SEMANA 04: 11)

$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

$(a,b) \, R \, (c,d) \iff ad = bc$

$x \in A$; $\overline{x} = \{ y \in A \mid y R x \} \subseteq A$

$$\overline{(1,2)} = \{ (x,y) \in A \mid (x,y) \, R \, (1,2) \}$$

$$(x,y) \, R \, (1,2) \iff x \cdot 2 = y \cdot 1 \iff y = 2x$$

$$\overline{(1,2)} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid y = 2x \}$$

$$\overline{(1,2)} = \{ (x, 2x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid x \in \mathbb{Z}^* \}$$

$$\overline{(1,2)} = \{ \ldots, (-2,-4); (-1,-2); (1,2); (2,4), \ldots \}$$

EXERCÍCIO 6: $\Rightarrow A = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underbrace{(a, b)}\, R\, \underbrace{(c, d)} \Leftrightarrow 2a - b = 2c - d \Leftarrow$$

R É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA SOBRE $\mathbb{R}^2$.

i) PARA TODO $x \in A$, $x R x$

ii) SE $x R y$, ENTÃO $y R x$

iii) SE $x R y$ E $y R z$, ENTÃO $\boxed{x R z}$.

DE FATO,

i) SEJA $x \in A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ENTÃO $x = (a, b)$

TEMOS: $[x R x \Leftrightarrow (a, b) R (a, b)]$?

$$2a - b = 2a - b$$

LOGO, $(a, b) R (a, b)$.

ii) SUPONHA QUE $\underset{(a,b)}{\overset{A}{x}} R \underset{(c,d)}{\overset{A}{y}}$. ASSIM $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

TEMOS $\overset{x}{(a, b)} R \overset{y}{(c, d)}$. DAÍ

$$\underline{2a - b = 2c - d}.$$

$$\left[(c, d) R (a, b) \Leftrightarrow 2c - d = 2a - b \right]$$

AGORA, $2c - d = 2a - b$, ISTO É,

$(c,d)\,R\,(a,b)$. QUE É O QUE QUEREMOS.

iii) SUPONHA QUE $\underset{(a,b)}{\text{"}x\text{"}}\ R\ \underset{(c,d)}{\text{"}y\text{"}}$ E $\underset{(c,d)}{\text{"}y\text{"}}\ R\ \underset{(e,f)}{\text{"}z\text{"}}$.

$$\Rightarrow \left[(a,b)R(e,f) \iff \underline{2a-b} \overset{?!}{=} \underline{2e} - f\right]$$

DAÍ

$$\Rightarrow \underline{2a-b} = \boxed{2c-d} \quad \text{E} \quad \boxed{2c-d} = \underbrace{2e-f}.$$

LOGO

$$2a-b = 2e-f,$$

ISTO É, $(a,b)\,R\,(e,f)$.

PORTANTO R É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.