

Notas de Aula 1/2015¹

José Antônio O. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília - UnB

¹ Este texto está licenciado sob uma **Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 3.0 Brasil** http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/deed.pt_BR.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Vetores | 9 |
| 1.1 | Introdução | 9 |
| 1.2 | Plano Cartesiano | 10 |
| 1.3 | Vetores em \mathbb{R}^2 | 11 |
| 1.3.1 | Operações com Vetores | 14 |
| 1.3.2 | Ângulo entre vetores e produto interno | 19 |
| 1.3.3 | Projeção de Vetores | 25 |
| 2 | Reta no Plano | 31 |
| 2.1 | Equações da Reta | 31 |
| 2.2 | Ângulo entre retas | 37 |
| 2.3 | Distância de um ponto a uma reta | 38 |
| 3 | Circunferências e Cônicas | 41 |
| 3.1 | Equações da Circunferência | 41 |
| 3.2 | Cônicas | 46 |
| 3.2.1 | Elipse | 46 |
| 3.2.2 | Hipérbole | 56 |
| 3.2.3 | Parábola | 62 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Rotação e Translação de Eixos | 65 |
| 3.3.1 | Translação de eixos | 67 |
| 3.3.2 | Rotação de eixos | 72 |
| 4 | Vetores no Espaço | 79 |
| 4.0.3 | Ângulo entre vetores e produto interno no espaço | 83 |
| 4.0.4 | Produto Vetorial | 86 |
| 4.0.5 | Produto Misto | 90 |
| 5 | Reta e Plano no Espaço | 93 |
| 5.1 | Equações do Plano | 93 |
| 5.2 | Equações da Reta | 99 |
| 5.3 | Interseções | 100 |
| 5.3.1 | Entre retas | 100 |
| 5.3.2 | Entre planos | 104 |
| 5.3.3 | Entre retas e planos | 106 |
| 5.4 | Distâncias | 109 |
| 5.4.1 | Entre ponto e plano | 109 |
| 5.4.2 | Entre um ponto e uma reta | 111 |
| 5.4.3 | Entre retas | 112 |
| | Bibliografia | 115 |
| | Índice Remissivo | 117 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Plano cartesiano | 10 |
| 1.2 | Coordenadas do ponto P | 10 |
| 1.3 | Distância entre dois pontos | 11 |
| 1.4 | Seta representando o ponto (α, β) | 12 |
| 1.5 | Vetor $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ | 12 |
| 1.6 | Vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$ | 13 |
| 1.7 | Vetor \vec{AB} | 13 |
| 1.8 | Vetores unitários: $\ \vec{u}\ = 1$ | 14 |
| 1.9 | Vetores paralelos | 15 |
| 1.10 | Soma de vetores | 15 |
| 1.11 | Multiplicação por escalar | 17 |
| 1.12 | Ângulo entre vetores | 19 |
| 1.13 | Determinação de θ | 20 |
| 1.14 | Lei dos cossenos | 20 |
| 1.15 | Projeção ortogonal | 26 |
| 1.16 | Vetor projeção | 27 |
| 1.17 | Possibilidades para λ | 28 |
| 1.18 | Exemplo 1.10.1, exercício 2 | 29 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Equação vetorial da reta | 32 |
| 2.2 | Retas paralelas aos eixos | 36 |
| 2.3 | Ângulo entre retas | 37 |
| 2.4 | Distância de ponto a reta | 38 |
| 3.1 | Circunferência | 42 |
| 3.2 | Gráfico da função $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ | 50 |
| 3.3 | Elipse com focos no eixo x e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | 51 |
| 3.4 | Elipse com focos no eixo y e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | 53 |
| 3.5 | Retângulo fundamental | 54 |
| 3.6 | Coroa Fundamental | 55 |
| 3.7 | Região onde se encontram os pontos de uma elipse | 55 |
| 3.8 | Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com assíntotas $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ | 61 |
| 3.9 | Hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ com assíntotas $x = -\frac{a}{b}y$ e $x = \frac{a}{b}y$ | 63 |
| 3.10 | Definição da Parábola | 64 |
| 3.11 | Parábola $P : y^2 = 4px$ e reta diretriz $r : x = -p, p > 0$ | 65 |
| 3.12 | Parábola $P : y^2 = -4px$ e reta diretriz $r : x = p, p > 0$ | 66 |
| 3.13 | Parábola $P : x^2 = -4py$ e reta diretriz $r : y = p, p > 0$ | 66 |
| 3.14 | Parábola $P : x^2 = 4py$ e reta diretriz $r : y = -p, p > 0$ | 67 |
| 3.15 | Translação de eixos | 69 |
| 3.16 | Elipse $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$ | 70 |
| 3.17 | Hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ | 71 |
| 3.18 | Rotação de eixos: vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 | 72 |
| 3.19 | Rotação dos eixos por um ângulo θ | 72 |
| 3.20 | Hipérbole $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$ | 75 |
| 3.21 | Elipse $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$ | 76 |
| 3.22 | Parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ | 78 |
| 4.1 | Sistema de coordenadas tridimensionais | 79 |
| 4.2 | Coordenadas de um ponto no espaço tridimensional | 80 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.3 | Distância entre pontos em \mathbb{R}^3 | 80 |
| 4.4 | Ângulo entre vetores em \mathbb{R}^3 | 83 |
| 4.5 | Interpretação geométrica do produto vetorial | 90 |
| 4.6 | Interpretação geométrica do produto misto | 92 |
| 5.1 | Equação do plano | 94 |
| 5.2 | Plano $z = 0$ | 95 |
| 5.3 | Plano $y = 0$ | 96 |
| 5.4 | Plano $x = 0$ | 97 |
| 5.5 | Retas Paralelas | 101 |
| 5.6 | Retas Concorrentes | 102 |
| 5.7 | Retas Reversas | 103 |
| 5.8 | $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ | 105 |
| 5.9 | $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ | 106 |
| 5.10 | $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ | 107 |
| 5.11 | $r \cap \pi = \{P_0\}$ | 107 |
| 5.12 | $r \cap \pi = \emptyset$ | 108 |
| 5.13 | $r \subset \pi$ | 108 |
| 5.14 | Distância entre ponto e plano | 109 |
| 5.15 | Distância entre ponto e reta | 111 |
| 5.16 | Distância entre retas reversas | 113 |

CAPÍTULO 1

VETORES

1.1 Introdução

A Geometria Analítica é um método para tratar com problemas da Geometria. No caso do plano, tal método consiste em associar os pontos à pares ordenados de números reais, permitindo assim representar curvas do plano por equações em duas variáveis, de modo que a cada curva está associado uma equação, bem definida, do tipo $f(x, y) = 0$ e a cada equação deste tipo associa-se uma curva bem definida no plano. Assim, as propriedades geométricas das curvas podem ser determinadas à partir de informações algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$.

Por exemplo, a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ representa uma curva em \mathbb{R}^2 . Nessa forma, não podemos dizer exatamente qual curva está equação representa. Mas utilizando-se de resultados da Álgebra Linear, podemos reescrever tal equação com

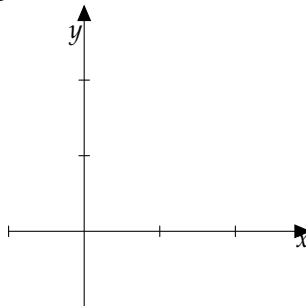
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é uma equação de uma elipse.

1.2 Plano Cartesiano

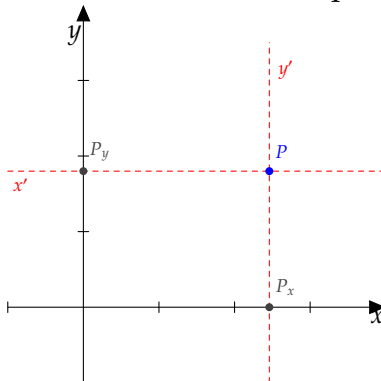
Vamos considerar o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y como abaixo:

Figura 1.1: Plano cartesiano



Seja P um ponto qualquer do plano. Por P podemos traçar uma única reta x' paralela à reta x e uma única reta y' paralela à reta y . Estas retas interceptam x e y em pontos P_x e P_y , respectivamente. Seja α o número real correspondente a P_x e β o número real correspondente a P_y . Estes dois números determinam o ponto P , isto é, conhecendo α e β podemos traçar as retas x' e y' . O ponto P é a interseção destas retas. Os números α e β são chamados **abscissa** e **ordenada** do ponto P , respectivamente. Eles constituem as **coordenadas** de P .

Figura 1.2: Coordenadas do ponto P

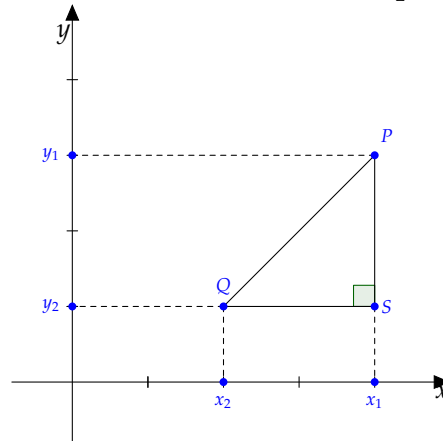


Denotaremos assim o ponto P por

$$P(\alpha, \beta).$$

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos do plano. A partir de P e Q podemos construir o triângulo retângulo PQS como abaixo:

Figura 1.3: Distância entre dois pontos



Assim sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este número é chamado **distância** de P a Q e é indicado por $d(P, Q)$, isto é, por definição

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

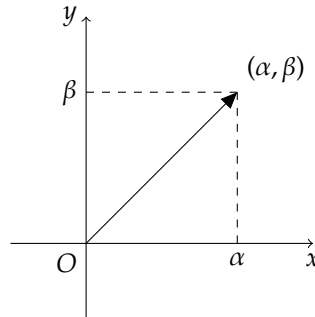
Dizemos que dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

1.3 Vetores em \mathbb{R}^2

Sabemos que a cada par ordenado (α, β) corresponde um ponto do plano. Assim se $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ podemos associar uma seta com origem em $O(0, 0)$ e extremidade em (α, β) como na figura abaixo:

Assim o par ordenado (α, β) pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando representamos (α, β) por uma seta, podemos associar a este para uma **direção**, um **sentido** e um **módulo**. A direção e o sentido do par (α, β) são respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. O **módulo** do par (α, β) é o número

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

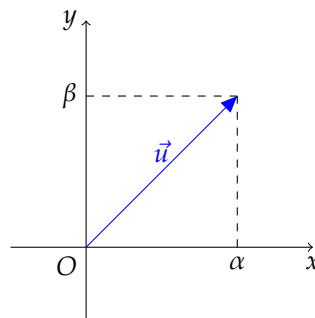
Figura 1.4: Seta representando o ponto (α, β) .

que é o comprimento da seta.

Em geral, um objeto ao qual podemos associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um **vetor**. Denotaremos um vetor de extremidade em um ponto (α, β) por

$$\vec{u} = (\alpha, \beta).$$

Esta notação significa que \vec{u} é a seta com início no ponto $O(0, 0)$ e final no ponto (α, β) .

Figura 1.5: Vetor $\vec{u} = (\alpha, \beta)$.

Por exemplo, $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$ são representados graficamente por:

O vetor que tem início e fim no ponto $(0, 0)$ é chamado de **vetor nulo** e será denotado por

$$\vec{0} = (0, 0).$$

Podemos também representar um vetor por uma seta que não parte da origem. Por exemplo, os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ determinam o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Figura 1.6: Vetores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, -2)$.Figura 1.7: Vetor \vec{AB} 

Assim a seta que representa o vetor \vec{AB} e a seta que representa o vetor \vec{u} , que tem início na origem e extremidade no ponto $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, têm o mesmo módulo, direção e sentido que \vec{AB} . Assim vamos representar o vetor \vec{AB} pela forma que for mais conveniente.

Definição 1.1. Seja $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor. A **norma** de \vec{u} , denotada por $\|\vec{u}\|$, é dada por

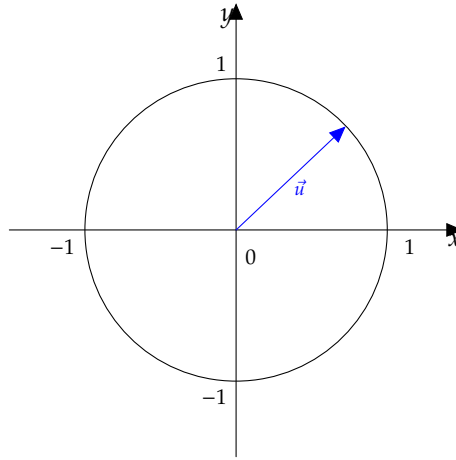
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Um vetor \vec{u} tal que

$$\|\vec{u}\| = 1$$

é chamado de **vetor unitário**.

Figura 1.8: Vetores unitários: $\|\vec{u}\| = 1$



Definição 1.2. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **paralelos** (ou **colineares**) se a retas que contém estes vetores são paralelas (podendo ser coincidentes). Caso \vec{u} e \vec{v} sejam paralelos, escreveremos $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Neste caso, \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção, mas podem ter sentidos contrários.

1.3.1 Operações com Vetores

Definição 1.3. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores. Então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Propriedades 1.3.1. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores quaisquer. As seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ [Associatividade]
- (ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ [Comutatividade]
- (iii) Existe um único vetor que somado a \vec{u} resulta no próprio vetor \vec{u} :

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Tal vetor é o vetor nulo. [Elemento Neutro]

Figura 1.9: Vetores paralelos



Figura 1.10: Soma de vetores



(iv) Para cada \vec{u} , existe um único vetor \vec{v} tal que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} = \vec{v} + \vec{u}.$$

O vetor \vec{v} é o vetor oposto de \vec{u} . [Elemento Oposto]

Prova: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$. Temos

$$(i) \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + \vec{w} = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \vec{u} + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

$$(ii) \quad \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(iii) Usando o item (A2) basta verificar que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. De fato

$$\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1) = \vec{u}.$$

(iv) Novamente, pelo item (A2) basta verificar que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. De fato, dado $\vec{u} = (x_1, y_1)$, tomando $\vec{v} = (-x_1, -y_1)$ temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0) = \vec{0}.$$

Portanto as propriedades são verdadeiras. ◇

Definição 1.4. O vetor \vec{v} do item (iv) da Definição 1.3.1 é chamado de **vetor oposto**.

Definição 1.5. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores. Então:

$$\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

Observação 1.5.1. 1. Sejam \vec{u} um vetor não-nulo e $\lambda \neq 0$ um escalar. Então $\vec{u} \parallel \lambda \vec{u}$. Além disso, se $\lambda > 0$, então \vec{u} e $\lambda \vec{u}$ são de mesmo sentido, e se $\lambda < 0$ então \vec{u} e $\lambda \vec{u}$ são de sentidos contrários.

2. Quando $\lambda = -1$, o vetor $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$ é exatamente o vetor oposto de \vec{u} . Note que $-\vec{u}$ tem a mesma direção que \vec{u} , mas sentido contrário.

Propriedades 1.5.1. Quaisquer que sejam os números reais α e β e quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} valem as igualdades:

$$(i) \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v};$$

Figura 1.11: Multiplicação por escalar



$$(ii) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

$$(iii) 1\vec{u} = \vec{u};$$

$$(iv) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}).$$

Prova: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. Temos:

$$(i) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

$$(ii) (\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

$$(iii) 1\vec{u} = 1(x_1, y_1) = (x_1, y_1) = \vec{u}.$$

(iv) Primeiro temos:

$$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1)) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = (\alpha\beta)\vec{u}.$$

Agora,

$$(\alpha\beta)\vec{u} = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1) = ((\beta\alpha)x_1, (\beta\alpha)y_1) = (\beta(\alpha x_1), \beta(\alpha y_1)) = \beta(\alpha\vec{u}).$$

$$\text{Logo } \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u}).$$

Portanto as propriedades são válidas. \diamond

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de \vec{u} como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos 1.5.1. Seja $\vec{u} = (-2, 3)$ um vetor. Então

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \vec{v} &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3) = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right). \end{aligned}$$

Proposição 1.5.1. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor em \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

1. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\|\vec{u}\| \neq 0$.
2. $\|\vec{u}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.
3. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.

Prova:

1. Se $\vec{u} \neq (0, 0) = \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$. Daí

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0.$$

2. $\|\vec{u}\| = 0$ se, e somente se, $x_1^2 + y_1^2 = 0$, isto é, $x_1 = y_1 = 0$. Portanto $\vec{u} = \vec{0}$.

3. $\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(x_1, y_1)\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)} = |\alpha| \|\vec{u}\|$.

\diamond

Observação 1.5.2. Dado um vetor não nulo \vec{u} o vetor

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

é um vetor unitário na direção de \vec{u} pois

$$\|\vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = 1.$$

Definição 1.6. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não-nulos. Então $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} têm normas iguais, são de mesma direção e de mesmo sentido.

Proposição 1.6.1. Dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} são paralelos se, e somente se, existe um escalar λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (consequentemente, $\lambda \neq 0$ e assim $\vec{v} = \vec{u}/\lambda$).

Prova: Se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Agora, suponha que \vec{u} e \vec{v} são paralelos e de mesmo sentido, o caso em que têm sentidos contrários fica como exercício.

Seja

$$\lambda = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Vamos mostrar que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Inicialmente, sabemos que \vec{v} e $\lambda\vec{v}$ são paralelos e têm o mesmo sentido pois $\lambda > 0$. Agora

$$\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.$$

Portanto \vec{u} e $\lambda\vec{v}$ tem a mesma direção, o mesmo sentido e normas iguais, logo $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, como queríamos. \diamond

1.3.2 Ângulo entre vetores e produto interno

Definição 1.7. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. O **ângulo** entre \vec{u} e \vec{v} é definido pelo ângulo θ determinado por \vec{u} e \vec{v} e que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando os vetores \vec{u} e \vec{v} são representados com a mesma origem.

Figura 1.12: Ângulo entre vetores



Definição 1.8. Quando o ângulo θ entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é reto, isto é, $\theta = \pi/2$, ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores \vec{u} e \vec{v} são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos e θ o ângulo entre eles.

Figura 1.13: Determinação de θ



Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo abaixo temos

Figura 1.14: Lei dos cossenos



$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta. \quad (1.1)$$

Definição 1.9. O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores \vec{u} e \vec{v} , indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que:

1. Se \vec{u} ou \vec{v} é nulo, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
2. Se \vec{u} e \vec{v} não são nulos e θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta. \quad (1.2)$$

Proposição 1.9.1. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores e θ o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

1. Se \vec{u} e \vec{v} não são nulos, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

2. Qualquer que seja o vetor \vec{u} ,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} , $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Prova:

1. Basta isolar $\cos \theta$ na Definição 1.2.

2. Se $\vec{u} = \vec{0}$, então a igualdade é verdadeira. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então o ângulo entre o vetor \vec{u} e ele mesmo é $\theta = 0$, logo

$$1 = \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{u}\|}.$$

Logo

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Se \vec{u} ou \vec{v} é o vetor nulo, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Suponha $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\theta = \pi/2$ e daí $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Agora, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então

$$0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Logo devemos ter $\cos \theta = 0$, isto é, $\theta = \pi/2$. Portanto $\vec{u} \perp \vec{v}$, como queríamos.

◇

Agora, como podemos encontrar o produto interno sem necessitar de determinar o ângulo θ entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} ? Substituindo o produto interno na equação (1.1) temos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

isto é,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \quad (1.3)$$

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, então podemos reescrever (1.3) como

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2] \\ &= x_1x_2 + y_1y_2.\end{aligned}$$

Abacamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.1. O produto interno de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplos 1.9.1. 1. Sejam $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0)$. Determine o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= (1, 1) \cdot (1, 0) = 2 + 0 = 1 \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1} \\ \cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Assim, $\theta = \pi/4$.

2. Encontre um vetor $\vec{u} = (x, y)$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1)$ e tal que $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$, onde $\vec{w} = (1, 1)$.

Solução: Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são $x = -1/5$ e $y = -4/5$. Logo $\vec{u} = (-1/5, -4/5)$.

Proposição 1.9.2. Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ e qualquer que seja o número real λ temos

$$(i) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$(ii) \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$(iii) \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(iv) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(v) \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0.$$

Prova:

(i)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle &= \langle \vec{u}, (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = (\lambda x_1)y_2 + (\lambda y_1)y_2 = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1y_2) + \lambda(y_1y_2) = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$(iii) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(iv) \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } x_1 \neq 0 \text{ ou } y_1 \neq 0. \text{ Daí } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 > 0, \text{ como queríamos.}$$

◇

Observação 1.9.1. 1. As propriedades (i) e (iii) Proposição 1.9.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores e escalares:

$$\langle \vec{u}, (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle.$$

2. Na igualdade $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ não podemos concluir que $\vec{v} = \vec{w}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1)$ e $\vec{w} = (2, -5)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ e no entanto $\vec{v} \neq \vec{w}$. Mas podemos concluir que $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

3. De $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ não podemos concluir que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e no entanto $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Exemplos 1.9.2. Calcule o ângulo α entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = 1$ e que o ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é $\pi/4$.

Solução: Temos

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{4}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 5 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 1 = 6 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 5 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 1 = 6 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \sqrt{5} \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e então

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| &= \sqrt{6 + \sqrt{10}} \\ \|\vec{u} - \vec{v}\| &= \sqrt{6 - \sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

$$\text{e então } \theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right).$$

Proposição 1.9.3. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores.

1. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ [Desigualdade de Scharwz]
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ [Desigualdade Triangular]

Prova:

1. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ a desigualdade é verdadeira. Suponha então que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Seja θ o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . Temos

$$0 \leq |\cos \theta| \leq 1$$

e multiplicando essa inequação por $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ obtemos

$$0 \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

isto é,

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

como queríamos.

2. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então a desigualdade é verdadeira. Suponha então que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Agora, usando o item (a) temos

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Portanto

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

◇

1.3.3 Projeção de Vetores

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores não nulos. Suponha que o ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é tal que $0 < \theta < \pi/2$.

O vetor \vec{OP} é paralelo ao vetor \vec{u} e o vetor \vec{PA} é ortogonal ao vetor \vec{u} .

Definição 1.10. Seja \vec{u} um vetor não nulo. Dado qualquer vetor \vec{v} , o vetor \vec{OP} é chamado de **projeção ortogonal** de \vec{v} sobre \vec{u} , e é indicado por $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ se satisfaz as seguintes condições:

Figura 1.15: Projeção ortogonal



1. $\vec{OP} \parallel \vec{u}$
2. $(\vec{v} - \vec{OP}) \perp \vec{u}$.

Podemos também escrever

1. $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} \parallel \vec{u}$
2. $(\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}) \perp \vec{u}$.

No caso acima temos

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

e então $\|\vec{OP}\| = \|\vec{v}\| \cos \theta$. Mas

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

e assim podemos escrever

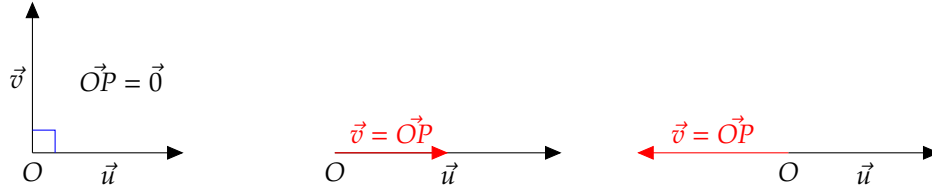
$$\|\vec{OP}\| = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|}.$$

Além disso, como \vec{OP} é paralelo a \vec{u} e de mesmo sentido, devemos ter $\vec{OP} = \lambda \vec{u}$ com $\lambda > 0$. Daí $\lambda = \|\vec{OP}\| / \|\vec{u}\|$ e então

$$\vec{OP} = \frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Esta construção só é válida no caso em que o ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} satisfaz $0 < \theta < \pi/2$. Nos casos não podemos usar a construção envolvendo o ângulo θ entre os vetores.

Figura 1.16: Vetor projeção



Proposição 1.10.1. *Seja \vec{u} um vetor não nulo. Qualquer que seja o vetor \vec{v} , existe e é única a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} . Sua expressão em termos de \vec{u} e \vec{v} é dada por*

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

e sua norma é dada por

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}.$$

Prova: Seja $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$. Da Definição 1.10, dizer que \vec{p} é a projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} significa que \vec{p} é um vetor tal que $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$.

Como $\vec{p} \parallel \vec{u}$, então pela Proposição 1.6.1 existe um escalar λ tal que $\vec{p} = \lambda \vec{u}$. Assim qualquer vetor do tipo $\lambda \vec{u}$ é um candidato para ser a projeção ortogonal. Mas, para que \vec{p} seja a projeção ortogonal, ele deve satisfazer $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$. Logo

$$(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow \langle (\vec{v} - \vec{p}), \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Assim existe um único λ que satisfaz a condição $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$, e daí o vetor \vec{p} é único. Portanto

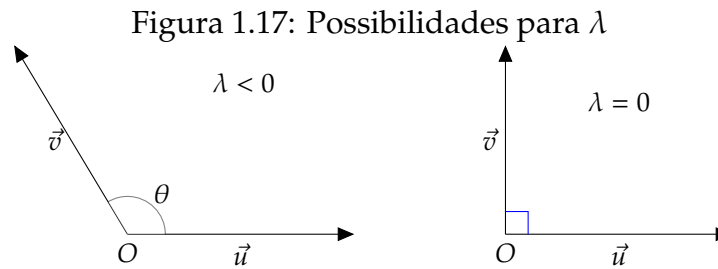
$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{p} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Além disso

$$\|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

como queríamos. ◇

Observação 1.10.1. *O escalar λ encontrado na proposição anterior pode ser negativo ou zero. Ele será negativo quando $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ e será zero quando $\vec{u} \perp \vec{v}$.*



Exemplos 1.10.1. 1. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (4, -1)$ sobre o vetor $\vec{u} = (2, 1)$.

Solução: Temos

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= 7 \\ \|\vec{u}\|^2 &= 5 \end{aligned}$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{7}{5}(2, 1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

Por outro lado,

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 7 \\ \|\vec{v}\|^2 &= 17 \end{aligned}$$

e daí

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{7}{17}(4, -1) = \left(\frac{28}{17}, -\frac{7}{17}\right).$$

2. Considere um triângulo ABC onde $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$.

(a) Verifique que ABC é um triângulo retângulo em A.

- (b) Calcule a projeção do cateto BA sobre a hipotenusa BC.
- (c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.

Solução: Considere o triângulo abaixo

Figura 1.18: Exemplo 1.10.1, exercício 2



- (a) Basta verificar que $\vec{AB} \perp \vec{AC}$. Assim como $\vec{AB} = (-3, -2)$ e $\vec{AC} = (-2, 3)$ temos

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = (-3)(-2) + (-2)3 = 0.$$

Logo ABC é um triângulo retângulo.

- (b) Temos $\vec{BA} = (3, 2)$ e $\vec{BC} = (1, 5)$. Daí

$$\text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \frac{\langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle}{\|\vec{BC}\|^2} \vec{BC} = \frac{\langle (3, 2), (1, 5) \rangle}{\|(1, 5)\|^2} (1, 5) = \frac{13}{26} (1, 5).$$

$$\text{Assim } \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

- (c) Seja $P(x_1, y_1)$ o pé da altura do triângulo ABC relativo ao vértice A. Então

$$\begin{aligned} \vec{BP} &= \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} \\ (x_1, y_1 - 1) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Logo } P \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right).$$

CAPÍTULO 2

RETA NO PLANO

2.1 Equações da Reta

Seja r uma reta do plano. Dados dois pontos A e B em r podemos considerar o vetor $\vec{u} = \vec{AB}$. Por definição diremos que a reta r e o vetor \vec{u} são paralelos. Assim temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Qualquer vetor não nulo e paralelo a uma dada reta r é chamado de **vetor diretor** de r .*

Seja \vec{u} um vetor diretor de uma reta r e seja A um ponto pertencente à reta r . Assim um ponto X pertence a reta r se, e somente se, $\vec{AX} \parallel \vec{u}$.

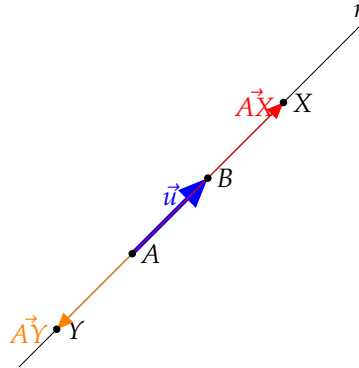
Ou seja, se e somente se, existe um número real λ tal que

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u}. \quad (2.1)$$

Assim para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fica definido um ponto X na reta r e se X é um ponto da reta r , então existe um número real λ tal que $\vec{AX} = \lambda \vec{u}$.

Definição 2.2. *A equação (2.1) é chamada de **equação vetorial da reta r** ou **equação da reta r na forma vetorial**.*

Figura 2.1: Equação vetorial da reta



Exemplos 2.2.1. Seja r uma reta passando pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(-1, 3)$. Determine sua equação vetorial.

Solução: Um vetor diretor da reta r pode ser tomado como sendo $\vec{u} = \vec{AB} = (-2, 1)$. Assim a equação vetorial de r será:

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u} = \lambda(-2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podemos também tomar como vetor diretor de r o vetor $\vec{v} = \vec{BA} = (2, -1)$. Daí a equação vetorial de r será

$$\vec{AX} = \alpha \vec{v} = \alpha(2, -1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.2.1. Como o ponto e o vetor diretor de uma reta r são escolhidos arbitrariamente, existem infinitas equações vetoriais para uma mesma reta r . Por exemplo, se A e B são pontos distintos de uma reta r , então \vec{AB} e \vec{BA} são vetores diretores distintos de r e portanto temos as equações vetoriais

$$\vec{AX} = \lambda \vec{AB}$$

$$\vec{AX} = \alpha \vec{BA}.$$

Na verdade, qualquer vetor múltiplo do vetor \vec{AB} pode ser tomado como vetor diretor de r .

Agora, seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor diretor de uma reta r . Dado um ponto $A = (x_0, y_0)$ de r o ponto $X = (x, y)$ pertence a reta r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u}$$

$$(x - x_0, y - y_0) = (\lambda a, \lambda b).$$

Assim a reta r pode ser descrita pelas equações

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ x = y_0 + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Definição 2.3. O sistema de equações (2.2) é chamado *sistema de equações paramétricas da reta r* ou *sistema de equações da reta r na forma paramétrica*.

Exemplos 2.3.1. 1. O sistema de equações

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

define uma reta r que passa pelo ponto $A(1, 2)$ e que possui vetor diretor $\vec{u} = (2, -3)$.

2. Seja r a reta dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

O ponto $(11, 13)$ pertence a r ? E o ponto $(5, 6)$?

Solução: Para que o ponto $(11, 13)$ pertença a reta r é preciso que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$11 = 2 + 3t$$

$$13 = 1 + 4t.$$

Cuja solução é $t = 3$. Logo o ponto $(11, 13)$ pertence a reta r .

Para que o ponto $(5, 6)$ pertença a reta r é preciso que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$5 = 2 + 3t$$

$$6 = 1 + 4t.$$

Resolvendo, obtemos $t = 1$ e $t = 5/4$. Logo o ponto $(5, 6)$ não pertence a reta r .

Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$, onde $ab \neq 0$ e que passa pelo ponto (x_0, y_0) . Sabemos que sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \end{cases}$$

Isolando λ nas duas equações encontramos

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \quad \lambda = \frac{y - y_0}{b},$$

isto é, a equação

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (2.3)$$

determina se um ponto pertence a reta r ou não.

Definição 2.4. A equação (2.3) é chamada de *sistema de equações da reta r na forma simétrica* ou por abuso de linguagem, *equações da reta r na forma simétrica*.

Exemplos 2.4.1. Encontre a equação simétrica da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$. O ponto $(0, 5/2)$ está na reta r ? E o ponto $(1, 2)$?

Solução: Um vetor diretor para a reta r é dado por $\vec{u} = \vec{AB} = (4, 2)$. Assim usando o ponto A a equação simétrica de r é

$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{2}.$$

Como

$$\frac{0 + 1}{4} = \frac{\frac{5}{2} - 2}{2}$$

então o ponto $(0, 5/2)$ está na reta r . Agora como

$$\frac{1 + 1}{4} \neq \frac{2 - 2}{2}$$

o ponto $(1, 2)$ não está na reta r .

Observação 2.4.1. 1. Para que uma equação de uma reta r esteja na forma (2.2) é obrigatório que o coeficiente de x e y sejam 1. Assim, por exemplo a equação na forma

$$\begin{cases} 2x = 1 - 3\lambda \\ -y = 2 + \lambda \end{cases}$$

não será considerada como uma equação paramétrica de uma reta. Do mesmo modo, uma equação do tipo

$$\frac{2x-7}{3} = \frac{y}{2}$$

não será considerada uma equação simétrica de uma reta r pois não está na forma (2.3).

2. Cada tipo de equação da reta apresenta suas vantagens. A forma vetorial descreve uma reta tanto no plano cartesiano como no espaço tridimensional e mesmo em espaços “maiores”. A forma paramétrica reduz o número de incógnitas com as quais precisamos trabalhar. Neste tipo de equação lidamos com somente uma incógnita em vez de duas. Já a forma simétrica exhibe qual a relação que as coordenadas dos pontos de uma reta devem satisfazer entre si.

Seja r uma reta que contém o ponto (x_0, y_0) e com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$. Sua equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Multiplicando a equação (2.4) por b e a equação (2.5) por a obtemos

$$bx = bx_0 + \lambda ab \quad (2.6)$$

$$ay = ay_0 + \lambda ab. \quad (2.7)$$

Fazendo (2.7) - (2.6) obtemos

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

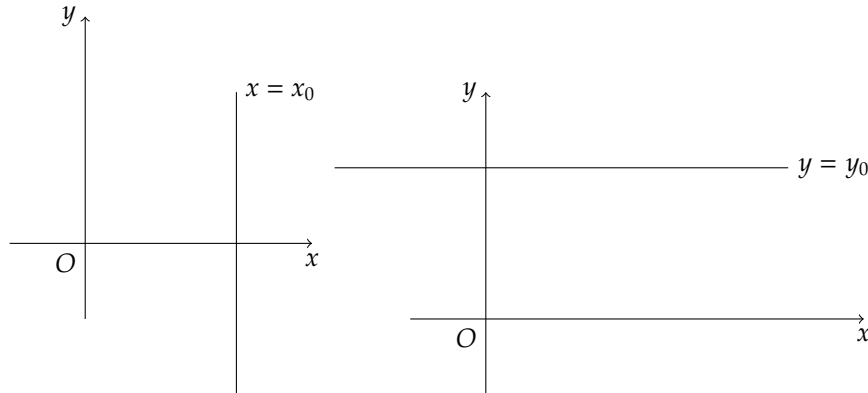
Agora note que $ay_0 - bx_0$ é uma constante. Assim fazendo, $c = ay_0 - bx_0$ podemos escrever

$$ay - bx = c \quad (2.8)$$

que é chamada de **equação cartesiana da reta r** .

Observe que se o vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$ da reta r é tal que $a = 0$, obtemos a equação $x = x_0$ e a reta r é paralela ao eixo y . Caso $b = 0$, obtemos $y = y_0$ e a reta é paralela ao eixo x .

Figura 2.2: Retas paralelas aos eixos



Se $a \neq 0$, então podemos dividir a equação (2.8) por a obtendo

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo $m = b/a$ e $k = c/a$ temos a equação

$$y = mx + k,$$

onde $m = b/a = \operatorname{tg} \theta$.

Note que o vetor $\vec{v} = (1, m)$ é paralelo à reta r de equação $y = mx + k$. De fato,

$$\vec{v} = (1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}(a, b) = \frac{1}{a}\vec{u}.$$

Exemplos 2.4.2. Determine as equações paramétricas e cartesianas da reta r definida pelos pontos $A(1, 5)$ e $B(2, 7)$.

Solução: Um vetor diretor de r é dado por $\vec{u} = \vec{AB} = (1, 2)$. Assim $m = b/a$ onde $\vec{u} = (a, b)$ vale $m = 2$. Desse modo temos

$$y = 2x + k.$$

Como o ponto $A = (1, 5)$ pertence a reta r devemos ter

$$5 = 2(1) + k$$

donde $k = 3$. Portanto a equação cartesiana de r será

$$y = 2x + 3.$$

A equação paramétrica será

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto A. As equações paramétricas de r também podem ser expressas como

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

caso escolhamos o ponto B.

2.2 Ângulo entre retas

Sejam r uma reta passando pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e com vetor diretor $\vec{u} = (a, b)$ e s uma reta passando pelo ponto $B(x_2, y_2)$ e com vetor diretor $\vec{v} = (c, d)$. O **ângulo entre duas retas** r e s é definido como o menor ângulo entre o vetor diretor \vec{u} de r e o vetor diretor \vec{v} de s .

Figura 2.3: Ângulo entre retas



Assim o ângulo θ entre r e s é dado por

$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplos 2.4.3. Determine o ângulo entre as retas r e s cujas equações são:

$$r : y = 2x - 2$$

$$s : y = -x + 4.$$

Solução: Temos $m = b/a$, onde a e b são as coordenadas do vetor diretor da reta em questão. Assim podemos tomar $\vec{u} = (1, 2)$ como um vetor diretor de r e $\vec{v} = (-1, 1)$ como um vetor diretor de s . Daí

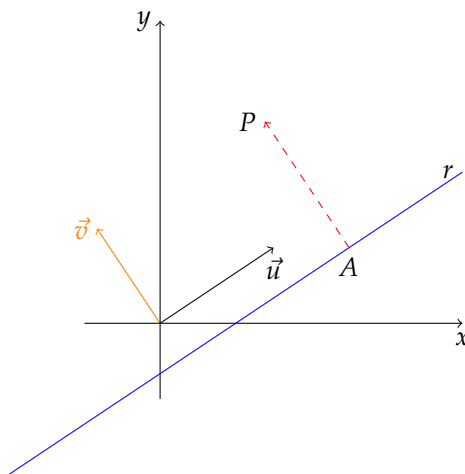
$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Logo } \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

2.3 Distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r de equação $y = mx + k$ é definida como sendo a distância de P ao ponto $A(x_1, y_1)$, onde A é o pé da perpendicular à reta r passando pelo ponto P . Agora note que o vetor $\vec{u} = (1, m)$ é paralelo à reta r . Além disso, o vetor

Figura 2.4: Distância de ponto a reta



$\vec{v} = (-m, 1)$ é tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, isto é, $\vec{u} \perp \vec{v}$. Portanto, $\vec{AP} \parallel \vec{v}$ e então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{AP} = \lambda \vec{v}.$$

Logo

$$d(P, r) = \|\vec{AP}\| = \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| = |\lambda| \sqrt{m^2 + 1}. \quad (2.9)$$

Assim para determinarmos $d(P, r)$ basta conhecer λ . Agora,

$$\vec{PA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda(-m, 1)$$

donde

$$x_1 = x_0 - \lambda m$$

$$y_1 = y_0 + \lambda.$$

Como $A(x_1, y_1)$ pertence a reta r , devemos ter

$$y_1 = mx_1 + k$$

$$y_0 + \lambda = m(x_0 - \lambda m) + k$$

$$y_0 + \lambda = mx_0 - \lambda m^2 + k$$

$$\lambda = \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2}.$$

Substituindo λ em (2.9)

$$d(P, r) = \left| \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2} \right| \sqrt{m^2 + 1}.$$

Portanto

$$d(P, r) = \frac{|mx_0 + k - y_0|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

é a expressão para a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ até uma reta r de equação $y = mx + k$.

Exemplos 2.4.4. *Seja r a reta de equação $y = 3x - 1$. Qual a distância do ponto $P(2, 2)$ à reta r ?*

Solução:

$$d(P, r) = \frac{|3(2) - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

CAPÍTULO 3

CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS

3.1 Equações da Circunferência

Definição 3.1. *A circunferência é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma mesma distância (denominada **raio**) de um dado ponto do plano (chamado **centro**).*

Considere uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r . Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta circunferência e seja β o ângulo formado pelos vetores \vec{CA} e \vec{CB} , onde $A(x_0 + r, y_0)$. Assim

$$\cos \beta = \frac{\langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|}.$$

Mas $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{CA} = (r, 0)$ e $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CP}\| = r$, então

$$\cos \beta = \frac{(x - x_0)r}{r^2} = \frac{x - x_0}{r},$$

isto é,

$$x = x_0 + r \cos \beta \tag{3.1}$$

Agora, para os vetores \vec{CP} e \vec{CB} , onde $B(x_0, y_0 + r)$ temos $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{CB} = (0, r)$

e $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CB}\| = r$, então

$$\cos \alpha = \frac{y - y_0}{r}. \quad (3.2)$$

Figura 3.1: Circunferência



Na Figura 3.1, considere o pé da perpendicular ao segmento CA passando por P e denote esse ponto por E . Agora, considere o pé da perpendicular ao segmento CB passando por P e denote esse ponto por D . Então os segmentos CD e EP têm o mesmo comprimento k . Daí

$$\cos \alpha = \frac{k}{r} = \sin \beta. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) obtemos:

$$\sin \beta = \frac{y - y_0}{r},$$

isto é,

$$y = y_0 + r \sin \beta. \quad (3.4)$$

Por outro lado, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz as equações (3.1) e (3.4), então

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta} = r$$

e então o ponto P pertence à circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r .

Definição 3.2. *As equações*

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \beta \\ y = y_0 + r \sin \beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi]$$

são chamadas **equações paramétricas** da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r .

Seja C uma circunferência com equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \beta \\ y = y_0 + r \sin \beta, \end{cases} \quad \beta \in [0, 2\pi].$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r \cos \beta \\ y - y_0 &= r \sin \beta. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &= r^2 \cos^2 \beta \\ (y - y_0)^2 &= r^2 \sin^2 \beta \end{aligned}$$

e somando obtemos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (3.5)$$

que é a **equação cartesiana** da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r . Podemos reescrever essa equação como

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (3.6)$$

Sejam $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ três pontos não colineares, isto é, os vetores $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$ não são paralelos. Nessa situação é possível obter uma circunferência contendo estes três pontos. Para isso considere a equação (3.6). Para que P_1 , P_2 e P_3 pertençam a uma circunferência C devemos ter:

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Daí para encontrar a circunferência desejada, basta determinar os valores de a , b e c . Ou seja, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = -(x_1^2 + y_1^2) \\ ax_2 + by_2 + c = -(x_2^2 + y_2^2) \\ ax_3 + by_3 + c = -(x_3^2 + y_3^2). \end{cases}$$

Como os pontos P_1 , P_2 e P_3 não são colineares, este sistema sempre possui solução única.

Exemplos 3.2.1. 1. Escreva a equação cartesiana da circunferência passando pelos pontos $A(1, 1)$, $B(1, -2)$ e $C(2, 3)$.

Solução: Temos

$$\vec{AB} = (0, -3)$$

$$\vec{AC} = (1, 2)$$

assim os pontos não são colineares e portanto definem uma circunferência. Para encontrá-la, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ a - 2b + c = -5 \\ 2a + 3b + c = -13 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = -13, \quad b = 1 \quad e \quad c = 10.$$

Logo

$$x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$$

é a equação procurada.

Agora, como

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$$

segue que

$$x_0 = 13/2, \quad y_0 = -1/2 \quad e \quad r^2 = 65/2.$$

Assim a equação cartesiana da circunferência será

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \cos \beta \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \sin \beta \end{cases}, \beta \in [0, 2\pi].$$

2. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(1, -1)$, $P_2(0, 1)$ e $P_3(1, 0)$.

Solução: Primeiro note que

$$P_1\vec{P}_2 = (-1, 2)$$

$$P_1\vec{P}_3 = (0, 1).$$

Assim os pontos não são colineares, portanto tal circunferência existe. Para encontrá-la, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ b + c = -1 \\ a + c = -2. \end{cases}$$

A solução é $a = b = 1$ e $c = -2$. Logo a circunferência tem equação

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

3. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(1, 3)$, $P_2(3, -5)$ e $P_3(2, -1)$.

Solução: Note que

$$\vec{P_1P_2} = (2, -8)$$

$$\vec{P_1P_3} = (1, -4).$$

Assim P_1 , P_2 e P_3 são colineares e portanto os três pontos não definem uma circunferência.

3.2 Cônicas

3.2.1 Elipse

Definição 3.3. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano, $2c$ a distância entre F_1 e F_2 e a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico E dos pontos P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (3.7)$$

chama-se **elipse**. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado **foco** da elipse. O segmento F_1F_2 é chamado **segmento focal**, seu ponto médio é o **centro** da elipse e $2c$ é chamado **distância focal**. A reta passando por F_1 e F_2 chama-se **reta focal**.

Para obter a equação que descreve uma elipse vamos fixar os focos F_1 e F_2 como sendo $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim o centro dessa elipse estará na origem do plano cartesiano. Assim, seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à elipse de focos F_1 e F_2 . Então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad (3.8)$$

isto é,

$$d(P, F_1) = 2a - d(P, F_2). \quad (3.9)$$

Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

e elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Fazendo $b^2 = a^2 - c^2$, podemos escrever

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividindo por a^2b^2 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.10)$$

Observe que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.11)$$

$$a > b > 0 \quad (3.12)$$

$$a > c > 0. \quad (3.13)$$

Assim todo ponto pertencente a elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, deve satisfazer a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, seja $Q(\alpha, \beta)$ um ponto tal que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Então $\beta^2 = b^2 - (b^2/a^2)\alpha^2$ e daí

$$\begin{aligned} d^2(Q, F_1) &= (\alpha + c)^2 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2c\alpha + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 \\ &= \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$d^2(Q, F_2) = \left(\frac{c}{a}\alpha - a\right)^2.$$

Assim

$$d(Q, F_1) = \left| \frac{c}{a}\alpha + a \right| \quad (3.14)$$

$$d(Q, F_2) = \left| \frac{c}{a}\alpha - a \right|. \quad (3.15)$$

Como

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

então $\alpha^2/a^2 \leq 1$, isto é, $|\alpha| \leq a$. Mas $c/a > 0$, daí

$$\frac{c}{a} |\alpha| \leq c < a$$

logo

$$-a < \frac{c\alpha}{a} < a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{c}{a}\alpha + a &> 0 \\ \frac{c}{a}\alpha - a &< 0. \end{aligned}$$

Desse modo podemos escrever (3.14) e (3.15) como

$$\begin{aligned} d^2(Q, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d^2(Q, F_2) &= a - \frac{c}{a}\alpha. \end{aligned}$$

Assim

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

e então o ponto $Q(\alpha, \beta)$ pertence à elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Os números a , b e c são chamados **parâmetros geométricos** da elipse. A equação (3.10) é chamada de **equação reduzida da elipse** de centro $O(0, 0)$ e focos no eixo x . Indicamos tal elipse por

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Com isso provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.3.1. *Um ponto $P(x, y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, as distâncias de P aos focos F_1 e F_2 são

$$\begin{aligned} d^2(P, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d^2(P, F_2) &= a - \frac{c}{a}\alpha. \end{aligned}$$

Observação 3.3.1. 1. *A equação (3.10) só é válida para elipses com focos no eixo x e centro na origem. Mudanças nos focos ou no centro, resultarão em uma equação diferente para a elipse.*

2. *Se (x, y) satisfaz a equação (3.10), então $(-x, -y)$, $(-x, y)$ e $(x, -y)$ também satisfazem a mesma equação. Assim a elipse é simétrica em relação ao eixo x , ao eixo y e ao centro do plano cartesiano.*
3. *O ponto $(x, 0)$ pertence à elipse de equação (3.10) se, e somente se, $x^2/a = 1$, isto é, $x = \pm a$. Além disso, o ponto $(0, y)$ pertence à elipse de equação (3.10) se, e só se, $y = \pm b$. Portanto, a interseção de E com o eixo x são os pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ e a interseção com o eixo y são os pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$. Note que $d(B_j, F_i) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$, para $i, j = 1, 2$.*
4. *Não existe circunferência que contenha os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 . Caso existisse, tal circunferência teria dois diâmetros diferentes, cujos comprimento são dados pelos comprimentos dos segmentos A_1A_2 e B_1B_2 , o que é impossível. Portanto, como esses pontos pertencem a E , podemos afirmar que a elipse não é uma circunferência e nem o conjunto vazio.*

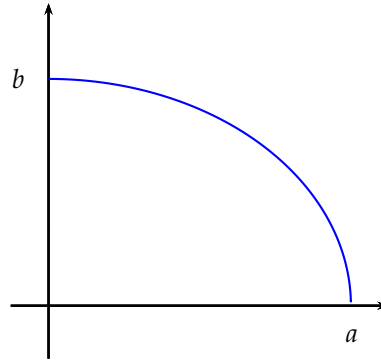
Na equação (3.10), fazendo $y \geq 0$ podemos escrever

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a].$$

Tal equação é uma função em x , contínua, decrescente e com concavidade para baixo em todo seu domínio. Assim seu gráfico é dado pela Figura 3.2.

E como a elipse é simétrica, sua forma é dada pela Figura 3.3.

Figura 3.2: Gráfico da função $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$



Definição 3.4. Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a elipse e os pontos B_1 e B_2 em que a mediatriz do segmento focal intercepta a elipse são chamados de **vértices**. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados de **eixo maior** e **eixo menor** da elipse, respectivamente.

Exemplos 3.4.1. 1. A equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa uma elipse onde $a = 3$, $b = 2$. Os focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ onde, $a^2 = b^2 + c^2$. Daí, $a = \sqrt{5}$. Logo $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(\sqrt{5}, 0)$. Os vértices são $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$, $B_1(0, -2)$ e $B_2(0, 2)$.

2. Encontre a equação da elipse cujos focos são $F_1(-3, 0)$ e $F_2(0, 4)$ e cujo eixo maior mede 7.

Solução: Como os focos não estão sobre o eixo x , não podemos usar a equação (3.10). Assim vamos utilizar a definição (3.7). Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a tal elipse, então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 7.$$

Figura 3.3: Elipse com focos no eixo x e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Assim

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} &= 7 \\ (x+3)^2 + y^2 &= 49 - 14\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + x^2 + (y-4)^2 \\ (3x+4y-28)^2 &= \left[-7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right]^2 \\ 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 168x - 224y + 784 &= 49x^2 + 49y^2 - 392y + 784 \end{aligned}$$

Portanto a elipse procurada tem equação

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y = 0.$$

3. Encontre a equação da elipse com focos $F_1(0, -2)$ e $F_2(0, 2)$ e tal que $a = 3$.

Solução: Neste caso, $P(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 6 \\ \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} &= 6 \\ (8y - 36)^2 &= \left[-12 \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}\right]^2 \\ 64y^2 - 576y + 1296 &= 144x^2 + 144y^2 - 576y + 576 \\ 144x^2 + 80y^2 &= 720. \end{aligned}$$

Portanto a elipse procurada tem equação

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Proposição 3.4.1. Uma equação da forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.16}$$

descreve uma elipse se, e somente se, os números reais p e q são distintos e positivos.

Corolário 3.0.1. Sejam O a origem do plano cartesiano, p e q números reais distintos e positivos. Seja E a elipse de equação (3.16) e parâmetros geométricos a e b .

1. Se $p > q$, então $a^2 = p$, $b^2 = q$ e E tem centro O e focos no eixo x .
2. Se $q > p$, então $a^2 = q$, $b^2 = p$ e E tem centro O e focos no eixo y .

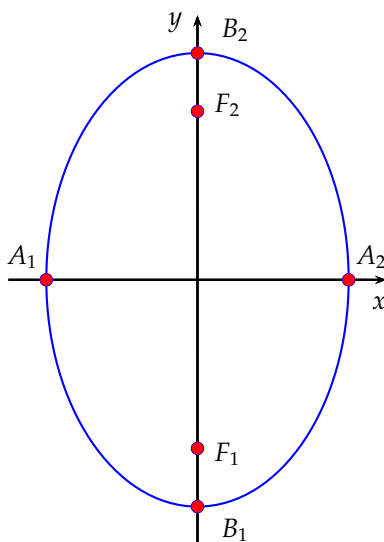
Exemplos 3.4.2. Para as equações dadas, encontre os focos, vértices e o comprimento do eixo maior e menor da elipse dada.

$$1. 16x^2 + y^2 = 1$$

Solução: Podemos escrever essa equação como

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Figura 3.4: Elipse com focos no eixo y e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



e daí $p = 1/16$ e $q = 1$. Como $p < q$, os focos estão no eixo y . Assim $a = 1$ e $b = 1/4$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $c = \sqrt{15}/4$. Logos

$$F_1\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right), \quad F_2\left(0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1)$$

$$B_1\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad B_1\left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

2. $25x^2 + 169y^2 = 9$

Solução: Podemos escrever essa equação como

$$\frac{x^2}{\frac{9}{25}} + \frac{y^2}{\frac{9}{169}} = 1$$

e daí $p = 9/25$ e $q = 9/169$. Como $p > q$, os focos estão no eixo x . Assim $a = 3/5$ e $b = 3/13$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $c = 36/65$. Logo

$$\begin{aligned} F_1\left(-\frac{36}{65}\right), \quad F_2\left(\frac{36}{65}\right) \\ A_1\left(-\frac{3}{5}, 0\right), \quad A_2\left(\frac{3}{5}, 0\right) \\ B_1\left(0, -\frac{3}{13}\right), \quad B_2\left(0, \frac{3}{13}\right). \end{aligned}$$

Considere a elipse de equação reduzida

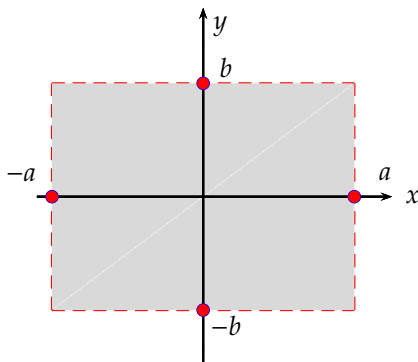
$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq 1 &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ \frac{y^2}{b^2} \leq 1 &\Leftrightarrow -b \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Portanto os pontos de E estão dentro do retângulo. Esse retângulo é chamado de **retângulo**

Figura 3.5: Retângulo fundamental



fundamental da elipse E .

Agora, como $a > b$, então

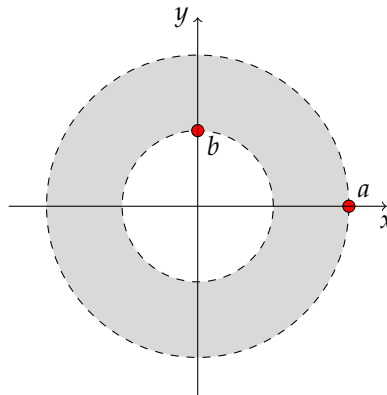
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Assim, todo ponto $P(x, y)$ de E satisfaz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

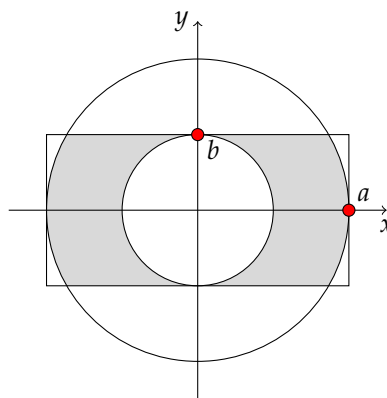
e daí $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, ou seja, $b \leq d(P, O) \leq a$. Portanto a elipse está contida entre as circunferências de raio a e b . Essa região é chamada de **coroa fundamental** da elipse.

Figura 3.6: Coroa Fundamental



Logo os pontos da elipse estão na região compreendida entre o retângulo fundamental e a coroa fundamental. Assim observe que se b/a estiver próximo de 1, então o retângulo

Figura 3.7: Região onde se encontram os pontos de uma elipse



fundamental será próximo de um quadrado e daí a forma da elipse se aproximará de um circunferência. Por outro lado, quanto mais próximo de 0 estiver b/a , mais alongada será a elipse. Mas, sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

daí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1.$$

Dessa equação vemos que se $b/a \rightarrow 1$, então $c/a \rightarrow 0$ e daí os focos de E estão “mais próximos” de seu centro do que de seus vértices e desse modo a elipse será mais parecida com um circunferência. Por outro lado, se $b/a \rightarrow 0$, então $c/a \rightarrow 1$ e assim os focos de E estão “mais próximos” dos vértices do que do centro de E e desse modo a elipse será mais alongada. Portanto o quociente c/a mede o quanto os focos de E estão “fora do centro”. A essa razão damos o nome de **excentricidade** (*ex centrum*) da elipse e representamos por

$$e = \frac{c}{a}.$$

3.2.2 Hipérbole

Definição 3.5. Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano tais que sua distância seja $2c$. Considere um número real a tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico H dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (3.17)$$

chama-se **hipérbole**. Os pontos F_1 e F_2 são chamados **focos** da hipérbole, o segmento F_1F_2 é chamado **segmento focal**, o ponto médio do segmento F_1F_2 é chamada de **centro** da hipérbole e o número $2c$ é chamado de **distância focal**. A reta passando por F_1 e F_2 é chamada **reta focal**.

Vamos fixar $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole H de focos F_1 e F_2 se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

$$d(P, F_1) = \pm 2a + d(P, F_2)$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2 = \left[\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2$$

$$(cx - a^2)^2 = \left[\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo $b^2 = c^2 - a^2$ e dividindo por $a^2 b^2$ obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.18)$$

Como no caso da elipse, também temos as relações

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.19)$$

$$c > b > 0 \quad (3.20)$$

$$c > a > 0. \quad (3.21)$$

Portanto, se um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole H , então ele satisfaz a equação (3.17).

Agora, dado um ponto $A(\alpha, \beta)$ que satisfaz a equação (3.17), queremos mostrar que A pertence à hipérbole H . Temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} &= 1 \\ \beta^2 &= \frac{b^2}{a^2} \alpha^2 - b^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando (3.20) e (3.22):

$$\begin{aligned} d^2(P, F_1) &= (\alpha + c)^2 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha c + c^2 + \frac{b^2}{a^2} \alpha^2 - b^2 \end{aligned}$$

donde

$$d^2(A, F_1) = \left(\frac{c}{a} \alpha + a \right)^2.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$d^2(A, F_2) = \left(\frac{c}{a} \alpha - a \right)^2.$$

Assim

$$d(A, F_1) = \left| \frac{c}{a} \alpha + a \right| \quad (3.23)$$

$$d(A, F_2) = \left| \frac{c}{a} \alpha - a \right|. \quad (3.24)$$

Mas

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

assim

$$\alpha^2/a^2 \geq 1, \quad (3.25)$$

isto é, $\alpha \leq -a$ ou $\alpha \geq a$. Temos então dois casos para analisar:

1. Se $\alpha \leq -a$, então

$$\frac{c}{a}\alpha \leq -c < -a.$$

Portanto, $(c/a)\alpha + a < 0$ e $(c/a)\alpha - a < 0$, donde

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= -\frac{c}{a}\alpha - a \\ d(A, F_2) &= -\frac{c}{a}\alpha + a. \end{aligned}$$

e então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |-2a| = 2a.$$

2. Se $\alpha \geq a$, então

$$\frac{c}{a}\alpha \leq c > a.$$

Portanto, $(c/a)\alpha + a > 0$ e $(c/a)\alpha - a > 0$, donde

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= \frac{c}{a}\alpha + a \\ d(A, F_2) &= \frac{c}{a}\alpha - a. \end{aligned}$$

e então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |2a| = 2a.$$

Portanto, se $A(\alpha, \beta)$ satisfaz a equação (3.17), então A pertence à hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Assim provamos a seguinte proposição:

Proposição 3.5.1. *Um ponto $P(x, y)$ é um ponto da hipérbole*

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, as distâncias de P aos focos são:

$$\begin{aligned} d(A, F_1) &= \left| \frac{c}{a}\alpha + a \right| \\ d(A, F_2) &= \left| \frac{c}{a}\alpha - a \right|. \end{aligned}$$

Os números a , b e c são chamados **parâmetros geométricos** da hipérbole H e a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é chamada de **equação reduzida** da hipérbole.

Observação 3.5.1. Seja $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ uma hipérbole de focos no eixo x .

1. Nenhum ponto $P(x, y)$ de H é tal que $-a < x < a$, pois caso contrário teríamos $x^2 < a^2$ o que contradiz a inequação (3.25). Para a ordenada y não há restrição, isto é, qualquer que seja y existe x tal que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Assim a hipérbole não é limitada.
2. Se (x, y) pertence a H , então $(-x, -y)$, $(x, -y)$ e $(-x, y)$ também pertencem a H . Logo a hipérbole é simétrica em relação ao eixo x , ao eixo y e em relação à origem do plano cartesiano.
3. O ponto $(x, 0)$ pertence à hipérbole H se, e só se, $x = \pm a$. Por isso a interseção de H com a reta focal são os pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, chamados de **vértices** de H .

Considere a hipérbole H de equação reduzida

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Dada uma reta r de equação $y = mx$, quais as condições sobre a , b , c e m para que a reta r intercepte H ?

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto de interseção entre r e H . Então temos

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} &= 1 \\ y_0 &= mx_0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{m^2 x_0^2}{b^2} = 1.$$

Resolvendo em x_0 obtemos

$$x_0 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}} = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}. \quad (3.26)$$

Assim

$$b^2 - a^2 m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

Como a e b são positivos

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Logo a reta $y = mx$ intercepta a hipérbole H se, e só se, seu coeficiente angular está entre $-b/a$ e b/a . Portanto as retas

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}x$$

não interceptam a hipérbole H . Tais retas são chamadas de **assíntotas da hipérbole**. Mais ainda, da equação (3.26) quando $m \rightarrow b/a$, o ponto x_0 tende para mais ou menos infinito. Logo os pontos da hipérbole se aproximam das assíntotas a medida que x se afasta da origem.

Como no caso da elipse, utilizando a simetria e as assíntotas da hipérbole, podemos mostrar a partir da equação

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a$$

que a forma da hipérbole será dada pela Figura 3.8.

Exemplos 3.5.1. 1. Encontre a equação da hipérbole cujos vértices são $(-15, 0)$ e $(15, 0)$ e as assíntotas têm equações $5y - 4x = 0$ e $5y + 4x = 0$.

Solução: As assíntotas são dadas por

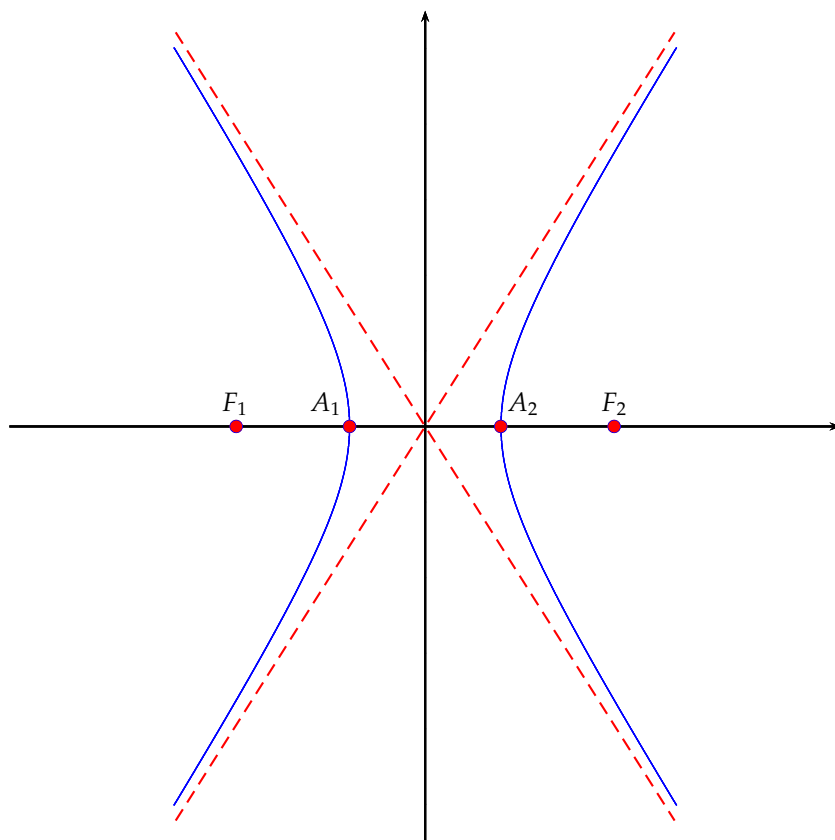
$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}x.$$

A partir dos vértices encontramos $a = 15$. Daí $b = 12$ e então a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

2. Encontre a equação da hipérbole de focos $F_1(0, -\sqrt{20})$ e $F_1(0, \sqrt{20})$ e tal que $a = 2$.

Figura 3.8: Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com assíntotas $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$



Solução: Como os focos não estão no eixo x , vamos usar a equação (3.17):

$$\begin{aligned}
 |d(P, F) - d(P, F_2)| &= 4 \\
 \left[\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{20})^2} \right]^2 &= \left[\pm 4 + \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2} \right]^2 \\
 (y\sqrt{20} - 4)^2 &= \left[\pm 2 \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{20})^2} \right]^2 \\
 20y^2 - 8\sqrt{20}y + 16 &= 4x^2 + 4y^2 - 8\sqrt{20}y + 80 \\
 16y^2 - 4x^2 &= 64.
 \end{aligned}$$

Logo a hipérbole procurada tem equação

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Portanto as assíntotas são

$$y = -2x \quad e \quad y = 2x.$$

Proposição 3.5.2. *Um equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{3.27}$$

descreve uma hipérbole se, e somente se, os números reais p e q são de sinal contrário.

Corolário 3.0.2. *Sejam p e q números reais de sinal contrário e H a hipérbole de equação (3.27) e parâmetros geométricos a e b .*

1. *Se $p > 0$ e $q < 0$, então $a^2 = p$ e $b^2 = -q$, H tem centro na origem e focos no eixo x .*
2. *Se $p < 0$ e $q > 0$, então $a^2 = q$ e $b^2 = -p$, H tem centro na origem e focos no eixo y .*

Observação 3.5.2. *No caso de uma hipérbole H com focos no eixo y , isto é, com equação*

$$H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

as assíntotas terão equações dadas por

$$x = \pm \frac{a}{b}y.$$

3.2.3 Parábola

Definição 3.6. *Seja r uma reta e F um ponto que não pertence a r . O lugar geométrico P dos pontos equidistantes de F e r chama-se **parábola**. O ponto F é chamado de **foco da parábola** e r de **reta diretriz**. A reta contendo o foco F e perpendicular à reta diretriz é chamada de **reta focal**.*

Vamos fixar $F(p, 0)$ e $r : x = -p$, onde $p > 0$. Assim um ponto $A(x, y)$ pertence à parábola de foco F e reta diretriz r se, e somente se,

Figura 3.9: Hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ com assíntotas $x = -\frac{a}{b}y$ e $x = \frac{a}{b}y$



$$d(A, r) = d(A, F).$$

Mas

$$d(A, r) = |x + p|$$

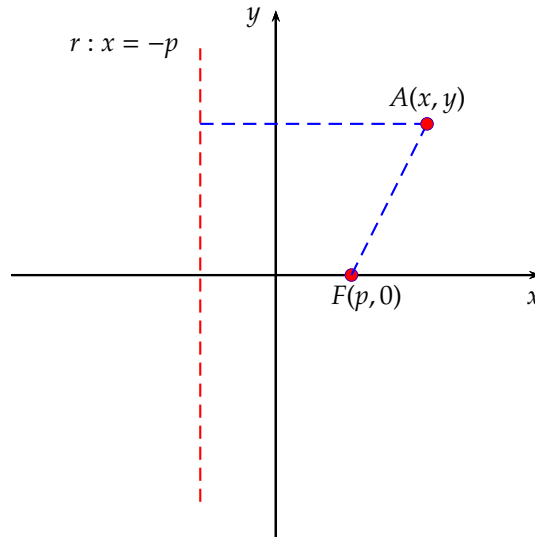
$$d(A, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}.$$

Logo A pertence à parábola P se, e somente se,

$$(|x + p|)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2.$$

Figura 3.10: Definição da Parábola



Portanto $A(x, y)$ pertence à parábola P se, e somente se,

$$y^2 = 4px \quad (3.28)$$

A equação (3.28) é chamada de **equação reduzida** da parábola P . Indica-se

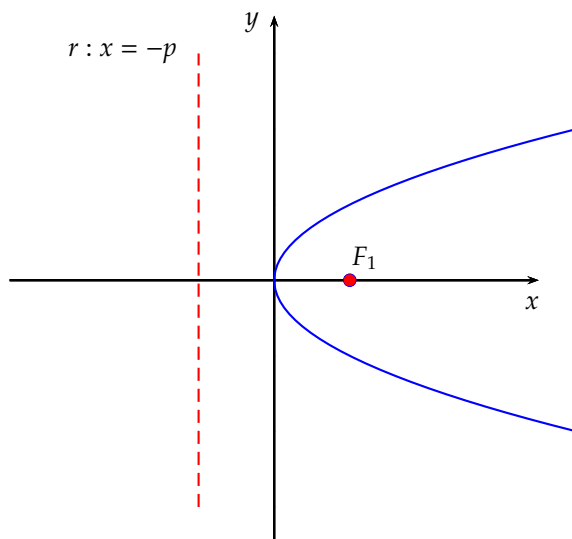
$$P : y^2 = 4px.$$

- Observação 3.6.1.**
1. Se (x, y) satisfaz a equação (3.28), então $x \geq 0$, isto é, nenhum ponto de P tem abscissa negativa. Já para a ordenada y , não existem restrições. Logo a parábola não é limitada.
 2. Se (x, y) pertence a P , então $(x, -y)$ também pertence a P . Logo a parábola é simétrica em relação ao eixo x .
 3. O único ponto de interseção de P com os eixos coordenados é o ponto $(0, 0)$. Tal ponto é chamado de **vértice** da parábola.

Na equação (3.28) podemos isolar x e escrever

$$x = \frac{y^2}{4p}$$

Figura 3.11: Parábola $P : y^2 = 4px$ e reta diretriz $r : x = -p, p > 0$



obtendo assim x como uma função de y . Logo o gráfico da parábola P é:

Agora, se a diretriz de P tem equação $r : x = p$ e o foco é o ponto $F(-p, 0)$, com $p > 0$, obtemos a equação

$$y^2 = -4px.$$

Neste caso, o gráfico da parábola é dado pela Figura 3.12.

Nos demais casos temos:

Proposição 3.6.1. *As equações $y^2 = qx$ e $x^2 = qy$ descrevem uma parábola se, e somente se, $q \neq 0$.*

3.3 Rotação e Translação de Eixos

Definição 3.7. *Chama-se **cônica** o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem uma equação do segundo grau $g(x, y) = 0$, onde*

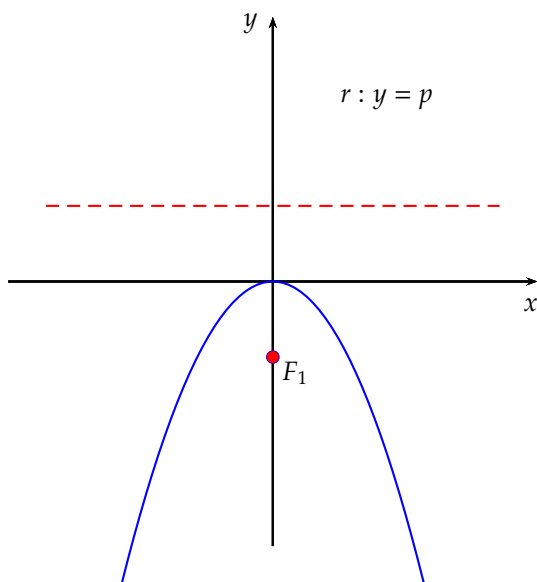
$$g(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f. \quad (3.29)$$

Na equação (3.29) pelo menos um dos números a, b, c é diferente de zero. Os termos ax^2 e by^2 são os **termos quadráticos**, o termo cxy é o **termo quadrático misto**, dx e ey são os **termos lineares** e f é o **termo independente**.

Figura 3.12: Parábola $P : y^2 = -4px$ e reta diretriz $r : x = p, p > 0$

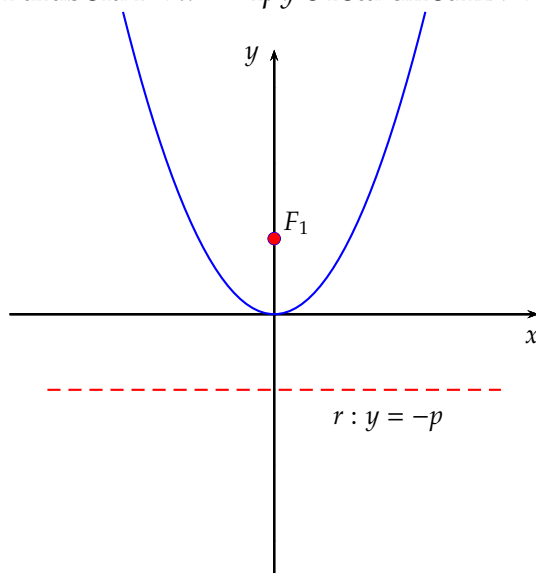


Figura 3.13: Parábola $P : x^2 = -4py$ e reta diretriz $r : y = p, p > 0$



A equação (3.29) pode representar:

1. um conjunto vazio: $x^2 + y^2 = -1$;
2. um conjunto formado por um ponto: $x^2 + y^2 = 0$;

Figura 3.14: Parábola $P : x^2 = 4py$ e reta diretriz $r : y = -p, p > 0$ 

3. a reunião de duas retas (paralelas ou concorrentes): $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$;

4. uma circunferência: $x^2 + y^2 - 13x + y - 10 = 0$;

5. uma elipse: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$;

6. uma hipérbole: $3x^3 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$;

7. uma parábola: $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Para determinar a cônica representada pela equação (3.29) iremos utilizar translações e rotações de eixos para simplificar sua equação.

3.3.1 Translação de eixos

Considere a seguinte cônica

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0. \quad (3.30)$$

Podemos escrever

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 2(y - 1)^2 - 2 - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 7.$$

Fazendo a mudança

$$x - 2 = x_1 \quad (3.31)$$

$$y - 1 = y_1 \quad (3.32)$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{7} + \frac{y_1^2}{\frac{7}{2}}$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1 .

O efeito das equações (3.31) e (3.32) foi o de mudar o centro da elipse de equação (3.30) que estava no ponto $(2, 1)$ no sistema original para o ponto $(0, 0)$ considerando os eixos coordenados x_1 e y_1 .

Utilizando-se as equações (3.31) e (3.32) podemos facilmente escrever as coordenadas de um ponto P qualquer, tanto em relação ao sistema de eixos coordenados x e y , quanto ao sistema de eixos coordenados x_1 e y_1 . Por exemplo, o ponto P de coordenadas $P = (4, 0)$, em relação ao sistema xy , terá coordenadas $(2, -1)$ em relação ao sistema de eixos x_1y_1 . As mudanças introduzidas pelas equações (3.31) e (3.32) são chamadas de **translações de eixos**. De modo geral, se (x, y) são as coordenadas de um ponto P em relação ao ponto $(0, 0)$, então as coordenadas de P em relação aos eixos x_1 e y_1 , centrados no ponto (a, b) são dadas por

$$x_1 = x - a \quad (3.33)$$

$$y_1 = y - b. \quad (3.34)$$

As mudanças introduzidas pelas equações (3.33) e (3.34) permitem remover os termos lineares da equação (3.29).

Figura 3.15: Translação de eixos



Exemplos 3.7.1. *Identifique as cônicas:*

1. $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$

Solução: *Completando quadrados*

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 4 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Fazendo

$$x - 1 = x_1$$

$$y - 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1 . No novo sistema de coordenadas centrado no ponto os vértices são

$$\overline{A_1}(-3, 0), \quad \overline{A_2}(3, 0)$$

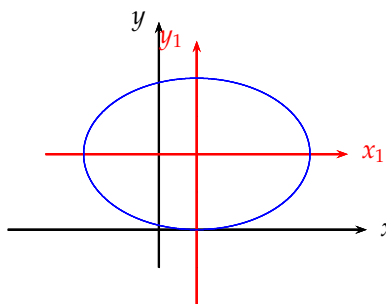
$$\overline{B_1}(0, -2), \quad \overline{B_2}(0, 2).$$

No sistema original os vértices são

$$A_1(-2, 2), \quad A_2(2, 2)$$

$$B_1(1, 0), \quad B_2(1, 4).$$

Figura 3.16: Elipse $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$



2. $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

Solução: Completando quadrados

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 2(y^2 + 4y + 4 - 4) - 1 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 2(y + 2)^2 = 2.$$

Fazendo

$$x - 3 = x_1$$

$$y + 2 = y_1$$

obtemos

$$\frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1$$

que representa uma hipérbole com focos no eixo x_1 . Suas assíntotas são

$$y_1 = \pm \frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

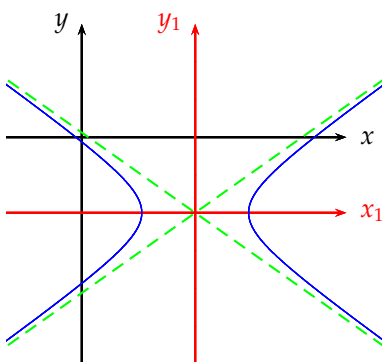
Os vértices são $\overline{A_1}(-\sqrt{2}, 0)$ e $\overline{A_2}(\sqrt{2}, 0)$. No sistema original suas assíntotas são

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 2 \right)$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right).$$

Os vértices são $\overline{A_1}(-3 - \sqrt{2}, 0)$ e $\overline{A_2}(-3 + \sqrt{2}, 0)$.

Figura 3.17: Hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$



3. $x^2 - y^2 - 2x - 6y = 8$

Solução: Completando quadrados

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 6y + 9 - 9) - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 0$$

$$[(x - 1) - (y + 3)][(x - 1) + (y + 3)] = 0$$

que representam as retas

$$r : x - y - 4 = 0$$

$$s : x + y + 2 = 0$$

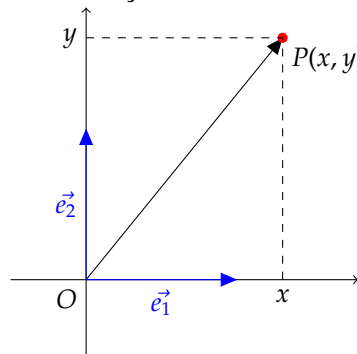
que se interceptam no ponto $(1, -3)$.

3.3.2 Rotação de eixos

Considere o sistema cartesiano com centro em $(0, 0)$. Sejam $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Para qualquer vetor $\vec{P} = (x, y)$ podemos escrever

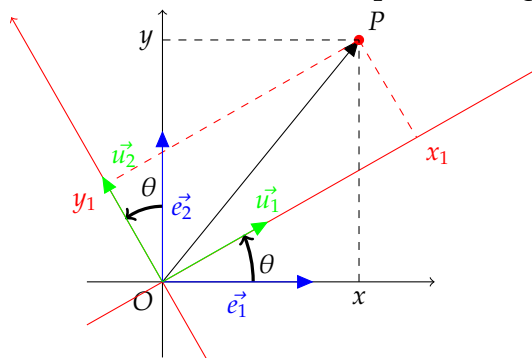
$$\vec{P} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (3.35)$$

Figura 3.18: Rotação de eixos: vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2



Agora, efetuando-se uma rotação no sentido antihorário nos eixos x e y de um ângulo θ , obtemos novos eixos coordenados x_1 e y_1 . Tome vetores unitários \vec{u}_1 e \vec{u}_2 nos eixos x_1 e y_1 . Em relação aos eixos originais podemos escrever

Figura 3.19: Rotação dos eixos por um ângulo θ



$$\vec{u}_1 = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2.$$

Mas, os vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são unitários e ortogonais, assim podemos escrever o vetor \vec{P} como combinação de escalares nos eixos rotacionados, isto é,

$$\vec{P} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2. \quad (3.36)$$

Daí de (3.35) e (3.36) obtemos

$$xe_1 + ye_2 = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$$

e substituindo \vec{u}_1 e \vec{u}_2

$$xe_1 + ye_2 = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)e_1 + (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)e_2.$$

Logo

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (3.37)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (3.38)$$

e então isolando x_1 e y_1

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Portanto para eliminar o termo xy da equação $g(x, y) = 0$, substituímos (3.37) e (3.38) em $g(x, y) = 0$ e determinamos o ângulo θ que elimina o termo xy .

Exemplos 3.7.2. *Seja P o ponto $P(6, 4)$. Efetuando-se uma rotação de um ângulo de $\theta = \pi/3$ radianos nos eixos, as coordenadas de P em relação aos novos eixos são*

$$x_1 = 6 \cos(\pi/3) + 4 \sin(\pi/3) = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6 \sin(\pi/3) + 4 \cos(\pi/3) = 2 - 3\sqrt{3}.$$

Daí no novo sistema $P(3 + 2\sqrt{3}, 2 - 3\sqrt{3})$.

Exemplos 3.7.3. *Identifique as cônicas:*

$$1. \quad 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$$

Solução: *Fazendo as mudanças*

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (3.39)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (3.40)$$

temos

$$\begin{aligned} & 3(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 + 3(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2 \\ & - 10(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ & + 12\sqrt{2}(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) - 4\sqrt{2}(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ & = (3 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 10 \sin \theta \cos \theta)x_1^2 \\ & + (3 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 10 \sin \theta \cos \theta)y_1^2 \\ & + (6 \sin \theta \cos \theta - 10 \cos^2 \theta + 10 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta \cos \theta)x_1 y_1 \\ & + (12\sqrt{2} \cos \theta - 4\sqrt{2} \sin \theta)x_1 + (-12\sqrt{2} \sin \theta - 4\sqrt{2} \cos \theta)y_1 + 32 = 0. \end{aligned}$$

Assim θ deve ser tal que

$$-10 \cos^2 \theta + 10 \sin^2 \theta = 0,$$

isto é, $\theta = \pi/4$. Substituindo esse valor de θ na equação anterior e simplificando obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0.$$

Nessa nova equação podemos completar quadrados

$$(x_1^2 - 4x_1 + 4) - 4 - 4(y_1^2 - 2y_1 + 1 - 1) - 16 = 0$$

$$(x_1 - 2)^2 - 4(y_1 - 1)^2 = 16.$$

Fazendo

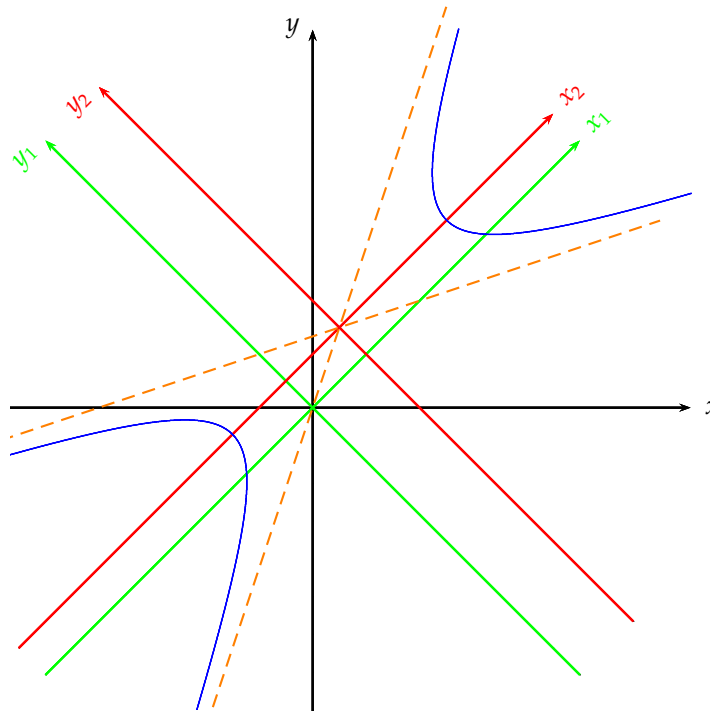
$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1$$

encontramos

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1$$

que é uma hipérbole de vértices no eixo x_2 .

Figura 3.20: Hipérbole $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$ 

2. $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$

Solução: Fazendo as mudanças

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (3.41)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (3.42)$$

temos

$$\begin{aligned} & 52(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 + 73(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2 \\ & - 72(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) - 400 = 0 \\ & (52 \cos^2 \theta - 72 \sin \theta \cos \theta + 73 \sin^2 \theta)x_1^2 + (52 \sin^2 \theta + 72 \sin \theta \cos \theta + 73 \cos^2 \theta)y_1^2 \\ & + (-104 \sin \theta \cos \theta + 72 \sin^2 \theta - 72 \cos^2 \theta + 146 \sin \theta \cos \theta)x_1 y_1 - 400 = 0 \quad (3.43) \end{aligned}$$

Assim devemos ter

$$-104\sin\theta\cos\theta + 72\sin^2\theta - 72\cos^2\theta + 146\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$42\sin\theta\cos\theta + 72(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0$$

$$21\sin(2\theta) - 72\cos(2\theta) = 0$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{24}{7}.$$

Agora

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}$$

e usando as equações $\cos^2\theta = (1/2)(1 + \cos(2\theta))$ e $\sin^2\theta = (1/2)(1 - \cos(2\theta))$ obtemos

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \quad e \quad \sin\theta = \frac{3}{5}.$$

Substituindo na equação (3.43) obtemos

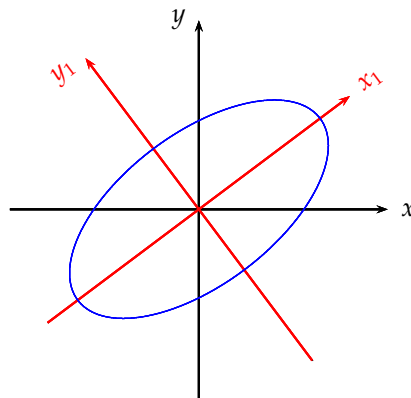
$$\left(52\frac{16}{25} - 72\frac{12}{25} + 73\frac{9}{25}\right)x_1^2 + \left(52\frac{9}{25} + 72\frac{12}{25} + 73\frac{16}{25}\right)y_1^2 - 400 = 0$$

$$25x_1^2 + 100y_1^2 = 400$$

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

que representa uma elipse com focos no eixo x_1 .

Figura 3.21: Elipse $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 400 = 0$



$$3. x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Solução: *Fazendo as mudanças*

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \quad (3.44)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (3.45)$$

temos

$$\begin{aligned} & (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 - 2(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ & + (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2 - 2(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) - 2(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + 1 = 0 \\ & (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta)x_1^2 + (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)y_1^2 \\ & + (-2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta)x_1 y_1 \\ & + (-2 \cos \theta - 2 \sin \theta)x_1 + (2 \sin \theta - 2 \cos \theta)y_1 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Assim devemos ter

$$-2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = 0,$$

isto é, $\theta = \pi/4$. Substituindo em (3.46) obtemos a equação

$$y_1^2 = \sqrt{2} \left(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Fazendo

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

encontramos

$$y_2^2 = \sqrt{2} x_2$$

que representa uma parábola com foco no eixo x_2 e reta diretriz $x_2 = -\sqrt{2}/4$.

Figura 3.22: Parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 

CAPÍTULO 4

VETORES NO ESPAÇO

Fixemos um ponto O no espaço, que será denominado como **origem**. Tomemos três retas duas a duas perpendiculares entre si e concorrentes em O , que serão denominados **eixos coordenados** e serão denotados por Ox , Oy e Oz .

Figura 4.1: Sistema de coordenadas tridimensionais

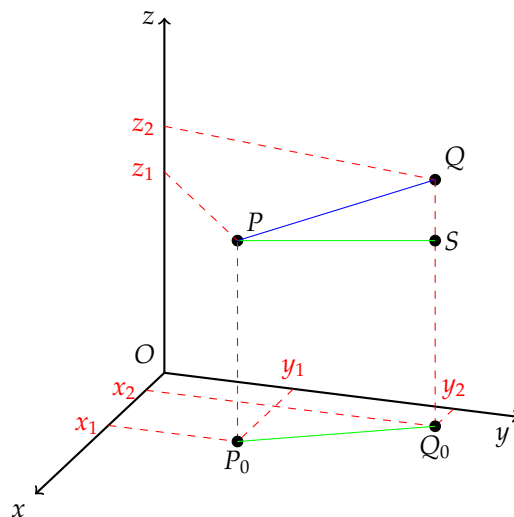


Projetando um ponto P do espaço ortogonalmente sobre cada um dos eixos coordenados podemos representar os pontos do espaço por ternas ordenadas (a, b, c) de números reais.

Figura 4.2: Coordenadas de um ponto no espaço tridimensional



Figura 4.3: Distância entre pontos em \mathbb{R}^3



Assim os pontos de \mathbb{R}^3 são descritos por

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos de \mathbb{R}^3 . Traçando por P um segmento PS paralelo ao segmento P_0Q_0 , onde $P_0(x_1, y_1)$ e $Q_0(x_2, y_2)$, obtemos que

$$d(P, Q)^2 = d(P_0, Q_0)^2 + |SQ|^2.$$

Agora, $|SQ| = |z_2 - z_1|$ e daí

$$D(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Exemplos 4.0.4. A distância entre os pontos $P(2, -1, 1)$ e $Q(-3, 4, 2)$ é

$$d(P, Q) = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (-1 - 4)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{51}.$$

Os vetores e as operações com eles podem ser definidas utilizando-se dos eixos coordenados do espaço. Para isso, um ponto P do espaço é representado em \mathbb{R}^3 por uma terna de coordenadas $P(x_1, y_1, z_1)$, onde $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$.

Seja \vec{u} um vetor no espaço. Sabemos que \vec{u} é um representante de uma certa classe de equipolência dos segmentos orientados (B, C) . Para este segmento orientado (B, C) podemos encontrar um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ tal que o segmento orientado (O, A) , onde $O(0, 0, 0)$, tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de (B, C) . Assim o vetor \vec{u} pode ser representado pelo segmento orientado (O, A) . Portanto qualquer vetor em \mathbb{R}^3 pode ser representado como um segmento com origem no ponto $(0, 0, 0)$ e extremidade em um ponto (x_1, y_1, z_1) .

Assim escrevemos $\vec{u} = \vec{OP}$. Para simplificar a notação vamos identificar o vetor $\vec{u} = \vec{OP}$ com as coordenadas de sua extremidade e daí escrevemos

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1).$$

As coordenadas (x_1, y_1, z_1) são chamadas de **componentes** do vetor \vec{u} . Com essa representação, o vetor nulo $\vec{0}$ é escrito como

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

Desse modo, podemos reescrever a definição de soma e produto por escalar da seguinte forma:

Definição 4.1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Então:

1. $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
2. $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Em alguns casos pode ser mais conveniente representar um vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ de forma matricial. Para isso escrevemos as componentes de \vec{u} como uma matriz de 1 coluna e duas linhas

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Vimos que a norma de um vetor é definida como o comprimento de um segmento orientado que o represente. Com a representação de vetores por coordenadas podemos reescrever o conceito de norma da seguinte maneira:

Definição 4.2. Seja $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ um vetor. A **norma** de \vec{u} , denotada por $\|\vec{u}\|$ é dada por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Um vetor de norma 1 é chamado de **vetor unitário**. Dado um vetor não nulo \vec{u} o vetor

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

é um vetor unitário na direção de \vec{u} pois

$$\|\vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \|\vec{u}\| = 1.$$

Exemplo 4.2.1. Seja $\vec{u} = (-2, 3, 2)$ um vetor. Então

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17} \\ \vec{v} &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2, 3, 2) = \left(\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}} \right). \end{aligned}$$

Proposição 4.2.1. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ um vetor em \mathbb{R}^3 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

1. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\|\vec{u}\| \neq 0$.
2. $\|\vec{u}\| \neq 0$ se, e somente se, $\vec{u} \neq \vec{0}$.
3. $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.

Prova:

1. Se $\vec{u} \neq (0, 0, 0) = \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$ ou $z_1 \neq 0$. Daí

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} > 0.$$

2. $\|\vec{u}\| = 0$ se, e somente se, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$, isto é, $x_1 = y_1 = z_1 = 0$. Portanto $\vec{u} = \vec{0}$.

3. $\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(x_1, y_1, z_1)\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2 + (\alpha z_1)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = |\alpha| \|\vec{u}\|$.

◇

4.0.3 Ângulo entre vetores e produto interno no espaço

Definição 4.3. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. O **ângulo** entre \vec{u} e \vec{v} é definido pelo ângulo θ determinado por \vec{u} e \vec{v} e que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando os vetores \vec{u} e \vec{v} são representados com a mesma origem.

Definição 4.4. Quando o ângulo θ entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é reto, isto é, $\theta = \pi/2$, ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores \vec{u} e \vec{v} são **ortogonais** ou **perpendiculares** entre si. Denotamos tal fato, escrevendo $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos e θ o ângulo entre eles.

Figura 4.4: Ângulo entre vetores em \mathbb{R}^3



Definição 4.5. O **produto escalar** ou **produto interno** dos vetores \vec{u} e \vec{v} , indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que

1. Se \vec{u} ou \vec{v} é nulo, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

2. Se \vec{u} e \vec{v} não são nulos e θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (4.1)$$

Proposição 4.5.1. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores e θ o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

1. Se \vec{u} e \vec{v} não são nulos, então

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

2. Qualquer que seja o vetor \vec{u} ,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

3. Quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} , $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

De modo análogo ao caso para vetores no plano, temos:

Teorema 4.1. O produto interno de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{R}^3 é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Exemplos 4.5.1. 1. Sejam $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Determine o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Solução: Temos

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (2, -3, 1) \cdot (1, 1, 0) = 2 - 3 + 0 = -1$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{28}}.$$

$$\text{Assim, } \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{28}}\right).$$

2. Encontre um vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 2)$ e tal que $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$, onde $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

Solução: Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -1/5 - z/5$ e $y = -4/5 + 6z/5$. Fazendo $z = 0$, obtemos $\vec{u} = (-1/5, -4/5, 0)$.

Proposição 4.5.2. Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e qualquer que seja o número real λ temos

$$(i) \quad \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$(ii) \quad \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(iii) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(iv) \quad \text{Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0.$$

Prova:

(i)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle &= \langle \vec{u}, (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \rangle = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= (\lambda x_1)y_2 + (\lambda y_1)y_2 + (\lambda z_1)z_2 \\ &= \langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle &= \langle \vec{u}, (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) \rangle = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) + z_1(\lambda z_2) \\ &= \lambda(x_1y_2) + \lambda(y_1y_2) + \lambda(z_1z_2) \\ &= \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

$$(iii) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

(iv) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$ ou $z_1 \neq 0$. Daí $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 0$, como queríamos.

◇

Observação 4.5.1. (a) As propriedades (i) e (ii) da Proposição 4.5.2 podem ser estendidas para qualquer número de vetores:

$$\langle \vec{u}, (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n) \rangle = \lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle.$$

(b) Na igualdade $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ não podemos concluir que $\vec{v} = \vec{w}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, -5, 3)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ e no entanto $\vec{v} \neq \vec{w}$. Mas podemos concluir que $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

(c) De $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ não podemos concluir que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Por exemplo, para $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 4, 0)$ temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e no entanto $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Proposição 4.5.3. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores.

1. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ [Desigualdade de Scharwz]
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ [Desigualdade Triangular]

Prova: Análoga à prova da Proposição 1.9.3.

◇

4.0.4 Produto Vetorial

Dados vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ queremos encontrar um vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ que seja simultaneamente ortogonal a \vec{u} e a \vec{v} . Para isso devemos ter $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

Podemos reescrever este último sistema como

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}. \quad (4.2)$$

Suponha que \vec{u} e \vec{v} não são paralelos, daí pelo menos um dos determinantes

$$d_{ab} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad d_{ac} = \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_{bc} = \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

é diferente de zero. Suponha então que $d_{ab} \neq 0$. Usando a Regra de Cramer, a solução do sistema (4.2) é dada por

$$x = \frac{1}{d_{ab}} \det \begin{pmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{pmatrix} = \frac{-z}{d_{ab}} \det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}.$$

Analogamente, obtemos

$$y = \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}.$$

Logo \vec{w} é dado por

$$\vec{w} = \left(\frac{z(b_1c_2 - c_1b_2)}{d_{ab}}, \frac{z(c_1a_2 - a_1c_2)}{d_{ab}}, z \right),$$

isto é, existem infinitos vetores \vec{w} que são simultaneamente ortogonais a \vec{u} e \vec{v} . Fazendo $z = d_{ab}$, obtemos que uma solução para o sistema (4.2) é dada por

$$\vec{w} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2). \quad (4.3)$$

O vetor \vec{w} dado por (4.3) é chamado de **produto vetorial** de \vec{u} por \vec{v} e é denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

Um método alternativo para determinar o vetor \vec{w} é o seguinte: denote por

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

Então qualquer vetor $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1) = a_1(1, 0, 0) + b_1(0, 1, 0) + c_1(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}.$$

Dados vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, seja \vec{w} o produto vetorial de \vec{u} e \vec{v} . Considere o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} &= b_1 c_2 \vec{i} + c_1 a_2 \vec{j} + a_1 b_2 \vec{k} - b_1 a_2 \vec{k} - c_1 b_2 \vec{i} - a_1 c_2 \vec{j} \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{i} + (c_1 a_2 - c_2 a_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \vec{w}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.1. Sejam $\vec{u} = (-1, 2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 3, 5)$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

Solução: Temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Logo $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 9, -5)$. Agora,

$$\vec{v} \times \vec{u} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Portanto $\vec{v} \times \vec{u} = (2, -9, 5) = -\vec{u} \times \vec{v}$.

Proposição 4.5.4. Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} vetores em \mathbb{R}^3 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

- (a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;
- (b) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} \parallel \vec{v}$;
- (c) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$;

$$(d) \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

Prova: Seguem diretamente das propriedades do determinante. \diamond

Observação 4.5.2. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela regra da mão direita: se o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é θ , giramos o vetor \vec{u} de um ângulo θ até que coincida com o vetor \vec{v} e acompanhamos o movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Proposição 4.5.5. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores no espaço. Então

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2. \quad (4.4)$$

Prova: Seja $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Basta calcular $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$ e $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ e comparar os termos. \diamond

Proposição 4.5.6. Quaisquer que sejam os vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} em \mathbb{R}^3 , tem-se

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

onde θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Prova: Da Proposição 4.5.5 e usando a equação (4.1) temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

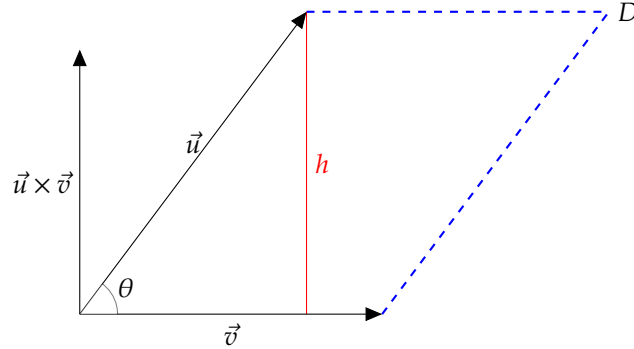
pois $0 \leq \theta \leq \pi$. \diamond

Agora considere o paralelogramo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} :

A área \mathcal{A} desse paralelogramo é dado Por

$$\mathcal{A} = bh.$$

Figura 4.5: Interpretação geométrica do produto vetorial



Neste caso $b = \|\vec{u}\|$ e $h = \|\vec{v}\| \sin \theta$. Logo

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Portanto o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por \vec{u} e \vec{v} .

Exemplo 4.5.2. Calcule a área do triângulo de vértices $A(3, 2, 0)$, $B(0, 4, 3)$ e $C(1, 0, 2)$.

Solução: Note que a área do triângulo é metade da área do paralelogramo. Assim seja

$$\vec{u} = \vec{CA} = (2, 2, -2)$$

$$\vec{v} = \vec{CB} = (-1, 4, 1)$$

daí a área do triângulo será

$$\mathcal{A} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$$

e como $\vec{u} \times \vec{v} = (10, 0, 10)$ temos $\mathcal{A} = 5\sqrt{2}$.

4.0.5 Produto Misto

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores de \mathbb{R}^3 . Como $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor de \mathbb{R}^3 podemos calcular seu produto interno com qualquer outro vetor \vec{w} de \mathbb{R}^3 . O número real

$$\langle (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \rangle \tag{4.5}$$

é chamado de **produto misto** dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ temos

$$\begin{aligned}\langle (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \rangle &= \langle (b_1c_2 - c_2b_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1), (a_3, b_3, c_3) \rangle \\ &= (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 + (a_2c_1 - a_1c_2)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+1}a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2}b_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_1 - a_2b_1).\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Proposição 4.5.7. *Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores em \mathbb{R}^3 . Então*

$$(a) \quad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \rangle$$

$$(b) \quad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

Prova: Segue diretamente das propriedades de determinantes. ◇

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores em \mathbb{R}^3 . Considere o paralelepípedo definido por \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} :

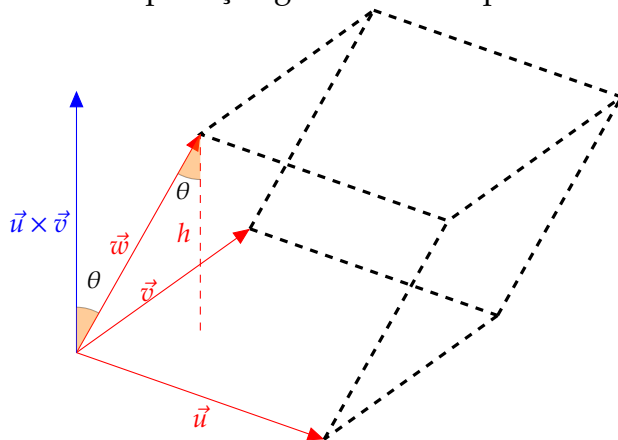
A altura h é dada por

$$h = \|\vec{w}\| |\cos \theta| = \|\vec{w}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

O volume do paralelepípedo é

$$\mathcal{V} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| h$$

Figura 4.6: Interpretação geométrica do produto misto



daí

$$\mathcal{V} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

isto é,

$$\mathcal{V} = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|. \quad (4.7)$$

Exemplo 4.5.3. Os pontos $P(0, 1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(1, -2, 0)$ e $S(-2, 2, -2)$ definem um paralelepípedo? Em caso afirmativo, qual o seu volume?

Solução: Se os pontos P , Q , R e S definirem um paralelepípedo, seu volume deverá ser diferente de zero. Assim considere os vetores

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{PQ} = (1, -1, 1) \\ \vec{v} &= \vec{PR} = (1, -3, -1) \\ \vec{w} &= \vec{PS} = (-2, 1, -3). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo P , Q , R e S não definem um paralelepípedo.

CAPÍTULO 5

RETA E PLANO NO ESPAÇO

5.1 Equações do Plano

Da Geometria plana, sabemos que todo plano π contém pelo menos três pontos não colineares, digamos A, B e C . Assim considere os vetores

$$\vec{u} = \vec{AB}$$

$$\vec{v} = \vec{AC}.$$

Como \vec{u} e \vec{v} não são paralelos, então podemos considerar o vetor $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, na Figura 5.1 vemos que um ponto D pertence ao plano π se, e somente se, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{AD}$. Logo um plano π é um conjunto de vetores perpendiculares a um dado vetor.

Fixe então um ponto P_0 em \mathbb{R}^3 e $\vec{v} \neq \vec{0}$ um vetor. Passando por P_0 existe um único plano π perpendicular ao vetor \vec{v} . Assim um ponto P do espaço pertence ao plano π se, e somente se, $P_0\vec{P} \perp \vec{v}$, isto é,

$$\langle P_0\vec{P}, \vec{v} \rangle = 0. \quad (5.1)$$

Sejam $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P(x, y, z)$ pontos em \mathbb{R}^3 . Logo $P_0\vec{P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e então da equação (5.1) obtemos

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0. \quad (5.2)$$

Figura 5.1: Equação do plano



A equação (5.2) é chamada de **equação cartesiana do plano** π . O vetor \vec{v} é chamado de **vetor normal** ao plano π .

Exemplos 5.0.2. Encontre a equação do plano π nas seguintes situações:

1. O vetor normal é $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e o ponto de π é $P_0(1, 3, -1)$.

Solução: Se $P(x, y, z)$ pertence a π , então

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle (x - 1, y - 3, z + 1), (1, 2, -1) \rangle = 0$$

$$x - 1 + (y - 3)2 + (z + 1)(-1) = 0.$$

Logo a equação do plano procurado é

$$x + 2y - z - 8 = 0.$$

2. O vetor normal é $\vec{v} = (0, 0, 1)$ e $P_0(0, 0, 0)$.

Solução: Se $P(x, y, z)$ pertence a π , então

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 0.$$

Logo a equação do plano procurado é

$$z = 0.$$

Agora, se $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $P_0(0, 0, 0)$, então a equação do plano será $y = 0$. Agora, se

Figura 5.2: Plano $z = 0$



$\vec{v} = (1, 0, 0)$ e $P_0(0, 0, 0)$, então a equação do plano será $x = 0$.

Figura 5.3: Plano $y = 0$ 

3. Passando pelos pontos $A(3, 1, -2)$, $B(5, 2, 1)$ e $C(2, 0, 2)$.

Solução: *Sejam*

$$\vec{u} = \vec{AB} = (2, 1, 3)$$

$$\vec{v} = \vec{AC} = (-1, -1, 4).$$

Figura 5.4: Plano $x = 0$ 

Um vetor normal ao plano é dado por $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Assim

$$\vec{w} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{k} + 3\vec{i} - 8\vec{j}.$$

Assim $\vec{w} = (7, -11, -1)$ e portanto a equação do plano é

$$7x - 11y - z - 12 = 0.$$

Dada uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde a , b e c não são simultaneamente nulos, existe um plano π representado por esta equação? A resposta é afirmativa. Suponha que $a \neq 0$. Tome $\vec{v} = (a, b, c) \neq 0$ e $P_0(-d/a, 0, 0)$. A equação do plano com vetor normal \vec{v} e passando por P_0 é dada por

$$\begin{aligned}\langle P_0\vec{P}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \left\langle \left(x + \frac{d}{a}, y, z\right), (a, b, c) \right\rangle &= 0 \\ ax + by + cz + d &= 0.\end{aligned}$$

Portanto qualquer equação da forma $ax + by + cz + d = 0$, com a , b e c não simultaneamente nulos define um plano.

Sejam π_1 e π_2 dois planos dados por

$$\begin{aligned}\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0.\end{aligned}$$

onde os vetores normais de π_1 e π_2 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{v}_2 &= (a_2, b_2, c_2).\end{aligned}$$

Os planos π_1 e π_2 são **paralelos** se, e somente se, $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$. Para que π_1 e π_2 sejam iguais devemos ter $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ e dados $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$ o vetor $P_1\vec{P}_2$ deve ser tal que $P_1\vec{P}_2 \perp \vec{v}_1$ ou $P_1\vec{P}_2 \perp \vec{v}_2$.

Exemplo 5.0.4. Dados os seguintes planos, determinar quais são iguais ou paralelos dois a dois:

$$\begin{aligned}\pi_1 : 2x - y + 3z &= 0 & \pi_2 : x - y - 3 &= 0 \\ \pi_3 : y - 2x - 3z &= 2 & \pi_4 : 2x - 2y &= 6 \\ \pi_5 : x &= 0.\end{aligned}$$

Solução: Os vetores normais a cada plano são

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (2, -1, 3) & \vec{v}_2 &= (1, -1, 0) \\ \vec{v}_3 &= (-2, 1, -3) & \vec{v}_4 &= (2, -2, 0) \\ \vec{v}_5 &= (1, 0, 0).\end{aligned}$$

Como $\vec{v}_1 = -\vec{v}_3$ então $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$. Agora $P_1(0, 0, 0) \in \pi_1$ e $P_2(0, 2, 0) \in \pi_3$. Daí

$$\langle P_1\vec{P}_2, \vec{v}_1 \rangle = \langle (0, 2, 0), (2, -1, 3) \rangle = -2 \neq 0.$$

Logo π_1 e π_3 são paralelos e distintos. Agora, como $\vec{v}_4 = 2\vec{v}_2$ então $\vec{v}_2 \parallel \vec{v}_4$. Mas $P_1(3, 0, 0) \in \pi_2$ e $P_2(0, -3, 0) \in \pi_4$. Daí

$$\langle P_1\vec{P}_2, \vec{v}_2 \rangle = \langle (-3, -3, 0), (1, -1, 0) \rangle = 0.$$

Logo $\pi_2 = \pi_4$.

Os demais planos não são paralelos.

5.2 Equações da Reta

Seja \vec{v} um vetor e A um ponto. Sabemos que a reta r passando por A e paralela ao vetor \vec{v} tem equação

$$\vec{AP} = t\vec{v} \tag{5.3}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e P é um ponto qualquer de r . Sendo A um ponto em \mathbb{R}^3 e \vec{v} um vetor de \mathbb{R}^3 temos

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Daí um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c).$$

Logo $P(x, y, z)$ pertence à reta r , se e só se, $P(x, y, z)$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Tais equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta r . O vetor \vec{v} é chamado de **vetor diretor** de r .

Exemplo 5.0.5. As equações paramétricas da reta r passando por $P_0(-3, 3/2, 4)$ e paralela ao vetor $\vec{v} = (-6, 1, 4)$ são

$$\begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = 3/2 + t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga ao caso do plano, se $\vec{v} = (a, b, c)$ é tal que $abc \neq 0$, então podemos reescrever (5.4) como

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são chamadas de **equações na forma simétrica** da reta r .

5.3 Interseções

5.3.1 Entre retas

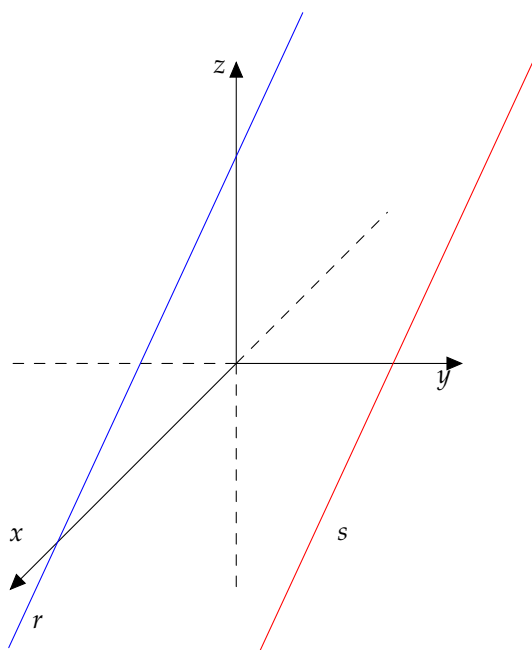
Considere duas retas r e s de equações

$$r: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = x_1 + sd \\ y = y_1 + se \\ z = z_1 + sf \end{cases}; \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Os vetores diretores de r e s são $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ respectivamente.

1. Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então r e s são paralelas ou coincidentes. Elas serão coincidentes se, e somente se, possuírem algum ponto em comum.
2. Se os vetores diretores não são paralelos, temos duas possibilidades. Considere os pontos $P_0(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $P_1(x_1, y_1, z_1) \in s$.
 - (a) Se $P_1\vec{P}_2$, \vec{u} e \vec{v} estão no mesmo plano, isto é, $\langle P_1\vec{P}_2, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ então r e s são concorrentes.
 - (b) Se $P_1\vec{P}_2$, \vec{u} e \vec{v} estão planos diferentes, isto é, $\langle P_1\vec{P}_2, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \neq 0$ então r e s são chamadas de **retas reversas**.

Figura 5.5: Retas Paralelas



Exemplos 5.0.3. Determine se os seguintes pares de retas são paralelas, concorrentes ou reversas:

$$1. \ r : \frac{x-2}{2} = y+3 = \frac{z-2}{3}; \ s : \frac{x}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{6}$$

Solução: Como $\vec{u} = (2, 1, 3)$ e $\vec{v} = (4, 2, 6)$ são vetores diretores de r e s respectivamente, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Mas $P_0(0, -3, 2) \in s$ e $P_0 \notin r$, logo r e s são paralelas e distintas.

2.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

Solução: Como $\vec{u} = (2, 2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$ são vetores diretores de r e s respectivamente,

Figura 5.6: Retas Concorrentes



então r e s são concorrentes ou reversas. Igualando as equações de r e s obtemos

$$1 + 2t = s$$

$$1 + 2t = s$$

$$1 + t = 0$$

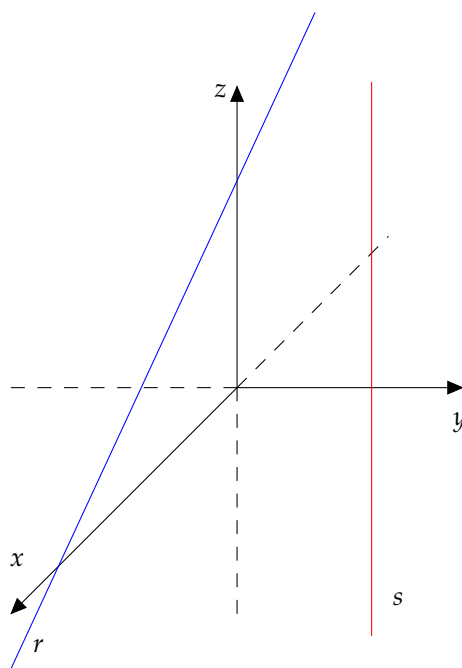
donde $t = -1$ e $s = -1$. Portanto r e s são concorrentes e o ponto de interseção é $P(-1, -1, 0)$.

3.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

Solução: Como $\vec{u} = (2, 1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$ são vetores diretores de r e s respectivamente,

Figura 5.7: Retas Reversas



então r e s são concorrentes ou paralelas. Igualando as equações de r e s obtemos

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ 2 + t = 1 + s \\ -1 + 2t = -1 + 2s \end{cases} \quad (5.5)$$

Da primeira e segunda equação obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2t - s = 1 \\ t - s = -1 \end{cases}$$

Cuja solução é $t = 2$ e $s = 3$. Substituindo esses valores na terceira equação de (5.5) obtemos $3 \neq 5$. Portanto r e s são reversas.

5.3.2 Entre planos

Dados três planos π_1 , π_2 e π_3 de equações

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

A interseção entre eles será constituída pelos pontos cujas coordenadas sejam as soluções do sistema forma pelas equações de π_1 , π_2 e π_3 simultaneamente, ou seja, devem ser soluções do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Exemplos 5.0.4. Encontre a interseção entre os planos:

$$1. \pi_1 : x = y, \pi_2 : 2x - z = 0 \text{ e } \pi_3 : 3x + 2y + z + 3 = 0$$

Solução: A interseção será dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x + 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema obtemos que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{(-3/7, -3/7, -6/7)\}$.

$$2. \pi_1 : 2x + y = 1, \pi_2 : x - y + z = 0$$

Solução: A interseção será dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Figura 5.8: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ 

Resolvendo tal sistema obtemos $z = 1 - 3x$ e $y = 1 - 2x$. Logo

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(x, 1 - 2x, 1 - 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Fazendo $x = t$ podemos escrever

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

que é a equação de uma reta passando pelo ponto $P_0(0, 1, 1)$ e com vetor diretor $\vec{v} = (1, -2, -3)$.

Figura 5.9: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ 

5.3.3 Entre retas e planos

Para encontrar a interseção de uma reta r com um plano π , basta resolver o sistema formado pelas equações de r e de π . Se o sistema tiver uma única solução $P_0(x_0, y_0, z_0)$, então $r \cap \pi = \{P_0\}$. Se o sistema for indeterminado então $r \subset \pi$ e se o sistema for impossível então $r \cap \pi = \emptyset$ e $r \parallel \pi$.

Exemplos 5.0.5. Encontre a interseção entre a reta r e o plano π nos seguintes casos:

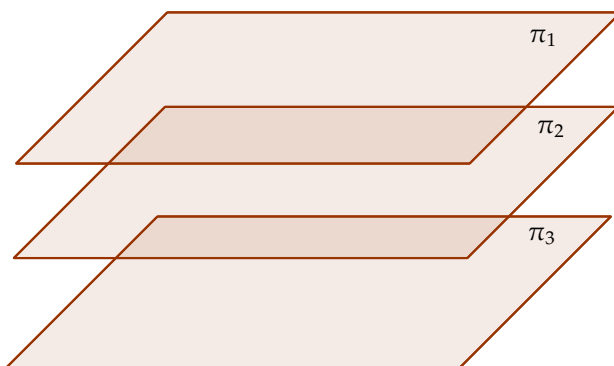
1. $r : x = t + 1, y = 1, z = 1$ e $\pi : 2x - y = 3$.

Solução: Substituindo as equações da reta na do plano obtemos $t = 1$. Logo $r \cap \pi = \{(2, 1, 1)\}$.

- 2.

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} ;$$

$$\pi : x - 2y + z = 5.$$

Figura 5.10: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ Figura 5.11: $r \cap \pi = \{P_0\}$ 

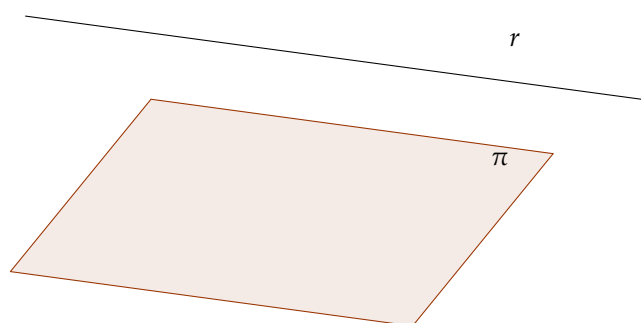
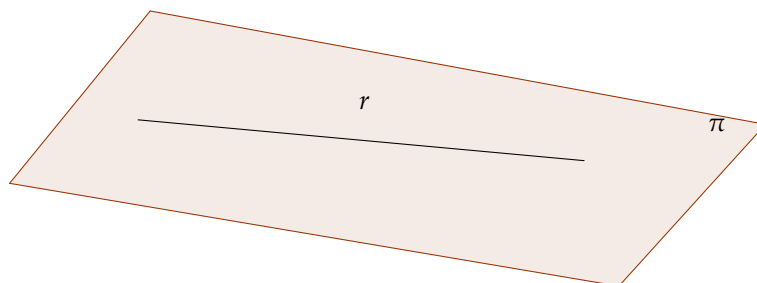
Solução: O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

não tem solução. Logo $r \cap \pi = \emptyset$.

3.

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} ;$$

Figura 5.12: $r \cap \pi = \emptyset$ Figura 5.13: $r \subset \pi$ 

$$\pi : x - y + 3z = -1.$$

Solução: O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

tem solução dada por $x = -1 + 3z$ e $y = -2 + 6z$. Logo

$$r \cap \pi : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = t \end{cases},$$

ou seja, $r \subset \pi$.

5.4 Distâncias

5.4.1 Entre ponto e plano

Seja $P_1(x_1, y_1, z_1)$ um ponto e π um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$. Seja r a reta que

Figura 5.14: Distância entre ponto e plano



contém o ponto P_1 e é perpendicular ao plano π . Denote por $P_2(x_2, y_2, z_2)$ a interseção de π com r . O ponto P_2 é chamado de **projeção ortogonal** de P_1 sobre π . A norma do vetor $\vec{P_1P_2}$ será a distância de P_1 a π , isto é,

$$d(P_1, \pi) = \left\| \vec{P_1P_2} \right\|.$$

Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ o vetor normal de π . Como $\vec{u} \parallel P_1\vec{P}_2$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_1\vec{P}_2 = t\vec{u}.$$

Logo

$$d(P_1, P_2) = \|t(a, b, c)\| = |t| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.6)$$

Por outro lado, se $P(x_2, y_2, z_2)$, então

$$P_1\vec{P}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = t(a, b, c)$$

e como $P_2 \in \pi$ devemos ter

$$a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

isto é,

$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (5.6) obtemos

$$d(P_1, \pi) = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right|$$

portanto

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplos 5.0.6. 1. A distância entre o plano $\pi : 2x + y - z = 4$ e o ponto $P(1, 1, 1)$ será

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 1 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

2. Calcule a distância entre $\pi_1 : 2x - 3y + z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 5 = 0$.

Solução: Um vetor normal de π_1 é $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e de π_2 é $\vec{v} = (4, -6, 2)$. Como $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então $\pi_1 \parallel \pi_2$ e assim a distância entre π_1 e π_2 é dada pela distância de um ponto de π_1 a π_2 , ou o contrário. Tomando $P_1(1, 0, 0) \in \pi_1$ temos

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{56}}.$$

Figura 5.15: Distância entre ponto e reta



5.4.2 Entre um ponto e uma reta

Seja P um ponto e r uma reta.

Para determinar $d(P, r)$ primeiro construímos um plano π passando por P e com vetor normal paralelo ao vetor diretor de r . Assim

$$d(P, r) = d(P, P_1)$$

onde $P_1 \in \pi \cap r$.

Exemplo 5.0.6. Determinar a distância do ponto $P(1, 2, -1)$ à reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

Solução: Podemos tomar o vetor $\vec{u} = (2, 1, -3)$ como vetor normal ao plano π que contém P . Daí

$$\pi : 2(x - 1) - (y - 2) + 3(z - 1) = 0$$

$$\pi : 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

A interseção de π com r é dada por

$$2(1 + 2t) - (5 - t) + 3(-2 + 3t) = 0,$$

isto é, $t = 3/7$ e então $P_1(13/7, 32/7, -5/7) \in \pi \cap r$. Portanto

$$d(P, r) = d(P, P_1) = \sqrt{\left(1 - \frac{13}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{32}{7}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{91}}{7}.$$

5.4.3 Entre retas

Sejam r e s retas. Se $r \parallel s$ então a distância entre r e s é dada pela distância entre um ponto de r e a reta s , ou o contrário. Suponha então que r e s são reversas. Por um ponto P de s tracemos uma reta s' paralela a r .

O plano π definido por s e s' é paralelo a r , daí a distância de r a π é constante. Esta constante é **a menor distância** entre r e s . De fato, seja r' uma reta contida em π e paralela a r . Seja I um ponto de r . Por I tracemos um perpendicular a r que a intercepta em um ponto Q . Se P é um ponto qualquer de s temos

$$\overline{IP}^2 = \overline{IQ}^2 + \overline{QP}^2$$

pois o triângulo IQP é retângulo em Q . Logo

$$\overline{IP}^2 \geq \overline{IQ}^2,$$

Figura 5.16: Distância entre retas reversas



ou seja,

$$\overline{IP} \geq \overline{IQ}.$$

Mas \overline{IQ} é a distância de π a r , logo segue da última desigualdade que a distância de π a r é menor ou igual a distância entre um ponto de r e um ponto de s . Portanto

$$d(r, s) = d(r, \pi).$$

Exemplo 5.0.7. Determine a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -5 + 4s \\ y = 6 - 5s \\ z = 4 + 3s. \end{cases}$$

Solução: Os vetores diretores de r e s são $\vec{u} = (1, -3, 2)$ e $\vec{v} = (4, -5, 3)$, respectivamente. Logo r e s não são paralelas. Agora, o sistema

$$\begin{cases} 2 + t = -5 + 4s \\ 1 - 3t = 6 - 5s \\ 1 + 2t = 4 + 3s \end{cases}$$

e assim r e s são reversas. Assim pelo ponto $(-5, 6, 4)$ de s tracemos uma reta s' paralela a r . Daí

$$s' : \begin{cases} x = -5 + \alpha \\ y = 6 - 3\alpha \\ z = 4 + 2\alpha. \end{cases}$$

O vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano definido por s e s' . Como $\vec{w} = (1, 5, 7)$ então o plano π contendo s e s' é dado por

$$\pi : x + 5y + 7z - 53 = 0.$$

Finalmente, seja $P(2, 1, 1) \in r$. Então

$$d(r, s) = d(P, \pi) = \frac{|2 + 5 + 7 - 53|}{\sqrt{1 + 5^2 + 7^2}} = \frac{39}{\sqrt{75}}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Boulos, P.; Camargo, I., *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, 3ª edição, São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] Machado, A. S., *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, 2ª Edição, Atual Editora, 1980.
- [3] Reis, G. L.; Silva, V. V., *Geometria Analítica*, 2ª Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [4] Santos, R. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, UFMG, 2012, Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/~regi>
- [5] Santos, F. J.; Ferreira, S. F., *Geometria Analítica*, 1ª Edição, Bookman, Companhia Editora, 2009.
- [6] Steinbruch, A.; Winterle, P., *Geometria Analítica*, 1ª Edição, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [7] Valladares, R. J. C., *Geometria Analítica do Plano e do Espaço*, LTC, Rio de Janeiro, 1990.

ÍNDICE REMISSIVO

Cônica

Termo Quadrático Misto, 65

Termos Independente, 65

Termos Lineares, 65

Termos Quadráticos, 65

Cônicas, 65

Circunferência, 41

Equação Cartesiana, 43

Equações Paramétricas, 43

Desigualdade de Scharwz, 24, 86

Desigualdade Triangular, 24, 86

Elipse, 46

Centro, 46

Coroa Fundamental, 55

Eixo Maior, 50

Eixo Menor, 50

Equação Reduzida, 48

Excentricidade, 56

Focos, 46

Parâmetros Geométricos, 48

Retângulo Fundamental, 54

Reta Focal, 46

Vértice, 50

Hipérbole, 56

Assíntotas, 60

Centro, 56

Distância Focal, 56

Equação Reduzida, 59

Focos, 56

Parâmetros Geométricos, 59

Reta Focal, 56

Segmento Focal, 56

Vértices, 59

Parábola, 62

Equação reduzida, 64

Focos, 62

Reta diretriz, 62

Reta focal, 62

Vértice, 64

Plano

Equação Paramétrica, 94

Vetor Normal, 94

Reta

Equações Paramétricas, 99

Equações Simétricas, 100

Vetor Diretor, 99

Reta no Plano

Equação Cartesiana, 35

Equação Paramétrica, 33

Equação Simétrica, 34

Equação Vetorial, 31

Vetor diretor, 31

Retas

Reversas, 100

Concorrentes, 100

Paralelas, 100

Translação de Eixos, 68

Vetores

Ângulo, 19, 83

Ortogonais, 20, 83

Produto Escalar, 20, 83

Projeção ortogonal, 25

Vetores no Espaço

Produto Misto, 91

Produto Vetorial, 87