Grupos - Introdução

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

20 de outubro de 2020

Definição

Seja $G \neq \emptyset$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ *um conjunto no qual está definida uma operação binária* $*$ *tal que:*

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos $x, y, z \in G$:

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z$$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos $x,\ y,\ z \in G$:

$$(x * y) * z = \underline{x} \underline{*} \underbrace{(y * z)}.$$

ASSOCIATIVA

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ *um conjunto no qual está definida uma operação binária* $*$ *tal que:*

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ *um conjunto no qual está definida uma operação binária* $*$ *tal que:*

i) *Para todos* $x, y, z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) *Existe* $e \in G$ *tal que*

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$\underbrace{x * e}$$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$x * e = x =$$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$x * e = x = e * x$$

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ *um conjunto no qual está definida uma operação binária* $*$ *tal que:*

i) Para todos $x,\ y,\ z \in G$*:*

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ *tal que*

$$x * e = x = e * x$$

para todo $x \in G$*.*

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo $x \in G$. Tal elemento e

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo $x \in G$. Tal elemento e é chamado de ***elemento neutro***

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo $x \in G$. Tal elemento e é chamado de ***elemento neutro*** *ou* ***unidade***

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ *um conjunto no qual está definida uma operação binária* $*$ *tal que:*

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe $e \in G$ *tal que*

$$x * e = x = e * x$$

para todo $x \in G$. *Tal elemento* e *é chamado de* ***elemento neutro*** *ou* ***unidade*** *de* G.

Definição

Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto no qual está definida uma operação binária $*$ tal que:

i) Para todos x, y, $z \in G$:

$$\underbrace{(x * y) * z = x * (y * z)}.$$

ii) Existe $e \in G$ tal que

$$\underbrace{x * e} = x = \underbrace{e * x}$$

para todo $x \in G$. Tal elemento e é chamado de ***elemento neutro*** *ou* ***unidade*** *de G.*

Definição

iii) *Para cada* $x \in G$,

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$,

Definição

iii) Para cada $x \in G$*, existe* $y \in G$ *tal que*

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$ tal que

$$\underbrace{x * y}$$

Definição

iii) Para cada $x \in G$, *existe* $y \in G$ *tal que*

(ii)

$$x * y = e =$$

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$ tal que

$$x * y = e = y * x.$$

Definição

iii) *Para cada* $x \in G$, *existe* $y \in G$ *tal que*

$$\underbrace{x * y}\ = e = \underbrace{y * x}.$$

O elemento y

$$x * y \neq y * x$$

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$ tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento y é chamado de ***inverso***

Definição

iii) *Para cada* $x \in G$, *existe* $y \in G$ *tal que*

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento y *é chamado de* ***inverso*** *ou* ***oposto***

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$ tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento y é chamado de ***inverso*** *ou* ***oposto*** *de x.*

Definição

iii) Para cada $x \in G$, *existe* $y \in G$ *tal que*

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento y *é chamado de* ***inverso*** *ou* ***oposto*** *de* x.

Nesse caso dizemos que o par $(G, *)$

Definição

iii) Para cada $x \in G$, existe $y \in G$ tal que

$$x * y = e = y * x.$$

*O elemento y é chamado de **inverso** ou **oposto** de x.*

*Nesse caso dizemos que o par $(G, *)$ é um **grupo**.*

Definição

iii) Para cada $x \in G$, *existe* $y \in G$ *tal que*

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento y *é chamado de* ***inverso*** *ou* ***oposto*** *de* x.

Nesse caso dizemos que o par $(G, *)$ *é um* ***grupo***.

Observação:

Quando $*$ é uma "soma",

$$x * y = x + y - 3$$

Observação:

Quando $*$ *é uma "soma", dizemos que* $(G, *)$ *é um* ***grupo aditivo****.*

Observação:

*Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um **grupo aditivo**.*

Se $*$ é uma "multiplicação",

$$x * y = x + y - \boxed{\frac{x \cdot y}{3}}$$

Observação:

*Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um **grupo aditivo**.*

*Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um **grupo multiplicativo**.*

Observação:

*Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G,*)$ é um **grupo aditivo**.*

*Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G,*)$ é um **grupo multiplicativo**.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G,*)$

Observação:

Quando $*$ *é uma "soma", dizemos que* $(G, *)$ *é um* ***grupo aditivo***.

Se $*$ *é uma "multiplicação", dizemos que* $(G, *)$ *é um* ***grupo multiplicativo***.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ *vamos dizer simplesmente que* G *é um grupo.*

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo***.

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo***.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo***

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano***

ABEL

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizem que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano*** *quando $*$ é comutativa,*

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G,*)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G,*)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G,*)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G,*)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano*** *quando $*$ é comutativa, ou seja, quando*

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano*** *quando $*$ é comutativa, ou seja, quando*

$$x * y =$$

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano*** *quando $*$ é comutativa, ou seja, quando*

$$x * y = y * x$$

Observação:

Quando $*$ é uma "soma", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo aditivo****.*

Se $*$ é uma "multiplicação", dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo multiplicativo****.*

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo $(G, *)$ vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Definição

Um grupo $(G, *)$ é chamado de ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano*** *quando $*$ é comutativa, ou seja, quando*

$$x * y = y * x$$

para todos $x, y \in G$.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x \;, \forall x \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y = 1 = y \cdot x$

$2 \cdot y \neq 1 \;; \forall y \in \mathbb{Z}$

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z},+)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z},\cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q},+)$ *é um grupo abeliano.*

4) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ *é um grupo abeliano.*

$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x, \ \forall x \in \mathbb{Q}^*$$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x \ ; \ \forall x \in \mathbb{Q}^*$$

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo abeliano.*

4) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

5) $(\mathbb{R}, +)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo abeliano.*

4) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

5) $(\mathbb{R}, +)$ *é um grupo abeliano.*

6) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo abeliano.*

4) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

5) $(\mathbb{R}, +)$ *é um grupo abeliano.*

6) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

7) $(\mathbb{C}, +)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano.*

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo.*

3) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo abeliano.*

4) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

5) $(\mathbb{R}, +)$ *é um grupo abeliano.*

6) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

7) $(\mathbb{C}, +)$ *é um grupo abeliano.*

8) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *é um grupo abeliano.*

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

$\overline{0}$; $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$, $\overline{m-x}$

$\overline{x} \oplus \overline{m-x} = \overline{0}$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y =$$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$\boxed{x * y = x + y - 3}$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$*. Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

10)

i) SEJAM $x, y, z \in \mathbb{R}$. TEMOS

$$(x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3$$

$$= \underbrace{x + y + z - 6}$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3$$

$$= \underline{x+y+z-6}$$

Logo

$$(x*y)*z = x*(y*z).$$

ii) $x*e = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cancel{x}+e-3=\cancel{x} \iff \underline{e=3} \in \mathbb{R}$$

TOME $e = 3 \in \mathbb{R}$. ASSIM

$$x * e = x * 3 = x + 3 - 3 = x$$

$$e * x = 3 * x = \underbrace{3 + x - 3} = x$$

PARA TODO $x \in \mathbb{R}$. LOGO $e = 3$

É O ELEMENTO NEUTRO DE $*$ EM $\mathbb{R}$.

iii) $x * y = e$

$$\underline{x} + \underline{y} - 3 = 3 \Leftrightarrow y = \underbrace{6 - \underline{x}} \in \mathbb{R}$$

DADO $x \in \mathbb{R}$, TOME $y = 6 - x \in \mathbb{R}$. DAÍ

$$x * y = x * (6 - x) = \underbrace{x + (6 - x)} - 3 = 3 = e$$

$y * x = (6 - x) * x = (6 - x) + x - 3 = 3 = e$

LOGO $6 - x$ É O OPOSTO DE x

NA OPERAÇÃO $*$ EM $\mathbb{R}$.

PORTANTO, $(\mathbb{R}, *)$ É UM GRUPO.

ALÉM DISSO, PARA TODOS $x, y \in \mathbb{R}$ TEMOS

$$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x.$$

LOGO, $(\mathbb{R}, *)$ É UM GRUPO ABELIANO.

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$ *é grupo?* NÃO É UM GRUPO!

$\bar{a} \otimes \bar{b} \in \mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}$

$\bar{a} \neq \bar{0}$ $\quad \bar{b} \neq \bar{0}$

$\mathbb{Z}_6 - \{\bar{0}\}$; $\{\bar{2} \neq \bar{0},\ \bar{3} \neq \bar{0}\}$ $\quad \bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$

$\notin \mathbb{Z}_6 - \{\bar{0}\}$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a operação $*$ definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, *)$ é um grupo abeliano.

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\overline{0}\}, \otimes)$ é grupo?

12) $(\mathbb{R}, *)$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$ *é grupo?*

12) $(\mathbb{R}, *)$ *onde* $x * y = y$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$ *é grupo?*

12) $(\mathbb{R}, *)$ *onde* $x * y = y$ *para todos* $x,\ y \in \mathbb{R}$

Exemplos

9) $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ *é grupo abeliano.*

10) *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *com a operação* $*$ *definida por*

$$x * y = x + y - 3$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$. *Então* $(\mathbb{R}, *)$ *é um grupo abeliano.*

11) $(\mathbb{Z}_m - \{\overline{0}\}, \otimes)$ *é grupo?*

12) $(\mathbb{R}, *)$ *onde* $x * y = y$ *para todos* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *é grupo?*

12) i) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{R}$. TEMOS

$$(x * y) * z = y * z = z$$

$$x * (y * z) = x * z = z$$

LOGO $(x * y) * z = x * (y * z)$.

$\underline{x * e = x} = e * x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\boxed{x * e = x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{e = x}$

LOGO, $(\mathbb{R}, *)$ NÃO É GRUPO, POIS SE $x \in \mathbb{R}$, PARA $e \in \mathbb{R}$, $e \neq x$ VALE

$$x * e = e \neq x.$$

OU SEJA, A OPERAÇÃO * NÃO
POSSUI ELEMENTO NEUTRO.

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$,

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K})$$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid \underline{A} \text{ é uma matriz}$$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz}$$

de r linhas

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz}$$

de r linhas por s

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}$$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ onde $+$ é a soma de matrizes

Exemplos

13) Denote por $\mathbb{K}$ um dos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indistintamente. Seja

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ onde $+$ é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$,

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K})$$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *onde* $\cdot$ *é a multiplicação de matrizes é um grupo*

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *onde* $\cdot$ *é a multiplicação de matrizes é um grupo não abeliano.*

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Exemplos

13) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$M_{r\times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \textit{ é uma matriz de } r \textit{ linhas por } s \textit{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então $(M_{r\times s}(\mathbb{K}), +)$ *onde* $+$ *é a soma de matrizes é um grupo abeliano.*

14) *Denote por* $\mathbb{K}$ *um dos conjuntos* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *indistintamente. Seja*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *onde* $\cdot$ *é a multiplicação de matrizes é um grupo não abeliano.*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Então:*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Então:*

i) O elemento neutro de G *é único.*

MAT-UnB

$x^{-1} \neq \frac{1}{x}$; $(\mathbb{Z}_5 - \{\bar{0}\}, \cdot)$

$(\bar{2})^{-1} = \bar{3}$

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Então:*

i) O elemento neutro de G é único.

ii) Existe um único inverso para cada $x \in G$.

SE $y \in G$ É TAL QUE

$x * y = e = y * x$

VAMOS ESCREVER $y = x^{-1}$

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1}$$

Proposição

iii) Para todos $x,\ y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in G$,

Proposição

iii) Para todos x, $y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, x_1, x_2, ...,x_{n-1}, $x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} =$$

Proposição

iii) Para todos x, $y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1}$$

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * \underline{x_{n-1}^{-1}}$$

Proposição

iii) Para todos x, $y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, x_1, x_2, ...,x_{n-1}, $x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots *$$

Proposição

iii) Para todos x, $y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, x_1, x_2, ...,x_{n-1}, $x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots * x_2^{-1}$$

Proposição

iii) Para todos $x,\ y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1,\ x_2,\ ...,x_{n-1},\ x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo $x \in G$,

Proposição

iii) Para todos $x,\ y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1,\ x_2,\ ...,x_{n-1},\ x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo $x \in G$,

$$(x^{-1})^{-1}$$

Proposição

iii) Para todos $x, y \in G$,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \cdots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo $x \in G$,

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

PROVA: (i), (ii) e (iv) EXERCÍCIO!

iii) SEJAM $x, y \in G$. TEMOS

$$\underline{(x * y)} * \underline{(y^{-1} * x^{-1})} = x * (\underbrace{y * y^{-1}}_{= e}) * x^{-1}$$

$$= (x * e) * x^{-1} = x * x^{-1} = \boxed{e}$$

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (\underbrace{x^{-1} * x}_{= e}) * y$$

$$= (y^{-1} * e) * y = y^{-1} * y = \boxed{e}$$

PORTANTO O INVERSO DE $x * y$ É $y^{-1} * x^{-1}$, OU SEJA,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}. \quad \#$$