura 3.5: Retângulo fundamental



Agora, como  $a > b$ , então

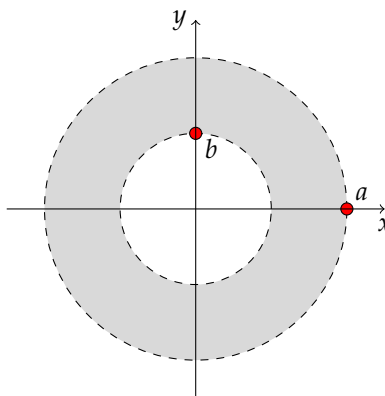
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Assim, todo ponto  $P(x, y)$  de  $E$  satisfaz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

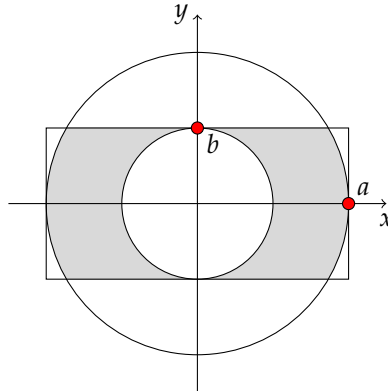
e daí  $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ , ou seja,  $b \leq d(P, O) \leq a$ . Portanto a elipse está contida entre as circunferências de raio  $a$  e  $b$ . Essa região é chamada de **coroa fundamental** da elipse.

Figura 3.6: Coroa Fundamental



Logo os pontos da elipse estão na região compreendida entre o retângulo fundamental e a coroa fundamental. Assim observe que se  $b/a$  estiver próximo de 1, então o retângulo

Figura 3.7: Região onde se encontram os pontos de uma elipse



fundamental será próximo de um quadrado e daí a forma da elipse se aproximará de um circunferência. Por outro lado, quanto mais próximo de 0 estiver  $b/a$ , mais alongada será a elipse. Mas, sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

daí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Dessa equação vemos que se  $b/a \rightarrow 1$ , então  $c/a \rightarrow 0$  e daí os focos de  $\mathcal{E}$  estão “mais próximos” de seu centro do que de seus vértices e desse modo a elipse será mais parecida com um circunferência. Por outro lado, se  $b/a \rightarrow 0$ , então  $c/a \rightarrow 1$  e assim os focos de  $\mathcal{E}$  estão “mais próximos” dos vértices do que do centro de  $\mathcal{E}$  e desse modo a elipse será mais alongada. Portanto o quociente  $c/a$  mede o quanto os focos de  $\mathcal{E}$  estão “fora do centro”. A essa razão damos o nome de **excentricidade** (*ex centrum*) da elipse e representamos por

$$e = \frac{c}{a}.$$

### 3.2.2 Hipérbole

**Definição 3.6.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos do plano tais que sua distância seja  $2c$ . Considere um número real  $a$  tal que  $0 < a < c$ . O lugar geométrico  $\mathcal{H}$  dos pontos  $P(x, y)$  tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (3.18)$$



chama-se **hipérbole**. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados **focos** da hipóérbole, o segmento  $F_1F_2$  é chamado **segmento focal**, o ponto médio do segmento  $F_1F_2$  é chamada de **centro** da hipóérbole e o número  $2c$  é chamado de **distância focal**. A reta passando por  $F_1$  e  $F_2$  é chamada **reta focal**.

Vamos fixar  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Assim um ponto  $P(x, y)$  pertence à hipóérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  se

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) &= \pm 2a \\ d(P, F_1) &= \pm 2a + d(P, F_2) \\ \left[ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2 &= \left[ \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 \\ (cx - a^2)^2 &= \left[ \pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Fazendo  $b^2 = c^2 - a^2$  e dividindo por  $a^2b^2$  obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.19)$$

Como no caso da elipse, também temos as relações

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.20)$$

$$c > b > 0 \quad (3.21)$$

$$c > a > 0. \quad (3.22)$$

Portanto, se um ponto  $P(x, y)$  pertence à hipóérbole  $\mathcal{H}$ , então ele satisfaz a equação (3.18).

Agora, dado um ponto  $A(\alpha, \beta)$  que satisfaz a equação (3.18), queremos mostrar que  $A$  pertence à hipóérbole  $\mathcal{H}$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} &= 1 \\ \beta^2 &= \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 - b^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Usando (3.21) e (3.23):

$$\begin{aligned} d^2(P, F_1) &= (\alpha + c)^2 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha c + c^2 + \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 - b^2 \end{aligned}$$

donde

$$d^2(A, F_1) = \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$d^2(A, F_2) = \left(\frac{c}{a}\alpha - a\right)^2.$$

Assim

$$d(A, F_1) = \left|\frac{c}{a}\alpha + a\right| \quad (3.24)$$

$$d(A, F_2) = \left|\frac{c}{a}\alpha - a\right|. \quad (3.25)$$

Mas

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

assim

$$\alpha^2/a^2 \geq 1, \quad (3.26)$$

isto é,  $\alpha \leq -a$  ou  $\alpha \geq a$ . Temos então dois casos para analisar:

1. Se  $\alpha \leq -a$ , então

$$\frac{c}{a}\alpha \leq -c < -a.$$

Portanto,  $(c/a)\alpha + a < 0$  e  $(c/a)\alpha - a < 0$ , donde

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= -\frac{c}{a}\alpha - a \\ d(A, F_2) &= -\frac{c}{a}\alpha + a. \end{aligned}$$

e então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |-2a| = 2a.$$

2. Se  $\alpha \geq -a$ , então

$$\frac{c}{a}\alpha \leq c > a.$$

Portanto,  $(c/a)\alpha + a > 0$  e  $(c/a)\alpha - a > 0$ , donde

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d(A, F_2) &= \frac{c}{a}\alpha - a. \end{aligned}$$

e então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |2a| = 2a.$$

Portanto, se  $A(\alpha, \beta)$  satisfaz a equação (3.18), então  $A$  pertence à hipérbole de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Assim provamos a seguinte proposição:

**Proposição 3.6.1.** *Um ponto  $P(x, y)$  é um ponto da hipérbole*

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*se, e somente se, as distâncias de  $P$  aos focos são:*

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= \left| \frac{c}{a}\alpha + a \right| \\ d(A, F_2) &= \left| \frac{c}{a}\alpha - a \right|. \end{aligned}$$

Os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  são chamados **parâmetros geométricos** da hipérbole  $\mathcal{H}$  e a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é chamada de **equação reduzida** da hipérbole.

**Observação 3.6.1.** *Seja  $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  uma hipérbole de focos no eixo  $x$ .*

1. *Nenhum ponto  $P(x, y)$  de  $\mathcal{H}$  é tal que  $-a < x < a$ , pois caso contrário teríamos  $x^2 < a^2$  o que contradiz a inequação (3.26). Para a ordenada  $y$  não há restrição, isto é, qualquer que seja  $y$  existe  $x$  tal que  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Assim a hipérbole não é limitada.*
2. *Se  $(x, y)$  pertence a  $\mathcal{H}$ , então  $(-x, -y)$ ,  $(x, -y)$  e  $(-x, y)$  também pertencem a  $\mathcal{H}$ . Logo a hipérbole é simétrica em relação ao eixo  $x$ , ao eixo  $y$  e em relação à origem do plano cartesiano.*

3. O ponto  $(x, 0)$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}$  se, e só se,  $x = \pm a$ . Por isso a interseção de  $\mathcal{H}$  com a reta focal são os pontos  $A_1(-a, 0)$  e  $A_2(a, 0)$ , chamados de **vértices** de  $\mathcal{H}$ .

Considere a hipérbole  $\mathcal{H}$  de equação reduzida

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Dada uma reta  $r$  de equação  $y = mx$ , quais as condições sobre  $a, b, c$  e  $m$  para que a reta  $r$  intercepte  $\mathcal{H}$ ?

Seja  $P(x_0, y_0)$  um ponto de interseção entre  $r$  e  $\mathcal{H}$ . Então temos

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} &= 1 \\ y_0 &= mx_0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{m^2 x_0^2}{b^2} = 1.$$

Resolvendo em  $x_0$  obtemos

$$x_0 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}. \quad (3.27)$$

Assim

$$b^2 - a^2 m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

Como  $a$  e  $b$  são positivos

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Logo a reta  $y = mx$  intercepta a hipérbole  $\mathcal{H}$  se, e só se, seu coeficiente angular está entre  $-b/a$  e  $b/a$ . Portanto as retas

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}x$$

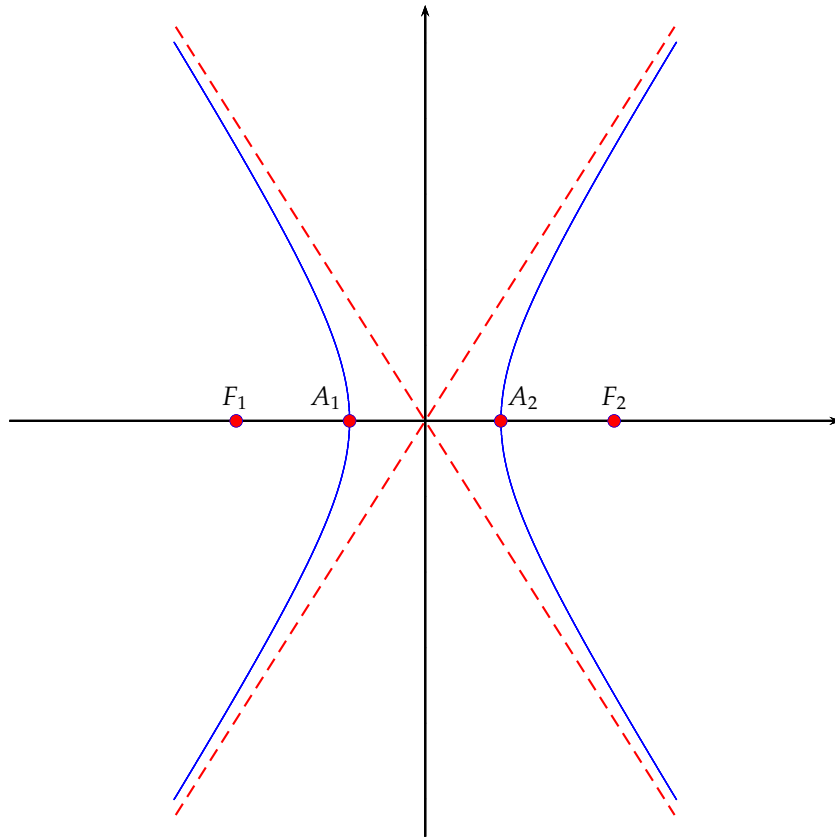
não interceptam a hipérbole  $\mathcal{H}$ . Tais retas são chamadas de **assíntotas da hipérbole**. Mais ainda, da equação (3.27) quando  $m \rightarrow b/a$ , o ponto  $x_0$  tende para mais ou menos infinito. Logo os pontos da hipérbole se aproximam das assíntotas a medida que  $x$  se afasta da origem.

Como no caso da elipse, utilizando a simetria e as assíntotas da hipérbole, podemos mostrar a partir da equação

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a$$

que a forma da hipérbole será dada pela Figura 3.8.

Figura 3.8: Hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  com assíntotas  $y = -\frac{b}{a}x$  e  $y = \frac{b}{a}x$



**Proposição 3.6.2.** *Um equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.28}$$

*descreve uma hipérbole se, e somente se, os números reais  $p$  e  $q$  são de sinal contrário.*

**Corolário 3.0.2.** *Sejam  $p$  e  $q$  números reais de sinal contrário e  $\mathcal{H}$  a hipérbole de equação (3.28) e parâmetros geométricos  $a$  e  $b$ .*

1. Se  $p > 0$  e  $q < 0$ , então  $a^2 = p$  e  $b^2 = -q$ ,  $\mathcal{H}$  tem centro na origem, focos no eixo  $x$  e assíntotas dadas por  $y = \pm(b/a)x$ .
2. Se  $p < 0$  e  $q > 0$ , então  $a^2 = q$  e  $b^2 = -p$ ,  $\mathcal{H}$  tem centro na origem, focos no eixo  $y$  e assíntotas dadas por  $x = \pm(a/b)y$ .

**Exemplos 3.6.1.** 1. Encontre a equação da hipérbole cujos vértices são  $(-15, 0)$  e  $(15, 0)$  e as assíntotas têm equações  $5y - 4x = 0$  e  $5y + 4x = 0$ .

**Solução:** As assíntotas são dadas por

$$y = -\frac{b}{a}x \quad e \quad y = \frac{b}{a}x.$$

A partir dos vértices encontramos  $a = 15$ . Daí  $b = 12$  e então a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

2. Encontre a equação da hipérbole de focos  $F_1(0, -\sqrt{20})$  e  $F_2(0, \sqrt{20})$  e tal que  $a = 2$ .

**Solução:** Como os focos não estão no eixo  $x$ , vamos usar a equação (3.18):

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 4 \\ \left[ \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{20})^2} \right]^2 &= \left[ \pm 4 + \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2} \right]^2 \\ (y\sqrt{20} - 4)^2 &= \left[ \pm 2\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2} \right]^2 \\ 20y^2 - 8\sqrt{20}y + 16 &= 4x^2 + 4y^2 - 8\sqrt{20}y + 80 \\ 16y^2 - 4x^2 &= 64. \end{aligned}$$

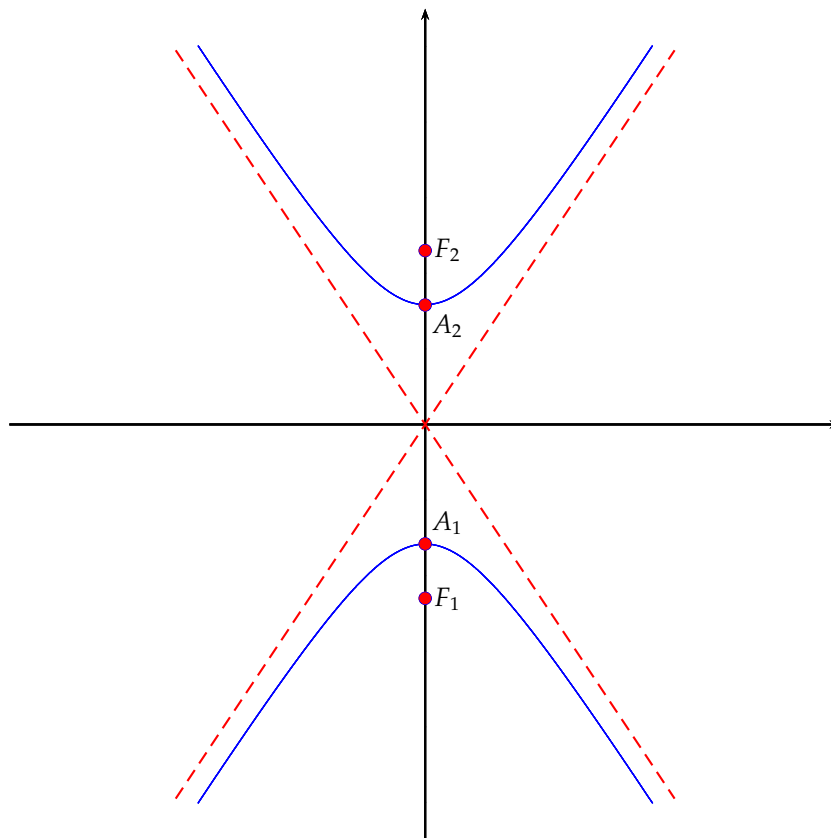
Logo a hipérbole procurada tem equação

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Portanto as assíntotas são

$$y = -2x \quad e \quad y = 2x.$$

Figura 3.9: Hipérbole  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  com assíntotas  $x = -\frac{a}{b}y$  e  $x = \frac{a}{b}y$



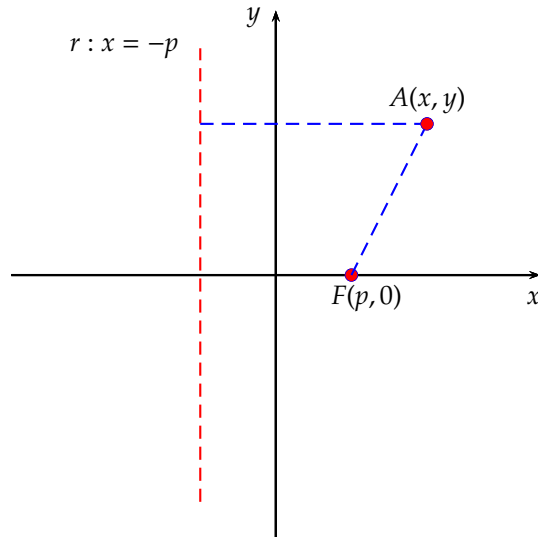
### 3.2.3 Parábola

**Definição 3.7.** Seja  $r$  uma reta e  $F$  um ponto que não pertence a  $r$ . O lugar geométrico  $\mathcal{P}$  dos pontos equidistantes de  $F$  e  $r$  chama-se **parábola**. O ponto  $F$  é chamado de **foco da parábola** e  $r$  de **reta diretriz**. A reta contendo o foco  $F$  e perpendicular à reta diretriz é chamada de **reta focal**.

Vamos fixar  $F(p, 0)$  e  $r : x = -p$ , onde  $p > 0$ . Assim um ponto  $A(x, y)$  pertence à parábola de foco  $F$  e reta diretriz  $r$  se, e somente se,

$$d(A, r) = d(A, F).$$

Figura 3.10: Definição da Parábola



Mas

$$d(A, r) = |x + p|$$

$$d(A, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}.$$

Logo  $A$  pertence à parábola  $\mathcal{P}$  se, e somente se,

$$(|x + p|)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2.$$

Portanto  $A(x, y)$  pertence à parábola  $\mathcal{P}$  se, e somente se,

$$y^2 = 4px \tag{3.29}$$

A equação (3.29) é chamada de **equação reduzida** da parábola  $\mathcal{P}$ . Indica-se

$$\mathcal{P} : y^2 = 4px.$$

**Observação 3.7.1.** 1. Se  $(x, y)$  satisfaz a equação (3.29), então  $x \geq 0$ , isto é, nenhum ponto de  $\mathcal{P}$  tem abscissa negativa. Já para a ordenada  $y$ , não existem restrições. Logo a parábola não é limitada.



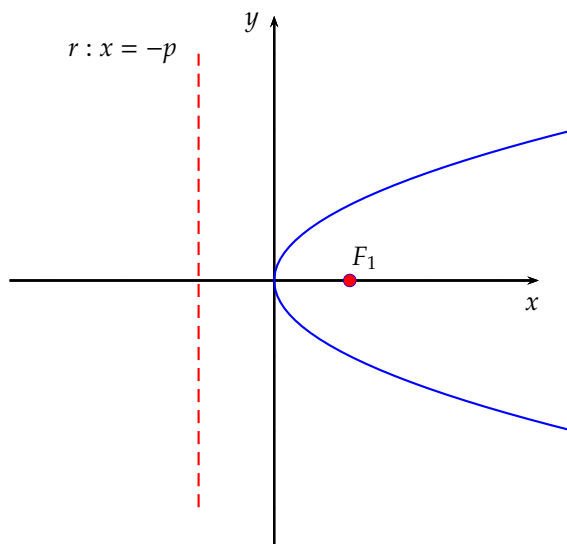
2. Se  $(x, y)$  pertence a  $\mathcal{P}$ , então  $(x, -y)$  também pertence a  $\mathcal{P}$ . Logo a parábola é simétrica em relação ao eixo  $x$ .
3. O único ponto de interseção de  $\mathcal{P}$  com os eixos coordenados é o ponto  $(0, 0)$ . Tal ponto é chamado de *vértice* da parábola.

Na equação (3.29) podemos isolar  $x$  e escrever

$$x = \frac{y^2}{4p}$$

obtendo assim  $x$  como uma função de  $y$ . Logo o gráfico da parábola  $\mathcal{P}$  é:

Figura 3.11: Parábola  $\mathcal{P} : y^2 = 4px$  e reta diretriz  $r : x = -p, p > 0$



Agora, se a diretriz de  $\mathcal{P}$  tem equação  $r : x = p$  e o foco é o ponto  $F(-p, 0)$ , com  $p > 0$ , obtemos a equação

$$y^2 = -4px.$$

Neste caso, o gráfico da parábola é dado pela Figura 3.12.

Nos demais casos temos:

**Proposição 3.7.1.** As equações  $y^2 = qx$  e  $x^2 = qy$  descrevem uma parábola se, e somente se,  $q \neq 0$ .

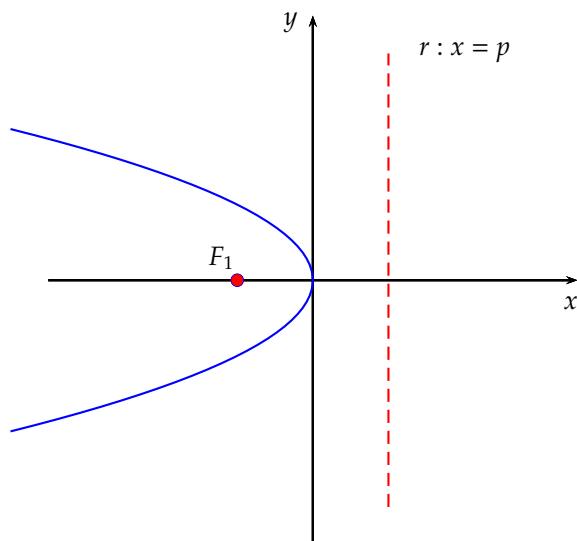
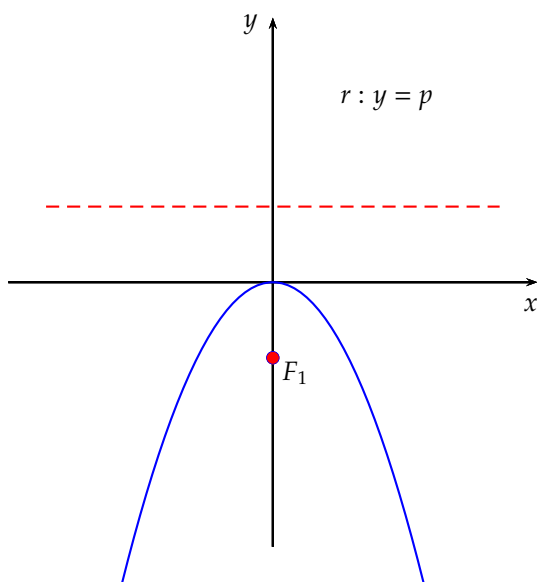
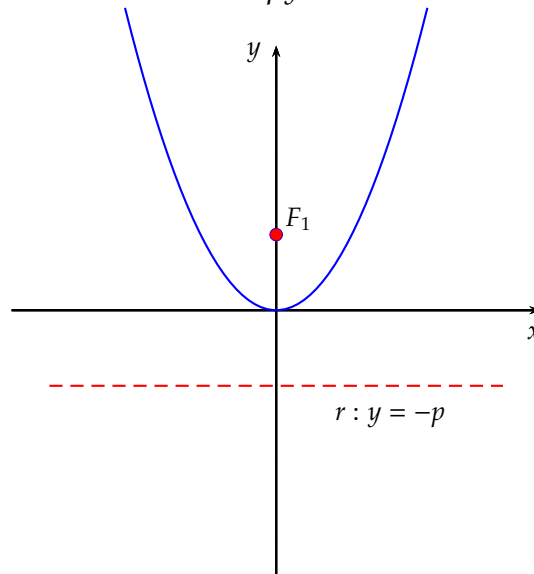
Figura 3.12: Parábola  $\mathcal{P} : y^2 = -4px$  e reta diretriz  $r : x = p, p > 0$ Figura 3.13: Parábola  $\mathcal{P} : x^2 = -4py$  e reta diretriz  $r : y = p, p > 0$ 

Figura 3.14: Parábola  $\mathcal{P} : x^2 = 4py$  e reta diretriz  $r : y = -p, p > 0$ 

### 3.3 Rotação e Translação de Eixos

Para determinar a cônica representada pela equação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

iremos utilizar translações e rotações de eixos para simplificar sua equação.

#### 3.3.1 Translação de eixos

Considere a seguinte cônica

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0. \quad (3.30)$$

Podemos escrever

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 2(y - 1)^2 - 2 - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 7.$$

Fazendo a mudança

$$x - 2 = x_1 \quad (3.31)$$

$$y - 1 = y_1 \quad (3.32)$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{7} + \frac{y_1^2}{2} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo  $x_1$ .

O efeito das equações (3.31) e (3.32) foi o de mudar o centro da elipse de equação (3.30) que estava no ponto  $(2, 1)$  no sistema original para o ponto  $(0, 0)$  considerando os eixos coordenados  $x_1$  e  $y_1$ .

Utilizando-se as equações (3.31) e (3.32) podemos facilmente escrever as coordenadas de um ponto  $P$  qualquer, tanto em relação ao sistema de eixos coordenados  $x$  e  $y$ , quanto ao sistema de eixos coordenados  $x_1$  e  $y_1$ . Por exemplo, o ponto  $P$  de coordenadas  $P = (4, 0)$ , em relação ao sistema  $xy$ , terá coordenadas  $(2, -1)$  em relação ao sistema de eixos  $x_1y_1$ . As mudanças introduzidas pelas equações (3.31) e (3.32) são chamadas de **translações de eixos**. De modo geral, se  $(x, y)$  são as coordenadas de um ponto  $P$  em relação ao ponto  $(0, 0)$ , então as coordenadas de  $P$  em relação aos eixos  $x_1$  e  $y_1$ , centrados no ponto  $(a, b)$  são dadas por

$$x_1 = x - a \quad (3.33)$$

$$y_1 = y - b. \quad (3.34)$$

As mudanças introduzidas pelas equações (3.33) e (3.34) permitem remover os termos lineares da equação (3.7).

**Exemplos 3.7.1.** *Identifique as cônicas:*

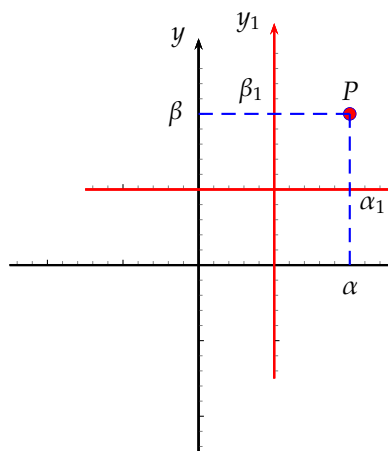
$$1. \quad 4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

**Solução:** *Compleando quadrados*

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 4 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Figura 3.15: Translação de eixos



Fazendo

$$x - 1 = x_1$$

$$y - 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo  $x_1$ . No novo sistema de coordenadas centrado no ponto os vértices são

$$\overline{A_1}(-3, 0), \quad \overline{A_2}(3, 0)$$

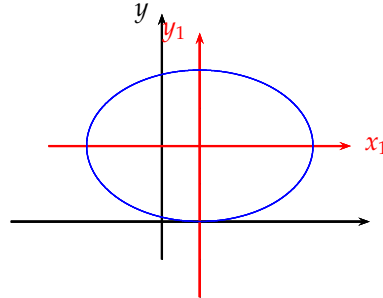
$$\overline{B_1}(0, -2), \quad \overline{B_2}(0, 2).$$

No sistema original os vértices são

$$A_1(-2, 2), \quad A_2(2, 2)$$

$$B_1(1, 0), \quad B_2(1, 4).$$

2.  $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

Figura 3.16: Elipse  $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$ 

**Solução:** Completando quadrados

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 2(y^2 + 4y + 4 - 4) - 1 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 2(y + 2)^2 = 2.$$

Fazendo

$$x - 3 = x_1$$

$$y + 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1$$

que representa uma hipérbole com focos no eixo  $x_1$ . Suas assíntotas são

$$y_1 = \pm \frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

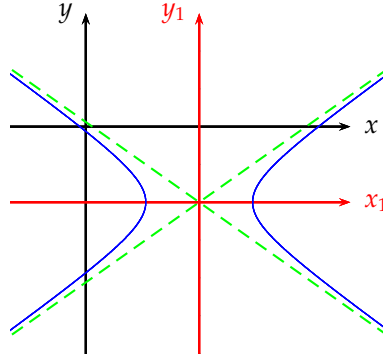
Os vértices são  $\overline{A_1}(-\sqrt{2}, 0)$  e  $\overline{A_2}(\sqrt{2}, 0)$ . No sistema original suas assíntotas são

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \left( \frac{3}{\sqrt{2}} + 2 \right)$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right).$$

Os vértices são  $\overline{A_1}(-3 - \sqrt{2}, 0)$  e  $\overline{A_2}(-3 + \sqrt{2}, 0)$ .

3.  $x^2 - y^2 - 2x - 6y = 8$

Figura 3.17: Hipérbole  $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ 

**Solução:** *Completando quadrados*

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 6y + 9 - 9) - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 0$$

$$[(x - 1) - (y + 3)][(x - 1) + (y + 3)] = 0$$

que representam as retas

$$r : x - y - 4 = 0$$

$$s : x + y + 2 = 0$$

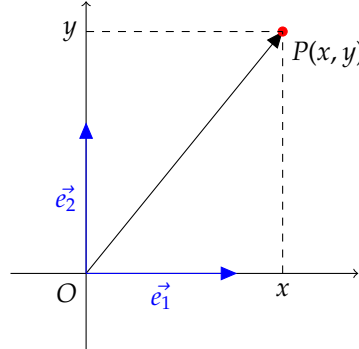
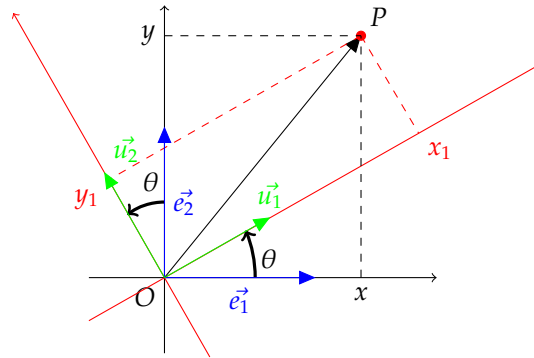
que se interceptam no ponto  $(1, -3)$ .

### 3.3.2 Rotação de eixos

Considere o sistema cartesiano com centro em  $(0, 0)$ . Sejam  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ . Para qualquer vetor  $\vec{P} = (x, y)$  podemos escrever

$$\vec{P} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (3.35)$$

Agora, efetuando-se uma rotação no sentido antihorário nos eixos  $x$  e  $y$  de um ângulo  $\theta$ , obtemos novos eixos coordenados  $x_1$  e  $y_1$ . Tome vetores unitários  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  nos eixos  $x_1$  e  $y_1$ . Em relação aos eixos originais podemos escrever

Figura 3.18: Rotação de eixos: vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ Figura 3.19: Rotação dos eixos por um ângulo  $\theta$ 

$$\vec{u}_1 = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2.$$

Mas, os vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são unitários e ortogonais, assim podemos escrever o vetor  $\vec{P}$  como combinação de escalares nos eixos rotacionados, isto é,

$$\vec{P} = x_1 \vec{u}_1 + y_1 \vec{u}_2. \quad (3.36)$$

Daí de (3.35) e (3.36) obtemos

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = x_1 \vec{u}_1 + y_1 \vec{u}_2$$

e substituindo  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \vec{e}_1 + (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \vec{e}_2.$$



Logo

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (3.37)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (3.38)$$

e então isolando  $x_1$  e  $y_1$

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

**Exemplos 3.7.2.** Seja  $P$  o ponto  $P(6, 4)$ . Efetuando-se uma rotação de um ângulo de  $\theta = \pi/3$  radianos nos eixos, as coordenadas de  $P$  em relação aos novos eixos são

$$x_1 = 6 \cos(\pi/3) + 4 \sin(\pi/3) = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6 \sin(\pi/3) + 4 \cos(\pi/3) = 2 - 3\sqrt{3}.$$

Daí no novo sistema  $P(3 + 2\sqrt{3}, 2 - 3\sqrt{3})$ .

Considere uma cônica de equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (3.39)$$

Queremos remover o termo  $xy$  da equação (3.39) para então usar uma translação de eixos, se necessário, e com isso identificar a cônica definida por tal equação. Para isso vamos tentar encontrar um ângulo  $\theta$  tal que a equação (3.39) possa ser transformada numa equação da forma

$$a'x_1^2 + c'y_1^2 + d'x_1 + e'y_1 + f' = 0. \quad (3.40)$$

Inicialmente observe que a (3.39) pode ser escrita na forma

$$X^t A X + K X + F = [0] \quad (3.41)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = [f]$$

e  $t$  denota a matriz transposta. Queremos então encontrar um ângulo  $\theta$  tal que a substituição

$$X = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

transforma a equação (3.39) na equação (3.40).

Sejam

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

que é chamada de **matriz de rotação** e

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$R_\theta R_\theta^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R_\theta^t R_\theta,$$

ou seja,  $(R_\theta^t)^{-1} = R_\theta$ .

Agora, substituindo (3.42) em (3.39) obtemos

$$(R_\theta X_1)^t A (R_\theta X_1) + K R_\theta X_1 + F = [0]$$

$$X_1^t (R_\theta^t A R_\theta) X_1 + (K R_\theta) X_1 + F = [0].$$

Note que

$$R_\theta^t A R_\theta = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = B$$

$$K R_\theta = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = K'.$$

Mas  $I_2 = R_\theta^t R_\theta$  e daí podemos escrever

$$B - \lambda I_2 = R_\theta^t A R_\theta - \lambda I_2 = R_\theta^t A R_\theta - R_\theta^t (\lambda I_2) R_\theta = R_\theta^t (A - \lambda I_2) R_\theta$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Com isso

$$\det(B - \lambda I_2) = \det[R_\theta^t (A - \lambda I_2) R_\theta] = \det(R_\theta^t) \det(A - \lambda I_2) \det(R_\theta) = \det(A - \lambda I_2).$$

Assim escolhendo  $\theta$  tal que  $b' = 0$ , o que é sempre possível fazer, obtemos

$$\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - a')(\lambda - c').$$

Logo os coeficientes  $a'$  e  $c'$  são raízes da equação de segundo grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Agora para determinar o ângulo  $\theta$  partimos de

$$B = R_\theta^t A R_\theta$$

e multiplicamos à esquerda por  $R_\theta$  obtendo

$$R_\theta B = A R_\theta.$$

Daí

$$A R_\theta = A \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \left[ A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right]$$

e

$$R_\theta B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \left[ a' \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad c' \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right].$$

Como  $R_\theta B = A R_\theta$  então das duas últimas equação vemos que se tomarmos

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

devemos ter

$$A U_1 = a' U_1,$$

isto é,

$$A U_1 = a' I_2 U_1$$

$$A U_1 - a' I_2 U_1 = [0]$$

$$(A - a' I_2) U_1 = [0].$$

Assim  $U_1$  é uma solução de norma 1 do sistema linear

$$(A - a'I_2)X = [0].$$

A solução  $U_2$  é obtida de  $U_1$  trocando a posição das componentes de  $U_1$  e depois o sinal da primeira posição.

Portanto a rotação que elimina o termo  $xy$  é dada por  $R_\theta = [U_1 \ U_2]$ . Assim temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.** *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ , sendo  $a, b$  e  $c$  não necessariamente nulos. Então mediante uma rotação da forma

$$X = R_\theta X_1$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

a equação da cônica acima pode ser transformada em

$$a'x_1^2 + c'y_1^2 + d'x_1 + e'y_1 + f = 0$$

em que  $a', c'$  são raízes de

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda,

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

é uma solução de norma 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a - a' & b/2 \\ b/2 & c - a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Exemplos 3.7.3.** *Identifique as cônicas:*

$$1. \ 52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$$

**Solução:** *Inicialmente podemos escrever tal equação na forma*

$$X^tAX + KX - 400 = 0$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança  $X = R_\theta X_1$  onde

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad e \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

removeremos o termo  $xy$ . Para isso precisamos encontrar as raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 52 - \lambda & -36 \\ -36 & 73 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (52 - \lambda)(73 - \lambda) - 36^2 \\ &= \lambda^2 - 125\lambda + 2500. \end{aligned}$$

Suas raízes são  $\lambda_1 = 25$  e  $\lambda_2 = 100$ . Tomando  $a' = 25$  e  $c' = 100$  precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} (A - 25I_2)X &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 27 & -36 \\ -36 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para encontrar a matriz de rotação. A solução deste sistema é  $x = (4/3)y$  e para determinar a matriz precisamos escolher soluções de norma 1. Assim podemos tomar, por exemplo,

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) = (4/5, 3/5) \\ U_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta) = (-3/5, 4/5). \end{aligned}$$

Daí o ângulo de rotação é  $\theta = \arccos(4/5)$ , a matriz de rotação é

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

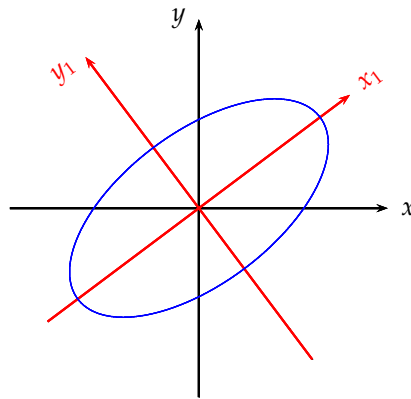
Com isso a equação original torna-se

$$25x_1^2 + 100y_1^2 = 400$$

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

que é uma elipse com focos no eixo  $x_1$ .

Figura 3.20: Elipse  $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$



2.  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

**Solução:** Inicialmente podemos escrever tal equação na forma

$$X^t A X + K X + 1 = 0$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança  $X = R_\theta X_1$  onde

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad e \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

removeremos o termo  $xy$ . Para isso precisamos encontrar as raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda. \end{aligned}$$

Suas raízes são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ . Tomando  $a' = 0$  e  $c' = 2$  precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} (A - 0I_2)X &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para encontrar a matriz de rotação. A solução deste sistema é  $x = y$  e para determinar a matriz precisamos escolher soluções de norma 1. Assim podemos tomar, por exemplo,

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ U_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Daí o ângulo de rotação é  $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ , a matriz de rotação é

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Com isso a equação original torna-se

$$\begin{aligned} 2y_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 + 1 &= 0 \\ y_1^2 &= \sqrt{2}\left(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

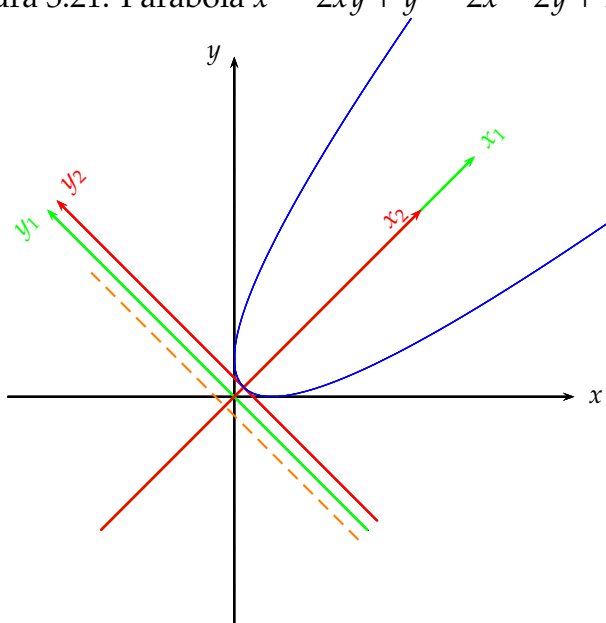
$$y_2 = y_1$$

obtemos a equação

$$y_2^2 = \sqrt{2}x_2$$

que é uma parábola com foco no eixo  $x_2$  e reta diretriz  $r : x_2 = -\sqrt{2}/4$ .

Figura 3.21: Parábola  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$



$$3. \quad 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$$

**Solução:** Inicialmente podemos escrever tal equação na forma

$$X^t A X + K X + 1 = 0$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 12\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$



Fazendo a mudança  $X = R_\theta X_1$  onde

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad e \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

removeremos o termo  $xy$ . Para isso precisamos encontrar as raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (3 - \lambda)^2 - 25 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 16. \end{aligned}$$

Suas raízes são  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 8$ . Tomando  $a' = -2$  e  $c' = 8$  precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} (A + 2I_2)X &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para encontrar a matriz de rotação. A solução deste sistema é  $x = y$  e para determinar a matriz precisamos escolher soluções de norma 1. Assim podemos tomar, por exemplo,

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ U_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Daí o ângulo de rotação é  $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ , a matriz de rotação é

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Com isso a equação original torna-se

$$\begin{aligned} -2x_1^2 + 8y_1^2 + 8x_1 - 16y_1 + 32 &= 0 \\ x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 &= 0 \\ (x_1^2 - 4x_1 + 4) - 4 - 4(y_1^2 - 2y_1 + 1) + 4 - 16 &= 0 \\ (x_1 - 2)^2 - 4(y_1 - 1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança

$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1$$

obtemos a equação

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1$$

que é uma hipérbole com focos no eixo  $x_2$ .

**Teorema 3.2.** *Seja  $C$  o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação*

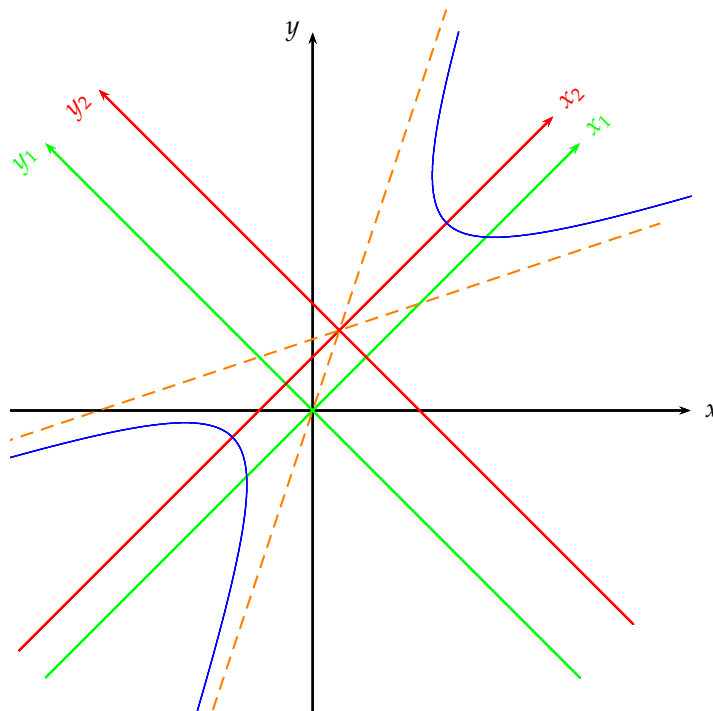
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ , sendo  $a, b$  e  $c$  não simultaneamente nulos. Sejam  $a'$  e  $c'$  raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

- (i) Temos  $a'c' = ac - b^2/4$ .
- (ii) Se  $a'c' > 0$ , então  $C$  é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.
- (iii) Se  $a'c' < 0$ , então  $C$  é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.
- (iv) Se  $a'c' = 0$ , então  $C$  é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Figura 3.22: Hipérbole  $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$





---

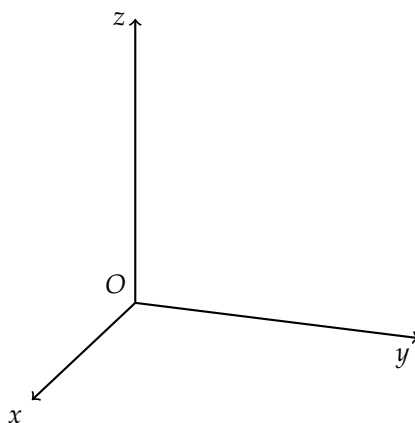
## CAPÍTULO 4

---

# VETORES NO ESPAÇO

Fixemos um ponto  $O$  no espaço, que será denominado como **origem**. Tomemos três retas duas a duas perpendiculares entre si e concorrentes em  $O$ , que serão denominados **eixos coordenados** e serão denotados por  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ .

Figura 4.1: Sistema de coordenadas tridimensionais



Projetando um ponto  $P$  do espaço ortogonalmente sobre cada um dos eixos coordenados podemos representar os pontos do espaço por ternas ordenadas  $(a, b, c)$  de números reais.

Figura 4.2: Coordenadas de um ponto no espaço tridimensional

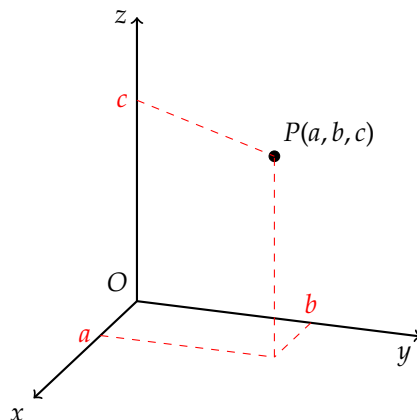
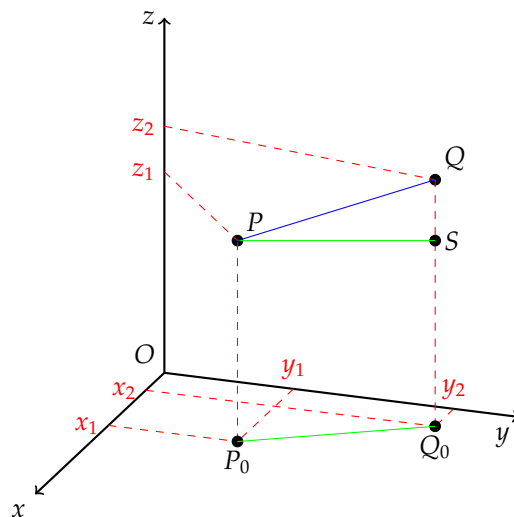


Figura 4.3: Distância entre pontos em  $\mathbb{R}^3$



Assim os pontos de  $\mathbb{R}^3$  são descritos por

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam  $P(x_1, y_1, z_1)$  e  $Q(x_2, y_2, z_2)$  dois pontos de  $\mathbb{R}^3$ . Traçando por  $P$  um segmento  $PS$  paralelo ao segmento  $P_0Q_0$ , onde  $P_0(x_1, y_1)$  e  $Q_0(x_2, y_2)$ , obtemos que

$$d(P, Q)^2 = d(P_0, Q_0)^2 + |SQ|^2.$$

Agora,  $|SQ| = |z_2 - z_1|$  e daí

$$D(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

**Exemplos 4.0.4.** A distância entre os pontos  $P(2, -1, 1)$  e  $Q(-3, 4, 2)$  é

$$d(P, Q) = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (-1 - 4)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{51}.$$

Os vetores e as operações com eles podem ser definidas utilizando-se dos eixos coordenados do espaço. Para isso, um ponto  $P$  do espaço é representado em  $\mathbb{R}^3$  por uma terna de coordenadas  $P(x_1, y_1, z_1)$ , onde  $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\vec{u}$  um vetor no espaço. Sabemos que  $\vec{u}$  é um representante de uma certa classe de equipolência dos segmentos orientados  $(B, C)$ . Para este segmento orientado  $(B, C)$  podemos encontrar um ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$  tal que o segmento orientado  $(O, A)$ , onde  $O(0, 0, 0)$ , tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de  $(B, C)$ . Assim o vetor  $\vec{u}$  pode ser representado pelo segmento orientado  $(O, A)$ . Portanto qualquer vetor em  $\mathbb{R}^3$  pode ser representado como um segmento com origem no ponto  $(0, 0, 0)$  e extremidade em um ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Assim escrevemos  $\vec{u} = \vec{OP}$ . Para simplificar a notação vamos identificar o vetor  $\vec{u} = \vec{OP}$  com as coordenadas de sua extremidade e daí escrevemos

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1).$$

As coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  são chamadas de **componentes** do vetor  $\vec{u}$ . Com essa representação, o vetor nulo  $\vec{0}$  é escrito como

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

Desse modo, podemos reescrever a definição de soma e produto por escalar da seguinte forma:

**Definição 4.1.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ . Então:

1.  $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ;
2.  $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ .

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de  $\vec{u}$  como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Vimos que a norma de um vetor é definida como o comprimento de um segmento orientado que o represente. Com a representação de vetores por coordenadas podemos reescrever o conceito de norma da seguinte maneira:

**Definição 4.2.** Seja  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  um vetor. A **norma** de  $\vec{u}$ , denotada por  $\|\vec{u}\|$  é dada por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Um vetor de norma 1 é chamado de **vetor unitário**. Dado um vetor não nulo  $\vec{u}$  o vetor

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

é um vetor unitário na direção de  $\vec{u}$  pois

$$\|\vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = 1.$$

**Exemplo 4.2.1.** Seja  $\vec{u} = (-2, 3, 2)$  um vetor. Então

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17} \\ \vec{v} &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2, 3, 2) = \left( \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}} \right). \end{aligned}$$

**Proposição 4.2.1.** Sejam  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  um vetor em  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

1. Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , então  $\|\vec{u}\| \neq 0$ .
2.  $\|\vec{u}\| \neq 0$  se, e somente se,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .
3.  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$ .



**Prova:**

1. Se  $\vec{u} \neq (0, 0, 0) = \vec{0}$ , então  $x_1 \neq 0$  ou  $y_1 \neq 0$  ou  $z_1 \neq 0$ . Daí

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} > 0.$$

2.  $\|\vec{u}\| = 0$  se, e somente se,  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$ , isto é,  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ . Portanto  $\vec{u} = \vec{0}$ .

3.  $\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(x_1, y_1, z_1)\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2 + (\alpha z_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = |\alpha| \|\vec{u}\|$ .

◇

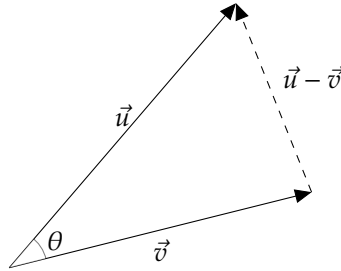
### 4.0.3 Ângulo entre vetores e produto interno no espaço

**Definição 4.3.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos. O **ângulo** entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é definido pelo ângulo  $\theta$  determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e que satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$ , quando os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são representados com a mesma origem.

**Definição 4.4.** Quando o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é reto, isto é,  $\theta = \pi/2$ , ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos e  $\theta$  o ângulo entre eles.

Figura 4.4: Ângulo entre vetores em  $\mathbb{R}^3$



**Definição 4.5.** O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , indicado por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , é o número real tal que

1. Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é nulo, então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

2. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são nulos e  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (4.1)$$

**Proposição 4.5.1.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores e  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

1. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são nulos, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

2. Qualquer que seja o vetor  $\vec{u}$ ,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v}$  se, e somente se,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

De modo análogo ao caso para vetores no plano, temos:

**Teorema 4.1.** O produto interno de dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  em  $\mathbb{R}^3$  é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

**Exemplos 4.5.1.** 1. Sejam  $\vec{u} = (2, -3, 1)$  e  $\vec{v} = (1, 1, 0)$ . Determine o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Solução:** Temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (2, -3, 1) \cdot (1, 1, 0) = 2 - 3 + 0 = -1$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{28}}.$$

$$\text{Assim, } \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{28}}\right).$$

2. Encontre um vetor  $\vec{u} = (x, y, z)$  ortogonal a  $\vec{v} = (4, -1, 2)$  e tal que  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ , onde  $\vec{w} = (1, 1, -1)$ .

**Solução:** Como  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução é  $x = -1/5 - z/5$  e  $y = -4/5 + 6z/5$ . Fazendo  $z = 0$ , obtemos  $\vec{u} = (-1/5, -4/5, 0)$ .

**Proposição 4.5.2.** Quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$  e qualquer que seja o número real  $\lambda$  temos

$$(i) \quad \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$(ii) \quad \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(iii) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(iv) \quad \text{Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0.$$

**Prova:**

(i)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle &= \langle \vec{u}, (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= (\lambda x_1)y_2 + (\lambda y_1)y_2 + (\lambda z_1)z_2 \\ &= \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= \lambda(x_1y_2) + \lambda(y_1y_2) + \lambda(z_1z_2) \\ &= \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$(iii) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

(iv) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , então  $x_1 \neq 0$  ou  $y_1 \neq 0$  ou  $z_1 \neq 0$ . Daí  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 0$ , como queríamos.

◇

**Observação 4.5.1.** (a) As propriedades (i) e (ii) da Proposição 4.5.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores:

$$\langle \vec{u}, (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle.$$

(b) Na igualdade  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  não podemos concluir que  $\vec{v} = \vec{w}$ . Por exemplo, para  $\vec{u} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, 1)$  e  $\vec{w} = (2, -5, 3)$  temos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  e no entanto  $\vec{v} \neq \vec{w}$ . Mas podemos concluir que  $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ .

(c) De  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  não podemos concluir que  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ . Por exemplo, para  $\vec{u} = (2, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (-2, 4, 0)$  temos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e no entanto  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

**Proposição 4.5.3.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores.

1.  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  [Desigualdade de Scharwz]
2.  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  [Desigualdade Triangular]

**Prova:** Análoga à prova da Proposição 1.9.3.

◇

#### 4.0.4 Produto Vetorial

Dados vetores  $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$  queremos encontrar um vetor  $\vec{w} = (x, y, z)$  que seja simultaneamente ortogonal a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ . Para isso devemos ter  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$  e  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ , ou seja,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

Podemos reescrever este último sistema como

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}. \quad (4.2)$$

Suponha que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são paralelos, daí pelo menos um dos determinantes

$$d_{ab} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad d_{ac} = \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_{bc} = \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

é diferente de zero. Suponha então que  $d_{ab} \neq 0$ . Usando a Regra de Cramer, a solução do sistema (4.2) é dada por

$$x = \frac{1}{d_{ab}} \det \begin{pmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{pmatrix} = \frac{-z}{d_{ab}} \det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}.$$

Analogamente, obtemos

$$y = \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}.$$

Logo  $\vec{w}$  é dado por

$$\vec{w} = \left( \frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}, \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}, z \right),$$

isto é, existem infinitos vetores  $\vec{w}$  que são simultaneamente ortogonais a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Fazendo  $z = d_{ab}$ , obtemos que uma solução para o sistema (4.2) é dada por

$$\vec{w} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2). \quad (4.3)$$

O vetor  $\vec{w}$  dado por (4.3) é chamado de **produto vetorial** de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  e é denotado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

Um método alternativo para determinar o vetor  $\vec{w}$  é o seguinte: denote por

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

Então qualquer vetor  $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1) = a_1(1, 0, 0) + b_1(0, 1, 0) + c_1(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}.$$

Dados vetores  $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ , seja  $\vec{w}$  o produto vetorial de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Considere o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} &= b_1 c_2 \vec{i} + c_1 a_2 \vec{j} + a_1 b_2 \vec{k} - b_1 a_2 \vec{k} - c_1 b_2 \vec{i} - a_1 c_2 \vec{j} \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{i} + (c_1 a_2 - c_2 a_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \vec{w}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.5.1.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 2, 4)$  e  $\vec{v} = (1, 3, 5)$ . Determine  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{v} \times \vec{u}$ .

**Solução:** Temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Logo  $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 9, -5)$ . Agora,

$$\vec{v} \times \vec{u} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Portanto  $\vec{v} \times \vec{u} = (2, -9, 5) = -\vec{u} \times \vec{v}$ .

**Proposição 4.5.4.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Temos

- (a)  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ ;
- (b)  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  se, e somente se,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ;
- (c)  $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$ ;

$$(d) \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

**Prova:** Seguem diretamente das propriedades do determinante.  $\diamond$

**Observação 4.5.2.** O sentido de  $\vec{u} \times \vec{v}$  é dado pela regra da mão direita: se o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é  $\theta$ , giramos o vetor  $\vec{u}$  de um ângulo  $\theta$  até que coincida com o vetor  $\vec{v}$  e acompanhamos o movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

**Proposição 4.5.5.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores no espaço. Então

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2. \quad (4.4)$$

**Prova:** Seja  $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ . Basta calcular  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$  e  $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$  e comparar os termos.  $\diamond$

**Proposição 4.5.6.** Quaisquer que sejam os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Prova:** Da Proposição 4.5.5 e usando a equação (4.1) temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

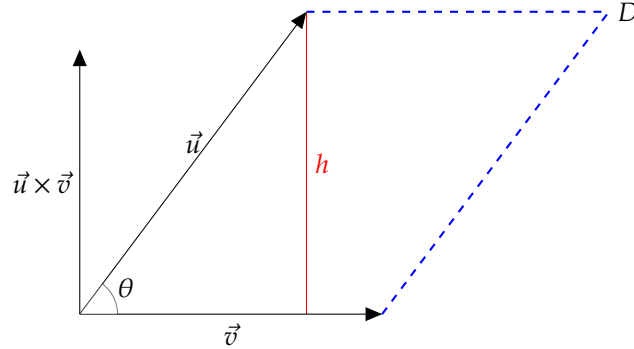
pois  $0 \leq \theta \leq \pi$ .  $\diamond$

Agora considere o paralelogramo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

A área  $\mathcal{A}$  desse paralelogramo é dado Por

$$\mathcal{A} = bh.$$

Figura 4.5: Interpretação geométrica do produto vetorial



Neste caso  $b = \|\vec{u}\|$  e  $h = \|\vec{v}\| \sin \theta$ . Logo

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Portanto o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Exemplo 4.5.2.** Calcule a área do triângulo de vértices  $A(3, 2, 0)$ ,  $B(0, 4, 3)$  e  $C(1, 0, 2)$ .

**Solução:** Note que a área do triângulo é metade da área do paralelogramo. Assim seja

$$\vec{u} = \vec{CA} = (2, 2, -2)$$

$$\vec{v} = \vec{CB} = (-1, 4, 1)$$

daí a área do triângulo será

$$\mathcal{A} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$$

e como  $\vec{u} \times \vec{v} = (10, 0, 10)$  temos  $\mathcal{A} = 5\sqrt{2}$ .

### 4.0.5 Produto Misto

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ . Como  $\vec{u} \times \vec{v}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^3$  podemos calcular seu produto interno com qualquer outro vetor  $\vec{w}$  de  $\mathbb{R}^3$ . O número real

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \tag{4.5}$$



é chamado de **produto misto** dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Se  $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$  e  $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$  temos

$$\begin{aligned}\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (b_1c_2 - c_1b_2, a_1c_2 - a_2c_1, a_1b_2 - a_2b_1), (a_3, b_3, c_3) \rangle \\ &= (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 + (a_2c_1 - a_1c_2)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+1}a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2}b_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

**Proposição 4.5.7.** *Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ . Então*

$$(a) \quad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \rangle$$

$$(b) \quad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

**Prova:** Segue diretamente das propriedades de determinantes. ◇

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ . Considere o paralelepípedo definido por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ :

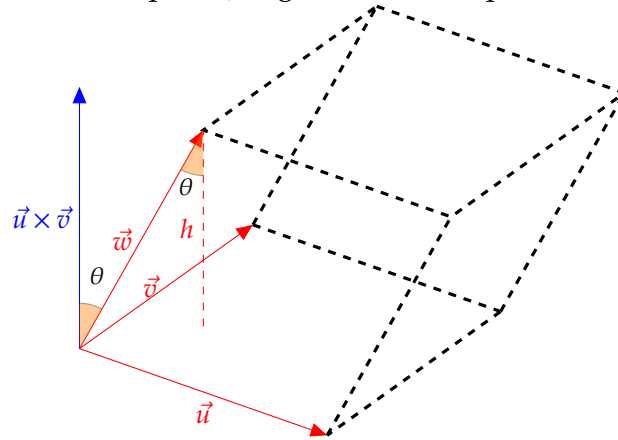
A altura  $h$  é dada por

$$h = \|\vec{w}\| |\cos \theta| = \|\vec{w}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

O volume do paralelepípedo é

$$\mathcal{V} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| h$$

Figura 4.6: Interpretação geométrica do produto misto



daí

$$\mathcal{V} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

isto é,

$$\mathcal{V} = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|. \quad (4.7)$$

**Exemplo 4.5.3.** Os pontos  $P(0, 1, 1)$ ,  $Q(1, 0, 2)$ ,  $R(1, -2, 0)$  e  $S(-2, 2, -2)$  definem um paralelepípedo? Em caso afirmativo, qual o seu volume?

**Solução:** Se os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  definirem um paralelepípedo, seu volume deverá ser diferente de zero. Assim considere os vetores

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{PQ} = (1, -1, 1) \\ \vec{v} &= \vec{PR} = (1, -3, -1) \\ \vec{w} &= \vec{PS} = (-2, 1, -3). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  não definem um paralelepípedo.

---

# CAPÍTULO 5

---

## RETA E PLANO NO ESPAÇO

---

### 5.1 Equações do Plano

---

Da Geometria plana, sabemos que todo plano  $\pi$  contém pelo menos três pontos não colineares, digamos  $A, B$  e  $C$ . Assim considere os vetores

$$\vec{u} = \vec{AB}$$

$$\vec{v} = \vec{AC}.$$

Como  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são paralelos, então podemos considerar o vetor  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ . Assim, na Figura 5.1 vemos que um ponto  $D$  pertence ao plano  $\pi$  se, e somente se,  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{AD}$ . Logo um plano  $\pi$  é um conjunto de vetores perpendiculares a um dado vetor.

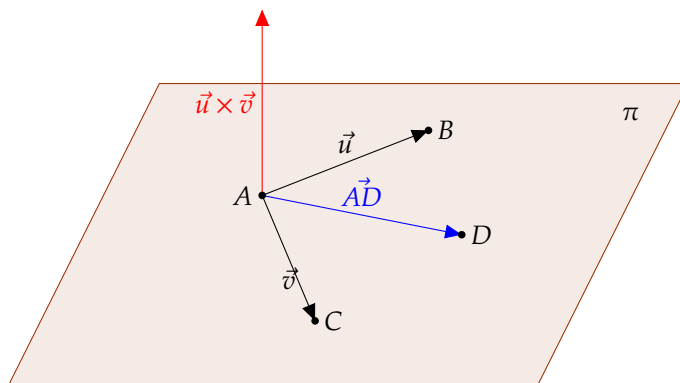
Fixe então um ponto  $P_0$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  um vetor. Passando por  $P_0$  existe um único plano  $\pi$  perpendicular ao vetor  $\vec{v}$ . Assim um ponto  $P$  do espaço pertence ao plano  $\pi$  se, e somente se,  $P_0\vec{P} \perp \vec{v}$ , isto é,

$$\langle P_0\vec{P}, \vec{v} \rangle = 0. \quad (5.1)$$

Sejam  $\vec{v} = (a, b, c)$  um vetor,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e  $P(x, y, z)$  pontos em  $\mathbb{R}^3$ . Logo  $P_0\vec{P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  e então da equação (5.1) obtemos

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0. \quad (5.2)$$

Figura 5.1: Equação do plano



A equação (5.2) é chamada de **equação cartesiana do plano**  $\pi$ . O vetor  $\vec{v}$  é chamado de **vetor normal** ao plano  $\pi$ .

**Exemplos 5.0.2.** Encontre a equação do plano  $\pi$  nas seguintes situações:

1. O vetor normal é  $\vec{v} = (1, 2, -1)$  e o ponto de  $\pi$  é  $P_0(1, 3, -1)$ .

**Solução:** Se  $P(x, y, z)$  pertence a  $\pi$ , então

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle (x - 1, y - 3, z + 1), (1, 2, -1) \rangle = 0$$

$$x - 1 + (y - 3)2 + (z + 1)(-1) = 0.$$

Logo a equação do plano procurado é

$$x + 2y - z - 8 = 0.$$

2. O vetor normal é  $\vec{v} = (0, 0, 1)$  e  $P_0(0, 0, 0)$ .

**Solução:** Se  $P(x, y, z)$  pertence a  $\pi$ , então

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$

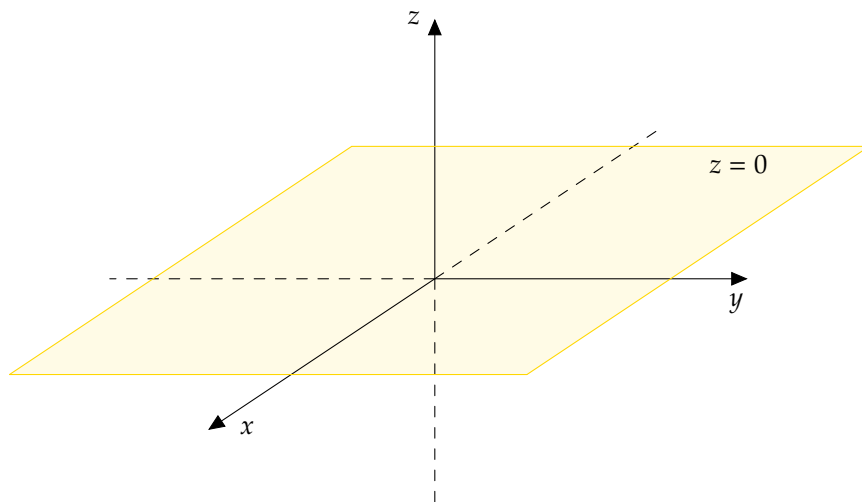
$$\langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

Logo a equação do plano procurado é

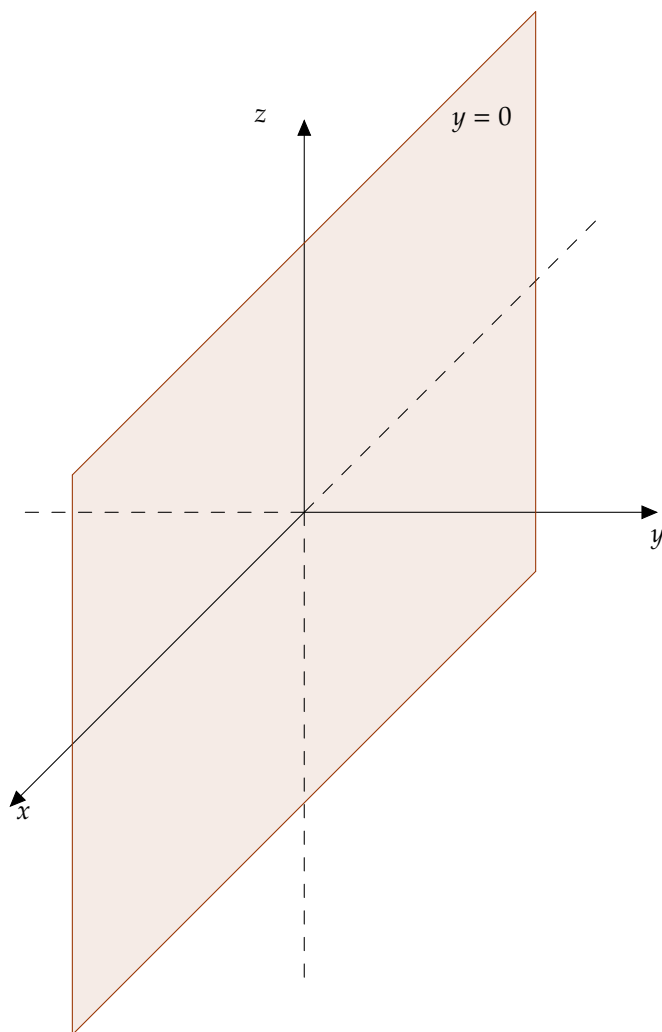
$$z = 0.$$

Agora, se  $\vec{v} = (0, 1, 0)$  e  $P_0(0, 0, 0)$ , então a equação do plano será  $y = 0$ . Agora, se

Figura 5.2: Plano  $z = 0$



$\vec{v} = (1, 0, 0)$  e  $P_0(0, 0, 0)$ , então a equação do plano será  $x = 0$ .

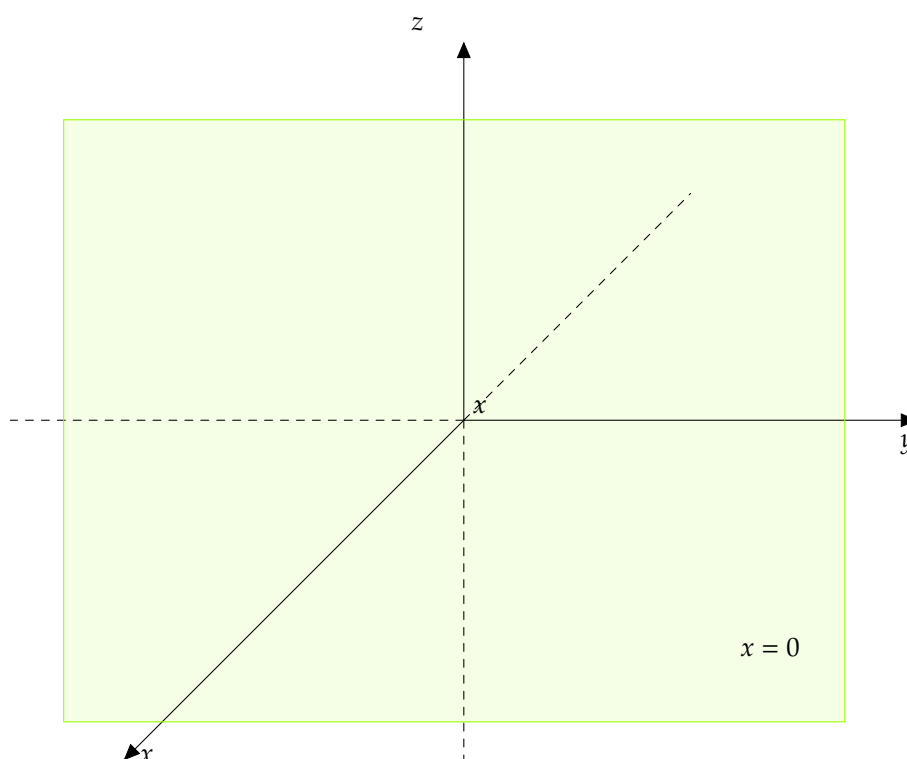
Figura 5.3: Plano  $y = 0$ 

3. Passando pelos pontos  $A(3, 1, -2)$ ,  $B(5, 2, 1)$  e  $C(2, 0, 2)$ .

**Solução:** *Sejam*

$$\vec{u} = \vec{AB} = (2, 1, 3)$$

$$\vec{v} = \vec{AC} = (-1, -1, 4).$$

Figura 5.4: Plano  $x = 0$ 

Um vetor normal ao plano é dado por  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Assim

$$\vec{w} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{k} + 3\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Assim  $\vec{w} = (7, -11, -1)$  e portanto a equação do plano é

$$7x - 11y - z - 12 = 0.$$

Dada uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  não são simultaneamente nulos, existe um plano  $\pi$  representado por esta equação? A resposta é afirmativa. Suponha que  $a \neq 0$ . Tome  $\vec{v} = (a, b, c) \neq 0$  e  $P_0(-d/a, 0, 0)$ . A equação do plano com vetor normal  $\vec{v}$  e passando por  $P_0$  é dada por

$$\begin{aligned}\langle P_0\vec{P}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \left\langle \left(x + \frac{d}{a}, y, z\right), (a, b, c) \right\rangle &= 0 \\ ax + by + cz + d &= 0.\end{aligned}$$

Portanto qualquer equação da forma  $ax + by + cz + d = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  não simultaneamente nulos define um plano.

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos dados por

$$\begin{aligned}\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0.\end{aligned}$$

onde os vetores normais de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{v}_2 &= (a_2, b_2, c_2).\end{aligned}$$

Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são **paralelos** se, e somente se,  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ . Para que  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sejam iguais devemos ter  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$  e dados  $P_1 \in \pi_1$  e  $P_2 \in \pi_2$  o vetor  $P_1\vec{P}_2$  deve ser tal que  $P_1\vec{P}_2 \perp \vec{v}_1$  ou  $P_1\vec{P}_2 \perp \vec{v}_2$ .

**Exemplo 5.0.4.** Dados os seguintes planos, determinar quais são iguais ou paralelos dois a dois:

$$\begin{aligned}\pi_1 : 2x - y + 3z &= 0 & \pi_2 : x - y - 3 &= 0 \\ \pi_3 : y - 2x - 3z &= 2 & \pi_4 : 2x - 2y &= 6 \\ \pi_5 : x &= 0.\end{aligned}$$

**Solução:** Os vetores normais a cada plano são

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (2, -1, 3) & \vec{v}_2 &= (1, -1, 0) \\ \vec{v}_3 &= (-2, 1, -3) & \vec{v}_4 &= (2, -2, 0) \\ \vec{v}_5 &= (1, 0, 0).\end{aligned}$$



Como  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_3$  então  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ . Agora  $P_1(0, 0, 0) \in \pi_1$  e  $P_2(0, 2, 0) \in \pi_3$ . Daí

$$\langle P_1\vec{P}_2, \vec{v}_1 \rangle = \langle (0, 2, 0), (2, -1, 3) \rangle = -2 \neq 0.$$

Logo  $\pi_1$  e  $\pi_3$  são paralelos e distintos. Agora, como  $\vec{v}_4 = 2\vec{v}_2$  então  $\vec{v}_2 \parallel \vec{v}_4$ . Mas  $P_1(3, 0, 0) \in \pi_2$  e  $P_2(0, -3, 0) \in \pi_4$ . Daí

$$\langle P_1\vec{P}_2, \vec{v}_2 \rangle = \langle (-3, -3, 0), (1, -1, 0) \rangle = 0.$$

Logo  $\pi_2 = \pi_4$ .

Os demais planos não são paralelos.

## 5.2 Equações da Reta

Seja  $\vec{v}$  um vetor e  $A$  um ponto. Sabemos que a reta  $r$  passando por  $A$  e paralela ao vetor  $\vec{v}$  tem equação

$$\vec{AP} = t\vec{v} \tag{5.3}$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $P$  é um ponto qualquer de  $r$ . Sendo  $A$  um ponto em  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{v}$  um vetor de  $\mathbb{R}^3$  temos

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Daí um ponto  $P(x, y, z)$  pertence à reta  $r$  se, e somente se,

$$\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c).$$

Logo  $P(x, y, z)$  pertence à reta  $r$ , se e só se,  $P(x, y, z)$  satisfaz as equações

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Tais equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta  $r$ . O vetor  $\vec{v}$  é chamado de **vetor diretor** de  $r$ .

**Exemplo 5.0.5.** As equações paramétricas da reta  $r$  passando por  $P_0(-3, 3/2, 4)$  e paralela ao vetor  $\vec{v} = (-6, 1, 4)$  são

$$\begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = 3/2 + t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga ao caso do plano, se  $\vec{v} = (a, b, c)$  é tal que  $abc \neq 0$ , então podemos reescrever (5.4) como

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são chamadas de **equações na forma simétrica** da reta  $r$ .

## 5.3 Interseções

### 5.3.1 Entre retas

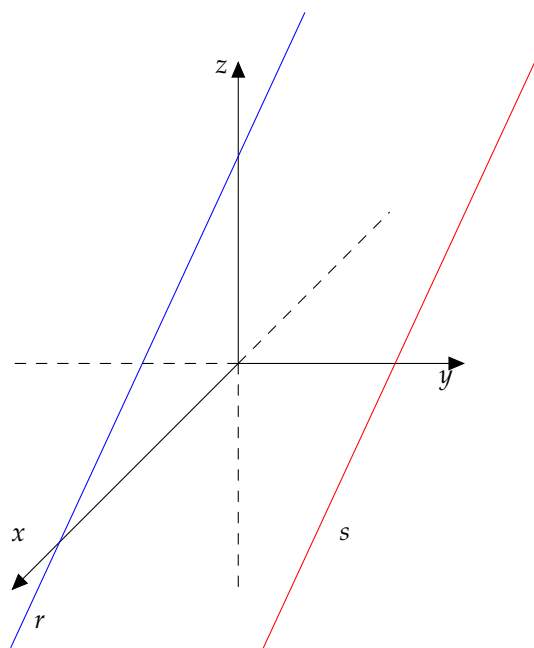
Considere duas retas  $r$  e  $s$  de equações

$$r: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = x_1 + sd \\ y = y_1 + se \\ z = z_1 + sf \end{cases}; \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Os vetores diretores de  $r$  e  $s$  são  $\vec{u} = (a, b, c)$  e  $\vec{v} = (d, e, f)$  respectivamente.

1. Se  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas ou coincidentes. Elas serão coincidentes se, e somente se, possuírem algum ponto em comum.
2. Se os vetores diretores não são paralelos, temos duas possibilidades. Considere os pontos  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$  e  $P_1(x_1, y_1, z_1) \in s$ .
  - (a) Se  $P_1\vec{P}_2$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  estão no mesmo plano, isto é,  $\langle P_1\vec{P}_2, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$  então  $r$  e  $s$  são concorrentes.
  - (b) Se  $P_1\vec{P}_2$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  estão planos diferentes, isto é,  $\langle P_1\vec{P}_2, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \neq 0$  então  $r$  e  $s$  são chamadas de **retas reversas**.

Figura 5.5: Retas Paralelas



**Exemplos 5.0.3.** Determine se os seguintes pares de retas são paralelas, concorrentes ou reversas:

$$1. \quad r: \frac{x-2}{2} = y+3 = \frac{z-2}{3}; s: \frac{x}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{6}$$

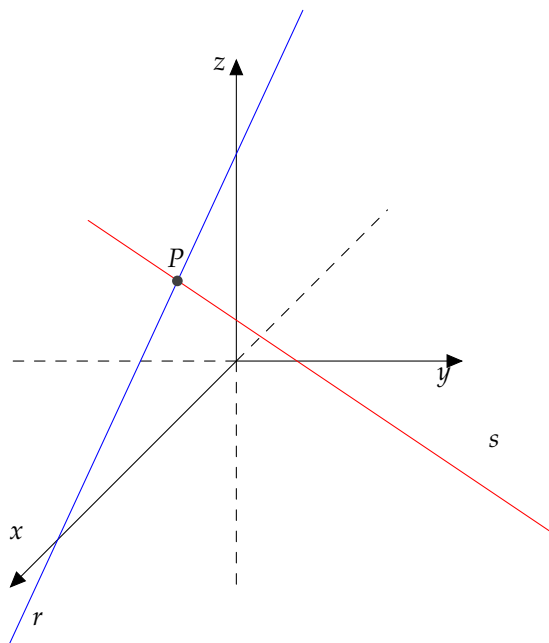
**Solução:** Como  $\vec{u} = (2, 1, 3)$  e  $\vec{v} = (4, 2, 6)$  são vetores diretores de  $r$  e  $s$  respectivamente, então  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ . Mas  $P_0(0, -3, 2) \in s$  e  $P_0 \notin r$ , logo  $r$  e  $s$  são paralelas e distintas.

2.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

**Solução:** Como  $\vec{u} = (2, 2, 1)$  e  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  são vetores diretores de  $r$  e  $s$  respectivamente,

Figura 5.6: Retas Concorrentes



então  $r$  e  $s$  são concorrentes ou reversas. Igualando as equações de  $r$  e  $s$  obtemos

$$1 + 2t = s$$

$$1 + 2t = s$$

$$1 + t = 0$$

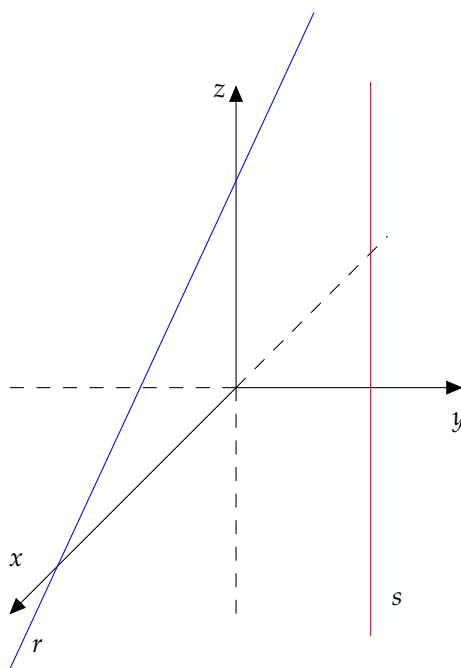
donde  $t = -1$  e  $s = -1$ . Portanto  $r$  e  $s$  são concorrentes e o ponto de interseção é  $P(-1, -1, 0)$ .

3.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

**Solução:** Como  $\vec{u} = (2, 1, 2)$  e  $\vec{v} = (1, 1, 2)$  são vetores diretores de  $r$  e  $s$  respectivamente,

Figura 5.7: Retas Reversas



então  $r$  e  $s$  são concorrentes ou paralelas. Igualando as equações de  $r$  e  $s$  obtemos

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ 2 + t = 1 + s \\ -1 + 2t = -1 + 2s \end{cases} \quad (5.5)$$

Da primeira e segunda equação obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2t - s = 1 \\ t - s = -1 \end{cases}$$

Cuja solução é  $t = 2$  e  $s = 3$ . Substituindo esses valores na terceira equação de (5.5) obtemos  $3 \neq 5$ . Portanto  $r$  e  $s$  são reversas.

### 5.3.2 Entre planos

Dados três planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  de equações

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

A interseção entre eles será constituída pelos pontos cujas coordenadas sejam as soluções do sistema forma pelas equações de  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  simultaneamente, ou seja, devem ser soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

**Exemplos 5.0.4.** Encontre a interseção entre os planos:

$$1. \pi_1 : x = y, \pi_2 : 2x - z = 0 \text{ e } \pi_3 : 3x + 2y + z + 3 = 0$$

**Solução:** A interseção será dada pela solução do sistema

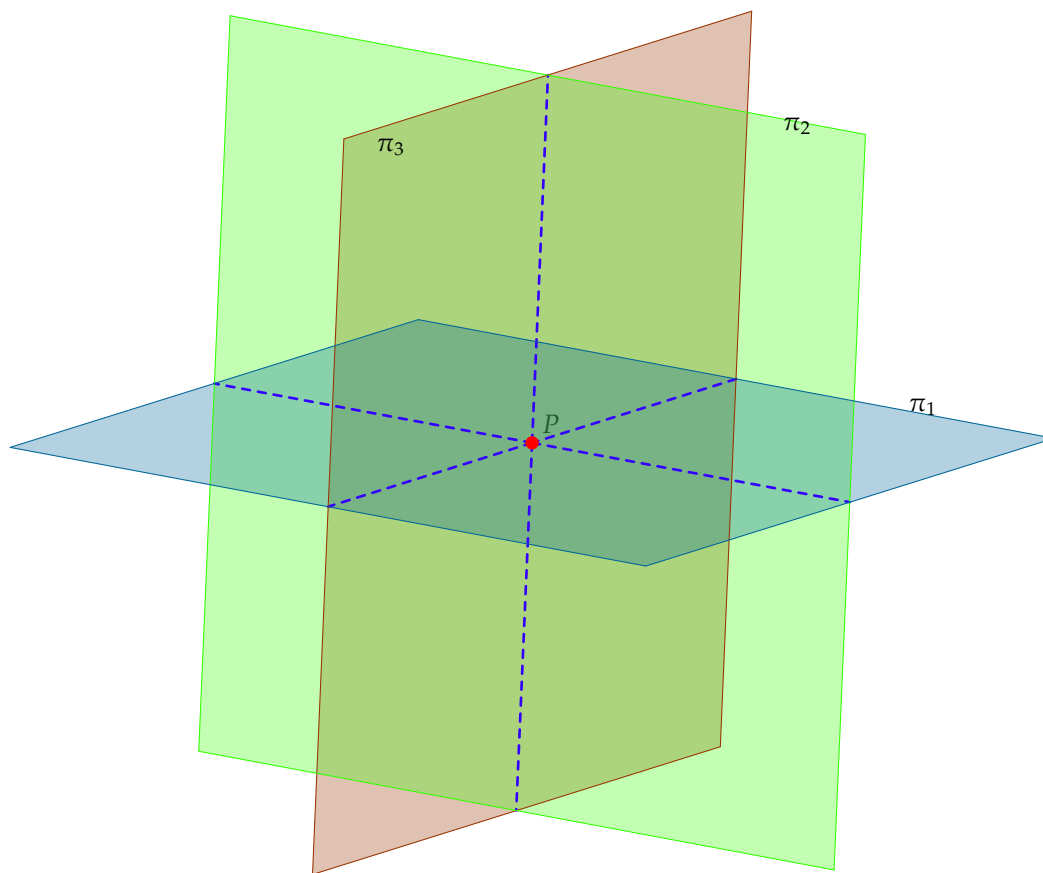
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x + 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema obtemos que  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{(-3/7, -3/7, -6/7)\}$ .

$$2. \pi_1 : 2x + y = 1, \pi_2 : x - y + z = 0$$

**Solução:** A interseção será dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Figura 5.8:  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ 

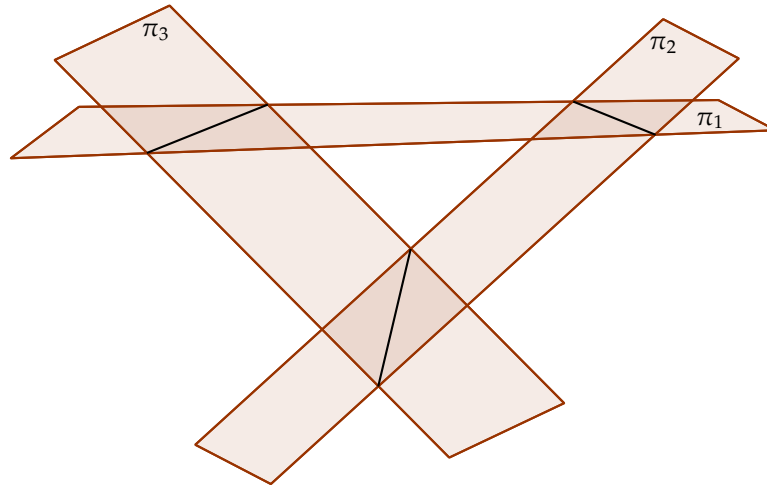
Resolvendo tal sistema obtemos  $z = 1 - 3x$  e  $y = 1 - 2x$ . Logo

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(x, 1 - 2x, 1 - 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Fazendo  $x = t$  podemos escrever

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

que é a equação de uma reta passando pelo ponto  $P_0(0, 1, 1)$  e com vetor diretor  $\vec{v} = (1, -2, -3)$ .

Figura 5.9:  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ 

### 5.3.3 Entre retas e planos

Para encontrar a interseção de uma reta  $r$  com um plano  $\pi$ , basta resolver o sistema formado pelas equações de  $r$  e de  $\pi$ . Se o sistema tiver uma única solução  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , então  $r \cap \pi = \{P_0\}$ . Se o sistema for indeterminado então  $r \subset \pi$  e se o sistema for impossível então  $r \cap \pi = \emptyset$  e  $r \parallel \pi$ .

**Exemplos 5.0.5.** Encontre a interseção entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$  nos seguintes casos:

1.  $r : x = t + 1, y = 1, z = 1$  e  $\pi : 2x - y = 3$ .

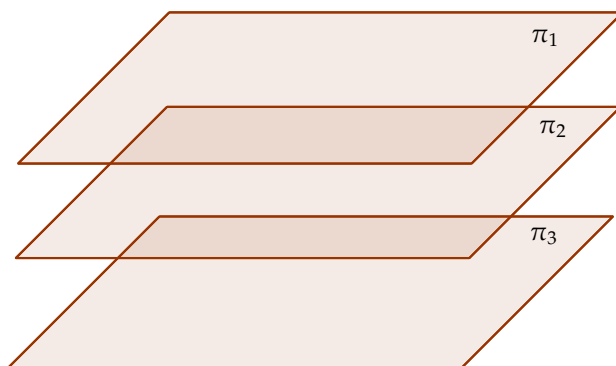
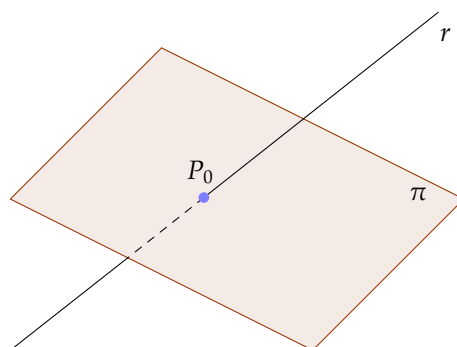
**Solução:** Substituindo as equações da reta na do plano obtemos  $t = 1$ . Logo  $r \cap \pi = \{(2, 1, 1)\}$ .

- 2.

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} ;$$

$$\pi : x - 2y + z = 5.$$



Figura 5.10:  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ Figura 5.11:  $r \cap \pi = \{P_0\}$ 

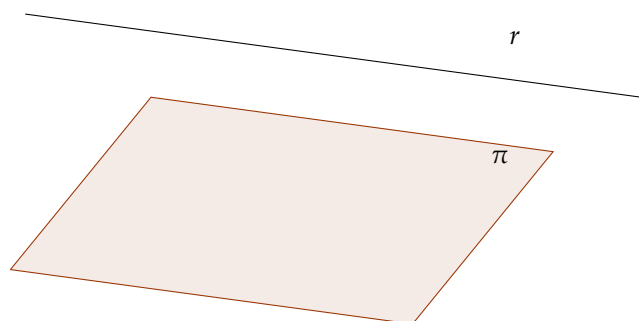
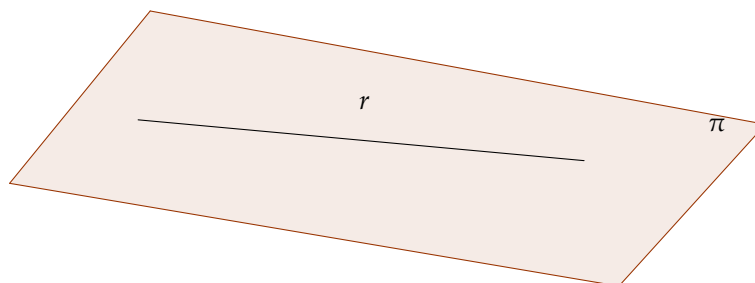
**Solução:** O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

não tem solução. Logo  $r \cap \pi = \emptyset$ .

3.

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} ;$$

Figura 5.12:  $r \cap \pi = \emptyset$ Figura 5.13:  $r \subset \pi$ 

$$\pi : x - y + 3z = -1.$$

**Solução:** O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

tem solução dada por  $x = -1 + 3z$  e  $y = -2 + 6z$ . Logo

$$r \cap \pi : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = t \end{cases},$$

ou seja,  $r \subset \pi$ .

---

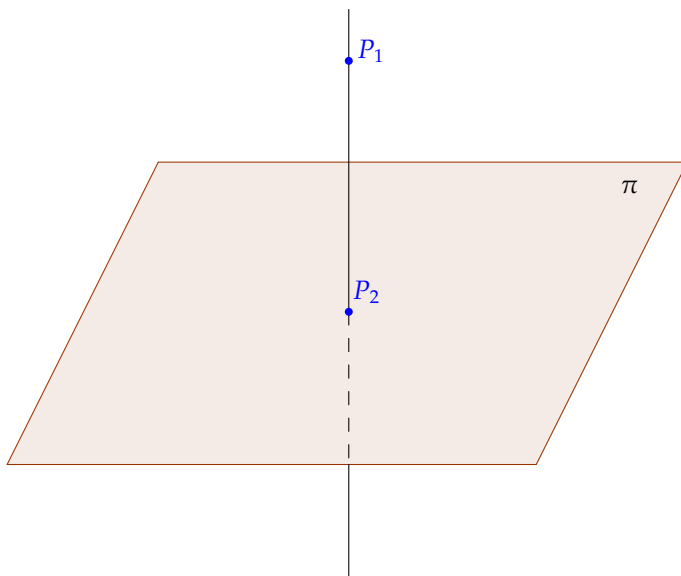
## 5.4 Distâncias

---

### 5.4.1 Entre ponto e plano

Seja  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  um ponto e  $\pi$  um plano de equação  $ax + by + cz + d = 0$ . Seja  $r$  a reta que

Figura 5.14: Distância entre ponto e plano



contém o ponto  $P_1$  e é perpendicular ao plano  $\pi$ . Denote por  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  a interseção de  $\pi$  com  $r$ . O ponto  $P_2$  é chamado de **projeção ortogonal** de  $P_1$  sobre  $\pi$ . A norma do vetor  $\vec{P_1P_2}$  será a distância de  $P_1$  a  $\pi$ , isto é,

$$d(P_1, \pi) = \left\| \vec{P_1P_2} \right\|.$$

Seja  $\vec{u} = (a, b, c)$  o vetor normal de  $\pi$ . Como  $\vec{u} \parallel P_1\vec{P}_2$ , existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$P_1\vec{P}_2 = t\vec{u}.$$

Logo

$$d(P_1, P_2) = \|t(a, b, c)\| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.6)$$

Por outro lado, se  $P(x_2, y_2, z_2)$ , então

$$P_1\vec{P}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = t(a, b, c)$$

e como  $P_2 \in \pi$  devemos ter

$$a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

isto é,

$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (5.6) obtemos

$$d(P_1, \pi) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right|$$

portanto

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exemplos 5.0.6.** 1. A distância entre o plano  $\pi : 2x + y - z = 4$  e o ponto  $P(1, 1, 1)$  será

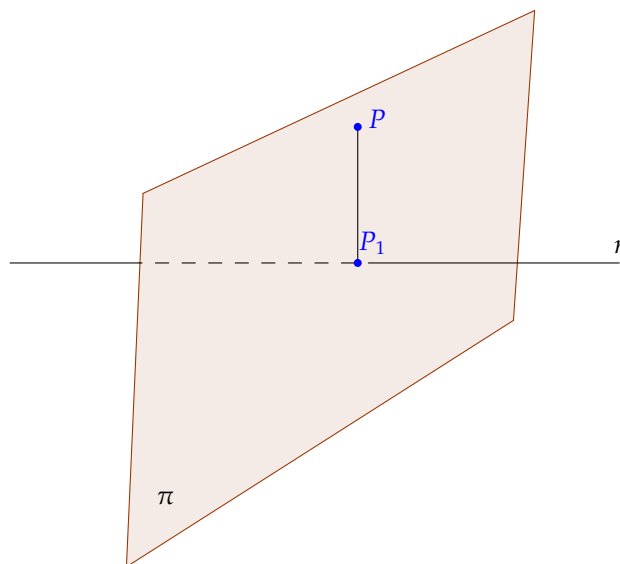
$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 1 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

2. Calcule a distância entre  $\pi_1 : 2x - 3y + z - 2 = 0$  e  $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 5 = 0$ .

**Solução:** Um vetor normal de  $\pi_1$  é  $\vec{u} = (2, -3, 1)$  e de  $\pi_2$  é  $\vec{v} = (4, -6, 2)$ . Como  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , então  $\pi_1 \parallel \pi_2$  e assim a distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é dada pela distância de um ponto de  $\pi_1$  a  $\pi_2$ , ou o contrário. Tomando  $P_1(1, 0, 0) \in \pi_1$  temos

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{56}}.$$

Figura 5.15: Distância entre ponto e reta



### 5.4.2 Entre um ponto e uma reta

Seja  $P$  um ponto e  $r$  uma reta.

Para determinar  $d(P, r)$  primeiro construímos um plano  $\pi$  passando por  $P$  e com vetor normal paralelo ao vetor diretor de  $r$ . Assim

$$d(P, r) = d(P, P_1)$$

onde  $P_1 \in \pi \cap r$ .

**Exemplo 5.0.6.** Determinar a distância do ponto  $P(1, 2, -1)$  à reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

**Solução:** Podemos tomar o vetor  $\vec{u} = (2, 1, -3)$  como vetor normal ao plano  $\pi$  que contém  $P$ . Daí

$$\pi : 2(x - 1) - (y - 2) + 3(z - 1) = 0$$

$$\pi : 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

A interseção de  $\pi$  com  $r$  é dada por

$$2(1 + 2t) - (5 - t) + 3(-2 + 3t) = 0,$$

isto é,  $t = 3/7$  e então  $P_1(13/7, 32/7, -5/7) \in \pi \cap r$ . Portanto

$$d(P, r) = d(P, P_1) = \sqrt{\left(1 - \frac{13}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{32}{7}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{91}}{7}.$$

### 5.4.3 Entre retas

Sejam  $r$  e  $s$  retas. Se  $r \parallel s$  então a distância entre  $r$  e  $s$  é dada pela distância entre um ponto de  $r$  e a reta  $s$ , ou o contrário. Suponha então que  $r$  e  $s$  são reversas. Por um ponto  $P$  de  $s$  tracemos uma reta  $s'$  paralela a  $r$ .

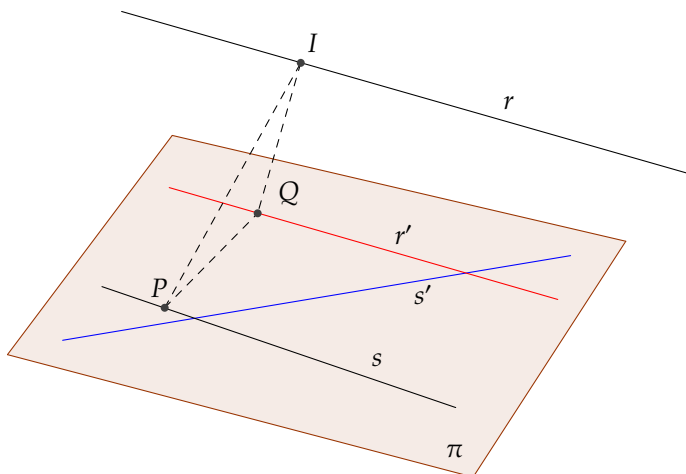
O plano  $\pi$  definido por  $s$  e  $s'$  é paralelo a  $r$ , daí a distância de  $r$  a  $\pi$  é constante. Esta constante é **a menor distância** entre  $r$  e  $s$ . De fato, seja  $r'$  uma reta contida em  $\pi$  e paralela a  $r$ . Seja  $I$  um ponto de  $r$ . Por  $I$  tracemos um perpendicular a  $r$  que a intercepta em um ponto  $Q$ . Se  $P$  é um ponto qualquer de  $s$  temos

$$\overline{IP}^2 = \overline{IQ}^2 + \overline{QP}^2$$

pois o triângulo  $IQP$  é retângulo em  $Q$ . Logo

$$\overline{IP}^2 \geq \overline{IQ}^2,$$

Figura 5.16: Distância entre retas reversas



ou seja,

$$\overline{IP} \geq \overline{IQ}.$$

Mas  $\overline{IQ}$  é a distância de  $\pi$  a  $r$ , logo segue da última desigualdade que a distância de  $\pi$  a  $r$  é menor ou igual a distância entre um ponto de  $r$  e um ponto de  $s$ . Portanto

$$d(r, s) = d(r, \pi).$$

**Exemplo 5.0.7.** Determine a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -5 + 4s \\ y = 6 - 5s \\ z = 4 + 3s. \end{cases}$$

**Solução:** Os vetores diretores de  $r$  e  $s$  são  $\vec{u} = (1, -3, 2)$  e  $\vec{v} = (4, -5, 3)$ , respectivamente. Logo  $r$  e  $s$  não são paralelas. Agora, o sistema

$$\begin{cases} 2 + t = -5 + 4s \\ 1 - 3t = 6 - 5s \\ 1 + 2t = 4 + 3s \end{cases}$$

e assim  $r$  e  $s$  são reversas. Assim pelo ponto  $(-5, 6, 4)$  de  $s$  tracemos uma reta  $s'$  paralela a  $r$ . Daí

$$s' : \begin{cases} x = -5 + \alpha \\ y = 6 - 3\alpha \\ z = 4 + 2\alpha. \end{cases}$$

O vetor  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  é perpendicular ao plano definido por  $s$  e  $s'$ . Como  $\vec{w} = (1, 5, 7)$  então o plano  $\pi$  contendo  $s$  e  $s'$  é dado por

$$\pi : x + 5y + 7z - 53 = 0.$$

Finalmente, seja  $P(2, 1, 1) \in r$ . Então

$$d(r, s) = d(P, \pi) = \frac{|2 + 5 + 7 - 53|}{\sqrt{1 + 5^2 + 7^2}} = \frac{39}{\sqrt{75}}.$$



---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Boulos, P.; Camargo, I., *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, 3ª edição, São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] Machado, A. S., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, 2ª Edição, Atual Editora, 1980.
- [3] Reis, G. L.; Silva, V. V., *Geometria Analítica*, 2ª Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] Santos, R. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, UFMG, 2012, Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/~regi>
- [5] Santos, F. J.; Ferreira, S. F., *Geometria Analítica*, 1ª Edição, Bookman, Companhia Editora, 2009.
- [6] Steinbruch, A.; Winterle, P., *Geometria Analítica*, 1ª Edição, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [7] Valladares, R. J. C., *Geometria Analítica do Plano e do Espaço*, LTC, Rio de Janeiro, 1990.



---

# ÍNDICE REMISSIVO

## Cônica

Termo Quadrático Misto, 46

Termos Independente, 46

Termos Lineares, 46

Termos Quadráticos, 46

## Cônicas, 46

## Circunferência, 41

Equação Cartesiana, 43

Equações Paramétricas, 43

Desigualdade de Scharwz, 24, 92

Desigualdade Triangular, 24, 92

## Elipse, 47

Centro, 47

Coroa Fundamental, 55

Eixo Maior, 51

Eixo Menor, 51

Equação Reduzida, 49

Excentricidade, 56

Focos, 47

Parâmetros Geométricos, 49

Retângulo Fundamental, 54

Reta Focal, 47

Vértice, 51

## Hipérbole, 57

Assíntotas, 60

Centro, 57

Distância Focal, 57

Equação Reduzida, 59

Focos, 57

Parâmetros Geométricos, 59

Reta Focal, 57

Segmento Focal, 57

Vértices, 60

## Parábola, 63

Equação reduzida, 64

Focos, 63

Reta diretriz, 63

Reta focal, 63

Vértice, 65

## Plano

Equação Paramétrica, 100

Vetor Normal, 100

## Reta

Equações Paramétricas, 105

Equações Simétricas, 106

Vetor Diretor, 105

## Reta no Plano

Equação Cartesiana, 35

Equação Paramétrica, 33

Equação Simétrica, 34

Equação Vetorial, 31

Vetor diretor, 31

## Retas

Reversas, 106

Concorrentes, 106

Paralelas, 106

## Translação de Eixos, 68

## Vetores

Ângulo, 19, 89

Ortogonais, 20, 89

Produto Escalar, 20, 89

Projeção ortogonal, 25

## Vetores no Espaço

Produto Misto, 97

Produto Vetorial, 93