Teorema de Lagrange

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Seja G um grupo finito.

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.
O número de elementos de G/H

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.
O número de elementos de G/H é chamado de **índice**

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.
O número de elementos de G/H é chamado de **índice** de H em G

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.

O número de elementos de G/H é chamado de **índice** de H em G e será denotado por

$$[G : H] = |G/H|.$$

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$ *um subgrupo de* G.

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$ *um subgrupo de* G*. Já vimos que as classes laterais de* N *em* G *são*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$ *um subgrupo de* G*. Já vimos que as classes laterais de* N *em* G *são*

$$N \quad e \quad iN.$$

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$ *um subgrupo de* G*.*
Já vimos que as classes laterais de N *em* G *são*

$$N \quad e \quad iN.$$

Daí

$$G/N = \{N, iN\}$$

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$ *um subgrupo de* G*. Já vimos que as classes laterais de* N *em* G *são*

$$N \quad e \quad iN.$$

Daí

$$G/N = \{N, iN\}$$

e assim $[G : H] = 2$*.*

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ g\ ]$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$*. Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ g\ ] = \{Id, g\}$*. Então* H *possui 3 classes laterais que são*

$$H, \ fH, \ f^2H.$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ g\ ] = \{Id, g\}$. Então H possui 3 classes laterais que são

$$H, \ fH, \ f^2H.$$

Daí

$$G/H = \{H, fH, f^2H\}$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ g\ ] = \{Id, g\}$. Então H possui 3 classes laterais que são

$$H, \ fH, \ f^2H.$$

Daí

$$G/H = \{H, fH, f^2H\}$$

e então $[G : H] = 3$.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja H um subgrupo

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então $o(G) = o(H)[G : H]$

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então $o(G) = o(H)[G : H]$ e, portanto, $o(H)|o(G)$.

Observação:

No grupo S_4

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \right.$$

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$ mas L não é um subgrupo de S_4

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$ mas L não é um subgrupo de S_4 pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$ mas L não é um subgrupo de S_4 pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observação:

No grupo S_4 considere o seguinte subconjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$ mas L não é um subgrupo de S_4 pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \notin L.$$

Corolário

Seja G um grupo finito.

Corolário

Seja G um grupo finito. Então a ordem de um elemento $x \in G$

Corolário

Seja G um grupo finito. Então a ordem de um elemento $x \in G$ divide a ordem de G

Corolário

Seja G um grupo finito. Então a ordem de um elemento $x \in G$ divide a ordem de G e o quociente é $[G : H]$,

Corolário

Seja G um grupo finito. Então a ordem de um elemento $x \in G$ divide a ordem de G e o quociente é $[G : H]$, onde $H = [x]$.

Corolário

Sejam G um grupo finito

Corolário

Sejam G um grupo finito e $x \in G$.

Corolário

Sejam G um grupo finito e $x \in G$. Então

$$x^{o(G)}$$

Corolário

Sejam G um grupo finito e $x \in G$. Então

$$x^{o(G)} = e,$$

Corolário

Sejam G um grupo finito e $x \in G$. Então

$$x^{o(G)} = e,$$

onde e denota o elemento neutro de G.

Corolário

Seja G um grupo finito

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo.

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo. Então G é um grupo cíclico

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo. Então G é um grupo cíclico e os únicos subgrupos de G

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo. Então G é um grupo cíclico e os únicos subgrupos de G são os triviais,

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo. Então G é um grupo cíclico e os únicos subgrupos de G são os triviais, ou seja, $\{e\}$ e G.

Proposição

Se G é um grupo finito tal que $o(G) \leq 5$, então G é abeliano.

Proposição

Seja G um grupo tal que $|G| = pq$, onde p e q são números primos. Se G é abeliano e $p \neq q$, então G é um grupo cíclico.