

Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

5 de outubro de 2020

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

$$\Delta : A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto a\Delta b$$

Uma operação binária também é chamada de uma **operação interna** em A .

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

$$\Delta : A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto a\Delta b$$

Uma operação binária também é chamada de uma **operação interna** em A .

Exemplos

1) *A soma usual*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} ,*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ,*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C}*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m =$*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^**

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^**

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q}*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div não é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div não é uma operação binária.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos x ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos x, y ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x,$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y =$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro:***

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma**

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:**

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$,

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y$$

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo**

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x ou simplesmente **oposto** de x .

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x ou simplesmente **oposto** de x .

Definição

v) ***Associatividade:***

Definição

v) **Associatividade:** Para todos x ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos x, y ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:**

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos x ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos x, y ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada **distributiva da soma em relação ao produto**.

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada **distributiva da soma em relação ao produto**.

Definição

vii) ***Distributividade:***

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos x ,

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos $x, y,$

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos $x, y, z \in A$

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade **distributiva do produto em relação à soma**.

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade **distributiva do produto em relação à soma**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos x ,

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:**

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$,

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade**

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**. O elemento 1_A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A .

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação** de A .

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação** de A .

Observações:

3) Se um anel (A, \oplus, \otimes)

Observações:

3) *Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade**

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é uma anel.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é uma anel.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot),$

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis associativos,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis associativos, comutativos

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis associativos, comutativos e com unidade.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis associativos, comutativos e com unidade.

Exemplos

2) *Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

Exemplos

2) Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações \oplus

Exemplos

2) Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações \oplus e \otimes

Exemplos

2) Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações \oplus e \otimes definidas por

Exemplos

2) Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as operações \oplus e \otimes definidas por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ é um anel comutativo e com unidade.

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot)

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel.

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot .

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Observação:

Seja (A, \oplus, \cdot) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.*

- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.*
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.*
- iii) Para todo $x \in A$,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.*
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.*
- iii) Para todo $x \in A$,*
$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1 ,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.
- iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$
- iv) Dados x_1, x_2 ,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.
- iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$
- iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.
- iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$
- iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.
- iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$
- iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \dots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \dots + (-x_n).$$

Proposição

v) *Para todos α ,*

Proposição

v) Para todos α , x ,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) *Para todos x ,*

Proposição

v) *Para todos $x, y \in A$,*

Proposição

v) *Para todos $x, y \in A$, temos*

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y)$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos x ,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

$$xy$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1 ,

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A .

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1 ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

y_1

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n .

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α .

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí
$$x = 0_A$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha]$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

iv) Segue usando indução sobre n .

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

vi) Temos

vi) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y]$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.