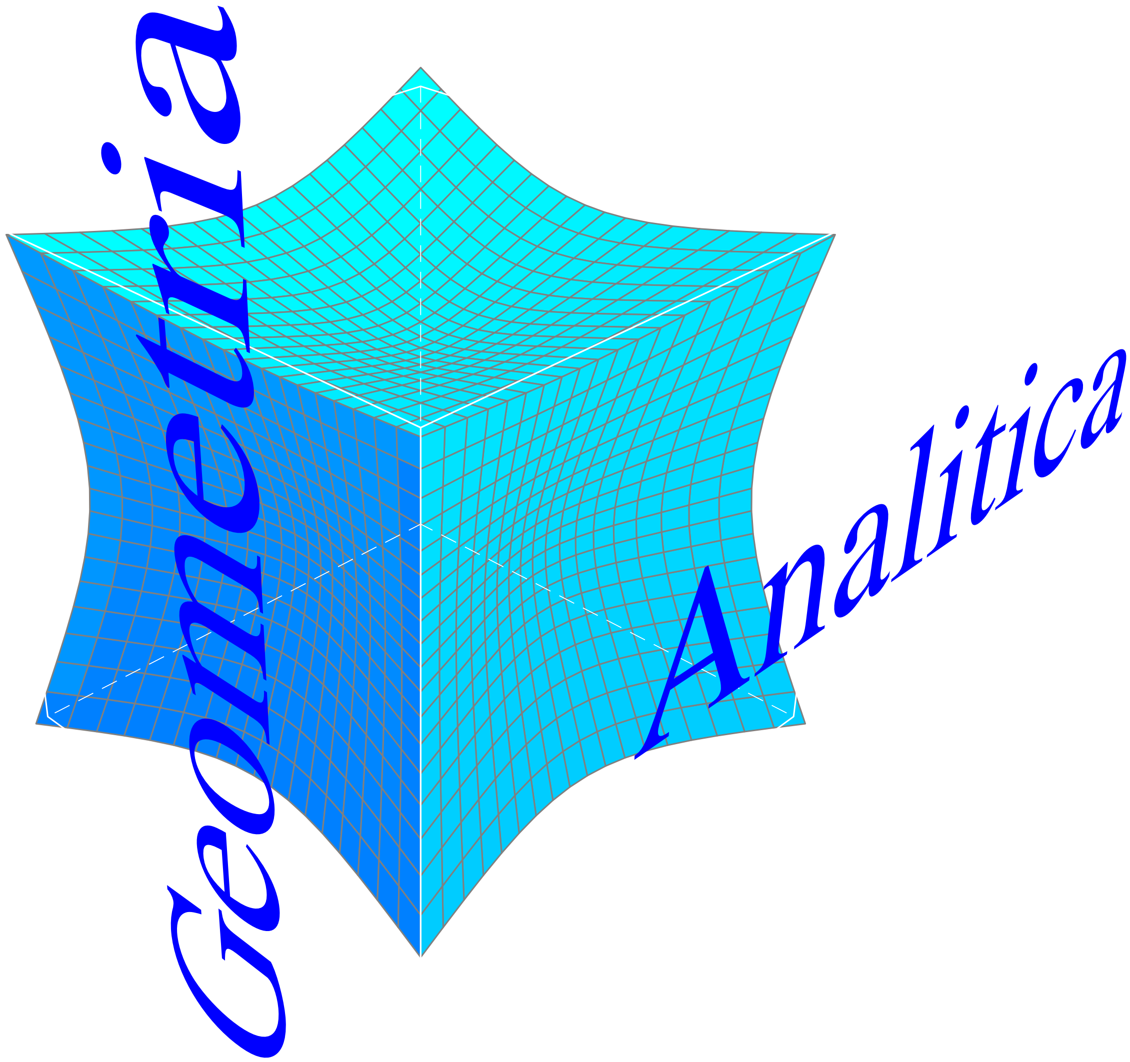


Notas de Aula 1/2015[1]

José Antônio O. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília - UnB

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

VETORES

1.1 Introdução

A Geometria Analítica é um método para tratar com problemas da Geometria. No caso do plano, tal método consiste em associar os pontos à pares ordenados de números reais, permitindo assim representar curvas do plano por equações em duas variáveis, de modo que a cada curva está associado uma equação, bem definida, do tipo $f(x, y) = 0$ e a cada equação deste tipo associa-se uma curva bem definida no plano. Assim, as propriedades geométricas das curvas podem ser determinadas à partir de informações algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$.

Por exemplo, a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ representa uma curva em $\mathbb{R}^2$. Nessa forma, não podemos dizer exatamente qual curva está equação representa. Mas utilizando-se de resultados da Álgebra Linear, podemos reescrever tal equação com

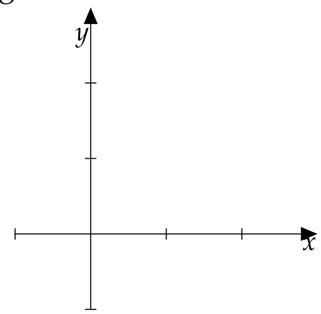
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é uma equação de uma elipse.

1.2 Plano Cartesiano

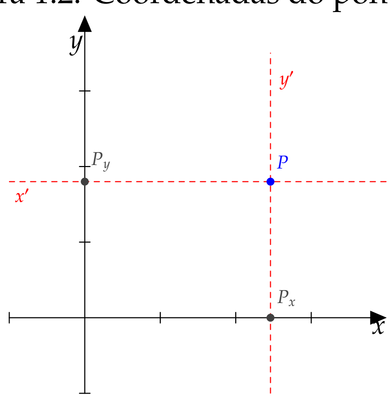
Vamos considerar o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y como abaixo:

Figura 1.1: Plano cartesiano



Seja P um ponto qualquer do plano. Por P podemos traçar uma única reta x' paralela à reta x e uma única reta y' paralela à reta y. Estas retas interceptam x e y em pontos P_x e P_y, respectivamente. Seja α o número real correspondente a P_x e β o número real correspondente a P_y. Estes dois números determinam o ponto P, isto é, conhecendo α e β podemos traças as retas x' e y'. O ponto P é a interseção destas retas. Os números α e β são chamados **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente. Eles constituem as **coordenadas** de P.

Figura 1.2: Coordenadas do ponto P

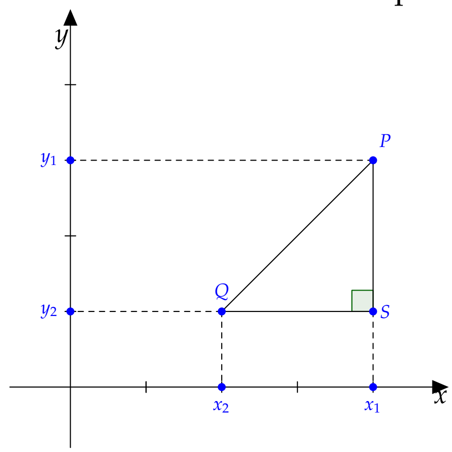


Denotaremos assim o ponto P por

$$P(\alpha, \beta).$$

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos do plano. A partir de P e Q podemos construir o triângulo retângulo PQS como abaixo:

Figura 1.3: Distância entre dois pontos



Assim sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este número é chamado **distância** de P a Q e é indicado por $d(P, Q)$, isto é, por definição

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Dizemos que dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

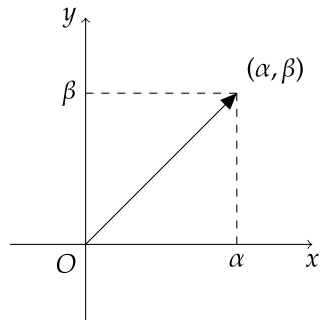
1.3 Vetores em $\mathbb{R}^2$

Sabemos que a cada par ordenado (α, β) corresponde um ponto do plano. Assim se $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ podemos associar uma seta com origem em $O(0, 0)$ e extremidade em (α, β) como na figura abaixo:

Assim o par ordenado (α, β) pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando representamos (α, β) por uma seta, podemos associar a este para uma **direção**, um **sentido** e um **módulo**. A direção e o sentido do par (α, β) são respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. O **módulo** do par (α, β) é o número

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Figura 1.4: Seta representando o ponto (α, β).



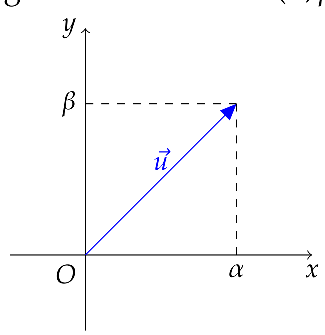
que é o comprimento da seta.

Em geral, um objeto ao qual podemos associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um **vetor**. Denotaremos um vetor de extremidade em um ponto (α, β) por

$$\vec{u} = (\alpha, \beta).$$

Esta notação significa que $\vec{u}$ é a seta com início no ponto $O(0,0)$ e final no ponto (α, β).

Figura 1.5: Vetor $\vec{u} = (\alpha, \beta)$.



Por exemplo, $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$ são representados graficamente por:

O vetor que tem início e fim no ponto $(0, 0)$ é chamado de **vetor nulo** e será denotado por

$$\vec{O} = (0, 0).$$

Podemos também representar um vetor por uma seta que não parte da origem. Por exemplo, os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ determinam o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Figura 1.6: Vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$.

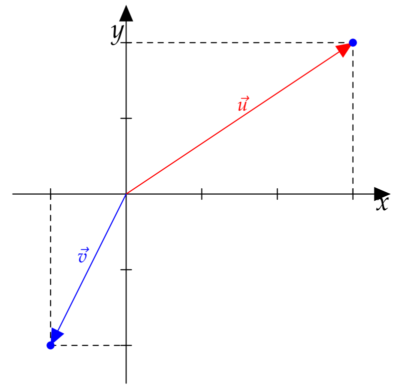
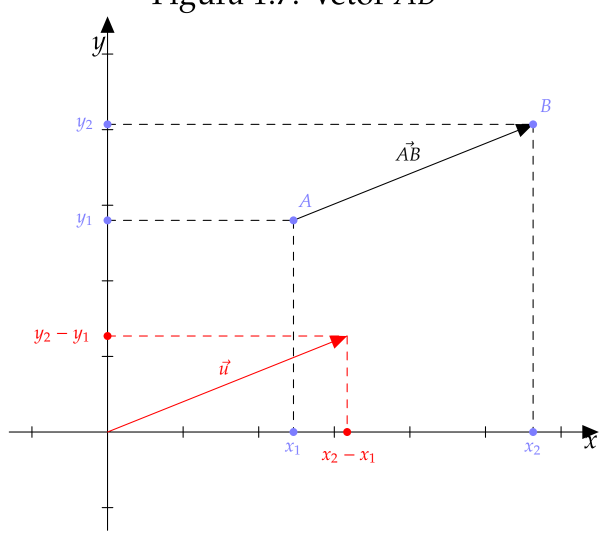


Figura 1.7: Vetor $\vec{AB}$



Assim a seta que representa o vetor $\vec{AB}$ e a seta que representa o vetor $\vec{u}$, que tem início na origem e extremidade no ponto (x_2-x_1, y_2-y_1), têm o mesmo módulo, direção e sentido que $\vec{AB}$. Assim vamos representar o vetor $\vec{AB}$ pela forma que for mais conveniente.

Definição 1.1. *Seja $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor. A **norma** de $\vec{u}$, denotada por $\|\vec{u}\|$, é dada por*

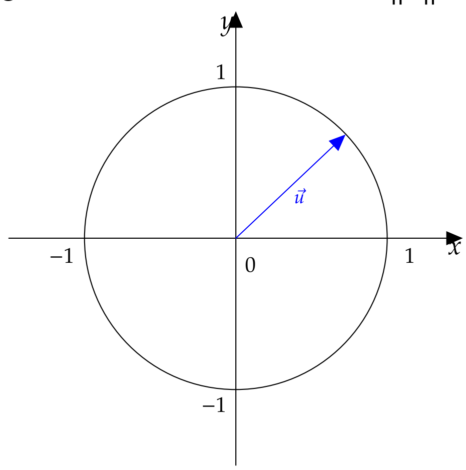
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Um vetor $\vec{u}$ tal que

$$\|\vec{u}\| = 1$$

é chamado de **vetor unitário**.

Figura 1.8: Vetores unitários: $\left\|\vec{u}\right\| = 1$



Definição 1.2. *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **paralelos** (ou **colineares**) se a restas que contém estes vetores são paralelas(podendo ser coincidentes).Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos, escreveremos $\vec{u} \,//\, \vec{v}$. Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, mas podem ter sentidos contrários.*

1.3.1 Operações com Vetores

Definição 1.3. *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores. Então:*

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Propriedades 1.3.1. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer. As seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *[Associatividade]*

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *[Comutatividade]*

(iii) Existe um único vetor que somado a $\vec{u}$ resulta no próprio vetor $\vec{u}$:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Tal vetor é o vetor nulo. [Elementro Neutro]

Figura 1.9: Vetores paralelos

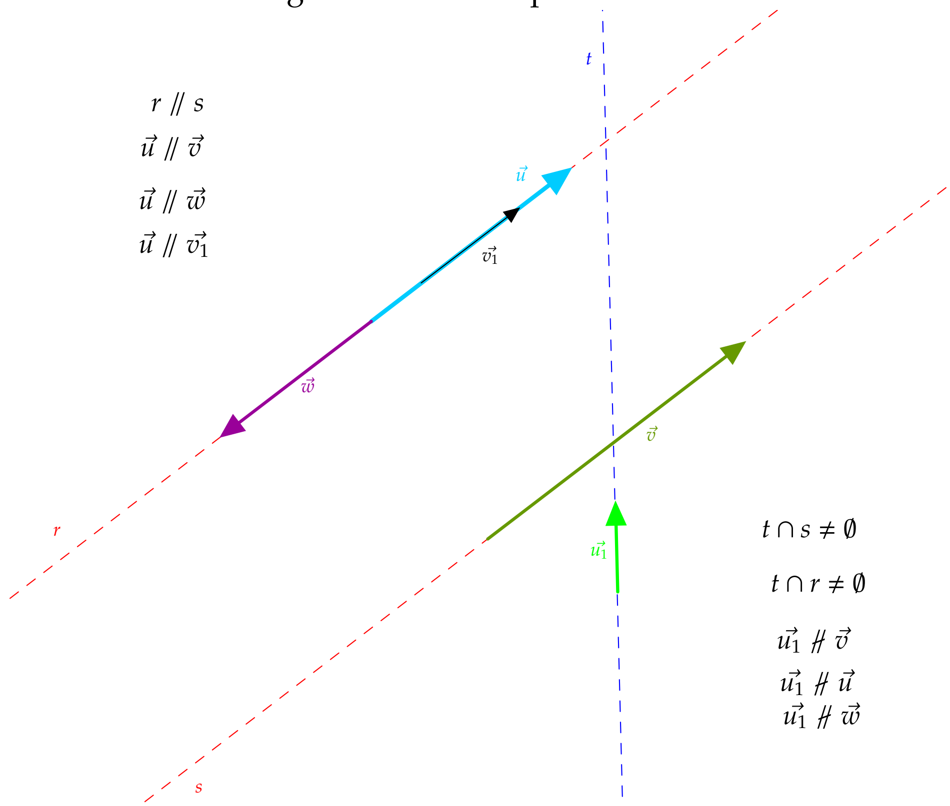
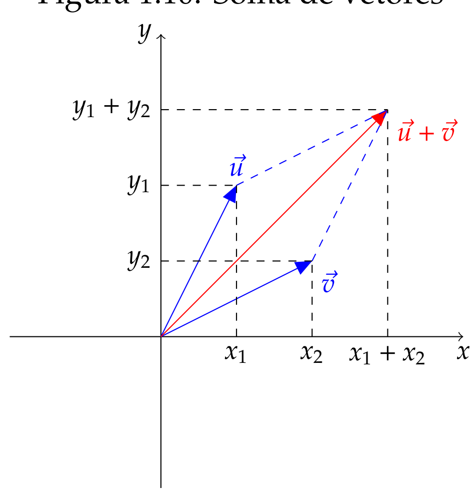


Figura 1.10: Soma de vetores



(iv) Para cada $\vec{u}$, existe um único vetor $\vec{v}$ tal que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} = \vec{v} + \vec{u}.$$

O vetor $\vec{v}$ é o vetor oposto de $\vec{u}$. [Elemento Oposto]

Prova: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$. Temos

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + \vec{w} = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \vec{u} + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{v} + \vec{u}$.

(iii) Usando o item (A2) basta verificar que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. De fato

$$\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = \vec{u}.$$

(iv) Novamente, pelo item (A2) basta verificar que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. De fato, dado $\vec{u} = (x_1, y_1)$, tomando $\vec{v} = (-x_1, -y_1)$ temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0) = \vec{0}.$$

Portanto as propriedades são verdadeiras. $\diamond$

Definição 1.4. *O vetor $\vec{v}$ do item (iv) da Definição 1.3.1 é chamado de **vetor oposto**.*

Definição 1.5. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores. Então:*

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

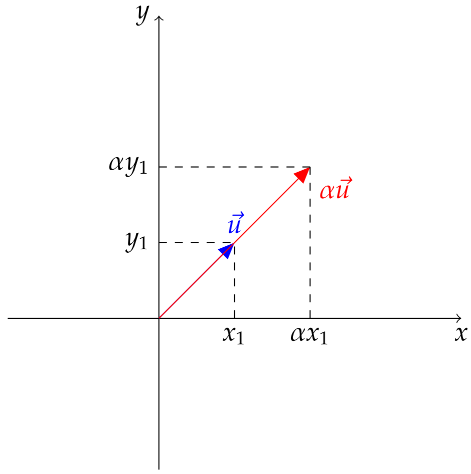
Observação 1.5.1. 1. *Sejam $\vec{u}$ um vetor não-nulo e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então $\vec{u} \mathbin{//} \lambda\vec{u}$. Além disso, se $\lambda > 0$, então $\vec{u}$ e $\lambda\vec{u}$ são de mesmo sentido, e se $\lambda < 0$ então $\vec{u}$ e $\lambda\vec{u}$ são de sentidos contrários.*

2. *Quando $\lambda = -1$, o vetor $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$ é exatamente o vetor oposto de $\vec{u}$. Note que $-\vec{u}$ tem a mesma direção que $\vec{u}$, mas sentido contrário.*

Propriedades 1.5.1. *Quaisquer que sejam os números reais α e β e quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ valem as igualdades:*

(i) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

Figura 1.11: Multiplicação por escalar



(ii) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

(iii) $1\vec{u} = \vec{u}$;

(iv) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$.

Prova: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. Temos:

(i) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha(x_1+x_2, y_1+y_2) = (\alpha(x_1+x_2), \alpha(y_1+y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1)+(\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

(ii) $(\alpha+\beta)\vec{u} = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1) = (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha y_1+\beta y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)+(\beta x_1, \beta y_1) = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.

(iii) $1\vec{u} = 1(x_1, y_1) = (x_1, y_1) = \vec{u}$.

(iv) Primeiro temos:

$$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1)) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = (\alpha\beta)\vec{u}.$$

Agora,

$$(\alpha\beta)\vec{u} = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = ((\beta\alpha)x_1, (\beta\alpha)y_1) = (\beta(\alpha x_1), \beta(\alpha y_1)) = \beta(\alpha\vec{u}).$$

Logo $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$.

Portanto as propriedades são válidas. $\diamond$

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de $\vec{u}$ como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos 1.5.1. *Seja $\vec{u} = (-2, 3)$ um vetor. Então*

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Proposição 1.5.1. *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor em $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\left\|\vec{u}\right\| \neq 0$.

(ii) $\left\|\vec{u}\right\| = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.

(iii) $\left\|\alpha\vec{u}\right\| = |\alpha| \left\|\vec{u}\right\|$.

Prova:

(i) Se $\vec{u} \neq (0, 0) = \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$. Daí

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0.$$

(ii) $\left\|\vec{u}\right\| = 0$ se, e somente se, $x_1^2 + y_1^2 = 0$, isto é, $x_1 = y_1 = 0$. Portanto $\vec{u} = \vec{0}$.

(iii) $\left\|\alpha\vec{u}\right\| = \left\|\alpha(x_1, y_1)\right\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)} = |\alpha| \left\|\vec{u}\right\|$.

$\diamond$

Observação 1.5.2. *Dado um vetor não nulo $\vec{u}$ o vetor*

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

é um vetor unitário na direção de $\vec{u}$ pois

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right\| = \frac{1}{\left\|\vec{u}\right\|}\left\|\vec{u}\right\| = 1.$$

Definição 1.6. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Então $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm normas iguais, são de mesma direção e de mesmo sentido.*

Proposição 1.6.1. *Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existe um escalar λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (consequentemente, $\lambda \neq 0$ e assim $\vec{v} = \vec{u}/\lambda$).*

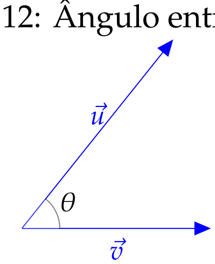
Prova: Se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, então $\vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v}$. Agora, suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido, o caso em que têm sentidos contrários fica como exercício.

Seja
$$\lambda = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}.$$
Vamos mostrar que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Inicialmente, sabemos que $\vec{v}$ e $\lambda\vec{v}$ são paralelos e têm o mesmo sentido pois $\lambda > 0$. Agora
$$\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.$$
Portanto $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ tem a mesma direção, o mesmo sentido e normas iguais, logo $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, como queríamos. $\diamond$

1.3.2 Ângulo entre vetores e produto interno

Definição 1.7. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. O **ângulo** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pelo ângulo θ determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são representados com a mesma origem.*

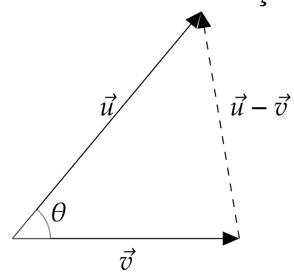
Figura 1.12: Ângulo entre vetores



Definição 1.8. *Quando o ângulo θ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto, isto é, $\theta = \pi/2$, ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

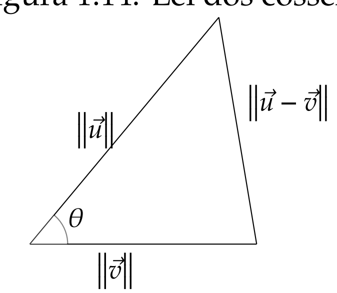
Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e θ o ângulo entre eles.

Figura 1.13: Determinação de θ



Aplicando a Lei dos cosssenos no triângulo abaixo temos

Figura 1.14: Lei dos cossenos



$$\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta. \tag{1.1}$$

Definição 1.9. *O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que:*

1. *Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

2. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta. \tag{1.2}$$

Proposição 1.9.1. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

1. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos, então*
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

2. *Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$,*
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. *Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

Prova:

1. Basta isolar $\cos\theta$ na Definição 1.2.

2. Se $\vec{u} = \vec{0}$, então a igualdade é verdadeira. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então o ângulo entre o vetor $\vec{u}$ e ele mesmo é $\theta = 0$, logo
$$1 = \cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{u}\|}.$$
Logo
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é o vetor nulo, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Suponha $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\theta = \pi/2$ e daí $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Agora, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então
$$0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$
Logo devemos ter $\cos\theta = 0$, isto é, $\theta = \pi/2$. Portanto $\vec{u} \perp \vec{v}$, como queríamos.

$\diamond$

Agora, como podemos encontrar o produto interno sem necessitar de determinar o ângulo θ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Substituindo o produto interno na equação (1.1) temos
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$
isto é,
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \tag{1.3}$$

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então podemos reescrever (1.3) como

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - \left\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\right\|^2) \\ &= \frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2] \\ &= x_1x_2 + y_1y_2.\end{aligned}$$

Abacamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *O produto interno de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ é dado por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplos 1.9.1. *1. Sejam $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0)$. Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Solução: *Temos*

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1,1), (1,0) \rangle = 2 + 0 = 1 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \ \|\vec{v}\| = \sqrt{1} \\ \cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Assim, $\theta = \pi/4$.

2. Encontre um vetor $\vec{u} = (x, y)$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1)$ e tal que $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$, onde $\vec{w} = (1, 1)$.

Solução: *Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ obtemos o sistema*

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -1/5$ e $y = -4/5$. Logo $\vec{u} = (-1/5, -4/5)$.

Proposição 1.9.2. *Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ e qualquer que seja o número real λ temos*

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

(ii) $\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle + \langle \vec{v},\vec{w}\rangle$

(iii) $\langle (\lambda\vec{u}),\vec{v}\rangle = \langle \vec{u},(\lambda\vec{v})\rangle = \lambda\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$

(iv) $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},\vec{u}\rangle$

(v) *Se* $\vec{u}\neq\vec{0}$*, então* $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle > 0$.

Prova:

(i)

$$\begin{aligned}\langle \vec{u},(\vec{v}+\vec{w})\rangle &= \langle \vec{u},(x_2+x_3,y_2+y_3)\rangle = x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3) = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{u},\vec{w}\rangle\end{aligned}$$

(ii)

$$\langle \vec{u},(\lambda\vec{v})\rangle = \langle \vec{u},(\lambda x_2,\lambda y_2)\rangle = x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2) = (\lambda x_1)y_2+(\lambda y_1)y_2 = \langle (\lambda\vec{u}),\vec{v}\rangle$$
$$\langle \vec{u},(\lambda\vec{v})\rangle = \langle \vec{u},(\lambda x_2,\lambda y_2)\rangle = x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1y_2)+\lambda(y_1y_2) = \lambda\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$$

(iii) $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = x_1x_2+y_1y_2 = x_2x_1+y_2y_1 = \langle \vec{v},\vec{u}\rangle$

(iv) Se $\vec{u}\neq\vec{0}$, então $x_1\neq 0$ ou $y_1\neq 0$. Daí $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = x_1^2+y_1^2 > 0$, como queríamos.

$\diamond$

Observação 1.9.1. 1. *As propriedades (i) e (iii) Proposição 1.9.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores e escalares:*

$$\langle \vec{u},(\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\cdots+\lambda_n\vec{v_n})\rangle = \lambda_1\langle \vec{u},\vec{v_1}\rangle+\lambda_2\langle \vec{u},\vec{v_2}\rangle+\cdots+\lambda_n\langle \vec{u},\vec{v_n}\rangle.$$

2. *Na igualdade* $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle$ *não podemos concluir que* $\vec{v}=\vec{w}$*. Por exemplo, para* $\vec{u}=(1,0)$, $\vec{v}=(2,1)$ *e* $\vec{w}=(2,-5)$ *temos* $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle$ *e no entanto* $\vec{v}\neq\vec{w}$*. Mas podemos concluir que* $\vec{u}\perp(\vec{v}-\vec{w})$.

3. *De* $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0$ *não podemos concluir que* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$*. Por exemplo, para* $\vec{u}=(2,1)$ *e* $\vec{v}=(-2,4)$ *temos* $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0$ *e no entanto* $\vec{u}\neq\vec{0}$ *e* $\vec{v}\neq\vec{0}$.

Exemplos 1.9.2. *Calcule o ângulo α entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, sabendo que $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{5}$, $\left\|\vec{v}\right\| = 1$ e que o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$.*

Solução: *Temos*

$$\cos\alpha = \frac{\langle(\vec{u}+\vec{v}),(\vec{u}-\vec{v})\rangle}{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|} = \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}\rangle - \langle\vec{v},\vec{v}\rangle}{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|} = \frac{\left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2}{\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|} = \frac{4}{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|}.$$

Agora

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 &= \langle(\vec{u}+\vec{v}),(\vec{u}+\vec{v})\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 6 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\\ \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 &= \langle(\vec{u}-\vec{v}),(\vec{u}-\vec{v})\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle - 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 6 - 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta = \sqrt{5}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e então

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| &= \sqrt{6+\sqrt{10}}\\ \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\| &= \sqrt{6-\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

e então $\theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right)$.

Proposição 1.9.3. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores.*

1. $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$ *[Desigualdade de Scharwz]*

2. $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ *[Desigualdade Triangular]*

Prova:

1. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ a desigualdade é verdadeira. Suponha então que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Temos

$$0 \leq |\cos\theta| \leq 1$$

e multiplicando essa inequação por $\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$ obtemos

$$0 \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|,$$

isto é,

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$$

como queríamos.

2. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então a desigualdade é verdadeira. Suponha então que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Temos

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 &= \langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \left\|\vec{v}\right\|^2 \\ &\leq \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\mid\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\mid + \left\|\vec{v}\right\|^2.\end{aligned}$$

Agora, usando o item (a) temos

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 \leq \left\|\vec{u}\right\| + 2\mid\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\mid\left\|\vec{v}\right\|^2 \leq \left\|\vec{u}\right\| + 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|^2 = (\left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|)^2.$$

Portanto

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|.$$

◊

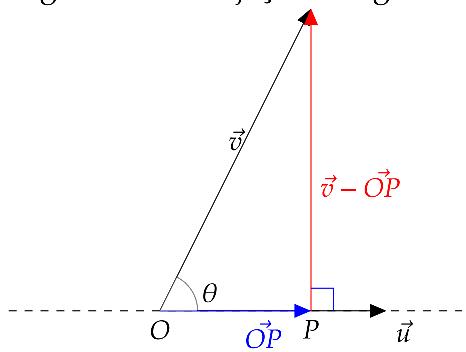
1.3.3 Projeção de Vetores

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores não nulos. Suponha que o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é tal que $0 < \theta < \pi/2$.

O vetor $\vec{OP}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{PA}$ é ortogonal ao vetor $\vec{u}$.

Definição 1.10. *Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. Dado qualquer vetor $\vec{v}$, o vetor $\vec{OP}$ é chamado de* ***projeção ortogonal*** *de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, e é indicado por* $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ *se satisfaz as seguintes condições:*

Figura 1.15: Projeção ortogonal



1. $\vec{OP} \parallel \vec{u}$

2. $(\vec{v} - \vec{OP}) \perp \vec{u}$.

Podemos também escrever

1. $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \parallel \vec{u}$

2. $(\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}) \perp \vec{u}$.

No caso acima temos

$$\cos\theta = \frac{\left\|\vec{OP}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|}$$

e então $\left\|\vec{OP}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| \cos\theta$. Mas

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|}$$

e assim podemos escrever

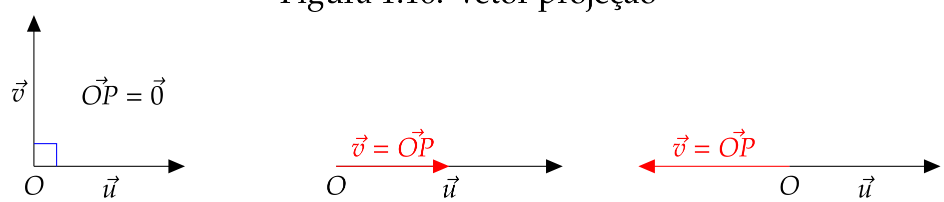
$$\left\|\vec{OP}\right\| = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$

Além disso, como $\vec{OP}$ é paralelo à $\vec{u}$ e de mesmo sentido, devemos ter $\vec{OP} = \lambda\vec{u}$ com $\lambda > 0$. Daí $\lambda = \left\|\vec{OP}\right\| / \left\|\vec{u}\right\|$ e então

$$\vec{OP} = \frac{||OP||}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\vec{u}.$$

Esta construção só é válida no caso em que o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ satisfaz $0 < \theta < \pi/2$. Nos casos não podemos usar a construção envolvendo o ângulo θ entre os vetores.

Figura 1.16: Vetor projeção



Proposição 1.10.1. *Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe e é única a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Sua expressão em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por*

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

e sua norma é dada por

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}.$$

Prova: Seja $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$. Da Definição 1.10, dizer que $\vec{p}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ significa que $\vec{p}$ é um vetor tal que $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$.

Como $\vec{p} \parallel \vec{u}$, então pela Proposição 1.6.1 existe um escalar λ tal que $\vec{p} = \lambda\vec{u}$. Assim qualquer vetor do tipo $\lambda\vec{u}$ é um candidato para ser a projeção ortogonal. Mas, para que $\vec{p}$ seja a projeção ortogonal, ele deve satisfazer $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$. Logo

$$(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow \langle (\vec{v} - \vec{p}), \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Assim existe um único λ que satisfaz a condição $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$, e daí o vetor $\vec{p}$ é único. Portanto

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{p} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

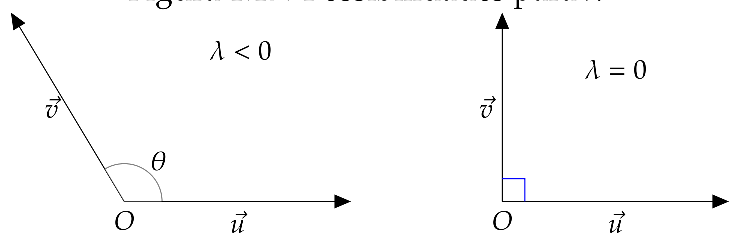
Além disso

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

como queríamos. $\diamond$

Observação 1.10.1. *O escalar λ encontrado na proposição anterior pode ser negativo ou zero. Ele será negativo quando $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ e será zero quando $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Figura 1.17: Possibilidades para λ



Exemplos 1.10.1. 1. *Encontre a projeção ortogonal do vetor* $\vec{v} = (4, -1)$ *sobre o vetor* $\vec{u} = (2, 1)$.

Solução: *Temos*

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Agora

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 7$$
$$\|\vec{u}\|^2 = 5$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{7}{5}(2, 1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

Por outro lado,

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Mas

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 7$$
$$\|\vec{v}\|^2 = 17$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{7}{17}(4, -1) = \left(\frac{28}{17}, \frac{-7}{17}\right).$$

2. *Considere um triângulo ABC onde* $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ *e* $C(1, 6)$.

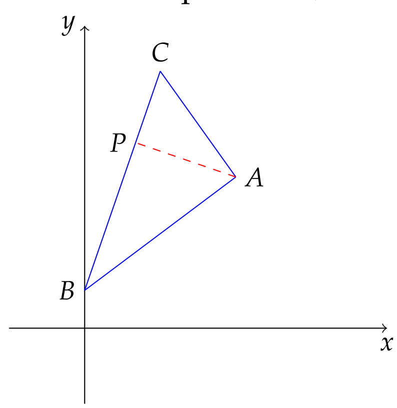
   (a) *Verifique que ABC é um triângulo retângulo em A.*

(b) *Calcule a projeção do cateto BA sobre a hipotenusa BC.*

(c) *Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.*

Solução: *Considere o triângulo abaixo*

Figura 1.18: Exemplo 1.10.1, exercício 2



(a) *Basta verificar que* $\vec{AB} \perp \vec{AC}$. *Assim como* $\vec{AB} = (-3,-2)$ *e* $\vec{AC} = (-2,3)$ *temos*

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = (-3)(-2) + (-2)3 = 0.$$

Logo ABC é um triângulo retângulo.

(b) *Temos* $\vec{BA} = (3,2)$ *e* $\vec{BC} = (1,5)$. *Daí*

$$\mathrm{proj}_{\vec{BC}}\vec{BA} = \frac{\langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle}{\left\| \vec{BC} \right\|^2}\vec{BC} = \frac{\langle (3,2),(1,5) \rangle}{\|(1,5)\|^2}(1,5) = \frac{13}{26}(1,5).$$

Assim $\mathrm{proj}_{\vec{BC}}\vec{BA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(c) *Seja* $P(x_1, y_1)$ *o pé da altura do triângulo ABC relativo ao vértice A. Então*

$$\vec{BP} = \mathrm{proj}_{\vec{BC}}\vec{BA}$$
$$(x_1, y_1 - 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Logo $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

CAPÍTULO 2

RETA NO PLANO

2.1 Equações da Reta

Seja r uma reta do plano. Dados dois pontos A e B em r podemos considerar o vetor $\vec{u} = \vec{AB}$. Por definição diremos que a reta r e o vetor $\vec{u}$ são paralelos. Assim temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Qualquer vetor não nulo e paralelo a uma dada reta r é chamado de* ***vetor diretor*** *de r.*

Seja $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e seja A um ponto pertencente à reta r. Assim um ponto X pertence a reta r se, e somente se, $\vec{AX} \parallel \vec{u}$.

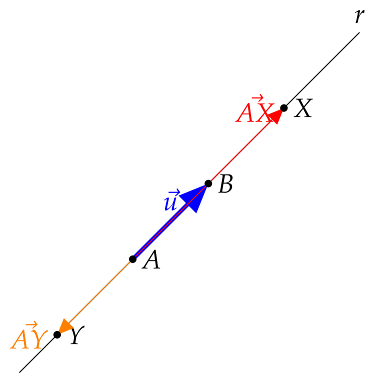
Ou seja, se e somente se, existe um número real λ tal que

$$\vec{AX} = \lambda\vec{u}. \tag{2.1}$$

Assim para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fica definido um ponto X na reta r e se X é um ponto da reta r, então existe um número real λ tal que $\vec{AX} = \lambda\vec{u}$.

Definição 2.2. *A equação (2.1) é chamada de* ***equação vetorial da reta*** *r ou* ***equação da reta*** *r* ***na forma vetorial****.*

Figura 2.1: Equação vetorial da reta



Exemplos 2.2.1. *Seja r uma reta passando pelos pontos $A(1,2)$ e $B(-1,3)$. Determine sua equação vetorial.*

Solução: *Um vetor diretor da reta r pode ser tomado como sendo $\vec{u} = \vec{AB} = (-2,1)$. Assim a equação vetorial de r será:*

$$\vec{AX} = \lambda\vec{u} = \lambda(-2,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podemos também tomar como vetor diretor de r o vetor $\vec{v} = \vec{BA} = (2,-1)$. Daí a equação vetorial de r será

$$\vec{AX} = \alpha\vec{v} = \alpha(2,-1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.2.1. *Como o ponto e o vetor diretor de uma reta r são escolhidos arbitrariamente, existem infinitas equações vetorias para uma mesma reta r. Por exemplo, se A e B são pontos distintos de uma reta r, então $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$ são vetores diretores distintos de r e portanto temos as equações vetoriais*

$$\vec{AX} = \lambda\vec{AB}$$
$$\vec{AX} = \alpha\vec{BA}.$$

Na verdade, qualquer vetor múltiplo do vetor $\vec{AB}$ pode ser tomado como vetor diretor de r.

Agora, seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor diretor de uma reta r. Dado um ponto $A = (x_0, y_0)$ de r o ponto $X = (x,y)$ pertence a reta r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AX} = \lambda\vec{u}$$
$$(x - x_0, y - y_0) = (\lambda a, \lambda b).$$

Assim a reta r pode ser descrita pelas equações

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ x = y_0 + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Definição 2.3. *O sistema de equações (2.2) é chamado* ***sistema de equações paramétricas da reta*** *r ou* ***sistema de equações da reta*** *r* ***na forma paramétrica****.*

Exemplos 2.3.1. 1. *O sistema de equações*

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

define uma reta r que passa pelo ponto $A(1,2)$ e que possui vetor diretor $\vec{u} = (2,-3)$.

2. *Seja r a reta dada pelas equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

O ponto $(11,13)$ pertence a r? E o ponto $(5,6)$?

Solução: *Para que o ponto $(11,13)$ pertença a reta r é preciso que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que*

$$11 = 2 + 3t$$
$$13 = 1 + 4t.$$

Cuja solução é $t = 3$. Logo o ponto $(11,13)$ pertence a reta r.

Para que o ponto $(5,6)$ pertença a reta r é preciso que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$5 = 2 + 3t$$
$$6 = 1 + 4t.$$

Resolvendo, obtemos $t = 1$ e $t = 5/4$. Logo o ponto $(5,6)$ não pertence a reta r.

Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$, onde $ab \neq 0$ e que passa pelo ponto (x_0, y_0). Sabemos que sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \end{cases}$$

Isolando λ nas duas equações encontramos

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{b},$$

isto é, a equação

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \tag{2.3}$$

determina se um ponto pertence a reta r ou não.

Definição 2.4. *A equação (2.3) é chamada de* ***sistema de equações da reta*** *r* ***na forma simétrica*** *ou por abuso de linguagem,* ***equações da reta*** *r* ***na forma simétrica****.*

Exemplos 2.4.1. *Encontre a equação simétrica da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$. O ponto $(0, 5/2)$ está na reta r? E o ponto $(1, 2)$?*

Solução: *Um vetor diretor para a reta r é dado por $\vec{u} = \vec{AB} = (4, 2)$. Assim usando o ponto A a equação simétrica de r é*

$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{2}.$$

Como

$$\frac{0 + 1}{4} = \frac{\frac{5}{2} - 2}{2}$$

então o ponto $(0, 5/2)$ está na reta r. Agora como

$$\frac{1 + 1}{4} \neq \frac{2 - 2}{2}$$

o ponto $(1, 2)$ não está na reta r.

Observação 2.4.1. 1. *Para que uma equação de uma reta r esteja na forma (2.2) é obrigatório que o coeficente de x e y sejam 1. Assim, por exemplo a equação na forma*

$$\begin{cases} 2x = 1 - 3\lambda \\ -y = 2 + \lambda \end{cases}$$

não será considerada como uma equação paramética de uma reta. Do mesmo modo, uma equação do tipo

$$\frac{2x-7}{3} = \frac{y}{2}$$

não será considerada uma equação simétrica de uma reta r pois não está na forma (2.3).

2. *Cada tipo de equação da reta apresenta sua vantagens. A forma vetorial descreve uma reta tanto no plano cartesiano como no espaço tridimensional e mesmo em espaços "maiores". A forma paramétrica reduz o número de incógnitas com as quais precisamos trabalhar. Neste tipo de equação lidamos com somente uma incógnita em vez de duas. Já a forma simétrica exibe qual a relação que as coordenadas dos pontos de uma reta devem satisfazer entre si.*

Seja r uma reta que contém o ponto (x_0, y_0) e com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$. Sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a & (2.4) \\ y = y_0 + \lambda b. & (2.5) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2.4) por b e a equação (2.5) por a obtemos

$$bx = bx_0 + \lambda ab \tag{2.6}$$

$$ay = ay_0 + \lambda ab. \tag{2.7}$$

Fazendo (2.7) - (2.6) obtemos

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

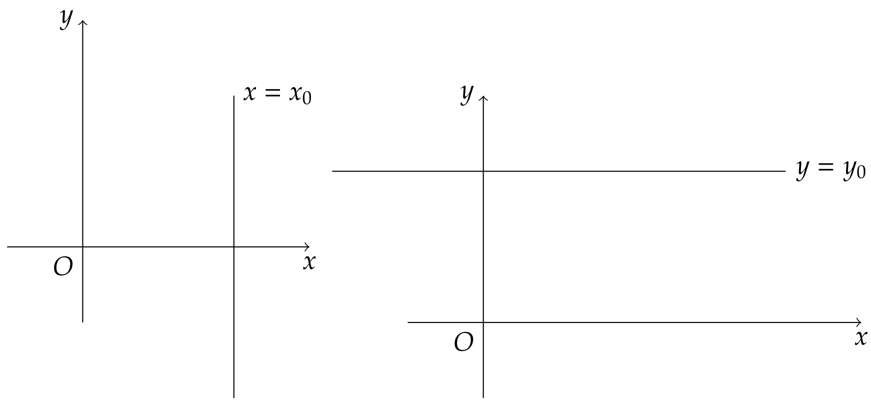
Agora note que $ay_0 - bx_0$ é uma constante. Assim fazendo, $c = ay_0 - bx_0$ podemos escrever

$$ay - bx = c \tag{2.8}$$

que é chamada de **equação cartesiana da reta** r.

Observe que se o vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$ da reta r é tal que $a = 0$, obtemos a equação $x = x_0$ e a reta r é paralela ao eixo y. Caso $b = 0$, obtemos $y = y_0$ e a reta é paralela ao eixo x.

Figura 2.2: Retas paralelas aos eixos



Se $a \neq 0$, então podemos dividir a equação (2.8) por a obtendo

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo $m = b/a$ e $k = c/a$ temos a equação

$$y = mx + k,$$

onde $m = b/a = \operatorname{tg}\theta$.

Note que o vetor $\vec{v} = (1, m)$ é paralelo à reta r de equação $y = mx + k$. De fato,

$$\vec{v} = (1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}(a, b) = \frac{1}{a}\vec{u}.$$

Exemplos 2.4.2. *Determine as equações paramétricas e cartesianas da reta r definida pelos pontos $A(1, 5)$ e $B(2, 7)$.*

Solução: *Um vetor diretor de r é dado por $\vec{u} = \vec{AB} = (1, 2)$. Assim $m = b/a$ onde $\vec{u} = (a, b)$ vale $m = 2$. Desse modo temos*

$$y = 2x + k.$$

Como o ponto $A = (1, 5)$ pertence a reta r devemos ter

$$5 = 2(1) + k$$

donde $k = 3$. Portanto a equação cartesiana de r será

$$y = 2x + 3.$$

A equação paramétrica será

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto A. As equações paramétricas de r também podem ser expressas como

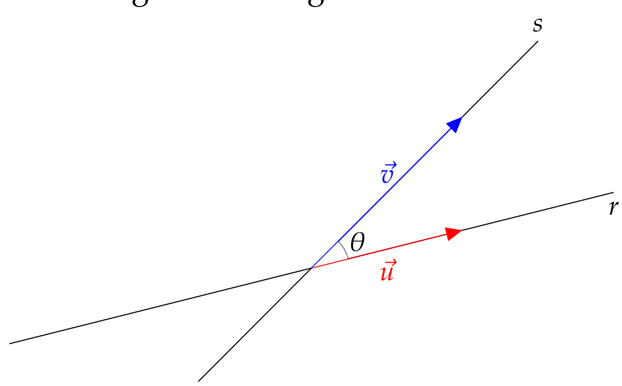
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto B.

2.2 Ângulo entre retas

Sejam r uma reta passando pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$ e s uma reta passando pelo ponto $B(x_2, y_2)$ e com vetor diretor $\vec{v} = (c, d)$. O **ângulo entre duas retas** r e s é definido como o menor ângulo entre o vetor diretor $\vec{u}$ de r e o vetor diretor $\vec{v}$ de s.

Figura 2.3: Ângulo entre retas



Assim o ângulo θ entre r e s é dado por

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplos 2.4.3. *Determine o ângulo entre as retas r e s cujas equações são:*

$$r : y = 2x - 2$$

$$s : y = -x + 4.$$

Solução: *Temos $m = b/a$, onde a e b são as coordenadas do vetor diretor da reta em questão. Assim podemos tomar $\vec{u} = (1,2)$ como um vetor diretor de r e $\vec{v} = (-1,1)$ como um vetor diretor de s. Daí*

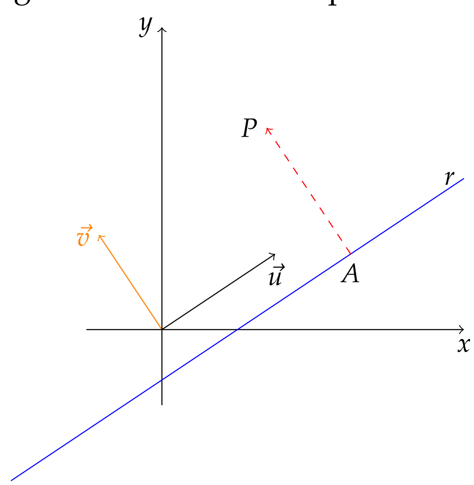
$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Logo $\theta = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

2.3 Distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r de equação $y = mx + k$ é definida como sendo a distância de P ao ponto $A(x_1, y_1)$, onde A é o pé da perpendicular à reta r passando pelo ponto P. Agora note que o vetor $\vec{u} = (1, m)$ é paralelo à reta r. Além disso, o vetor

Figura 2.4: Distância de ponto a reta



$\vec{v} = (-m, 1)$ é tal que $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, isto é, $\vec{u} \perp \vec{v}$. Portanto, $\vec{PA} \mathbin{/\!/} \vec{v}$ e então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{PA} = \lambda\vec{v}.$$

Logo

$$d(P,r) = \left\|\vec{AP}\right\| = \|\lambda\vec{v}\| = |\,\lambda\,|\,\|\vec{v}\| = |\,\lambda\,|\,\sqrt{m^2+1}. \tag{2.9}$$

Assim para determinarmos $d(P, r)$ basta conhecer λ. Agora,

$$\vec{PA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda(-m, 1)$$

donde

$$x_1 = x_0 - \lambda m$$
$$y_1 = y_0 + \lambda.$$

Como $A(x_1, y_1)$ pertence a reta r, devemos ter

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + k \\ y_0 + \lambda &= m(x_0 - \lambda m) + k \\ y_0 + \lambda &= mx_0 - \lambda m^2 + k \\ \lambda &= \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Substituindo λ em (2.9)

$$d(P, r) = \left| \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2} \right| \sqrt{m^2 + 1}.$$

Portanto

$$d(P, r) = \frac{|\ mx_0 + k - y_0\ |}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

é a expressão para a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ até uma reta r de equação $y = mx + k$.

Exemplos 2.4.4. *Seja r a reta de equação $y = 3x - 1$. Qual a distância do ponto $P(2, 2)$ à reta r?*

Solução:

$$d(P, r) = \frac{|\ 3(2) - 1 - 2\ |}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

CAPÍTULO 3

CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS

3.1 Equações da Circunferência

Definição 3.1. *A circunferência é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma mesma distância (denominada **raio**) de um dado ponto do plano (chamado **centro**).*

Considere uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta circunferência e seja β o ângulo formado pelos vetores $\vec{CA}$ e $\vec{CP}$, onde $A(x_0 + r, y_0)$. Assim

$$\cos\beta = \frac{\langle \vec{CA}, \vec{CP}q \rangle}{\left\|\vec{CA}\right\| \left\|\vec{CP}\right\|}.$$

Mas $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{CA} = (r, 0)$ e $\left\|\vec{CA}\right\| = \left\|\vec{CP}\right\| = r$, então

$$\cos\beta = \frac{(x - x_0)r}{r^2} = \frac{x - x_0}{r},$$

isto é,

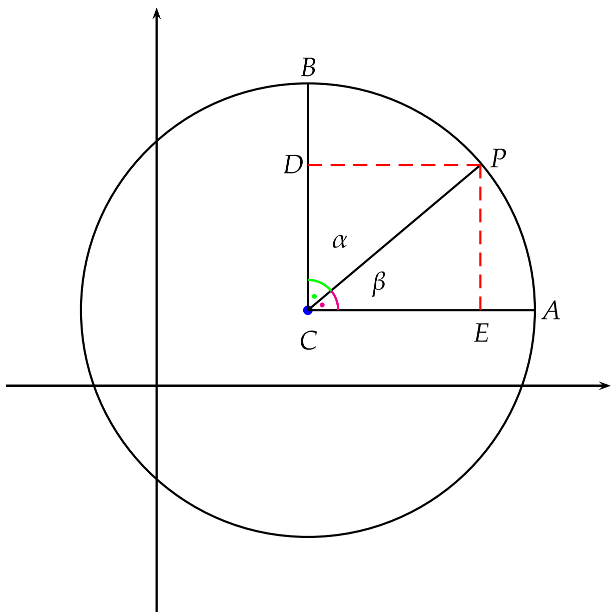
$$x = x_0 + r\cos\beta \tag{3.1}$$

Agora, para os vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$, onde $B(x_0, y_0 + r)$ temos $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{CB} = (0, r)$

e $\left\|\vec{CA}\right\| = \left\|\vec{CB}\right\| = r$, então

$$\cos\alpha = \frac{y - y_0}{r}. \tag{3.2}$$

Figura 3.1: Circunferência



Na Figura 3.1, considere o pé da perpendicular ao segmento CA passando por P e denote esse ponto por E. Agora, considere o pé da perpendicular ao segmento CB passando por P e denote esse ponto por D. Então os segmentos CD e EP têm o mesmo comprimento k. Daí

$$\cos\alpha = \frac{k}{r} = \operatorname{sen}\beta. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.2) obtemos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{y - y_0}{r},$$

isto é,

$$y = y_0 + r\operatorname{sen}\beta. \tag{3.4}$$

Por outro lado, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz as equações (3.1) e (3.4), então

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\beta + r^2\operatorname{sen}^2\beta} = r$$

e então o ponto P pertence à circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r.

Definição 3.2. *As equações*

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\beta \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi]$$

são chamadas ***equações paramétricas*** *da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r.*

Seja C uma circunferência com equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\beta \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi].$$

Podemos escrever

$$x - x_0 = r\cos\beta$$
$$y - y_0 = r\,\mathrm{sen}\,\beta.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados

$$(x - x_0)^2 = r^2\cos^2\beta$$
$$(y - y_0)^2 = r^2\mathrm{sen}^2\beta$$

e somando obtemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3.5}$$

que é a **equação cartesiana** da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r. Podemos reescrever essa equação como

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \tag{3.6}$$

Sejam $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ três pontos não colineares, isto é, os vetores $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$ não são paralelos. Nessa situação é possível obter uma circunferência contendo estes três pontos. Para isso considere a equação (3.6). Para que P_1, P_2 e P_3 pertençam a uma circunferência C devemos ter:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c &= 0. \end{aligned}$$

Daí para encontrar a circunferência desejada, basta determinar os valores de a, b e c. Ou seja, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = -(x_1^2 + y_1^2) \\ ax_2 + by_2 + c = -(x_2^2 + y_2^2) \\ ax_3 + by_3 + c = -(x_3^2 + y_3^2). \end{cases}$$

Como os ponto P_1, P_2 e P_3 não são colineares, este sistema sempre possui solução única.

Exemplos 3.2.1. 1. *Escreva a equação cartesiana da circunferência passando pelos pontos* $A(1, 1)$, $B(1, -2)$ *e* $C(2, 3)$.

Solução: *Temos*

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (0, -3) \\ \vec{AC} &= (1, 2) \end{aligned}$$

assim os pontos não são colineares e portanto definem uma circunferência. Para encontrá-la, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ a - 2b + c = -5 \\ 2a + 3b + c = -13 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = -13, \quad b = 1 \quad e \quad c = 10.$$

Logo

$$x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$$

é a equação procurada.

Agora, como

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

segue que

$$x_0 = 13/2, \quad y_0 = -1/2 \quad e \quad r^2 = 65/2.$$

Assim a equação cartesiana da circunferência será

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{2} + \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}\cos\beta \\ y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta \end{cases}, \beta \in [0, 2\pi].$$

2. *Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(1, -1)$, $P_2(0, 1)$ e $P_3(1, 0)$.*

   Solução: *Primeiro note que*

$$\vec{P_1P_2} = (-1, 2)$$
$$\vec{P_1P_3} = (0, 1).$$

   Assim os pontos não são colineares, portanto tal circunferência existe. Para encontrá-la, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ b + c = -1 \\ a + c = -2. \end{cases}$$

   A solução é $a = b = 1$ e $c = -2$. Logo a circunferência tem equação

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

3. *Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(1,3)$, $P_2(3,-5)$ e $P_3(2,-1)$.*

Solução: *Note que*

$$\vec{P_1P_2} = (2,-8)$$
$$\vec{P_1P_3} = (1,-4).$$

Assim P_1, P_2 e P_3 são colineares e portanto os três pontos não definem uma circunferência.

3.2 Cônicas

Definição 3.3. *Chama-se* ***cônica*** *o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ que satisfazem uma equação do segundo grau $g(x,y) = 0$, onde*

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{3.7}$$

Na equação (3.7) pelo menos um dos números a, b c é diferente de zero. Os termos ax^2 e cy^2 são os **termos quadráticos**, o termo bxy é o **termo quadrático misto**, dx e ey são os **termos lineares** e f é o **termo independente**.

A equação (3.7) pode representar:

(1) um conjunto vazio: $x^2 + y^2 = -1$;

(2) um conjunto formado por um ponto: $x^2 + y^2 = 0$;

(3) a reunião de duas retas (paralelas ou concorrentes): $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$;

(4) uma circunferência: $x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$;

(5) uma elipse: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$;

(6) uma hipérbole: $3x^3 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$;

(7) uma parábola: $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Nos casos em que a equação (3.7) representar um conjunto vazio, um ponto, retas ou circunferências diremos que a cônica definida é uma **cônica degenerada**. Aqui vamos estudar as cônicas chamadas de elipse, hipérbole e parábola.

3.2.1 Elipse

Definição 3.4. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano, $2c$ a distância entre F_1 e F_2 e a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico $\mathcal{E}$ dos pontos P tais que*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \tag{3.8}$$

*chama-se **elipse**. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado **foco** da elipse. O segmento F_1F_2 é chamado **segmento focal**, seu ponto médio é o **centro** da elipse e $2c$ é chamado **distância focal**. A reta passando por F_1 e F_2 chama-se **reta focal**.*

Para obter a equação que descreve uma elipse vamos fixar os focos F_1 e F_2 como sendo $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim o centro dessa elipse estará na origem do plano cartesiano. Assim, seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à elipse de focos F_1 e F_2. Então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \tag{3.9}$$

isto é,

$$d(P, F_1) = 2a - d(P, F_2). \tag{3.10}$$

Assim,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

e elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Fazendo $b^2 = a^2 - c^2$, podemos escrever

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividindo por a^2b^2 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.11}$$

Observe que

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3.12}$$

$$a > b > 0 \tag{3.13}$$

$$a > c > 0. \tag{3.14}$$

Assim todo ponto pertencente a elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, deve satisfazer a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, seja $Q(\alpha, \beta)$ um ponto tal que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Então $\beta^2 = b^2 - (b^2/a^2)\alpha^2$ e daí

$$\begin{aligned} d^2(Q, F_1) &= (\alpha + c)^2 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2c\alpha + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 \\ &= \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$d^2(Q, F_2) = \left(\frac{c}{a}\alpha - a\right)^2.$$

Assim

$$d(Q, F_1) = \left|\frac{c}{a}\alpha + a\right| \tag{3.15}$$

$$d(Q, F_2) = \left|\frac{c}{a}\alpha - a\right|. \tag{3.16}$$

Como

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

então $\alpha^2/a^2 \leq 1$, isto é, $| \alpha | \leq a$. Mas $c/a > 0$, daí

$$\frac{c}{a} | \alpha | \leq c < a$$

logo

$$-a < \frac{c\alpha}{a} < a.$$

Portanto,

$$\frac{c}{a}\alpha + a > 0$$
$$\frac{c}{a}\alpha - a < 0.$$

Desse modo podemos escrever (3.15) e (3.16) como

$$d^2(Q, F_1) = \frac{c}{a}\alpha + a$$
$$d^2(Q, F_2) = a - \frac{c}{a}\alpha.$$

Assim

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

e então o ponto $Q(\alpha, \beta)$ pertence à elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Os números a, b e c são chamados **parâmetros geométricos** da elipse. A equação (3.11) é chamada de **equação reduzida da elipse** de centro $O(0, 0)$ e focos no eixo x. Indicamos tal elipse por

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Com isso provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.4.1. *Um ponto $P(x, y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, as distâncias de P aos focos F_1 e F_2 são

$$d^2(P, F_1) = \frac{c}{a}\alpha + a$$
$$d^2(P, F_2) = a - \frac{c}{a}\alpha.$$

Observação 3.4.1. 1. *A equação (3.11) só é válida para elipses com focos no eixo x e centro na origem. Mudanças nos focos ou no centro, resultarão em uma equação diferente para a elipse.*

2. *Se* (x, y) *satisfaz a equação* (3.11), *então* $(-x, -y)$, $(-x, y)$ *e* $(x, -y)$ *também satisfazem a mesma equação. Assim a elipse é simétrica em relação ao eixo* x, *ao eixo* y *e ao centro do plano cartesiano.*

3. *O ponto* $(x, 0)$ *pertence à elipse de equação* (3.11) *se, e somente se,* $x^2/a^2 = 1$, *isto é,* $x = \pm a$. *Além disso, o ponto* $(0, y)$ *pertence á elipse de equação* (3.11) *se, e só se,* $y = \pm b$. *Portanto, a interseção de* E *com o eixo* x *são os pontos* $A_1(-a, 0)$ *e* $A_2(a, 0)$ *e a interseção com o eixo* y *são os pontos* $B_1(0, -b)$ *e* $B_2(0, b)$. *Note que* $d(B_j, F_i) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$, *para* $i, j = 1, 2$.

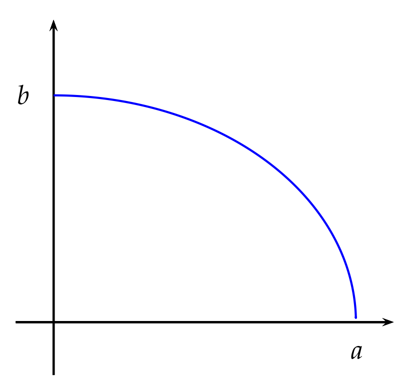
4. *Não existe circunferência que contenha os pontos* A_1, A_2, B_1 *e* B_2. *Caso existisse, tal circunferência teria dois diâmetros diferentes, cujos comprimento são dados pelos comprimentos dos segmente* A_1A_2 *e* B_1B_2, *o que é impossível. Portanto, como esses pontos pertencem a* E, *podemos afirmar que a elipse não é uma circunferência e nem o conjunto vazio.*

Na equação (3.11), fazendo $y \geq 0$ podemos escrever

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a].$$

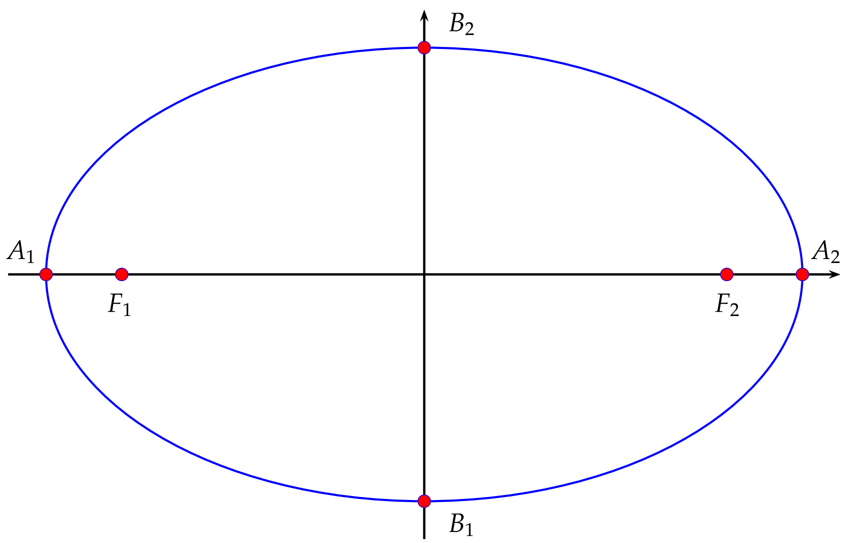
Tal equação é uma função em x, contínua, decrescente e com concavidade para baixo em todo seu domínio. Assim seu gráfico é dado pela Figura 3.2.

Figura 3.2: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



E como a elipse é simétrica, sua forma é dada pela Figura 3.3.

Figura 3.3: Elipse com focos no eixo x e centro na origem: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Definição 3.5. *Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a elipse e os pontos B_1 e B_2 em que a mediatriz do segmento focal intercepta a elipse são chamados de* ***vértices****. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados de* ***eixo maior*** *e* ***eixo menor*** *da elipse, respectivamente.*

Exemplos 3.5.1. 1. *A equação*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa uma elipse onde $a = 3$, $b = 2$. Os focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ onde, $a^2 = b^2 + c^2$. Daí, $a = \sqrt{5}$. Logo $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$. Os vértices são $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$, $B_1(0, -2)$ e $B_2(0, 2)$.

2. *Encontre a equação da elipse cujos focos são $F_1(-3, 0)$ e $F_2(0, 4)$ e cujo eixo maior mede 7.*

Solução: *Como os focos não estão sobre o eixo x, não podemos usar a equação (3.11). Assim vamos utilizar a definição (3.8). Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a tal elipse, então*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 7.$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 7 \\
&(x+3)^2 + y^2 = 49 - 14\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + x^2 + (y-4)^2 \\
&(3x + 4y - 28)^2 = \left[-7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right]^2 \\
&9x^2 + 24xy + 16y^2 - 168x - 224y + 784 = 49x^2 + 49y^2 - 392y + 784
\end{aligned}$$

Portanto a elipse procurada tem equação

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y = 0.$$

3. *Encontre a equação da elipse com focos $F_1(0, -2)$ e $F_2(0, 2)$ e tal que $a = 3$.*

   Solução: *Neste caso, $P(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
&d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6 \\
&\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 \\
&(8y - 36)^2 = \left[-12\sqrt{x^2 + (y-2)^2}\right]^2 \\
&64y^2 - 576y + 1296 = 144x^2 + 144y^2 - 576y + 576 \\
&144x^2 + 80y^2 = 720.
\end{aligned}$$

   Portanto a elipse procurada tem equação

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Proposição 3.5.1. *Uma equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.17}$$

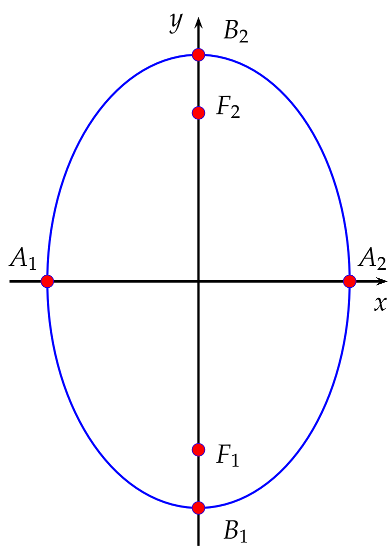
descreve uma elipse se, e somente se, os números reais p e q são distintos e positivos.

Corolário 3.0.1. *Sejam O a origem do plano cartesiano, p e q números reais distintos e positivos. Seja E a elipse de equação (3.17) e parâmetros geométricos a e b.*

1. *Se $p > q$, então $a^2 = p$, $b^2 = q$ e E tem centro O e focos no eixo x.*

2. *Se $q > p$, então $a^2 = q$, $b^2 = p$ e E tem centro O e focos no eixo y.*

Figura 3.4: Elipse com focos no eixo y e centro na origem: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Exemplos 3.5.2. *Para as equações dadas, encontre os focos, vértices e o comprimento do eixo maior e menor da elipse dada.*

1. $16x^2 + y^2 = 1$

   Solução: *Podemos escrever essa equação como*

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

e daí $p = 1/16$ e $q = 1$. Como $p < q$, os focos estão no eixo y. Assim $a = 1$ e $b = 1/4$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $c = \sqrt{15}/4$. Logos

$$F_1\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right), \quad F_2\left(0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$
$$A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1)$$
$$B_1\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad B_1\left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

2. $25x^2 + 169y^2 = 9$

Solução: *Podemos escrever essa equação como*

$$\frac{x^2}{\frac{9}{25}} + \frac{y^2}{\frac{9}{169}} = 1$$

e daí $p = 9/25$ e $q = 9/169$. Como $p > q$, os focos estão no eixo x. Assim $a = 3/5$ e $b = 3/13$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $c = 36/65$. Logos

$$F_1\left(-\frac{36}{65}\right), \quad F_2\left(\frac{36}{65}\right)$$
$$A_1\left(-\frac{3}{5}, 0\right), \quad A_2\left(\frac{3}{5}, 0\right)$$
$$B_1\left(0, -\frac{3}{13}\right), \quad B_1\left(0, \frac{3}{13}\right).$$

Considere a elipse de equação reduzida

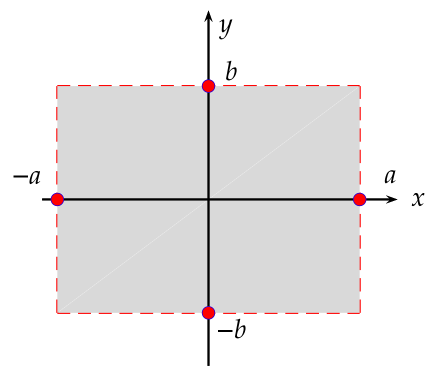
$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Temos

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Portanto os pontos de $\mathcal{E}$ estão dentro do retângulo Esse retângulo é chamado de **retângulo fundamental** da elipse $\mathcal{E}$.

Figura 3.5: Retângulo fundamental



Agora, como $a > b$, então

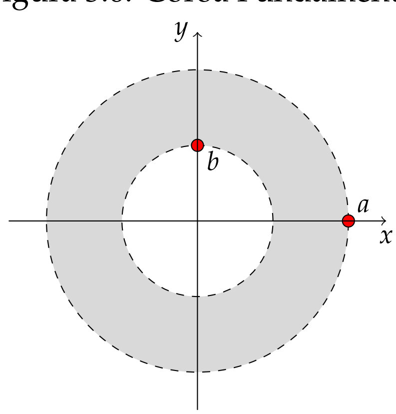
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Assim, todo ponto $P(x, y)$ de E satisfaz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

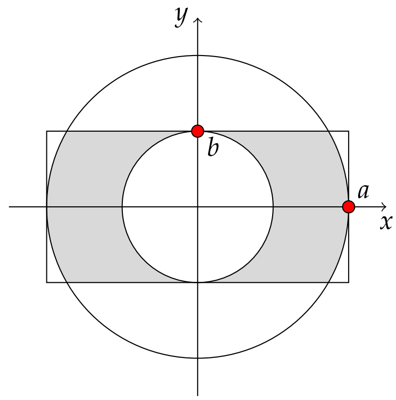
e daí $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, ou seja, $b \leq d(P, O) \leq a$. Portanto a elipse está contida entre as circunferências de raio a e b. Essa região é chamada de **coroa fundamental** da elipse.

Figura 3.6: Coroa Fundamental



Logo os pontos da elipse estão na região compreendida entre o retângulo fundamental e a coroa fundamental. Assim observe que se b/a estiver próximo de 1, então o retângulo

Figura 3.7: Região onde se encontram os pontos de uma elipse



fundamental será próximo de um quadrado e daí a forma da elipse se aproximará de um circunferência. Por outro lado, quanto mais próximo de 0 estiver b/a, mas alongada será a elipse. Mas, sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

daí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Dessa equação vemos que se $b/a \to 1$, então $c/a \to 0$ e daí os focos de $\mathcal{E}$ estão “mais próximos” de seu centro do que de seus vértices e desse modo a elipse será mais parecida com um circunferência. Por outro lado, se $b/a \to 0$, então $c/a \to 1$ e assim os focos de $\mathcal{E}$ estão “mais próximos” dos vértices do que do centro de $\mathcal{E}$ e desse modo a elipse será mais alongada. Portanto o quociente c/a mede o quanto os focos de $\mathcal{E}$ estão “fora do centro”. A essa razão damos o nome de **excentricidade** (*ex centrum*) da elipse e representamos por

$$e = \frac{c}{a}.$$

3.2.2 Hipérbole

Definição 3.6. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano tais que sua distância seja $2c$. Considere um número real a tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico $\mathcal{H}$ dos pontos $P(x, y)$ tais que*

$$|d(P, F) - d(P, F_2)| = 2a \tag{3.18}$$

*chama-se **hipérbole**. Os pontos F_1 e F_2 são chamados **focos** da hipérbole, o segmento F_1F_2 é chamado **segmento focal**, o ponto médio do segmento F_1F_2 é chamada de **centro** da hipérbole e o número $2c$ é chamado de **distância focal**. A reta passando por F_1 e F_2 é chamada **reta focal**.*

Vamos fixar $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 se

$$
\begin{aligned}
&|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\
&d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a \\
&d(P, F_1) = \pm 2a + d(P, F_2) \\
&\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2 \\
&(cx - a^2)^2 = \left[\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2 \\
&(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{aligned}
$$

Fazendo $b^2 = c^2 - a^2$ e dividindo por a^2b^2 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.19}$$

Como no caso da elipse, também temos as relações

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3.20}$$

$$c > b > 0 \tag{3.21}$$

$$c > a > 0. \tag{3.22}$$

Portanto, se um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$, então ele satisfaz a equação (3.18).

Agora, dado um ponto $A(\alpha, \beta)$ que satisfaz a equação (3.18), queremos mostrar que A pertence à hipérbole $\mathcal{H}$. Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} &= 1 \\
\beta^2 &= \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 - b^2. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Usando (3.21) e (3.23):

$$\begin{aligned} d^2(P,F_1) &= (\alpha+c)^2+\beta^2 \\ &= \alpha^2+2\alpha c+c2+\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-b^2 \end{aligned}$$

donde

$$d^2(A,F_1)=\left(\frac{c}{a}\alpha+a\right)^2.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$d^2(A,F_2)=\left(\frac{c}{a}\alpha-a\right)^2.$$

Assim

$$d(A,F_1)=\left|\frac{c}{a}\alpha+a\right| \tag{3.24}$$

$$d(A,F_2)=\left|\frac{c}{a}\alpha-a\right|. \tag{3.25}$$

Mas

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=1$$

assim

$$\alpha^2/a^2\geq 1, \tag{3.26}$$

isto é, $\alpha\leq -a$ ou $\alpha\geq a$. Temos então dois casos para analisar:

1. Se $\alpha\leq -a$, então

$$\frac{c}{a}\alpha\leq -c<-a.$$

Portanto, $(c/a)\alpha+a<0$ e $(c/a)\alpha-a<0$, donde

$$\begin{aligned} d(A,F_1) &= -\frac{c}{a}\alpha-a \\ d(A,F_2) &= -\frac{c}{a}\alpha+a. \end{aligned}$$

e então

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=|-2a|=2a.$$

2. Se $\alpha \geq -a$, então
$$\frac{c}{a}\alpha \leq c > a.$$
Portanto, $(c/a)\alpha + a > 0$ e $(c/a)\alpha - a > 0$, donde
$$d(A, F_1) = \frac{c}{a}\alpha + a$$
$$d(A, F_2) = \frac{c}{a}\alpha - a.$$
e então
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |2a| = 2a.$$

Portanto, se $A(\alpha, \beta)$ satisfaz a equação (3.18), então A pertence à hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.6.1. *Um ponto $P(x, y)$ é um ponto da hipérbole*
$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
se, e somente se, as distâncias de P aos focos são:
$$d(A, F_1) = \left|\frac{c}{a}\alpha + a\right|$$
$$d(A, F_2) = \left|\frac{c}{a}\alpha - a\right|.$$

Os números a, b e c são chamados **parâmetros geométricos** da hipérbole $\mathcal{H}$ e a equação
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
é chamada de **equação reduzida** da hipérbole.

Observação 3.6.1. *Seja $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ uma hipérbole de focos no eixo x.*

1. *Nenhum ponto $P(x, y)$ de $\mathcal{H}$ é tal que $-a < x < a$, pois caso contrário teríamos $x^2 < a^2$ o que contradiz a inequação (3.26). Para a ordenada y não há restrição, isto é, qualquer que seja y existe x tal que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Assim a hipérbole não é limitada.*

2. *Se (x, y) pertence a H, então $(-x, -y)$, $(x, -y)$ e $(-x, y)$ também pertencem a $\mathcal{H}$. Logo a hipérbole é simétrica em relação ao eixo x, ao eixo y e em relação à origem do plano cartesiano.*

3. *O ponto $(x, 0)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se, $x = \pm a$. Por isso a interseção de $\mathcal{H}$ com a reta focal são os pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, chamados de* ***vértices*** *de $\mathcal{H}$.*

Considere a hipérbole $\mathcal{H}$ de equação reduzida

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Dada uma reta r de equação $y = mx$, quais as condições sobre a, b, c e m para que a reta r intercepte $\mathcal{H}$?

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto de interseção entre r e $\mathcal{H}$. Então temos

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$
$$y_0 = mx_0,$$

isto é,

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{m^2 x_0^2}{b^2} = 1.$$

Resolvendo em x_0 obtemos

$$x_0 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}. \tag{3.27}$$

Assim

$$b^2 - a^2 m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

Como a e b são positivos

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Logo a reta $y = mx$ intercepta a hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se, seu coeficiente angular está entre $-b/a$ e b/a. Portanto as retas

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}x$$

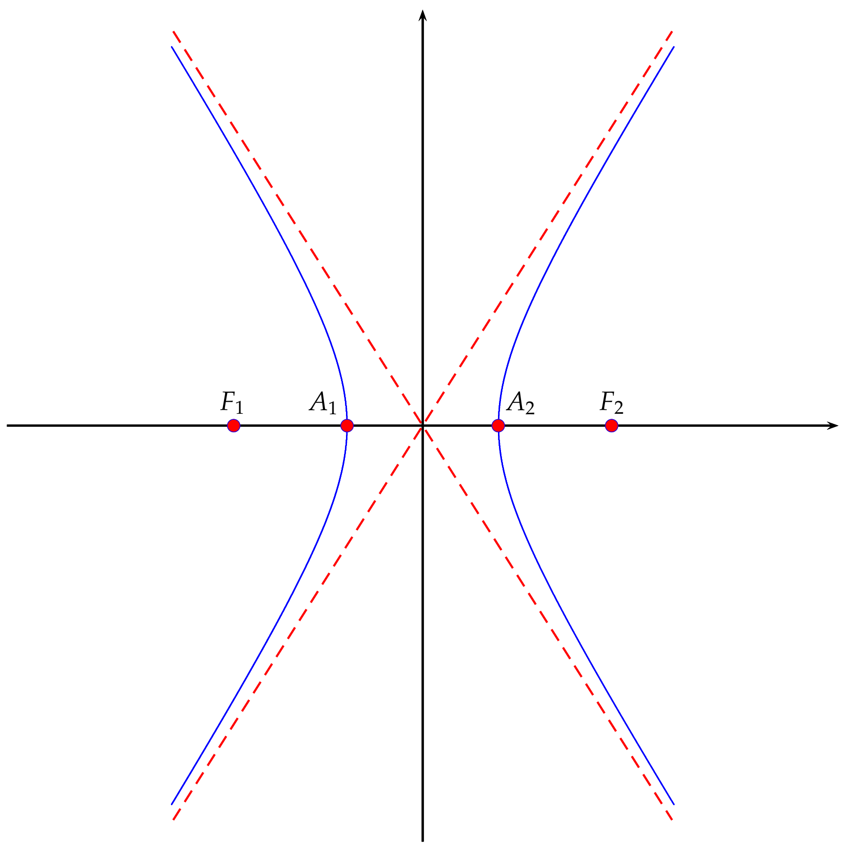
não interceptam a hipérbole $\mathcal{H}$. Tais retas são chamadas de **assíntotas da hipérbole**. Mais ainda, da equação (3.27) quando $m \to b/a$, o ponto x_0 tende para mais ou menos infinito. Logo os pontos da hipérbole se aproximam das assíntotas a medida que x se afasta da origem.

Como no caso da elipse, utilizando a simetria e as assíntotas da hipérbole, podemos mostrar a partir da equação

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a$$

que a forma da hipérbole será dada pela Figura 3.8.

Figura 3.8: Hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com assíntotas $y = -\dfrac{b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$



Exemplos 3.6.1. 1. *Encontre a equação da hipérbole cujos vértices são* $(-15, 0)$ *e* $(15, 0)$ *e as assíntotas têm equações* $5y - 4x = 0$ *e* $5y + 4x = 0$.

Solução: *As assíntotas são dadas por*

$$y = -\frac{b}{a}x \quad e \quad y = \frac{b}{a}x.$$

A partir dos vértices encontramos $a = 15$. Daí $b = 12$ e então a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

2. *Encontre a equação da hipérbole de focos $F_1(0, -\sqrt{20})$ e $F_1(0, \sqrt{20})$ e tal que $a = 2$.*

   Solução: *Como os focos não estão no eixo x, vamos usar a equação (3.18):*

$$\begin{aligned}
&| d(P, F) - d(P, F_2) |= 4 \\
&\left[\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{20})^2}\right]^2 = \left[\pm 4 + \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2}\right]^2 \\
&(y\sqrt{20} - 4)^2 = \left[\pm 2\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2}\right]^2 \\
&20y^2 - 8\sqrt{20}y + 16 = 4x^2 + 4y^2 - 8\sqrt{20}y + 80 \\
&16y^2 - 4x^2 = 64.
\end{aligned}$$

   Logo a hipérbole procurada tem equação

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

   Portanto as assíntotas são

$$y = -2x \quad e \quad y = 2x.$$

Proposição 3.6.2. *Um equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.28}$$

descreve uma hipérbole se, e somente se, os números reais p e q são de sinal contrário.

Corolário 3.0.2. *Sejam p e q números reais de sinal contrário e $\mathcal{H}$ a hipérbole de equação (3.28) e parâmetros geométricos a e b.*

1. *Se $p > 0$ e $q < 0$, então $a^2 = p$ e $b^2 = -q$, $\mathcal{H}$ tem centro na origem e focos no eixo x.*

2. *Se $p < 0$ e $q > 0$, então $a^2 = q$ e $b^2 = -p$, $\mathcal{H}$ tem centro na origem e focos no eixo y.*

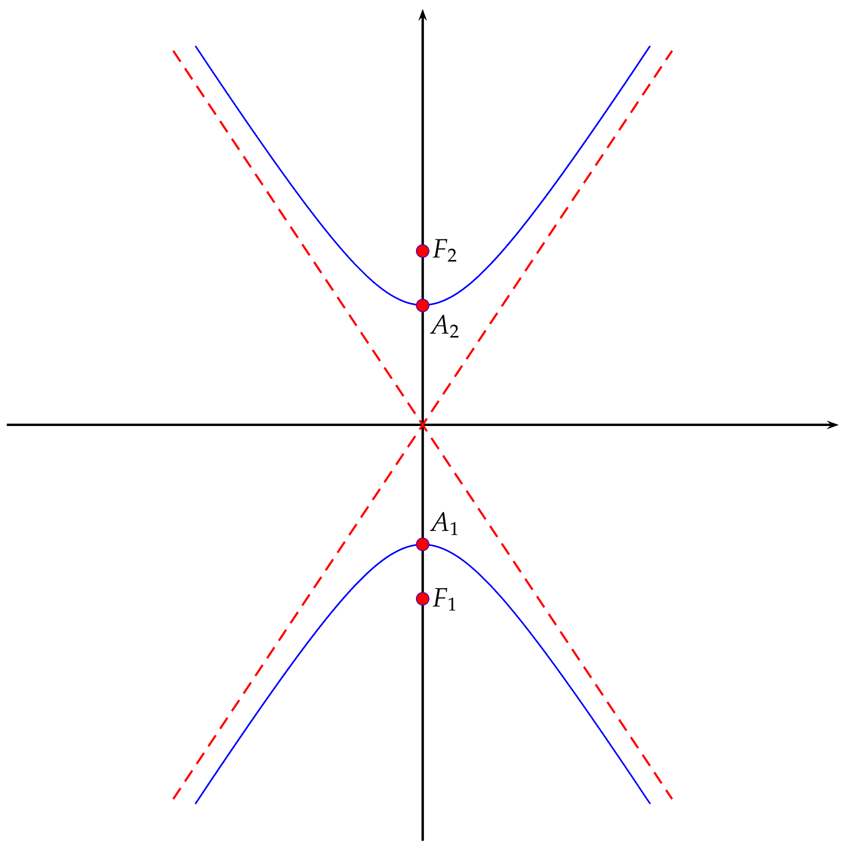
Observação 3.6.2. *No caso de uma hipérbole $\mathcal{H}$ com focos no eixo y, isto é, com equação*

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

as assíntotas terão equações dadas por

$$x = \pm\frac{a}{b}y.$$

Figura 3.9: Hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ com assíntotas $x = -\dfrac{a}{b}y$ e $x = \dfrac{a}{b}y$

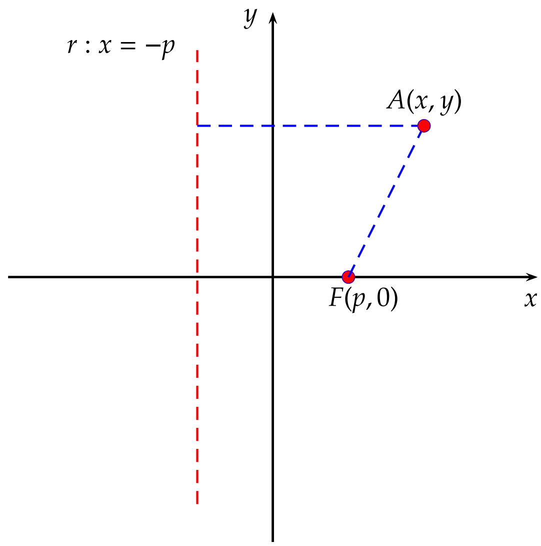


3.2.3 Parábola

Definição 3.7. *Seja r uma reta e F um ponto que não pertence a r. O lugar geométrico $\mathcal{P}$ dos pontos equidistantes de F e r chama-se **parábola**. O ponto F é chamado de **foco da parábola** e r de **reta diretriz**. A reta contendo o foco F e perpendicular à reta diretriz é chamada de **reta focal**.*

Vamos fixar $F(p,0)$ e $r: x = -p$, onde $p > 0$. Assim um ponto $A(x,y)$ pertence à parábola de foco F e reta diretriz r se, e somente se,

Figura 3.10: Definição da Parábola



$$d(A,r) = d(A,F).$$

Mas

$$d(A,r) = |x+p|$$
$$d(A,F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}.$$

Logo A pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se,

$$(|x+p|)^2 = (x-p)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2.$$

Portanto $A(x,y)$ pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se,

$$y^2 = 4px \tag{3.29}$$

A equação (3.29) é chamada de **equação reduzida** da parábola $\mathcal{P}$. Indica-se

$$\mathcal{P}: \; y^2 = 4px.$$

Observação 3.7.1. *1. Se (x, y) satisfaz a equação (3.29), então $x \geq 0$, isto é, nenhum ponto de $\mathcal{P}$ tem abscissa negativa. Já para a ordenada y, não existem restrições. Logo a parábola não é limitada.*

2. Se (x, y) pertence a $\mathcal{P}$, então $(x, -y)$ também pertence a $\mathcal{P}$. Logo a parábola é simétrica em relação ao eixo x.

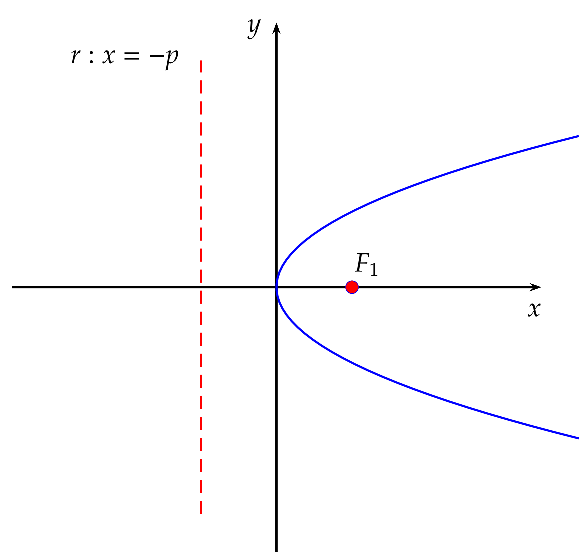
3. O único ponto de interseção de $\mathcal{P}$ com os eixos coordenados é o ponto $(0, 0)$. Tal ponto é chamado de ***vértice*** *da parábola.*

Na equação (3.29) podemos isolar x e escrever

$$x = \frac{y^2}{4p}$$

obtendo assim x como uma função de y. Logo o gráfico da parábola $\mathcal{P}$ é:

Figura 3.11: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$ e reta diretriz $r : x = -p$, $p > 0$



Agora, se a diretriz de $\mathcal{P}$ tem equação $r : x = p$ e o foco é o ponto $F(-p, 0)$, com $p > 0$, obtemos a equação

$$y^2 = -4px.$$

Neste caso, o gráfico da parábola é dado pela Figura 3.12.

Nos demais casos temos:

Figura 3.12: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$ e reta diretriz $r : x = p$, $p > 0$

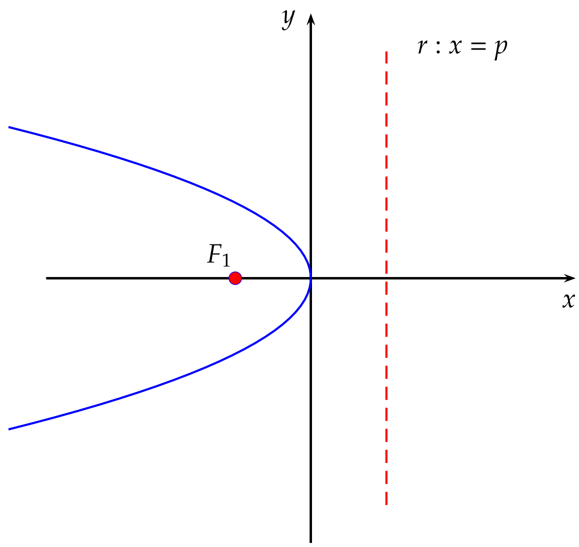
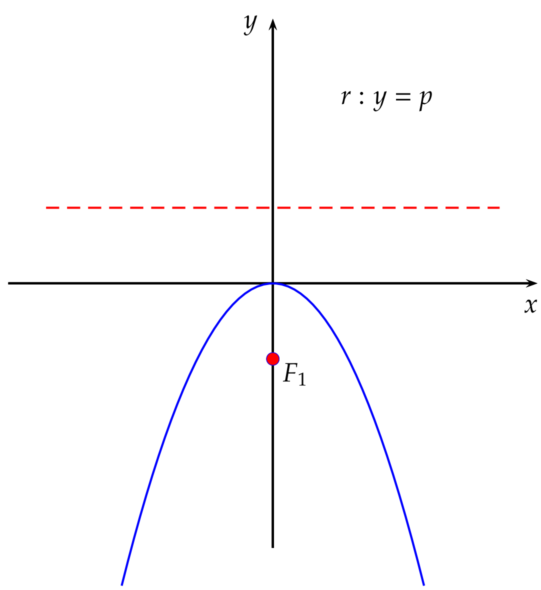
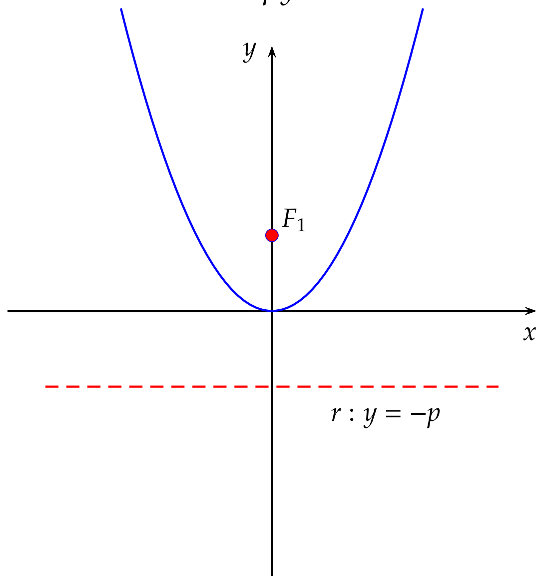


Figura 3.13: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e reta diretriz $r : y = p$, $p > 0$



Proposição 3.7.1. *As equações $y^2 = qx$ e $x^2 = qy$ descrevem uma parábola se, e somente se, $q \neq 0$.*

Figura 3.14: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4py$ e reta diretriz $r : y = -p, p > 0$



3.3 Rotação e Translação de Eixos

Para determinar a cônica representada pela equação (3.7) iremos utilizar translações e rotações de eixos para simplificar sua equação.

3.3.1 Translação de eixos

Considere a seguinte cônica

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0. \tag{3.30}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 4x + 4) - 4 + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) - 1 = 0\\
&(x-2)^2 - 4 + 2(y-1)^2 - 2 - 1 = 0\\
&(x-2)^2 + 2(y-1)^2 = 7.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança

$$x - 2 = x_1 \tag{3.31}$$

$$y - 1 = y_1 \tag{3.32}$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{7} + \frac{y_1^2}{\frac{7}{2}} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1.

O efeito das equações (3.31) e (3.32) foi o de mudar o centro da elipse de equação (3.30) que estava no ponto $(2, 1)$ no sistema original para o ponto $(0, 0)$ considerando os eixos coordenados x_1 e y_1.

Utilizando-se as equações (3.31) e (3.32) podemos facilmente escrever as coordenadas de um ponto P qualquer, tanto em relação ao sistema de eixos coordenados x e y, quanto ao sistema de eixos coordenados x_1 e y_1. Por exemplo, o ponto P de coordenadas $P = (4, 0)$, em relação ao sistema xy, terá coordenadas $(2, -1)$ em relação ao sistema de eixos x_1y_1. As mudanças introduzidas pelas equações (3.31) e (3.32) são chamadas de **translações de eixos**. De modo geral, se (x, y) são as coordenadas de um ponto P em relação ao ponto $(0, 0)$, então as coordenadas de P em relação aos eixos x_1 e y_1, centrados no ponto (a, b) são dadas por

$$x_1 = x - a \tag{3.33}$$

$$y_1 = y - b. \tag{3.34}$$

As mudanças introduzidas pelas equações (3.33) e (3.34) permitem remover os termos lineares da equação (3.7).

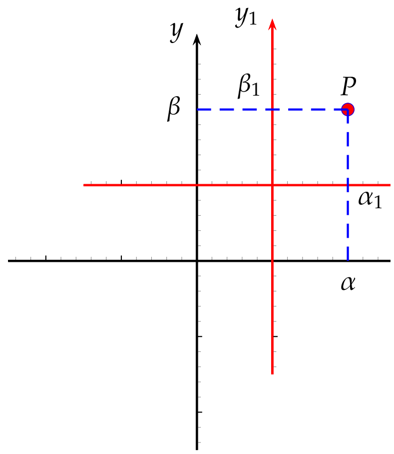
Exemplos 3.7.1. *Identifique as cônicas:*

1. $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$

   Solução: *Completando quadrados*

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 4 = 0$$
$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Figura 3.15: Translação de eixos



Fazendo

$$x - 1 = x_1$$
$$y - 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1. *No novo sistema de coordenadas centrado no ponto os vértices são*

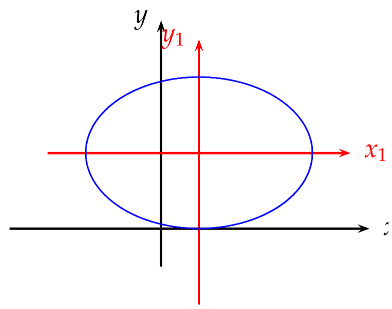
$$\overline{A_1}(-3,0), \quad \overline{A_2}(3,0)$$
$$\overline{B_1}(0,-2), \quad \overline{B_2}(0,2).$$

No sistema original os vértices são

$$A_1(-2,2), \quad A_2(2,2)$$
$$B_1(1,0), \quad B_2(1,4).$$

2. $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

Figura 3.16: Elipse $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$



Solução: *Completando quadrados*

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 2(y^2 + 4y + 4 - 4) - 1 = 0$$
$$(x-3)^2 - 2(y+2)^2 = 2.$$

Fazendo

$$x - 3 = x_1$$
$$y + 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1$$

que representa uma hipérbole com focos no eixo x_1. *Suas assíntotas são*

$$y_1 = \pm\frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

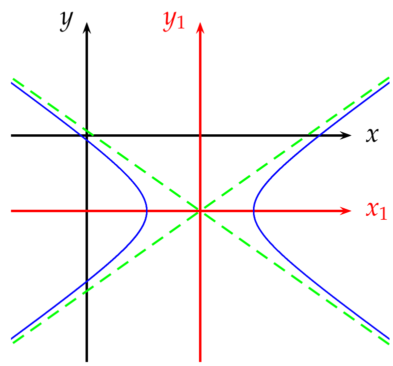
Os vértices são $\overline{A_1}(-\sqrt{2}, 0)$ *e* $\overline{A_2}(\sqrt{2}, 0)$. *No sistema original suas assíntotas são*

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 2\right)$$
$$y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right).$$

Os vértices são $\overline{A_1}(-3 - \sqrt{2}, 0)$ *e* $\overline{A_2}(-3 + \sqrt{2}, 0)$.

3. $x^2 - y^2 - 2x - 6y = 8$

Figura 3.17: Hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$



Solução: *Completando quadrados*

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 6y + 9 - 9) - 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 0$$
$$[(x - 1) - (y + 3)][(x - 1) + (y + 3)] = 0$$

que representam as retas

$$r : x - y - 4 = 0$$
$$s : x + y + 2 = 0$$

que se interceptam no ponto $(1, -3)$.

3.3.2 Rotação de eixos

Considere o sistema cartesiano com centro em $(0, 0)$. Sejam $\vec{e_1} = (1, 0)$ e $\vec{e_2} = (0, 1)$. Para qualquer vetor $\vec{P} = (x, y)$ podemos escrever

$$\vec{P} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}. \tag{3.35}$$

Agora, efetuando-se uma rotação no sentido antihorário nos eixos x e y de um ângulo θ, obtemos novos eixos coordenados x_1 e y_1. Tome vetores unitátios $\vec{u_1}$ e $\vec{u_1}$ nos eixos x_1 e y_1. Em relação aos eixos originais podemos escrever

Figura 3.18: Rotação de eixos: vetores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$

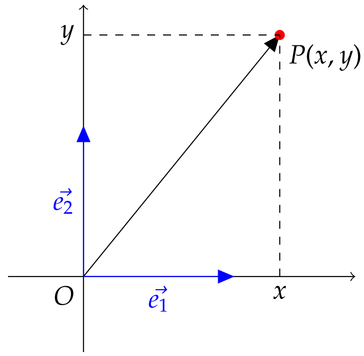
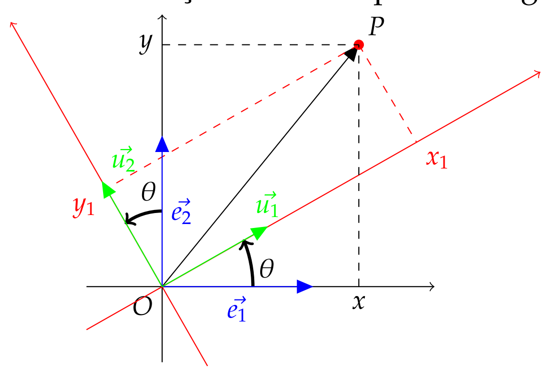


Figura 3.19: Rotação dos eixos por um ângulo θ



$$\vec{u_1} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\vec{e_1} + \operatorname{sen}\theta\vec{e_2}$$
$$\vec{u_2} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta\vec{e_1} + \cos\theta\vec{e_2}.$$

Mas, os vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ são unitários e ortogonais, assim podemos escrever o vetor $\vec{P}$ como combinação de escalares nos eixos rotacionados, isto é,

$$\vec{P} = x_1\vec{u_1} + y_1\vec{u_2}. \tag{3.36}$$

Daí de (3.35) e (3.36) obtemos

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x_1\vec{u_1} + y_1\vec{u_2}$$

e substituindo $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)\vec{e_1} + (x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)\vec{e_2}.$$

Logo

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta \tag{3.37}$$
$$y = x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta \tag{3.38}$$

e então isolando x_1 e y_1

$$x_1 = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta$$
$$y_1 = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Portanto para eliminar o termo xy da equação $g(x, y) = 0$, substituímos (3.37) e (3.38) em $g(x, y) = 0$ e determinanos o ângulo θ que elimina o termo xy.

Exemplos 3.7.2. *Seja P o ponto $P(6, 4)$. Efetuando-se uma rotação de um ângulo de $\theta = \pi/3$ radianos nos eixos, as coordenadas de P em relação aos novos eixos são*

$$x_1 = 6\cos(\pi/3) + 4\text{sen}\,(\pi/3) = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$y_1 = -6\text{sen}\,(\pi/3) + 4\cos(\pi/3) = 2 - 3\sqrt{3}.$$

Daí no novo sistema $P(3 + 2\sqrt{3}, 2 - 3\sqrt{3})$.

Exemplos 3.7.3. *Identifique as cônicas:*

1. $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$

   Solução: *Fazendo as mudanças*

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta \tag{3.39}$$
$$x = x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta \tag{3.40}$$

temos

$$
\begin{aligned}
&3(x_1\cos\theta - y_1\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 3(x_1\mathrm{sen}\,\theta + y_1\cos\theta)^2\\
&-10(x_1\cos\theta - y_1\mathrm{sen}\,\theta)(x_1\mathrm{sen}\,\theta + y_1\cos\theta)\\
&+12\sqrt{2}(x_1\cos\theta - y_1\mathrm{sen}\,\theta) - 4\sqrt{2}(x_1\mathrm{sen}\,\theta + y_1\cos\theta)\\
&= (3\cos^2\theta + 3\mathrm{sen}^2\theta - 10\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)x_1^2\\
&+ (3\mathrm{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta + 10\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)y_1^2\\
&+ (6\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 10\cos^2\theta + 10\mathrm{sen}^2\theta - 6\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)x_1y_1\\
&+ (12\sqrt{2}\cos\theta - 4\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\theta)x_1 + (-12\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\theta - 4\sqrt{2}\cos\theta)y_1 + 32 = 0.
\end{aligned}
$$

Assim θ deve ser tal que

$$-10\cos^2\theta + 10\mathrm{sen}^2\theta = 0,$$

isto é, $\theta = \pi/4$. Substituindo esse valor de θ na equação anterior e simplificando obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0.$$

Nessa nova equação podemos completar quadrados

$$
\begin{aligned}
&(x_1^2 - 4x_1 + 4) - 4 - 4(y_1^2 - 2y_1 + 1 - 1) - 16 = 0\\
&(x_1 - 2)^2 - 4(y_1 - 1)^2 = 16.
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - 2\\
y_2 &= y_1 - 1
\end{aligned}
$$

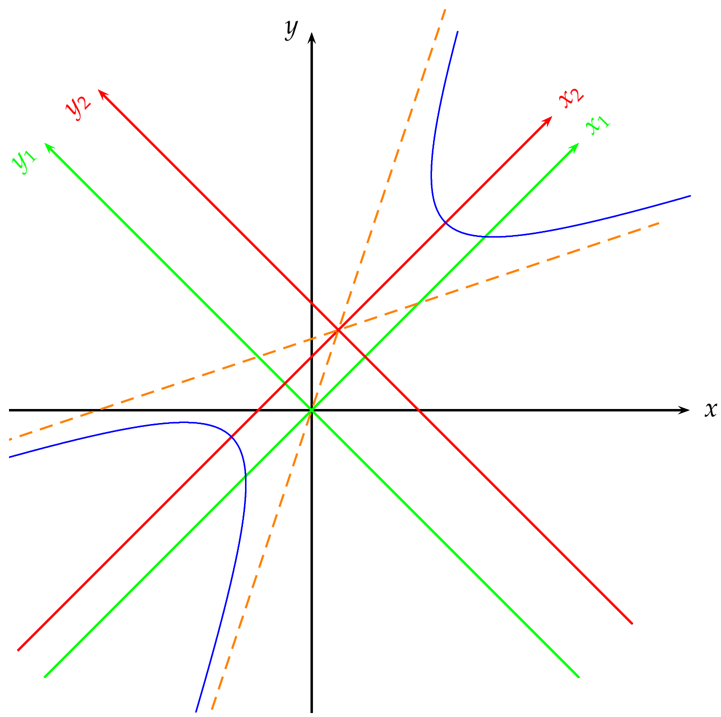
encontramos

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1$$

que é uma hipérbole de vértices no eixo x_2.

2. $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$

Figura 3.20: Hipérbole $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$



Solução: *Fazendo as mudanças*

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \tag{3.41}$$

$$x = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta \tag{3.42}$$

temos

$$52(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)^2 + 73(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)^2$$
$$-72(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) - 400 = 0$$
$$(52\cos^2\theta - 72\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 73\operatorname{sen}^2\theta)x_1^2 + (52\operatorname{sen}^2\theta + 72\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 73\cos^2\theta)y_1^2$$
$$+(-104\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 72\operatorname{sen}^2\theta - 72\cos^2\theta + 146\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x_1y_1 - 400 = 0 \tag{3.43}$$

Assim devemos ter

$$\begin{aligned}
&-104\text{sen}\,\theta\cos\theta + 72\text{sen}^2\theta - 72\cos^2\theta + 146\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0\\
&42\text{sen}\,\theta\cos\theta + 72(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = 0\\
&21\text{sen}\,(2\theta) - 72\cos(2\theta) = 0\\
&\text{tg}\,(2\theta) = \frac{24}{7}.
\end{aligned}$$

Agora

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2(2\theta)}}$$

e usando as equações $\cos^2\theta = (1/2)(1+\cos(2\theta))$ *e* $\text{sen}^2\theta = (1/2)(1-\cos(2\theta))$ *obtemos*

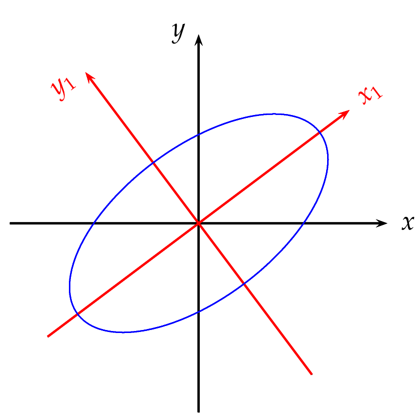
$$\cos\theta = \frac{4}{5} \quad e \quad \text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}.$$

Substituindo na equação (3.43) *obtemos*

$$\begin{aligned}
&\left(52\frac{16}{25} - 72\frac{12}{25} + 73\frac{9}{25}\right)x_1^2 + \left(52\frac{9}{25} + 72\frac{12}{25} + 73\frac{16}{25}\right)y_1^2 - 400 = 0\\
&25x_1^2 + 100y_1^2 = 400\\
&\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1.

Figura 3.21: Elipse $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$



3. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

Solução: *Fazendo as mudanças*

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta \tag{3.44}$$

$$x = x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta \tag{3.45}$$

temos

$$\begin{aligned}
&(x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta)^2 - 2(x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta)(x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta) \\
&+ (x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta)^2 - 2(x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\,\theta) - 2(x_1 \text{sen}\,\theta + y_1 \cos\theta) + 1 = 0 \\
&(\cos^2\theta - 2\text{sen}\,\theta \cos\theta + \text{sen}^2\theta)x_1^2 + (\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\,\theta\cos\theta + \cos^2\theta)y_1^2 \\
&+ (-2\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\,\theta\cos\theta)x_1 y_1 \\
&+ (-2\cos\theta - 2\text{sen}\,\theta)x_1 + (2\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta)y_1 + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Assim devemos ter

$$-2\cos^2\theta + 2\text{sen}^2\theta = 0,$$

isto é, $\theta = \pi/4$*. Substituindo em* (3.46) *obtemos a equação*

$$y_1^2 = \sqrt{2}\left(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Fazendo

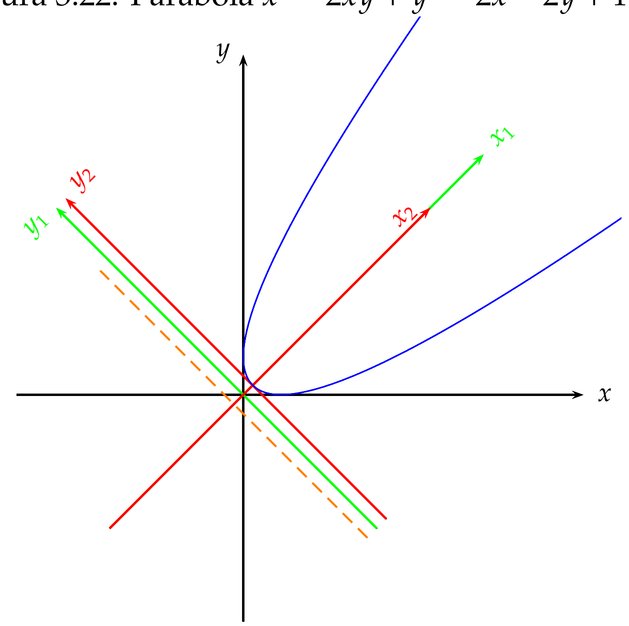
$$x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = x_2$$
$$y_1 = y_2$$

encontramos

$$y_2^2 = \sqrt{2}x_2$$

que representa uma parábola com foco no eixo x_2 *e reta diretriz* $x_2 = -\sqrt{2}/4$.

Figura 3.22: Parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

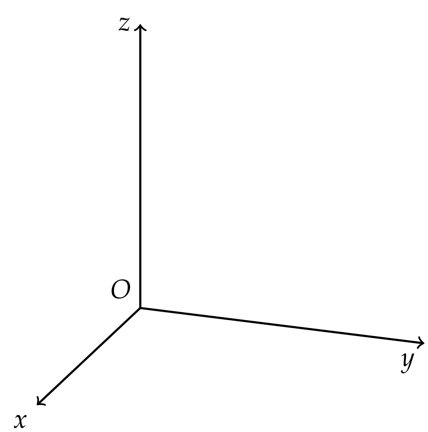


CAPÍTULO 4

VETORES NO ESPAÇO

Fixemos um ponto O no espaço, que será denominado como **origem**. Tomemos três retas duas a duas perpendiculares entre si e concorrentes em O, que serão denominados **eixos coordenados** e serão denotados por Ox, Oy e Oz.

Figura 4.1: Sistema de coordenadas tridimensionais



Projetando um ponto P do espaço ortogonalmente sobre cada um dos eixos coordenados podemos representar os pontos do espaço por ternas ordenadas (a, b, c) de números reais.

Figura 4.2: Coordenadas de um ponto no espaço tridimensional

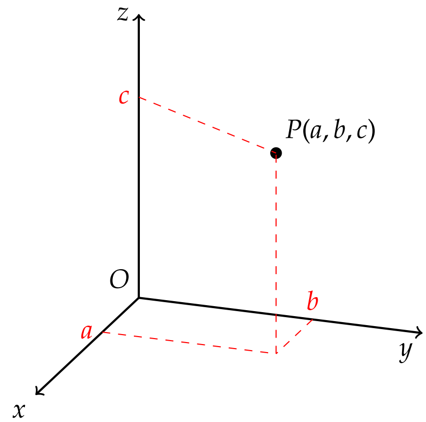
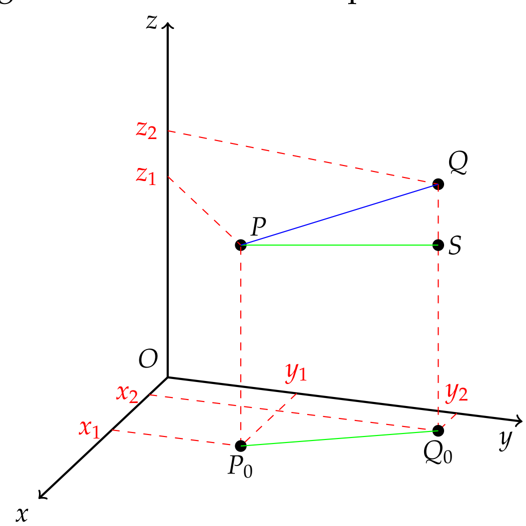


Figura 4.3: Distância entre pontos em $\mathbb{R}^3$



Assim os pontos de $\mathbb{R}^3$ são descritos por

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Traçando por P um segmento PS paralelo ao segmento P_0Q_0, onde $P_0(x_1, y_1)$ e $Q_0(x_2, y_2)$, obtemos que

$$d(P, Q)^2 = d(P_0, Q_0)^2 + |SQ|^2.$$

Agora, $|SQ| = |z_2 - z_1|$ e daí

$$D(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Exemplos 4.0.4. *A distância entre os pontos $P(2,-1,1)$ e $Q(-3,4,2)$ é*

$$d(P,Q) = \sqrt{[2-(-3)]^2 + (-1-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{51}.$$

Os vetores e as operaçõres com eles podem ser definidas utilizando-se dos eixos coordenados do espaço. Para isso, um ponto P do espaço é representado em $\mathbb{R}^3$ por uma terna de coordenadas $P(x_1, y_1, z_1)$, onde x_1, y_1, $z_1 \in \mathbb{R}$.

Seja $\vec{u}$ um vetor no espaço. Sabemos que $\vec{u}$ é um representante de uma certa classe de equipolência dos segmentos orientados (B,C). Para este segmento orientado (B,C) podemos encontrar um ponto $A(x_1,y_1,z_1)$ tal que o segmento orientado (O,A), onde $O(0,0,0)$, tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de (B,C). Assim o vetor $\vec{u}$ pode ser representado pelo segmento orientado (O,A). Portanto qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ pode ser representado como um segmento com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade em um ponto (x_1,y_1,z_1).

Assim escrevemos $\vec{u} = \vec{OP}$. Para simplificar a notação vamos identificar o vetor $\vec{u} = \vec{OP}$ com as coordenadas de sua extremidade e daí escrevemos

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1).$$

As coordenadas (x_1,y_1,z_1) são chamadas de **componentes** do vetor $\vec{u}$. Com essa representação, o vetor nulo $\vec{0}$ é escrito como

$$\vec{0} = (0,0,0).$$

Desse modo, podemos reescrever a definição de soma e produto por escalar da seguinte forma:

Definição 4.1. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$. Então:*

1. $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2. $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de $\vec{u}$ como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Vimos que a norma de um vetor é definida como o comprimento de um segmento orientado que o represente. Com a representação de vetores por coordenadas podemos reescrever o conceito de norma da seguinte maneira:

Definição 4.2. *Seja $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ um vetor. A **norma** de $\vec{u}$, denotada por $\left\|\vec{u}\right\|$ é dada por*

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Um vetor de norma 1 é chamado de **vetor unitário**. Dado um vetor não nulo $\vec{u}$ o vetor

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

é um vetor unitário na direção de $\vec{u}$ pois

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right\| = \frac{1}{\left\|\vec{u}\right\|}\left\|\vec{u}\right\| = 1.$$

Exemplo 4.2.1. *Seja $\vec{u} = (-2, 3, 2)$ um vetor. Então*

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2, 3, 2) = \left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

Proposição 4.2.1. *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ um vetor em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\left\|\vec{u}\right\| \neq 0$.*

2. *$\left\|\vec{u}\right\| \neq 0$ se, e somente se, $\vec{u} \neq \vec{0}$.*

3. *$\left\|\alpha\vec{u}\right\| = |\alpha| \left\|\vec{u}\right\|$.*

Prova:

1. Se $\vec{u} \neq (0,0,0) = \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$ ou $z_1 \neq 0$. Daí
$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} > 0.$$

2. $\left\|\vec{u}\right\| = 0$ se, e somente se, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$, isto é, $x_1 = y_1 = z_1 = 0$. Portanto $\vec{u} = \vec{0}$.

3. $\left\|\alpha\vec{u}\right\| = \left\|\alpha(x_1, y_1, \alpha z_1)\right\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2 + (\alpha z_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = |\alpha| \left\|\vec{u}\right\|$.

◇

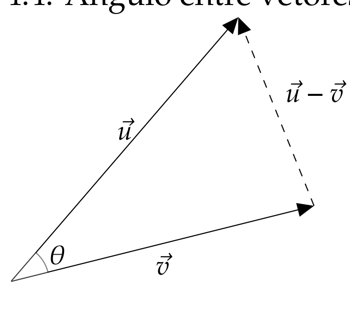
4.0.3 Ângulo entre vetores e produto interno no espaço

Definição 4.3. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. O **ângulo** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pelo ângulo θ determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são representados com a mesma origem.*

Definição 4.4. *Quando o ângulo θ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto, isto é, $\theta = \pi/2$, ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e θ o ângulo entre eles.

Figura 4.4: Ângulo entre vetores em $\mathbb{R}^3$



Definição 4.5. *O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que*

1. *Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

2. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta. \tag{4.1}$$

Proposição 4.5.1. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

1. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos, então*
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

2. *Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$,*
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. *Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

De modo análogo ao caso para vetores no plano, temos:

Teorema 4.1. *O produto interno de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$ é dado por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Exemplos 4.5.1. 1. *Sejam $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Solução: *Temos*

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (2, -3, 1) \cdot (1, 1, 0) = 2 - 3 + 0 = -1 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{14}, \ \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{28}}. \end{aligned}$$

Assim, $\theta = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{28}}\right)$.

2. *Encontre um vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 2)$ e tal que $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$, onde $\vec{w} = (1, 1, -1)$.*

Solução: *Como* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ *e* $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ *obtemos o sistema*

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -1/5 - z/5$ *e* $y = -4/5 + 6z/5$. *Fazendo* $z = 0$, *obtemos* $\vec{u} = (-1/5, -4/5, 0)$.

Proposição 4.5.2. *Quaisquer que sejam os vetores* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ *e qualquer que seja o número real* λ *temos*

(i) $\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

(ii) $\langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(iv) *Se* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *então* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$.

Prova:

(i)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle &= \langle \vec{u}, (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= (\lambda x_1)y_2 + (\lambda y_1)y_2 + (\lambda z_1)z_2 \\ &= \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= \lambda(x_1y_2) + \lambda(y_1y_2) + \lambda(z_1z_2) \\ &= \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(iv) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$ ou $z_1 \neq 0$. Daí $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 0$, como queríamos.

$\diamond$

Observação 4.5.1. *(a) As propriedades (i) e (ii) da Proposição 4.5.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores:*

$$\langle \vec{u}, (\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}) \rangle = \lambda_1(\langle \vec{u}, \vec{v_1} \rangle) + \lambda_2(\langle \vec{u}, \vec{v_2} \rangle) + \cdots + \lambda_n(\langle \vec{u}, \vec{v_n} \rangle).$$

(b) Na igualdade $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ não podemos concluir que $\vec{v} = \vec{w}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, -5, 3)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ e no entanto $\vec{v} \neq \vec{w}$. Mas podemos concluir que $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

(c) De $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ não podemos concluir que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 4, 0)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e no entanto $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Proposição 4.5.3. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores.*

1. $| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle | \leq \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|$ [Desigualdade de Scharwz]

2. $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ [Desigualdade Triangular]

Prova: Análoga à prova da Proposição 1.9.3. $\diamond$

4.0.4 Produto Vetorial

Dados vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ queremos encontrar um vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ que seja simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Para isso devemos ter $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

Podemos reescrever este último sistema como

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}. \tag{4.2}$$

Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, daí pelo menos um dos determinantes

$$d_{ab} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad d_{ac} = \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_{bc} = \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

é diferente de zero. Suponha então que $d_{ab} \neq 0$. Usando a Regra de Cramer, a solução do sistema (4.2) é dada por

$$x = \frac{1}{d_{ab}} \det\begin{pmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{pmatrix} = \frac{-z}{d_{ab}} \det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}.$$

Analogamente, obtemos

$$y = \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}.$$

Logo $\vec{w}$ é dado por

$$\vec{w} = \left(\frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}, \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}, z\right),$$

isto é, existem infinitos vetores $\vec{w}$ que são simultaneamente ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Fazendo $z = d_{ab}$, obtemos que uma solução para o sistema (4.2) é dada por

$$\vec{w} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2). \tag{4.3}$$

O vetor $\vec{w}$ dado por (4.3) é chamado de **produto vetorial** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ e é denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

Um método alternativo para determinar o vetor $\vec{w}$ é o seguinte: denote por

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1).$$

Então qualquer vetor $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1) = a_1(1,0,0) + b_1(0,1,0) + c_1(0,0,1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}.$$

Dados vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, seja $\vec{w}$ o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Considere o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} &= b_1c_2\vec{i} + c_1a_2\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - b_1a_2\vec{k} - c_1b_2\vec{i} - a_1c_2\vec{j} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} + (c_1a_2 - c_2a_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1) = \vec{w}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.1. *Sejam $\vec{u} = (-1, 2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 3, 5)$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.*

Solução: *Temos*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Logo $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 9, -5)$. Agora,

$$\vec{v} \times \vec{u} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Portanto $\vec{v} \times \vec{u} = (2, -9, 5) = -\vec{u} \times \vec{v}$.

Proposição 4.5.4. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos*

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

(b) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \parallel \vec{v}$;

(c) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$;

(d) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Prova: Seguem diretamente das propriedades do determinante. $\diamond$

Observação 4.5.2. *O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela regra da mão direita: se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é θ, giramos o vetor $\vec{u}$ de um ângulo θ até que coincida com o vetor $\vec{v}$ e acompanhamos o movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.*

Proposição 4.5.5. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço. Então*

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2. \tag{4.4}$$

Prova: Seja $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Basta calcular $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|^2$ e $\left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ e comparar os termos. $\diamond$

Proposição 4.5.6. *Quaisquer que sejam os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^3$, tem-se*

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Prova: Da Proposição 4.5.5 e usando a equação (4.1) temos

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|^2 &= \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \\
&= \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 - (\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \cos \theta)^2 \\
&= \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
&= \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen} \theta$$

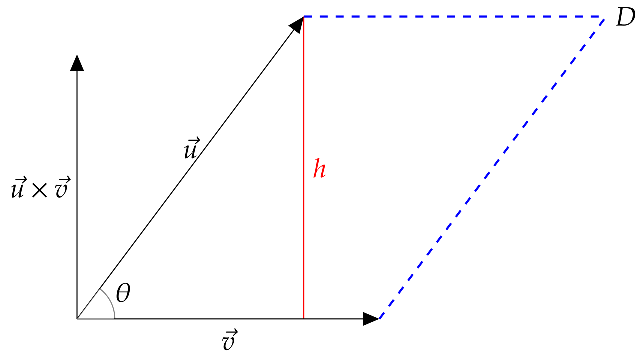
pois $0 \leq \theta \leq \pi$. $\diamond$

Agora considere o paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

A área $\mathcal{A}$ desse paralelogramo é dado Por

$$\mathcal{A} = bh.$$

Figura 4.5: Interpretação geométrica do produto vetorial



Neste caso $b = \left\|\vec{u}\right\|$ e $h = \left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen}\theta$. Logo

$$\mathcal{A} = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen}\theta = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|.$$

Portanto o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo 4.5.2. *Calcule a área do triângulo de vértices $A(3, 2, 0)$, $B(0, 4, 3)$ e $C(1, 0, 2)$.*

Solução: *Note que a área do triângulo é metade da área do paralelogramo. Assim seja*

$$\vec{u} = \vec{CA} = (2, 2, -2)$$
$$\vec{v} = \vec{CB} = (-1, 4, 1)$$

daí a área do triângulo será

$$\mathcal{A} = \frac{\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|}{2}$$

e como $\vec{u} \times \vec{v} = (10, 0, 10)$ temos $\mathcal{A} = 5\sqrt{2}$.

4.0.5 Produto Misto

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Como $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$ podemos calcular seu produto interno com qualquer outro vetor $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$. O número real

$$\langle(\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w}\rangle \tag{4.5}$$

é chamado de **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ temos

$$\begin{aligned}\langle(\vec{u}\times\vec{v}),\vec{w}\rangle &= \langle(b_1c_2 - c_2b_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1),(a_3,b_3,c_3)\rangle\\ &= (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 + (a_2c_1 - a_1c_2)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} &= (-1)^{3+1}a_3\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{pmatrix}\\ &+ (-1)^{3+2}b_3\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{pmatrix} + (-1)^{3+3}c_3\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\\ &= a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_1 - a_2b_1).\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle(\vec{u}\times\vec{v}),\vec{w}\rangle = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Proposição 4.5.7. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Então*

(a) $\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\vec{v}\times\vec{w},\vec{u}\rangle$

(b) $\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle$

Prova: Segue diretamente das propriedades de determinantes. ◊

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Considere o paralelepípedo definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

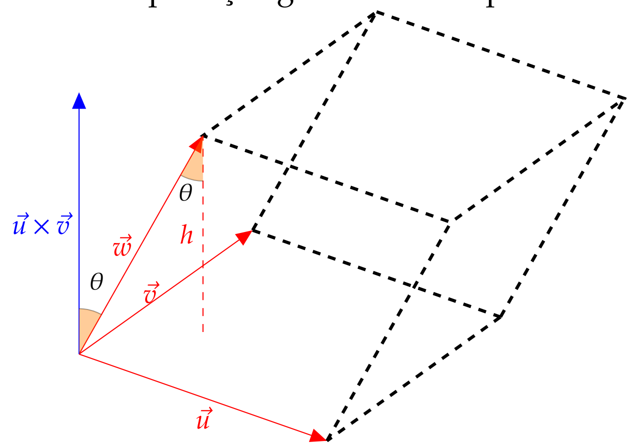
A altura h é dada por

$$h = \left\|\vec{w}\right\| |\cos\theta| = \left\|\vec{w}\right\| \frac{|\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle|}{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| \left\|\vec{w}\right\|} = \frac{|\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle|}{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|}.$$

O volume do paralelepípedo é

$$\mathcal{V} = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| h$$

Figura 4.6: Interpretação geométrica do produto misto



daí

$$\mathcal{V} = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| \frac{|\langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle|}{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|},$$

isto é,

$$\mathcal{V} = |\langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle|. \tag{4.7}$$

Exemplo 4.5.3. *Os pontos $P(0,1,1)$, $Q(1,0,2)$, $R(1,-2,0)$ e $S(-2,2,-2)$ definem um paralelepípedo? Em caso afirmativo, qual o seu volume?*

Solução: *Se os pontos P, Q, R e S definirem um paralelepípedo, seu volume deverá ser diferente de zero. Assim considere os vetores*

$$\vec{u} = \vec{PQ} = (1,-1,1)$$
$$\vec{v} = \vec{PR} = (1,-3,-1)$$
$$\vec{w} = \vec{PS} = (-2,1,-3).$$

Assim temos

$$\langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo P, Q, R e S não definem um paralelepípedo.

CAPÍTULO 5

RETA E PLANO NO ESPAÇO

5.1 Equações do Plano

Da Geometria plana, sabemos que todo plano π contém pelo menos três pontos não colineares, digamos A, B e C. Assim considere os vetores

$$\vec{u} = \vec{AB}$$
$$\vec{v} = \vec{AC}.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, então podemos considerar o vetor $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, na Figura 5.1 vemos que um ponto D pertence ao plano π se, e somente se, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{AD}$. Logo um plano π é um conjunto de vetores perpendiculares a um dado vetor.

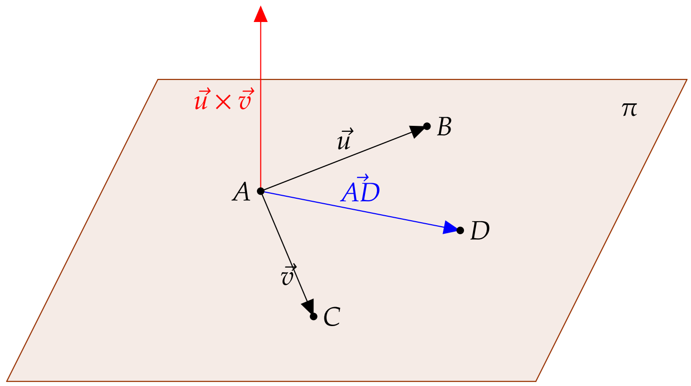
Fixe então um ponto P_0 em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ um vetor. Passando por P_0 existe um único plano π perpendicular ao vetor $\vec{v}$. Assim um ponto P do espaço pertence ao plano π se, e somente se, $\vec{P_0P} \perp \vec{v}$, isto é,

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0. \tag{5.1}$$

Sejam $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P(x, y, z)$ pontos em $\mathbb{R}^3$. Logo $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e então da equação (5.1) obtemos

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0. \tag{5.2}$$

Figura 5.1: Equação do plano



A equação (5.2) é chamada de **equação cartesiana do plano** π. O vetor $\vec{v}$ é chamado de **vetor normal** ao plano π.

Exemplos 5.0.2. *Encontre a equação do plano π nas seguintes situações:*

1. *O vetor normal é $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e o ponto de π é $P_0(1, 3, -1)$.*

   Solução: *Se $P(x, y, z)$ pertence a π, então*

$$\begin{aligned}
&\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0\\
&\langle (x-1, y-3, z+1), (1, 2, -1) \rangle = 0\\
&x - 1 + (y-3)2 + (z+1)(-1) = 0.
\end{aligned}$$

Logo a equação do plano procurado é

$$x + 2y - z - 8 = 0.$$

2. *O vetor normal é* $\vec{v} = (0, 0, 1)$ *e* $P_0(0, 0, 0)$.

   Solução: *Se* $P(x, y, z)$ *pertence a* π, *então*

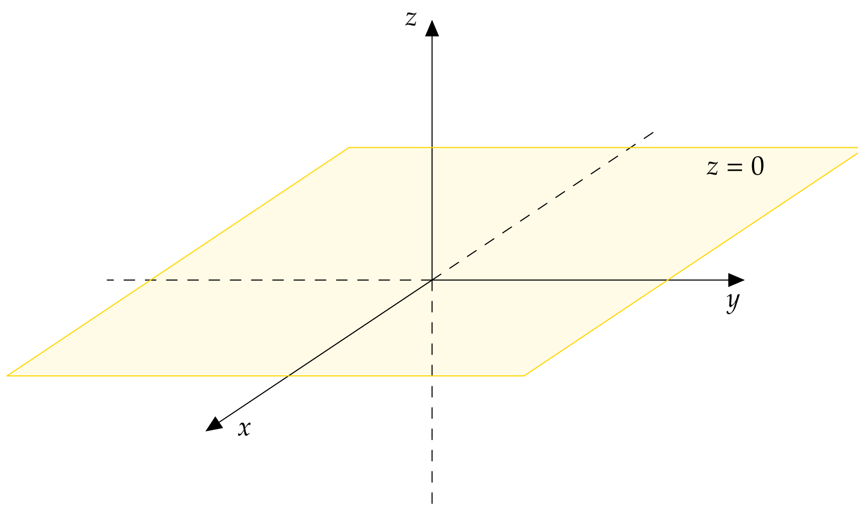
$$\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$
$$\langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

   Logo a equação do plano procurado é

$$z = 0.$$

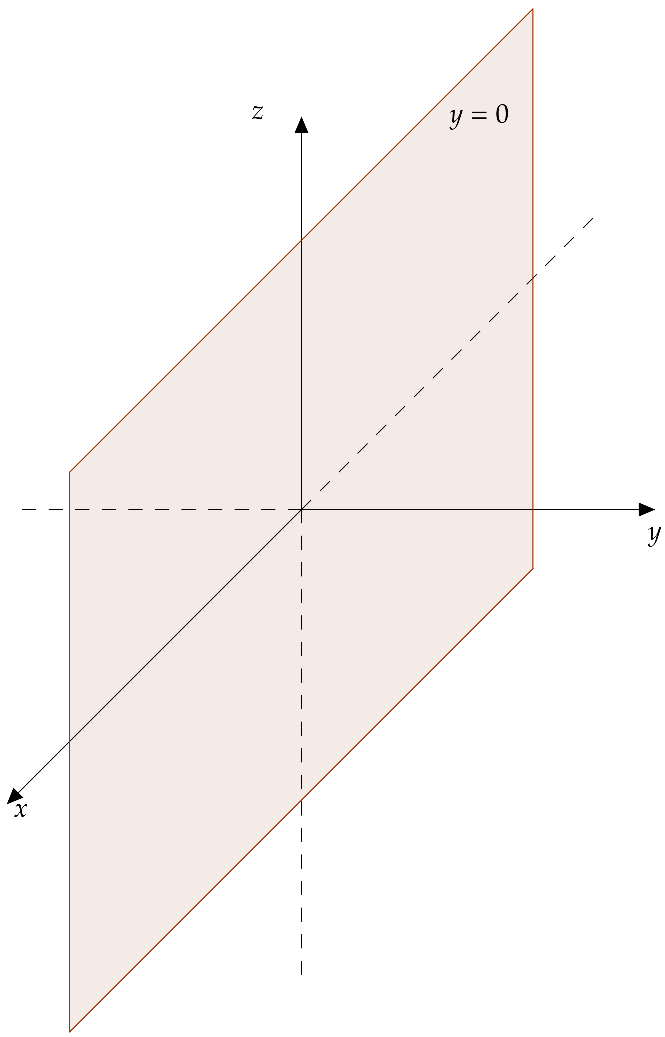
Agora, se $\vec{v} = (0, 1, 0)$ *e* $P_0(0, 0, 0)$, *então a equação do plano será* $y = 0$. *Agora, se*

Figura 5.2: Plano $z = 0$



$\vec{v} = (1, 0, 0)$ *e* $P_0(0, 0, 0)$, *então a equação do plano será* $x = 0$.

Figura 5.3: Plano $y = 0$

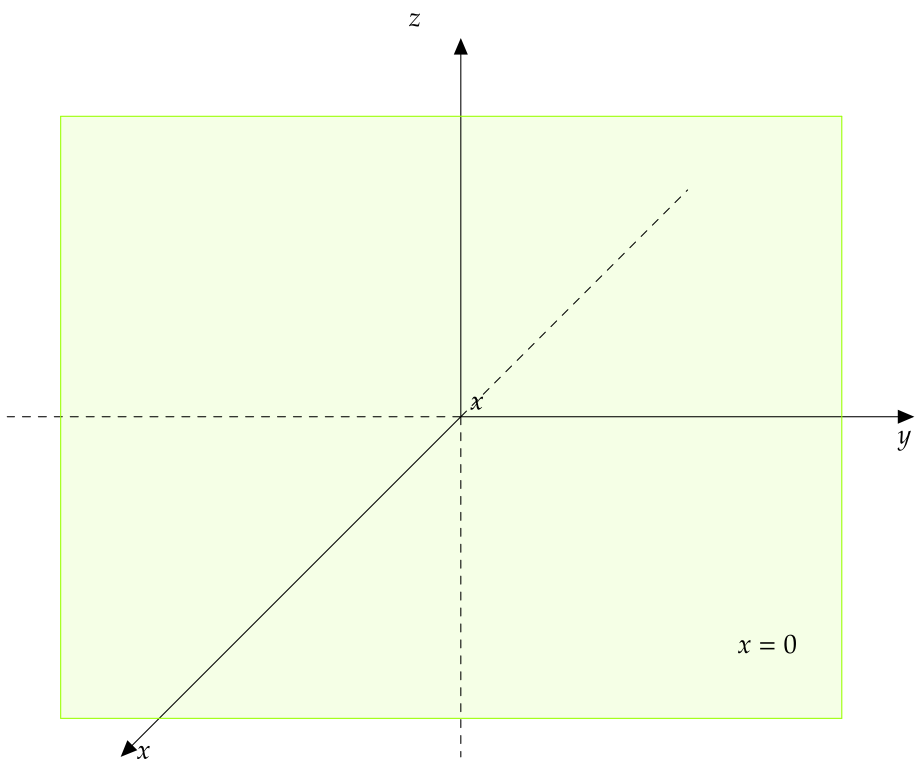


3. *Passando pelos pontos* $A(3,1,-2)$, $B(5,2,1)$ *e* $C(2,0,2)$.

   Solução: *Sejam*

$$\vec{u} = \vec{AB} = (2,1,3)$$
$$\vec{v} = \vec{AC} = (-1,-1,4).$$

Figura 5.4: Plano $x = 0$



Um vetor normal ao plano é dado por $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Assim

$$\vec{w} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{k} + 3\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Assim $\vec{w} = (7, -11, -1)$ e portanto a equação do plano é

$$7x - 11y - z - 12 = 0.$$

Dada uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde a, b e c não são simultaneamente nulos, existe um plano π representado por esta equação? A resposta é afirmativa. Suponha que $a \neq 0$. Tome $\vec{v} = (a, b, c) \neq 0$ e $P_0(-d/a, 0, 0)$. A equação do plano com vetor normal $\vec{v}$ e passando por P_0 é dada por

$$\begin{aligned}
&\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0 \\
&\left\langle \left(x + \frac{d}{a}, y, z \right), (a, b, c) \right\rangle = 0 \\
&ax + by + cz + d = 0.
\end{aligned}$$

Portanto qualquer equação da forma $ax + by + cz + d = 0$, com a, b e c não simultaneamente nulos define um plano.

Sejam π_1 e π_2 dois planos dados por

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\
\pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.
\end{aligned}$$

onde os vetores normais de π_1 e π_2 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\vec{v_1} &= (a_1, b_1, c_1) \\
\vec{v_2} &= (a_2, b_2, c_2).
\end{aligned}$$

Os planos π_1 e π_2 são **paralelos** se, e somente se, $\vec{v_1} \,//\, \vec{v_2}$. Para que π_1 e π_2 sejam iguais devemos ter $\vec{v_1} \,//\, \vec{v_2}$ e dados $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$ o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ deve ser tal que $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v_1}$ ou $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v_2}$.

Exemplo 5.0.4. *Dados os seguintes planos, determinar quais são iguais ou paralelos dois a dois:*

$$\begin{aligned}
&\pi_1 : 2x - y + 3z = 0 \quad \pi_2 : x - y - 3 = 0 \\
&\pi_3 : y - 2x - 3z = 2 \quad \pi_4 : 2x - 2y = 6 \\
&\pi_5 : x = 0.
\end{aligned}$$

Solução: *Os vetores normais a cada plano são*

$$\begin{aligned}
&\vec{v_1} = (2, -1, 3) \quad \vec{v_2} = (1, -1, 0) \\
&\vec{v_3} = (-2, 1, -3) \quad \vec{v_2} = (2, -2, 0) \\
&\vec{v_5} = (1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Como $\vec{v_1} = -\vec{v_3}$ *então* $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$. *Agora* $P_1(0,0,0) \in \pi_1$ *e* $P_2(0,2,0) \in \pi_3$. *Daí*

$$\langle \vec{P_1P_2}, \vec{v_1} \rangle = \langle (0,2,0),(2,-1,3) \rangle = -2 \neq 0.$$

Logo π_1 *e* π_3 *são paralelos e distintos. Agora, como* $\vec{v_4} = 2\vec{v_2}$ *então* $\vec{v_2} \parallel \vec{v_4}$. *Mas* $P_1(3,0,0) \in \pi_2$ *e* $P_2(0,-3,0) \in \pi_4$. *Daí*

$$\langle \vec{P_1P_2}, \vec{v_2} \rangle = \langle (-3,-3,0),(1,-1,0) \rangle = 0.$$

Logo $\pi_2 = \pi_4$.

Os demais planos não são paralelos.

5.2 Equações da Reta

Seja $\vec{v}$ um vetor e A um ponto. Sabemos que a reta r passando por A e paralela ao vetor $\vec{v}$ tem equação

$$\vec{AP} = t\vec{v} \tag{5.3}$$

onte $t \in \mathbb{R}$ e P é um ponto qualquer de r. Sendo A um ponto em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}$ um vetor de $\mathbb{R}^3$ temos

$$\begin{aligned} A &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v} &= (a, b, c). \end{aligned}$$

Daí um ponto $P(x,y,z)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a,b,c).$$

Logo $P(x,y,z)$ pertence à reta r, se e só se, $P(x,y,z)$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tc \end{cases} \tag{5.4}$$

Tais equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta r. O vetor $\vec{v}$ é chamado de **vetor diretor** de r.

Exemplo 5.0.5. *As equações paramétricas da reta r passando por $P_0(-3, 3/2, 4)$ e paralela ao vetor $\vec{v} = (-6, 1, 4)$ são*

$$\begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = 3/2 + t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga ao casa do plano, se $\vec{v} = (a, b, c)$ é tal que $abc \neq 0$, então podemos reescrever (5.4) como

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são chamadas de **equações na forma simétrica** da reta r.

5.3 Interseções

5.3.1 Entre retas

Considere duas retas r e s de equações

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x = x_1 + sd \\ y = y_1 + se \\ z = z_1 + sf \end{cases} ; t,\ s \in \mathbb{R}.$$

Os vetores diretores de r e s são $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ respectivamente.

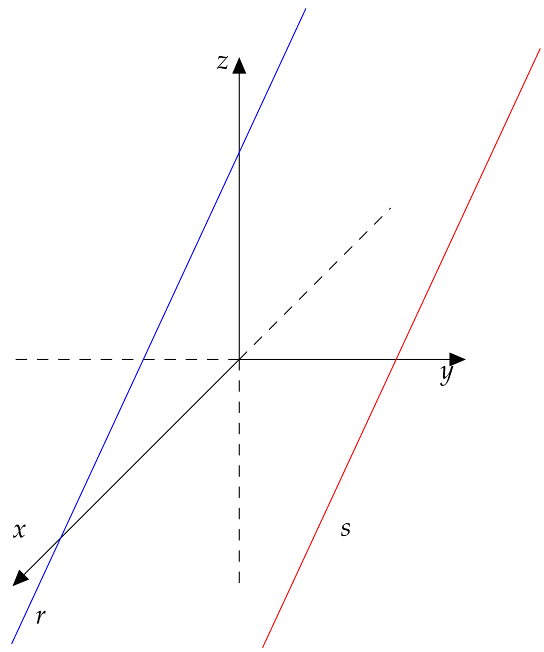
1. Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então r e s são paralelas ou coincidentes. Elas serão coincidentes se, e somente se, possuirem algum ponto em comum.

2. Se os vetores diretores não são paralelos, temos duas possibilidades. Considere os pontos $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $P_1(x_1, y_1, z_1) \in s$.

   (a) Se $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão no mesmo plano, isto é, $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ então r e s são concorrentes.

   (b) Se $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão planos diferentes, isto é, $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \neq 0$ então r e s são chamadas de **retas reversas**.

Figura 5.5: Retas Paralelas



Exemplos 5.0.3. *Determine se os seguintes pares de retas são paralelas, concorrentes ou reversas:*

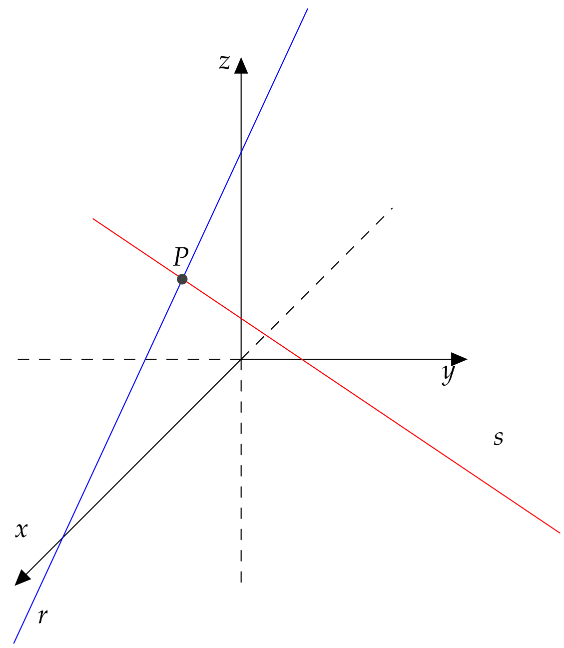
1. $r: \dfrac{x-2}{2} = y+3 = \dfrac{z-2}{3}$; $s: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{6}$

   Solução: *Como* $\vec{u} = (2,1,3)$ *e* $\vec{v} = (4,2,6)$ *são vetores diretores de* r *e* s *respectivamente, então* $\vec{u} \,//\, \vec{v}$. *Mas* $P_0(0,-3,2) \in s$ *e* $P_0 \notin r$, *logo* r *e* s *são paralelas e distintas.*

2. $$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

   Solução: *Como* $\vec{u} = (2,2,1)$ *e* $\vec{v} = (1,1,0)$ *são vetores diretores de* r *e* s *respectivamente,*

Figura 5.6: Retas Concorrentes



então r e s são concorrentes ou reversas. Igualando as equações de r e s obtemos

$$1 + 2t = s$$
$$1 + 2t = s$$
$$1 + t = 0$$

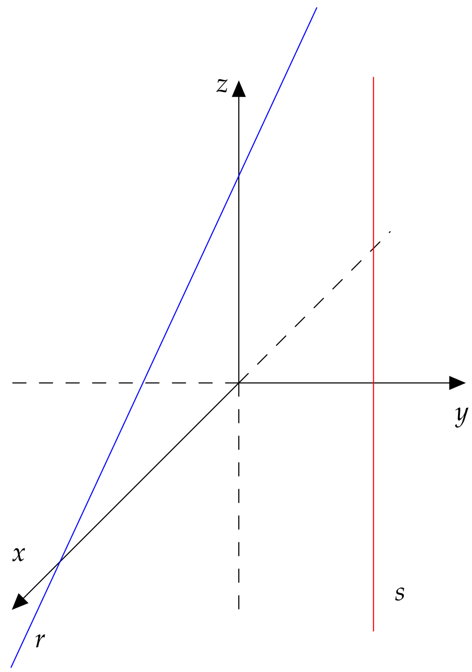
donde $t = -1$ *e* $s = -1$. *Portanto r e s são concorrentes e o ponto de interseção é* $P(-1, -1, 0)$.

3.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

Solução: *Como* $\vec{u} = (2, 1, 2)$ *e* $\vec{v} = (1, 1, 2)$ *são vetores diretores de r e s respectivamente,*

Figura 5.7: Retas Reversas



então r e s são concorrentes ou paralelas. Igualando as equações de r e s obtemos

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ 2 + t = 1 + s \\ -1 + 2t = -1 + 2s \end{cases} \tag{5.5}$$

Da primeira e segunda equação obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2t - s = 1 \\ t - s = -1 \end{cases}$$

Cuja solução é $t = 2$ *e* $s = 3$. *Substituinto esse valores na terceira equação de* (5.5) *obtemos* $3 \neq 5$. *Portanto r e s são reversas.*

5.3.2 Entre planos

Dados três planos π_1, π_2 e π_3 de equações

$$\begin{aligned} \pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \pi_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}$$

A interseção entre eles será constituída pelos pontos cujas coordenadas sejam as soluções do sistema forma pelas equações de π_1, π_2 e π_3 simultaneamente, ou seja, devem ser soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Exemplos 5.0.4. *Encontre a interseção entre os planos:*

1. $\pi_1 : x = y$, $\pi_2 : 2x - z = 0$ *e* $\pi_3 : 3x + 2y + z + 3 = 0$

   Solução: *A interseção será dada pela solução do sistema*

   $$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x + 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

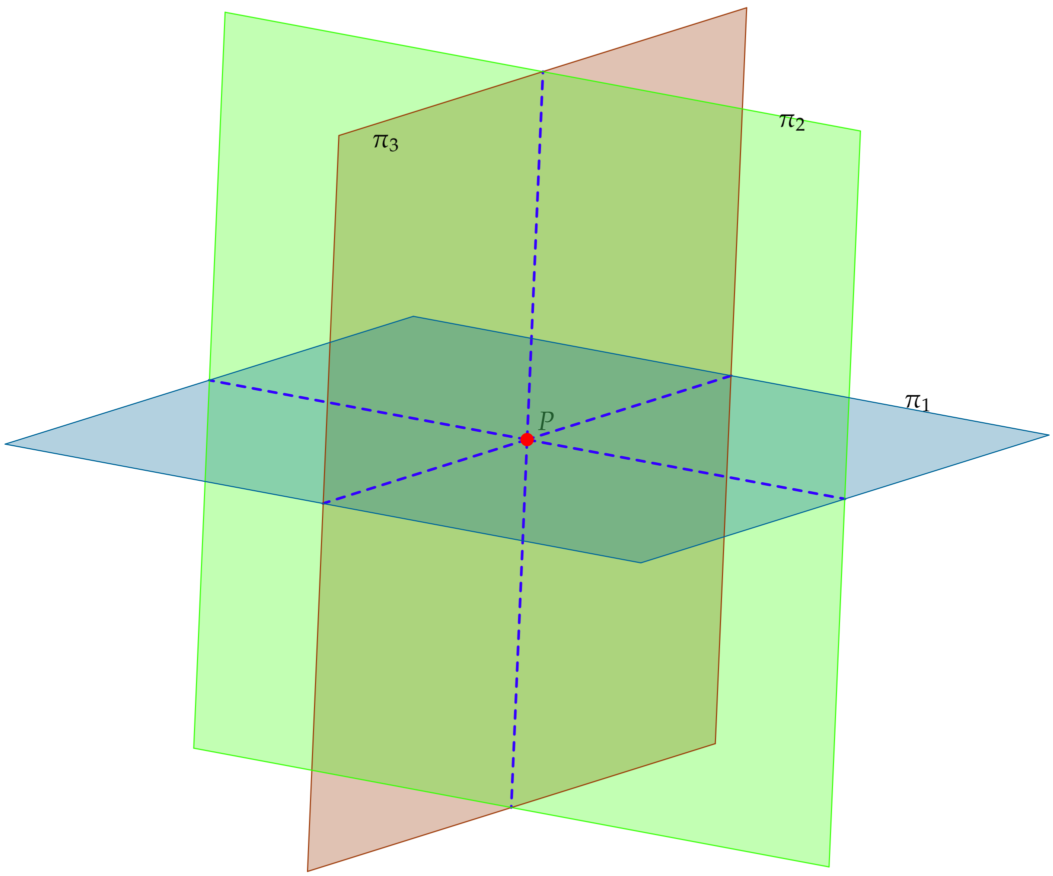
   Resolvendo tal sistema obtemos que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{(-3/7, -3/7, -6/7)\}$.

2. $\pi_1 : 2x + y = 1$, $\pi_2 : x - y + z = 0$

   Solução: *A interseção será dada pela solução do sistema*

   $$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Figura 5.8: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$



Resolvendo tal sistema obtemos $z = 1 - 3x$ e $y = 1 - 2x$. Logo

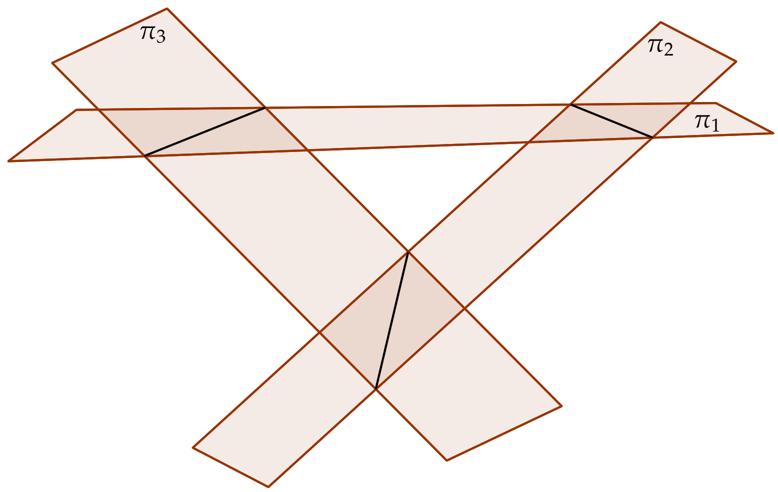
$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(x, 1 - 2x, 1 - 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Fazendo $x = t$ podemos escrever

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

que é a equação de uma reta passando pelo ponto $P_0(0, 1, 1)$ e com vetor diretor $\vec{v} = (1, -2, -3)$.

Figura 5.9: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$



5.3.3 Entre retas e planos

Para encontrar a interseção de uma reta r com um plano π, basta resolver o sistema formado pelas equações de r e de π. Se o sistema tiver uma única solução $P_0(x_0, y_0, z_0)$, então $r \cap \pi = \{P_0\}$. Se o sistema for indeterminado então $r \subset \pi$ e se o sistema for impossível então $r \cap \pi = \emptyset$ e $r \parallel \pi$.

Exemplos 5.0.5. *Encontre a interseção entre a reta r e o plano π nos seguintes casos:*

1. $r : x = t + 1, y = 1, z = 1$ *e* $\pi : 2x - y = 3.$

   Solução: *Substituindo as equações da reta na do plano obtemos $t = 1$. Logo $r \cap \pi = \{(2, 1, 1)\}$.*

2. $$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} ;$$

   $\pi : x - 2y + z = 5.$

Figura 5.10: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$

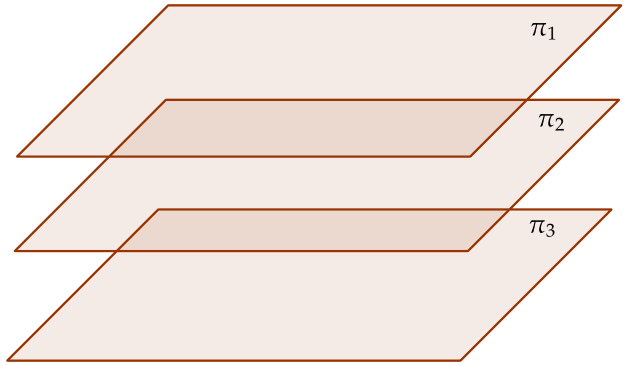
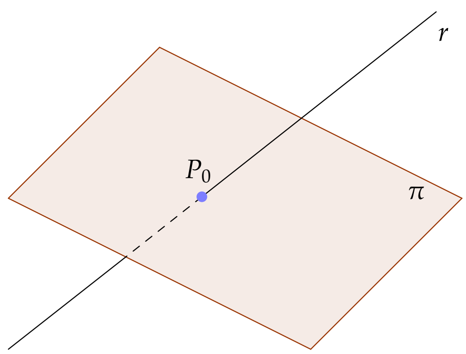


Figura 5.11: $r \cap \pi = \{P_0\}$



Solução: *O sistema*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

não tem solução. Logo $r \cap \pi = \emptyset$.

3.

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad ;$$

Figura 5.12: $r \cap \pi = \emptyset$

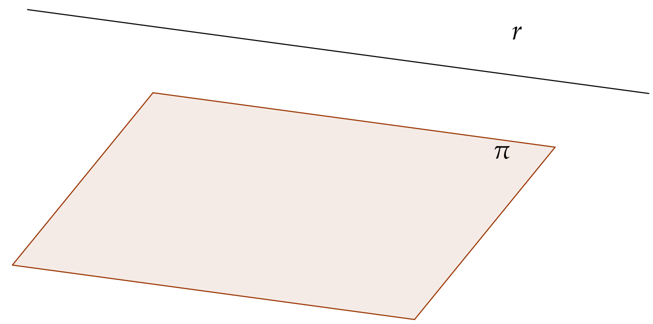
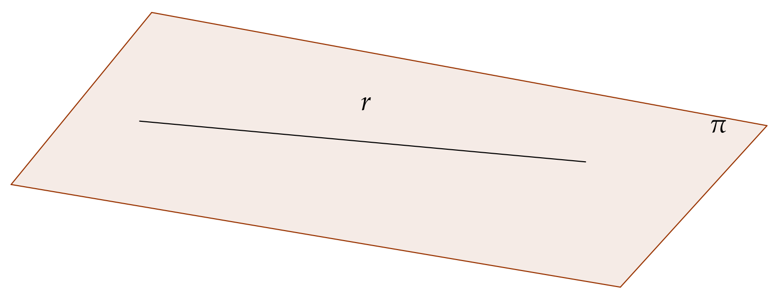


Figura 5.13: $r \subset \pi$



$\pi : x - y + 3z = -1.$

Solução: *O sistema*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

tem solução dada por $x = -1 + 3z$ *e* $y = -2 + 6z$. *Logo*

$$r \cap \pi : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = t \end{cases},$$

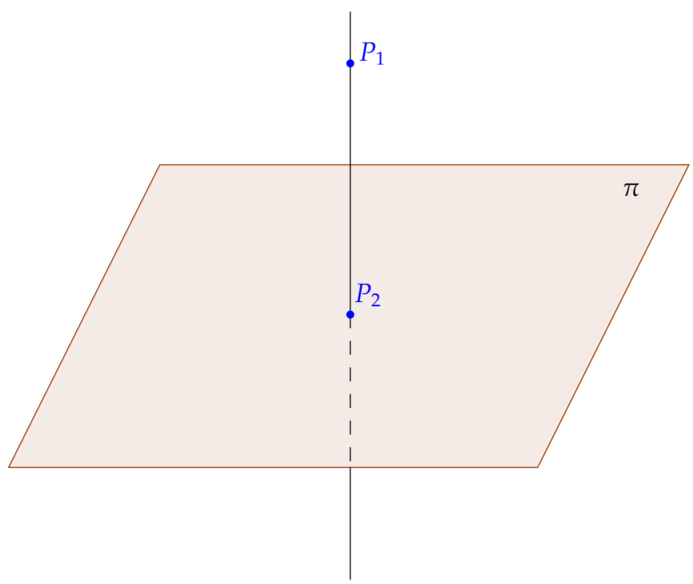
ou seja, $r \subset \pi$.

5.4 Distâncias

5.4.1 Entre ponto e plano

Seja $P_1(x_1, y_1, z_1)$ um ponto e π um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$. Seja r a reta que

Figura 5.14: Distância entre ponto e plano



contém o ponto P_1 é é perpendicular ao plano π. Denote por $P_2(x_2, y_2, z_2)$ a interseção de π com r. O ponto P_2 é chamado de **projeção ortogonal** de P_1 sobre π. A norma do vetor $\vec{P_1P_2}$ será a distância de P_1 a π, isto é,

$$d(P_1, \pi) = \left\| \vec{P_1P_2} \right\|.$$

Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ o vetor normal de π. Como $\vec{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{P_1P_2}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = t\vec{u}.$$

Logo

$$d(P_1, P_2) = \|t(a, b, c)\| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{5.6}$$

Por outro lado, se $P(x_2, y_2, z_2)$, então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = t(a, b, c)$$

e como $P_2 \in \pi$ devemos ter

$$a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

isto é,

$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{5.7}$$

Substituindo (5.7) em (5.6) obtemos

$$d(P_1, \pi) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right|$$

portanto

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplos 5.0.6. 1. *A distância entre o plano $\pi : 2x + y - z = 4$ e o ponto $P(1, 1, 1)$ será*

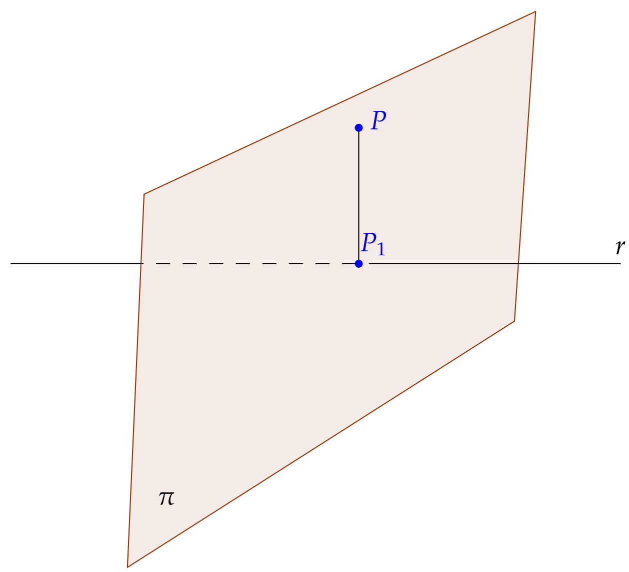
$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 1 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

2. *Calcule a distância entre $\pi_1 : 2x - 3y + z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 5 = 0$.*

   Solução: *Um vetor normal de π_1 e $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e de π_2 é $\vec{v} = (4, -6, 2)$. Como $\vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v}$, então $\pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$ e assim a distância entre π_1 e π_2 é dada pela distância de um ponto de π_1 a π_2, ou o contrário. Tomando $P_1(1, 0, 0) \in \pi_1$ temos*

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{56}}.$$

Figura 5.15: Distância entre ponto e reta



5.4.2 Entre um ponto e uma reta

Seja P um ponto e r uma reta.

Para determinar $d(P, r)$ primeiro construímos um plano π passando por P e com vetor normal paralelo ao vetor diretor de r. Assim

$$d(P, r) = d(P, P_1)$$

onde $P_1 \in \pi \cap r$.

Exemplo 5.0.6. *Determinar a distância do ponto $P(1,2,-1)$ à reta*

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

Solução: *Podemos tomar o vetor $\vec{u} = (2,1,-3)$ como vetor normal ao plano π que contém P. Daí*

$$\pi : 2(x-1) - (y-2) + 3(z-1) = 0$$
$$\pi : 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

A interseção de π com r é dada por

$$2(1+2t) - (5-t) + 3(-2+3t) = 0,$$

isto é, $t = 3/7$ e então $P_1(13/7, 32/7, -5/7) \in \pi \cap r$. Portanto

$$d(P,r) = d(P,P_1) = \sqrt{\left(1 - \frac{13}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{32}{7}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{91}}{7}.$$

5.4.3 Entre retas

Sejam r e s retas. Se $r \parallel s$ então a distância entre r e s é dada pela distância entre um ponto de r e a reta s, ou o contrário. Suponha então que r e s são reversas. Por um ponto P de s tracemos uma reta s' paralela a r.

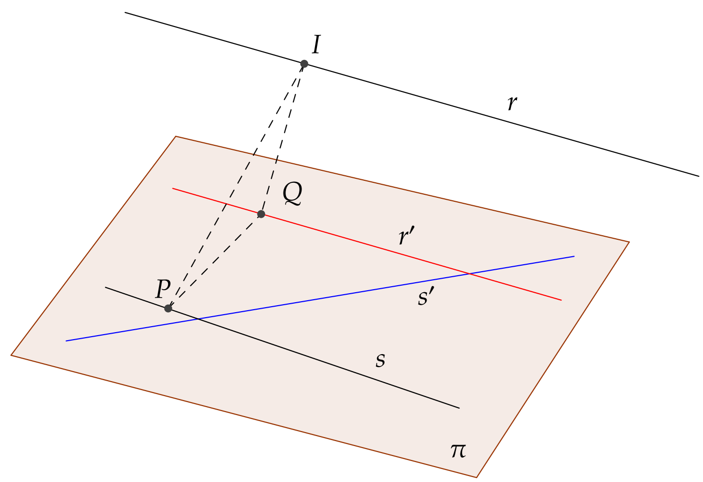
O plano π definido por s e s' é paralelo a r, daí a distância de r a π é constante. Esta constante é **a menor distância** entre r e s. De fato, seja r' uma reta contida em π e paralela a r. Seja I um ponto de r. Por I tracemos um perpendicular a r que a intercepta em um ponto Q. Se P é um ponto qualquer de s temos

$$\overline{IP}^2 = \overline{IQ}^2 + \overline{QP}^2$$

pois o triângulo IQP é retângulo em Q. Logo

$$\overline{IP}^2 \geq \overline{IQ}^2,$$

Figura 5.16: Distância entre retas reversas



ou seja,

$$\overline{IP} \geq \overline{IQ}.$$

Mas $\overline{IQ}$ é a distância de π a r, logo segue da última desigualdade que a distância de π a r é menor ou igual a distância entre um ponto de r e um ponto de s. Portanto

$$d(r,s) = d(r,\pi).$$

Exemplo 5.0.7. *Determine a distância entre as retas*

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -5 + 4s \\ y = 6 - 5s \\ z = 4 + 3s. \end{cases}$$

Solução: *Os vetores diretores de r e s são $\vec{u} = (1,-3,2)$ e $\vec{v} = (4,-5,3)$, respectivamente. Logo r e s não são paralelas. Agora, o sistema*

$$\begin{cases} 2 + t = -5 + 4s \\ 1 - 3t = 6 - 5s \\ 1 + 2t = 4 + 3s \end{cases}$$

e assim r e s são reversas. Assim pelo ponto $(-5, 6, 4)$ *de s tracemos um reta s′ paralela a r. Daí*

$$s' : \begin{cases} x = -5 + \alpha \\ y = 6 - 3\alpha \\ z = 4 + 2\alpha. \end{cases}$$

O vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ *é perpendicular ao plano definido por s e s′. Como* $\vec{w} = (1, 5, 7)$ *então o plano* π *contendo s e s′ é dado por*

$$\pi : x + 5y + 7z - 53 = 0.$$

Finalmente, seja $P(2, 1, 1) \in r$*. Então*

$$d(r, s) = d(P, \pi) = \frac{|2 + 5 + 7 - 53|}{\sqrt{1 + 5^2 + 7^2}} = \frac{39}{\sqrt{75}}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Boulos, P.; Camargo, I., *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, 3^a edição, São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[2] Machado, A. S., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, 2^a Edição, Atual Editora, 1980.

[3] Reis, G. L.; Silva, V. V., *Geometria Analítica*, 2^a Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[4] Santos, R. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, UFMG, 2012, Disponível em http://www.mat.ufmg.br/~regi

[5] Santos, F. J.; Ferreira, S. F., *Geometria Analítica*, 1^a Edição, Bookman, Companhia Editora, 2009.

[6] Steinbruch, A.; Winterle, P., *Geometria Analítica*, 1^a Edição, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[7] Valladares, R. J. C., *Geometria Analítica do Plano e do Espaço*, LTC, Rio de Janeiro, 1990.

ÍNDICE REMISSIVO