

Subgrupos Normais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Sejam (G, \cdot) um grupo

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G .

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G ,

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G , $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G .

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G , $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G .

Como G é associativo,

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G , $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G .

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa.

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G , $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G .

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo,

Sejam (G, \cdot) um grupo e A e B subconjuntos de G . Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G :

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G , $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G .

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo, então **multiplicação de subconjuntos** também será comutativa.

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$

Exemplos

(1) *Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo tal que*

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo tal que

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de **grupo de Klein**.

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo tal que

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de **grupo de Klein**.

Se $A = \{e, a\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo tal que

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de **grupo de Klein**.

Se $A = \{e, a\}$ e $B = \{b, c\}$,

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo tal que

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de **grupo de Klein**.

Se $A = \{e, a\}$ e $B = \{b, c\}$, então:

Exemplos

(2) *Considere o grupo multiplicativo dos números reais.*

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 0\}$$

então:

Definição

Um subgrupo N

Definição

Um subgrupo N de um grupo G

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal**

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal** (ou **invariante**)

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal** (ou **invariante**) se, para todo $x \in G$,

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal** (ou **invariante**) se, para todo $x \in G$, vale

$$xN$$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal** (ou **invariante**) se, para todo $x \in G$, vale

$$xN = Nx.$$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de **subgrupo normal** (ou **invariante**) se, para todo $x \in G$, vale

$$xN = Nx.$$

Denotaremos esse fato escrevendo $H \trianglelefteq G$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [f]$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = \langle f \rangle = \{Id, f, f^2\}$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [f] = \{Id, f, f^2\}$. Então H é um subgrupo normal de G .

Exemplos

(2) *Se G é um grupo abeliano,*

Exemplos

(2) *Se G é um grupo abeliano, então todo subgrupo de G é normal.*

Exemplos

(3) *Seja H um subgrupo de G*

Exemplos

(3) *Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais.*

Exemplos

(3) *Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais. Então H é um subgrupo normal de G .*

Proposição

Seja G um grupo.

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G ,

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G , então $H \cap L$

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G , então $H \cap L$ é um subgrupo normal de G .

Proposição

Seja N um subgrupo normal

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G .

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G . Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G . Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN)$$

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G . Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$