



Notas de Aula 2/2014¹

José Antônio O. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília - UnB

¹ Este texto está licenciado sob uma **Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil** http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt_BR.

SUMÁRIO

1	Quádricas	7
1.1	Esfera	7
1.2	Elipsóide	8
1.3	Parabolóides	9
1.4	Hiperbolóides	11
	Índice Remissivo	19

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	8
1.2	Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	9
1.3	Contornos do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pelo plano $z = k$	14
1.4	Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	15
1.5	Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	16
1.6	Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	17
1.7	Hiperbolóide duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	18

CAPÍTULO 1

QUÁDRICAS

Em \mathbb{R}^3 estamos interessados em objetos definidos por uma equação de segundo grau em x , y e z da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0. \quad (1.1)$$

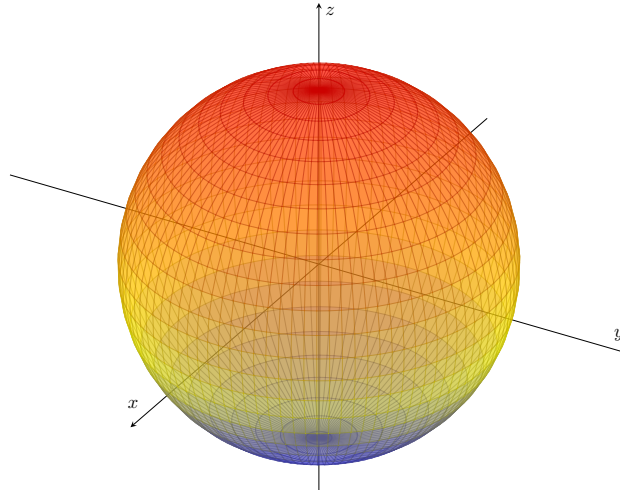
O conjunto de pontos em \mathbb{R}^3 satisfazendo uma equação da forma (1.1) é chamado de uma **quádrica**. Observe que pelo menos um dos números a, b, c, d, e ou f deve ser não nulo.

Nosso principal objetivo será tentar simplificar a equação (1.1) de modo que seja possível identificar que objeto tal equação representa.

1.1 Esfera

Definição 1.1. *Uma esfera é uma quádrica com equação na forma*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (1.2)$$

Figura 1.1: Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 

1.2 Elipsóide

Definição 1.2. Um *elipsóide* é uma quádrlica descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.3)$$

onde os números reais a , b e c são positivos e pelo menos dois deles são distintos.

Considere o plano $\pi : z = k$. Qual a interseção de π com o elipsóide de equação (1.3)? A interseção é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k, \end{cases}$$

isto é, pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}. \quad (1.4)$$

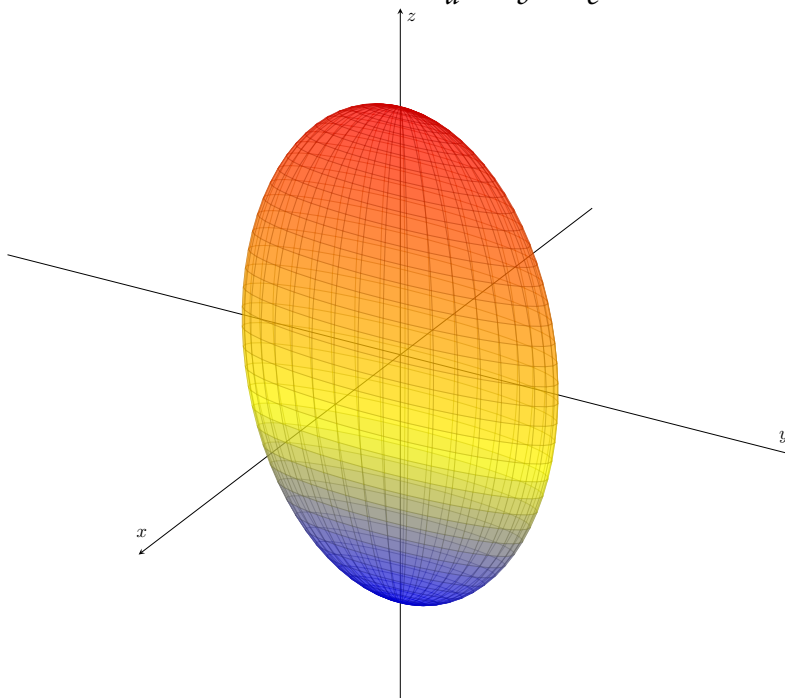
Se $k^2 > c^2$, então a equação (1.4) não admite solução pois $1 - k^2/c^2 < 0$. Assim seja $k^2 \leq c^2$, isto é, $-c \leq k \leq c$. Se $k = c$, então a interseção é o ponto $(0, 0, c)$ e se $k = -c$ é o ponto $(0, 0, -c)$. Então seja $-c < k < c$ e denote $p = 1 - k^2/c^2$. Podemos reescrever (1.4) como

$$\frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1. \quad (1.5)$$

Se $a = b$, então a equação (1.5) é uma circunferência. Se $a \neq b$, então a equação (1.5) descreve uma elipse.

De modo análogo, se tomarmos $\pi : x = k$ ou $\pi : y = k$, as interseções serão sempre ou conjunto vazio ou um ponto ou uma circunferência ou uma elipse.

Figura 1.2: Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



1.3 Parabolóides

Definição 1.3. Sejam a e b números reais positivos a quádrlica descrita de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

é chamada de:

1. um *parabolóide elíptico* se $a \neq b$;
2. um *parabolóide de rotação* se $a = b$;

A interseção do parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

com o plano $\pi : x = k$ é dada por

$$z = \frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

que é uma parábola. O mesmo ocorrerá com o plano $\pi : y = k$.

Agora a interseção com $z = k$ é dada forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k.$$

Se $k < 0$, então a interseção é vazia. Se $k = 0$, a interseção é o ponto $(0, 0, 0)$. Se $k > 0$, precisamos analisar o que ocorre com a e b : se $a \neq b$, então obtemos uma elipse. Se $a = b$, então a interseção é uma circunferência.

Definição 1.4. *Sejam a e b números reais positivos a quádrlica descrita de equação*

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

é chamada de um um parabolóide hiperbólico,

A interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $\pi : z = k$ é dada por

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = k \\ z = k \end{cases}.$$

Se $k = 0$, então obtemos

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) = 0$$

que trata-se de duas retas concorrentes na origem:

$$r : \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Se $k \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{y^2}{kb^2} - \frac{x^2}{ka^2} = 1$$

que é uma hipérbole.

A interseção com o plano $\pi : y = k$ é dada por

$$z = \frac{k^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

que é uma parábola. O mesmo ocorre com o plano $\pi : x = k$.

1.4 Hiperbolóides

Definição 1.5. *Um hiperbolóide de uma folha é uma quádrlica descrita pela equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde os números reais a, b e c são positivos e pelo menos dois deles são distintos.

Para o caso do hiperbolóide de uma folha a interseção com o plano $\pi : z = k$ é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k. \end{cases}$$

Denotando $p = 1 + k^2/c^2 > 0$ podemos escrever

$$\frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1. \quad (1.6)$$

Se $a = b$, então a equação (1.6) descreve uma circunferência. Se $a \neq b$, então a equação (1.6) descreve uma elipse.

Agora a interseção com o plano $\pi : y = k$ é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}. \quad (1.7)$$

Se $k^2 = b^2$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

isto é,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right).$$

Logo a interseção de π com o hiperbolóide de uma folha é o par de retas concorrentes

$$r : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = k \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = k \end{cases}.$$

Se $k^2 \neq b^2$, então fazendo $p = 1 - k^2/b^2$ podemos escrever a equação (1.7) como

$$\frac{x^2}{pa^2} - \frac{z^2}{pc^2} = 1$$

obtendo-se uma hipérbole.

De modo análogo, obtemos as mesmas interseções se considerarmos o plano $\pi : x = k$.

Definição 1.6. *Um hiperbolóide de duas folhas é uma quádrlica descrita pela equação*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde os números reais a , b e c são positivos e pelo menos dois deles são distintos.

A interseção do hiperbolóide de duas folhas com a plano $\pi : z = k$ é dada por

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Denotando $p = 1 + k^2/c^2$ podemos escreve a equação anterior como

$$\frac{y^2}{pb^2} - \frac{x^2}{pa^2} = 1$$

que representa uma hipérbolo.

A interseção com o plano $\pi : x = k$ é dada por

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}.$$

e fazendo $p = 1 + k^2/b^2$ obtemos

$$\frac{y^2}{pb^2} - \frac{z^2}{pc^2} = 1$$

que também é uma hipérbolo.

Agora a interseção com o plano $\pi : y = k$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1. \quad (1.8)$$

Se $k^2 < b^2$, então $k^2/b^2 - 1 < 0$ e daí a equação (1.8) não admite solução.

Se $k^2 = b^2$, então a interseção é ou o ponto $(0, k, 0)$ ou o ponto $(0, -k, 0)$.

Se $k^2 > b^2$, isto é, $k < -b$ ou $k > b$, então tomando $p = k^2/b^2 - 1 > 0$, podemos escrever (1.8) como

$$\frac{x^2}{pa^2} + \frac{z^2}{pc^2} = 1.$$

Assim se $a = c$, então obtemos uma circunferência e se $a \neq c$, então a interseção é uma elipse.

Figura 1.3: Contornos do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pelo plano $z = k$

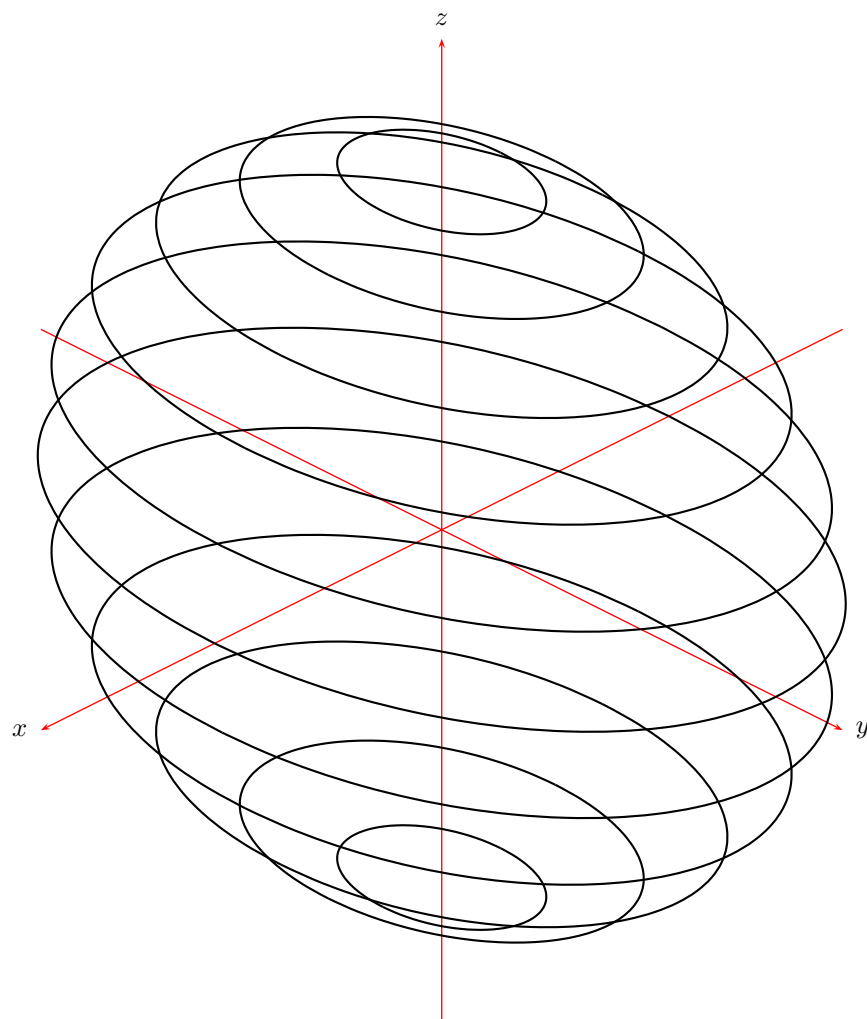


Figura 1.4: Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

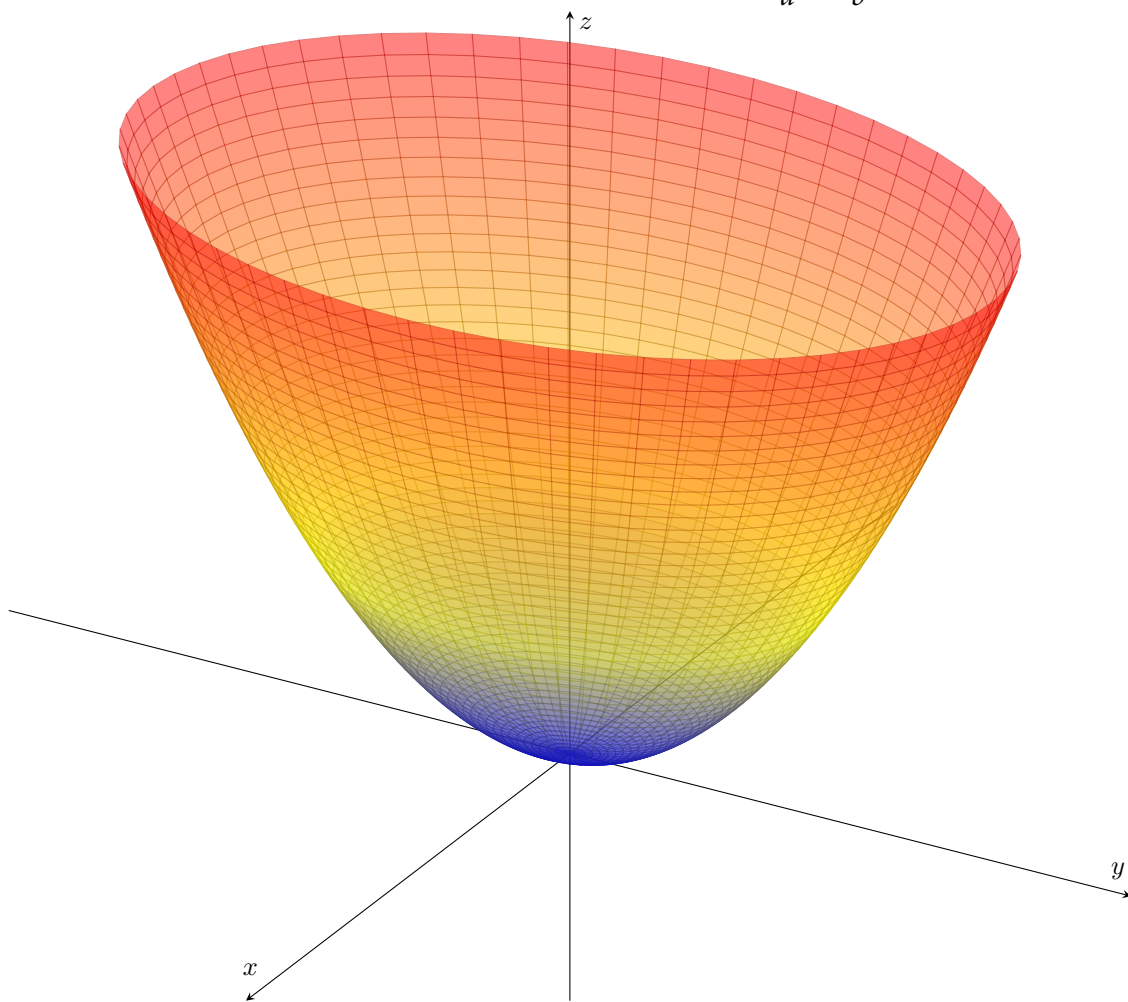


Figura 1.5: Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

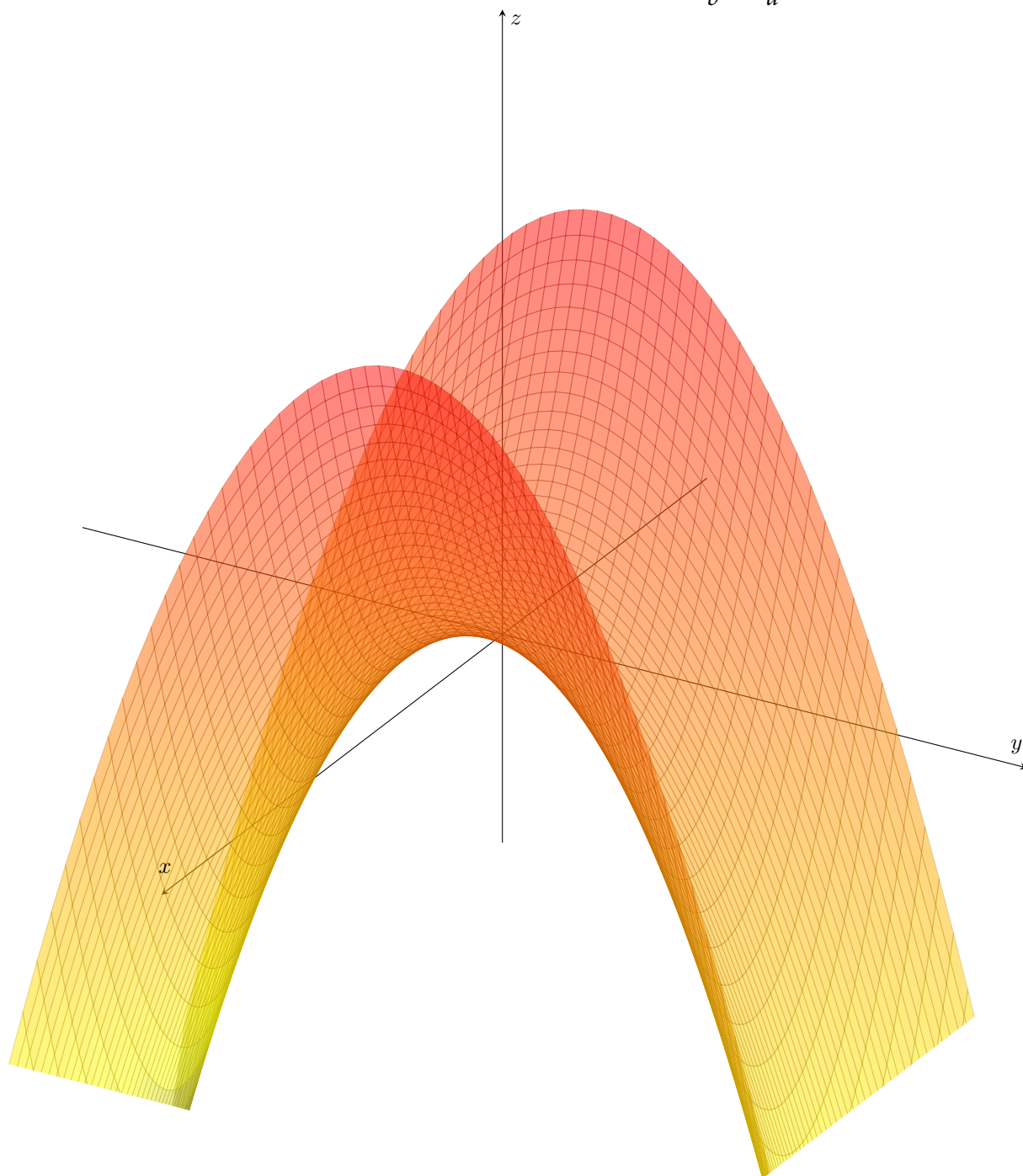


Figura 1.6: Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

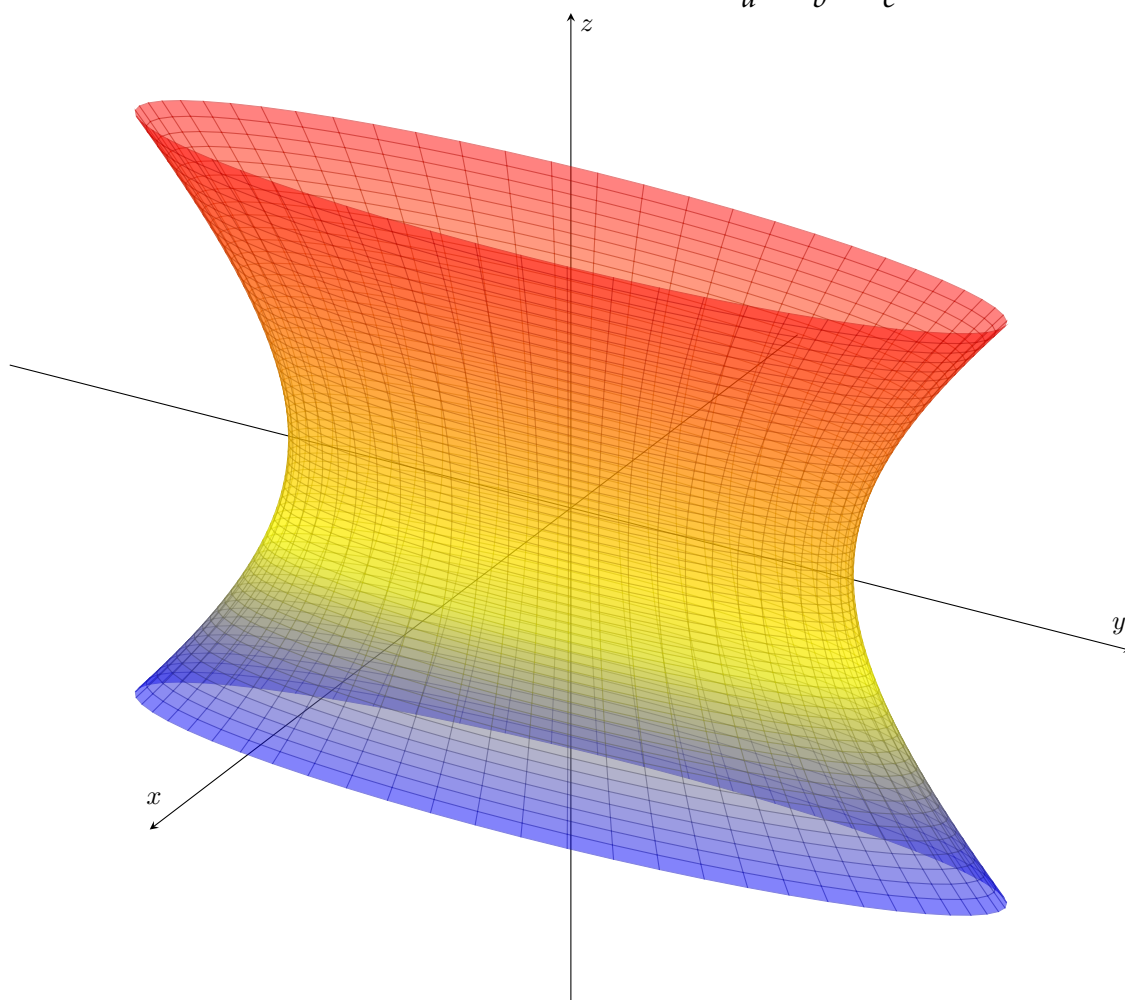
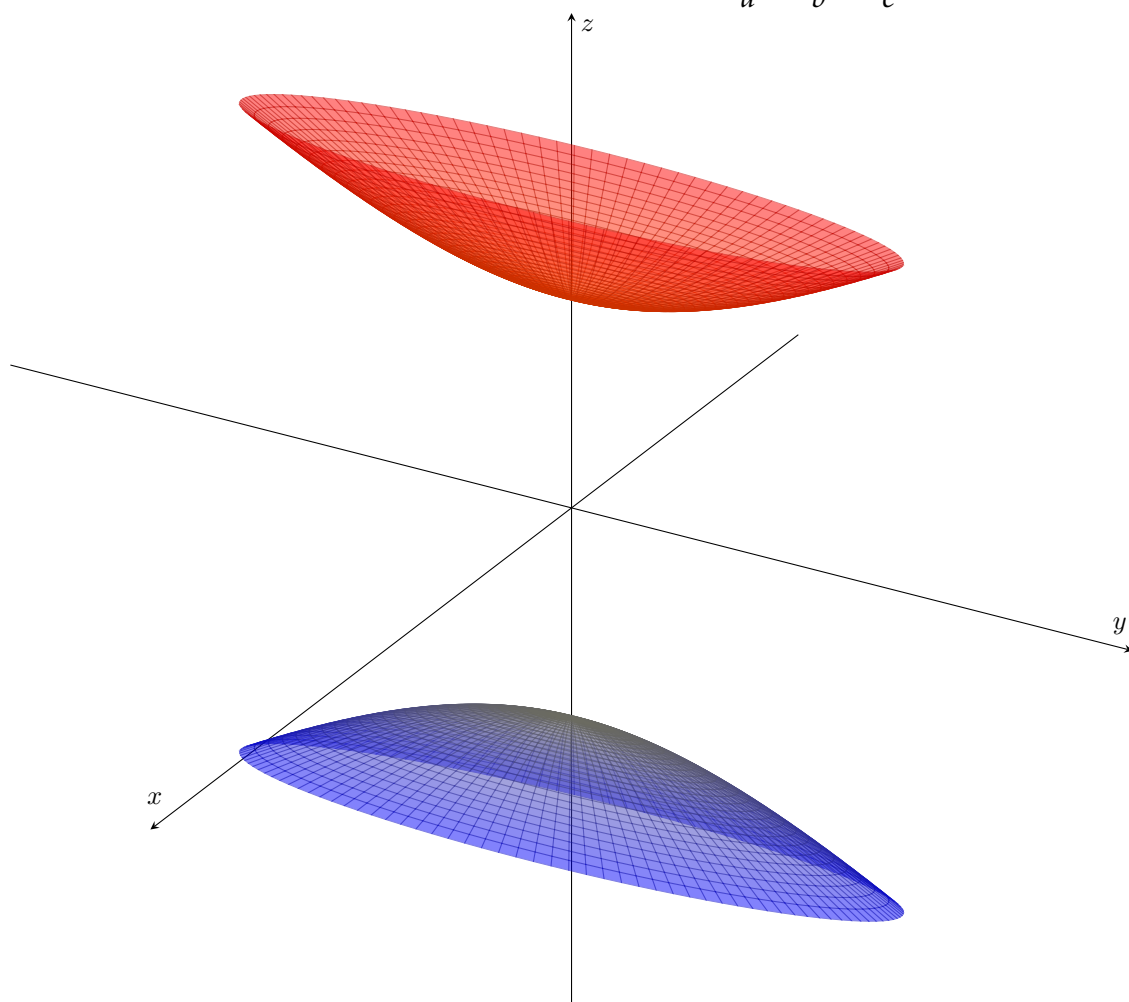


Figura 1.7: Hiperbolóide duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



ÍNDICE REMISSIVO

Quádricas, 7

Elipsóide, 8

Esfera, 7

Hiperbolóide de duas folhas, 12

Hiperbolóide de uma folha, 11

Parabolóide de rotação, 9

Parabolóide elíptico, 9

Parabolóide hiperbólico, 10