Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

2 de outubro de 2020

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b \in A \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a \Delta b \end{aligned}$$

*Uma operação binária também é chamada de uma **operação interna** em A.*

Exemplos

1) A soma usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma*

$\mathbb{Z}_m$ $\quad \oplus, \otimes$

$\bar{a} \oplus \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$

$\bar{a} \otimes \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m =$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ são operações binárias.

4) A operação $\div$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ $= \mathbb{Q} - \{0\}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$,

$1, 2 \in \mathbb{N}$ e $1 \div 2 \notin \mathbb{N}$

$\in \mathbb{Z}$ e $1 \div 2 \notin \mathbb{Z}$

$1, 0 \in \mathbb{Q}$

$1 \div 0 \notin \mathbb{Q}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\boxed{\mathbb{Q}^*}$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x*,* y*,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa***

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$\boxed{(x \oplus y) \oplus z} = \boxed{x \oplus (y \oplus z)}.$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade**: Para todos x,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$\underline{x} \oplus \underline{y} = \underset{A}{}$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro:***

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em* A *um elemento denotado por* 0

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A *um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A$$

Definição

*iii) **Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma***

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$\underbrace{x \oplus \overset{y}{0_A}} = x = \underbrace{\overset{y}{0_A} \oplus \overset{x}{x}}.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****:*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$,*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$ *vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A *é chamado de* ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento* $x \in A$*, existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo***

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$\Rightarrow x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

v) ***Associatividade***:

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x,

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$,

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$*, vale*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos $x, y, z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***:

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x,

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

*vi) **Distributividade**: Para todos x, y,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y,* $z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y,* $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x,\ y,\ z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = \cancel{x \otimes z} \oplus \underline{y \otimes z}.$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos $x, y, z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos $x, y, z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

vii) ***Distributividade***:

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x,

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos x, y,*

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

*vii) **Distributividade**: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = \underline{x \otimes y}$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma***.

$(A, \oplus, \otimes)$ é um ANEL.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma****.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos x,*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, \; y \in A$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade***: *Se para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* x*,* $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****:*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x*,* $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$\underline{x \otimes 1}$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade***: *Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1_A = x$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$,

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade****.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade****. O elemento* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A.

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$\Rightarrow \underbrace{x \otimes 1 = x} = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A.

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

*3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo com unidade***

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

Observações:

3) *Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.*

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja* $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que*

Observações:

3) *Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é uma anel.*

A é um ANEL

$(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que* A *é uma anel.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

2) *Considere as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$

$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *é um anel comutativo e com unidade.*

$(A, \oplus, \otimes)$

i) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$(x * y) * z = (\underbrace{x + y - 8}) * z = \underbrace{(x + y - 8) + z - 8}$

$= \boxed{x + y + z - 16}$

$x * (\underline{y * z}) = \underline{x} * (\underline{y} + z \underline{-} 8) = x + (y + z - 8) - 8$

$= \boxed{x + y + z - 16}$

LOGO,

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) PARA TODOS $x, y \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$x * y = \boxed{x + y - 8}$$

$$y * x = \boxed{y + x - 8}$$

Logo,

$$x * y = y * x.$$

iii) $x * 0_A = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$

$x + 0_A - 8 = x$

$0_A = \cancel{x} + 8 - \cancel{x} \Rightarrow 0_A = 8 \in \mathbb{Q}$

TOME $0_A = 8 \in \mathbb{A}$. ASSIM PARA TODO $x \in \mathbb{A}$ TEMOS

$$x * 0_A = x * 8 = x + \cancel{8} - \cancel{8} = x.$$

LOGO $0_A = 8$ É O ELEMENTO NEUTRO DA OPERAÇÃO $*$ EM $\mathbb{A}$.

iv) $x * y = O_A$ $= 8$, $x \in \mathbb{Q}$, $\exists\, y \in \mathbb{Q}$

$x * y = 8$

$x + y - 8 = 8$

$y = 8 + 8 - x$

$\Rightarrow y = \underbrace{16 - x} \in \mathbb{Q}$

iv) DADO $\underline{x} \in \mathbb{Q}$, TOME $y = \underline{16 - x} \in \mathbb{Q}$.

DAÍ

$$x * y = x * (16 - x) = \cancel{x} + (16 - \cancel{x}) - 8 =$$

$$= 8 = 0_A.$$

ASSIM $16 - x$ É O OPOSTO DE x

NA OPERAÇÃO $*$.

v) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$\underline{(x \odot y) \odot z} = \left(x + y - \frac{xy}{8}\right) \odot z = x + y - \frac{xy}{8} + z$$

$$- \frac{\left(x + y - \frac{xy}{8}\right) z}{8} = \underline{x + y} - \underline{\frac{xy}{8}} + \underline{z} - \underline{\frac{xz}{8}}$$

$$-\frac{yz}{8} + \frac{xyz}{64}$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot \left(y + z - \frac{y \cdot z}{8}\right) = x + y + z - \frac{yz}{8}$$

$$-\frac{x\left(y + z - \frac{yz}{8}\right)}{8} = x + y + z - \frac{yz}{8} - \frac{xy}{8}$$

$$-\frac{\bar{x}z}{8}+\frac{x\bar{y}z}{64}$$

1060

$$(x\odot y)\odot z = x\odot(y\odot z).$$

vi) Para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$ temos

$$(x * y) \odot z = (x+y-8) \odot z = x+y-8+z$$

$$- \frac{(x+y-8)z}{8} = x+y-8+z-\frac{xz}{8}-\frac{yz}{8}+z$$

$$(x \odot z) * (y \odot z) = \left(x + z - \frac{xz}{8}\right) * \left(y + z - \frac{yz}{8}\right)$$

$$= x + z - \frac{xz}{8} + y + z - \frac{yz}{8} - 8$$

Lo60

$$(x * y) \odot z = (x \odot z) * (y \odot z).$$

vii) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$x \odot (y * z) = x \odot (y + z - 8) = x + y + z - 8$$

$$- \frac{x(y + z - 8)}{8} = x + y + z - 8 - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{8} + x$$

$$(x \odot y) * (x \odot z) = \left(x + y - \frac{xy}{8}\right) * \left(x + z - \frac{xz}{8}\right)$$

$$= x + y - \frac{xy}{8} + x + z - \frac{xz}{8} - 8$$

Logo

$$x \odot (y * z) = (x \odot y) * (x \odot z).$$

PORTANTO, $(\mathbb{Q}, *, \odot)$ É UM ANEL.

PROVEMOS QUE $\odot$ É COMUTATIVA.
PARA ISSO SEJAM $x, y \in \mathbb{Q}$. TEMOS

$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8} = y + x - \frac{yx}{8} = y \odot x$$

LOGO A OPERAÇÃO $\odot$ É COMUTATIVA.

$x \odot 1_A = x$, PARA TODO $x \in \mathbb{Q}$.

$1_A \in \mathbb{Q}$

$$\cancel{x} + 1_A - \frac{x\,1_A}{8} = \cancel{x}$$

$$1_A\left(1 - \frac{x}{8}\right) = 0 \Rightarrow 1_A = 0 \in \mathbb{Q}$$

Tome $1_A = 0 \in \mathbb{Q}$. Assim para todo $x \in \mathbb{Q}$ temos

$$x \odot 1_A = x \odot 0 = x + 0 - \frac{x \cdot 0}{8} = x.$$

Logo, $1_A = 0$ é o elemento neutro para a operação $\odot$ em $\mathbb{Q}$.

PORTANTO, $(\mathbb{Q}, *, \odot)$ É UM ANEL COMUTATIVO COM UNIDADE. #

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α,

Proposição

v) *Para todos* α, x,

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos x*,*

Proposição

v) *Para todos* $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$*, temos*

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x(-y)$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1,

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1,\, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1,\, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, \, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, \ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha]$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

vi) Temos

vi) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y]$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.