Anéis - Homomorfismos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

14 de outubro de 2020

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis.*

$(\mathbb{Q}, +, \cdot) = A$, com 0 em $+$

$A \xrightarrow{f = x^2} B = (\mathbb{Q}, \star, \odot)$, com 8 em $\star$

$\to x \star y = x + y - 8$

$\to x \odot y = x + y - \dfrac{xy}{8}$

$x \mapsto y$

$y \mapsto t$

$x + y \longrightarrow y \star t$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis***,

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****,*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x)$

Definição

Sejam $(A,+,\cdot)$ *e* $(B,\oplus,\otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$

para todos $x, y \in A$.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f: A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

$$\begin{cases} i)\ f(x+y) = \boxed{f(x) \oplus f(y)} \\ \\ ii)\ f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y) \end{cases}$$

para todos $x, y \in A$.

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, *são homomorfismos de anéis:*

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$*, são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$*, são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ *e* $f(x) = x + 1$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$*, são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, *são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow f(0_A) = 0 + 1 = 1 \neq 0_B$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $\underbrace{f(x) = x + 1}$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO:

i) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(x) = \underline{x + 1}$

SEJAM $x, y \in \mathbb{Z}$. TEMOS

$\rightarrow f(\underbrace{x+y}_{\in \mathbb{Z}}) = \boxed{(x+y)+1}$

$$f(x)+f(y) = (x+1)+(y+1) = \boxed{x+y+2}$$

LOGO, f NÃO É UM HOMOMORFISMO DE ANÉIS, POIS POR EXEMPLO, PARA $x=0$ E $y=1$ TEMOS

$$f(x+y) = f(0+1) = f(1) = 2$$

$$\neq$$

$$f(x) + f(y) = f(0) + f(1) = 1 + 2 = 3$$

Assim $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.

ii) $f: \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ $\quad (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$$f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (M_2(\mathbb{Z}_5), \oplus, \otimes)$$

DADOS $x, y \in \mathbb{Z}$ TEMOS

$$f(\underline{x+y}) = \begin{pmatrix} \overline{x+y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{x+y} \end{pmatrix}$$

$$f(x) \oplus f(y) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\bar{x}+\bar{y}}^{\in \mathbb{Z}_6} & \bar{0} \\ \bar{0} & \underbrace{\bar{x}+\bar{y}}_{\in \mathbb{Z}_5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{x+y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{x+y} \end{pmatrix}}$$

DA!

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y).$$

A GONA

$$f(\underbrace{x \cdot y}_{\in \mathbb{Z}}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{xy} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{xy} \end{pmatrix}}$$

$$f(x) \otimes f(y) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{y} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\bar{x}\cdot\bar{y}}^{\in \mathbb{Z}_5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \underbrace{\bar{x}\cdot\bar{y}}_{\in \mathbb{Z}_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{xy} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{xy} \end{pmatrix}$$

DA:

$$f(x\cdot y) = f(x) \otimes f(y).$$

PORTANTO, f É UM HOMOMORFISMO DE ANÉIS. #

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(\underbrace{-x})$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$, *para todo* $x \in A$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

$\boxed{i)\ \ f(0_A) = 0_B}$

$ii)\ \boxed{f(-x)} = -\boxed{f(x)}$, *para todo* $x \in A$.

Prova:

i) Temos

$$\text{(I)} \quad \underset{B}{\underline{f(0_A)}} = f(\underbrace{0_A + 0_A}) = f(0_A) \oplus f(0_A)$$

Agora

$$f(0_A) = f(0_A) \oplus 0_B \qquad \text{(II)}.$$

DE (I) E (II), TEMOS

$$\cancel{\underline{f(0_A)}} \oplus 0_B = \cancel{\underline{f(0_A)}} \oplus f(0_A)$$

LOGO

$$f(\underline{0_A}) = \underline{0_B}.$$

ii) SEJA $x \in \underline{A}$. DAÍ

$$\underbrace{\overline{f(\underline{x})}}_{\uparrow\, B} \oplus \underbrace{\overline{f(-\underline{x})}}_{\uparrow\, B} = f(\underline{x} + (\underline{-x})) = f(0_{\underline{A}})$$

$$= \overline{0_B}.$$

PORTANTO,

$$-f(x) = f(-x). \qquad \#$$

Observação:

A condição (i) da proposição anterior

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \to B$*,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde* A *e* B *são anéis, não é um homomorfismo.*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$*,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde* A *e* B *são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$*, então* f *não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de* $f(0_A) = 0_B$ *e mesmo assim* f *não é um homomorfismo de anéis,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde* A *e* B *são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$*, então* f *não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de* $f(0_A) = 0_B$ *e mesmo assim* f *não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$,

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais.*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$

$$0_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad f\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0_A}\Big) = 0 = 0_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \in$$

$$f\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}\right] =$$

$$= f\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\times$$

$$f\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

DAÍ: $f(x \cdot y) \neq f(x) \cdot f(y)$.

LOGO, f NÃO É HOMOMORFISMO DE ANÉIS.

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ *e no entanto* f *não é um homomorfismo de anéis.*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ *e no entanto* f *não é um homomorfismo de anéis.*

Definição

Seja $f : A \to B$ *um homomorfismo, onde* A *e* B *são anéis. Dizemos que:*

i) f *é um* ***epimorfismo***

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

*i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) f é um ***monomorfismo***

Definição

Seja $f: A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

*i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

*ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

*iii) f é um **isomorfismo***

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um* ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) *f é um* ***monomorfismo*** *se f for injetora.*

iii) *f é um* ***isomorfismo*** *se, f for bijetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

iii) *f é um **isomorfismo** se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um* ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) *f é um* ***monomorfismo*** *se f for injetora.*

iii) *f é um* ***isomorfismo*** *se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$ e f é um isomorfismo,*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f *é um* **epimorfismo** *se f for sobrejetora.*

ii) f *é um* **monomorfismo** *se f for injetora.*

iii) f *é um* **isomorfismo** *se f for* $\boxed{\textit{bijetora.}}$

iv) *Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um* **automorfismo**.

$f : A \to A$

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

iii) *f é um **isomorfismo** se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um **automorfismo**.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid \underline{f(x)} = \underline{0}_B\}$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel***

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo***

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo*** *de* f*.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\} \neq \emptyset$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo*** *de f.*

$f(0_A) = 0_B \Rightarrow$

$0_A \in \ker(f)$

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *O homomorfismo* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *é dado por* $f(a, b) = a$.

0

Exercício.

SOLUÇÃO:

i) PRIMEIRO COMO $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$

ENTÃO

$$0_B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

DAÍ

$$\ker(f) = \{ \underline{x \in \mathbb{Z}} \mid \underline{f(x)} = 0_B \}$$

ASS.m

$$\underline{f}_3(x) = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

α^{B}

$\in \mathbb{Z}_5$

LOGO, $\bar{x} = \bar{0}$, DAÍ: $x \equiv 0 \pmod{5}$,

OU SEJA, $x = 5n$, $n \in \mathbb{Z}$. PORTANTO

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow \ker(f) = \{\underline{5n} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

0,5

$$f(\bar{0}) = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} ; \quad f(\bar{5}) = \begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

LOGO, f NÃO É INJETORA!

ii) Aqui, $B = \mathbb{Z}$ e $0_B = 0$.

Daí:

$$\ker(f) = \{ x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(x) = 0_B \}.$$

Agora $x = (a, b)$ e assim

$$\underline{f(a, b)} = 0$$

$$a = 0.$$

LOGO

$$\ker(f) = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a = 0\}$$

$$\rightarrow \ker(f) = \{(0,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(0,0) \, ; \, (0,1)$$

$$f\underbrace{(0,0)} = 0 = f\underbrace{(0,1)}$$

LOGO f NÃO É INJETORA.

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Solução: Aqui $0_B = M_3(\mathbb{Q})$ e $0_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Daí:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{Q} \mid f(x) = 0_B\}$$

Assim

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de A.*

ii) f é injetora

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

ii) f *é injetora se, e somente se,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

$f(0_A) = 0_B$

i) $\ker(f)$ *é um subanel de A.*

ii) f *é injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0_A\}$.

$S \subseteq A$; $S \neq \emptyset$ é SUBANEL SE

$x + (-y) \in S$ e $x \cdot y \in S$ PARA TODOS $x, y \in S$.

PROVA:

i) COMO f É HOMOMORFISMO DE ANÉIS, ENTÃO $f(0_A) = 0_B$. LOGO

$0_A \in \ker(f)$, OU SEJA, $\ker f \neq \emptyset$.

$\underbrace{x+(-y)}_{f(x+(-y))=0_B} \in \ker(f)$; $\underbrace{x \cdot y}_{f(x \cdot y)=0_B} \in \ker(f)$

AGORA SEJAM $x, y \in \ker f$. DAí

$\rightarrow f(x) = 0_B$ e $f(y) = 0_B$.

ASSIM

$f(x+(-y)) = f(x) + f(-y) =$

$= f(x) + [-f(y)] = 0_B + [-0_B] = 0_B + 0_B$

$= 0_B.$

Assim $x + (-y) \in \ker(f)$.

Além disso,

$f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y) = 0_B \otimes 0_B = 0_B$

OU SEJA, $x \cdot y \in \ker(f)$.

PORTANTO, $\ker(f)$ É UM SUBANEL

DE A.

ii) PRECISAMOS MOSTRAR QUE

a) SE f É INJETORA ENTÃO

- $\ker(f) = \{0_A\} \ni \underline{x} \to x = 0_A$

b) SE $\ker(f) = \{0_A\}$, ENTÃO f É INJETORA.

PARA MOSTRAR (a), SEJA

$\underline{x} \in \ker(f)$. DAÍ

$$\overbrace{f(\underline{x}) = 0_B = f(\underline{0_A})}$$

MAS, POR HIPÓTESE, f É INJETORA

LOGO, $x = 0_A$. DAÍ $\ker(f) = \{0_A\}$.

AGORA PARA MOSTRAR (b), SEJAM

$x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE

$$f(x_1) = f(x_2). \quad (? \; x_1 = x_2)$$

COMO f É HOMOMORFISMO DE ANÉIS,

$$f(x_1) \ominus f(x_2) = 0_B$$

$$f(x_1) \oplus f(-x_2) = 0_B$$

$$f(\underbrace{x_1 + (-x_2)}) = 0_B$$

Assim $x_1 + (-x_2) \in \ker(f) = \{0_A\}$.

E COMO $\ker(f) = \{0_A\}$, ENTÃO

$$x_1 + (-x_2) = 0_A$$

$$x_1 = x_2.$$

LOGO, f É INJETORA. #

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

ii) f *é injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0_A\}$*.*

Prova:

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário.*

$$\exists 1_A \in A;\ \underbrace{x \cdot 1_A} = x = \underbrace{1_A \cdot x},\ \forall x \in A$$

$$x \cdot y \neq y \cdot x$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é ***inversível*** *ou que x* ***possui inverso***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \cdot y = 1_A$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **inversível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$ tal que*

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$, se existir,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$, se existir, é único.

$x^{-1} \neq \frac{1}{x}$, $x \cdot x^{-1} = 1_A = x^{-1} \cdot x$

$\mathbb{Z}_5$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{3}$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*, se existir, é único.*

PROVA: EXERCÍCIO!

$x \in A$ POSSUI INVERSO MULTIPLICATIVO y, VAMOS ESCREVER $y = x^{-1}$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ anéis e seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ anéis e seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A *tem unidade e* $x \in A$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ *possui inverso multiplicativo,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) *Se* A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) *Se* A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) *Se* A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) *Se* A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

$$[\underline{f(x)}]^{-1} = f(\underline{x}^{-1}).$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Prova: i) SEJA 1_A A UNIDADE DE A. QUEREMOS MOSTRAR QUE $f(1_A)$ É A UNIDADE DE B. PARA MOSTRAR ISSO, PRECISAMOS MOSTRAR QUE

$$z \otimes f(1_A) = z = z \otimes f(1_A)$$

PARA TODO $z \in B$.

AGORA, f É SOBREJETORA. ASSIM PARA $y \in B$, EXISTE $x \in A$ TAL QUE $f(x) = y$. ASSIM

$$\underline{y} \otimes \underbrace{f(1_A)} = f(x) \otimes \underbrace{f(1_A)} = f(x \otimes 1_A) =$$

$$= f(x) = g$$

$$\underline{f(1_A)} \otimes g = f(1_A) \otimes f(x) = f(1_A \otimes x)$$

$$= f(x) = g.$$

PORTANTO, B TEM UNIDADE E

$1_B = f(1_A)$.

ii) SEJA 1_A A UNIDADE DE A E $f(1_A) = 1_B$ É A UNIDADE DE B.

SEJA $x \in A$ INVERSÍVEL. DAÍ

$$x \cdot x^{-1} = 1_A = x^{-1} \cdot x.$$

Assim

$$\underline{f(x)} \otimes \underline{f(x^{-1})} = f(x \cdot x^{-1}) = f(1_A) = 1_B$$

$$\underline{f(x^{-1})} \otimes \underline{f(x)} = f(x^{-1} \cdot x) = f(1_A) = 1_B .$$

PORTANTO, $f(x^{-1})$ É O INVERSO MULTIPLICATIVO DE $f(x)$. ISTO É,

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}). \quad \#$$