

# Grupos - Introdução

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$

## Definição

*Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$*

## Definição

*Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:*

## Definição

*Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:*

*i) Para todos  $x, y, z \in G$ :*

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z$$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$



## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e$$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x =$$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ .

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ . Tal elemento  $e$

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ . Tal elemento  $e$  é chamado de **elemento neutro**

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ . Tal elemento  $e$  é chamado de **elemento neutro** ou **unidade**



## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ . Tal elemento  $e$  é chamado de **elemento neutro** ou **unidade** de  $G$ .

## Definição

Seja  $G \neq \emptyset$  um conjunto no qual está definida uma operação binária  $*$  tal que:

i) Para todos  $x, y, z \in G$ :

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) Existe  $e \in G$  tal que

$$x * e = x = e * x$$

para todo  $x \in G$ . Tal elemento  $e$  é chamado de **elemento neutro** ou **unidade** de  $G$ .

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ ,

## Definição

iii) *Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$*

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y$$

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e =$$

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$



## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso**

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso** ou **oposto**

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso** ou **oposto** de  $x$ .

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso** ou **oposto** de  $x$ .

Nesse caso dizemos que o par  $(G, *)$

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso** ou **oposto** de  $x$ .

Nesse caso dizemos que o par  $(G, *)$  é um **grupo**.

## Definição

iii) Para cada  $x \in G$ , existe  $y \in G$  tal que

$$x * y = e = y * x.$$

O elemento  $y$  é chamado de **inverso** ou **oposto** de  $x$ .

Nesse caso dizemos que o par  $(G, *)$  é um **grupo**.

## Observação:

*Quando  $*$  é uma “soma”,*



## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”,

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo**

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano**



## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano** quando  $*$  é comutativa,

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano** quando  $*$  é comutativa, ou seja, quando

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano** quando  $*$  é comutativa, ou seja, quando

$$x * y =$$

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano** quando  $*$  é comutativa, ou seja, quando

$$x * y = y * x$$

## Observação:

Quando  $*$  é uma “soma”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo aditivo**.

Se  $*$  é uma “multiplicação”, dizemos que  $(G, *)$  é um **grupo multiplicativo**.

Além disso, quando não houver chance de confusão com relação à operação do grupo  $(G, *)$  vamos dizer simplesmente que  $G$  é um grupo.

## Definição

Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **grupo comutativo** ou **abeliano** quando  $*$  é comutativa, ou seja, quando

$$x * y = y * x$$

para todos  $x, y \in G$ .

## Exemplos

1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um *grupo abeliano*.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.



## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.
- 4)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.
- 4)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 5)  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.
- 4)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 5)  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano.
- 6)  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.
- 4)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 5)  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano.
- 6)  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 7)  $(\mathbb{C}, +)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

- 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo abeliano.
- 2)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  não é grupo.
- 3)  $(\mathbb{Q}, +)$  é um grupo abeliano.
- 4)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 5)  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano.
- 6)  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.
- 7)  $(\mathbb{C}, +)$  é um grupo abeliano.
- 8)  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$



## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y =$$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$  é grupo?



## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$  é grupo?

12)  $(\mathbb{R}, *)$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$  é grupo?

12)  $(\mathbb{R}, *)$  onde  $x * y = y$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$  é grupo?

12)  $(\mathbb{R}, *)$  onde  $x * y = y$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$

## Exemplos

9)  $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$  é grupo abeliano.

10) Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a operação  $*$  definida por

$$x * y = x + y - 3$$

para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então  $(\mathbb{R}, *)$  é um grupo abeliano.

11)  $(\mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}, \otimes)$  é grupo?

12)  $(\mathbb{R}, *)$  onde  $x * y = y$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  é grupo?

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$



## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja  $M_{r \times s}(\mathbb{K})$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz}$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas}$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s\}$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz}$   
 $\text{de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$



## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K})$$



## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então  $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então  $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$  onde  $\cdot$  é a multiplicação de matrizes é um grupo

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então  $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$  onde  $\cdot$  é a multiplicação de matrizes é um grupo não abeliano.

## Exemplos

13) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$M_{r \times s}(\mathbb{K}) = \{A \mid A \text{ é uma matriz de } r \text{ linhas por } s \text{ colunas cujas entradas estão em } \mathbb{K}\}.$$

Então  $(M_{r \times s}(\mathbb{K}), +)$  onde  $+$  é a soma de matrizes é um grupo abeliano.

14) Denote por  $\mathbb{K}$  um dos conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , indistintamente. Seja

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Então  $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$  onde  $\cdot$  é a multiplicação de matrizes é um grupo não abeliano.

## Proposição

*Seja  $(G, *)$  um grupo.*

## Proposição

*Seja  $(G, *)$  um grupo. Então:*



## Proposição

*Seja  $(G, *)$  um grupo. Então:*

*i) O elemento neutro de  $G$  é único.*

## Proposição

*Seja  $(G, *)$  um grupo. Então:*

- i) O elemento neutro de  $G$  é único.*
- ii) Existe um único inverso para cada  $x \in G$ .*

## Proposição

iii) *Para todos  $x, y \in G$ ,*

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

*Por indução,*

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n)^{-1} =$$



## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots *$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots * x_2^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo  $x \in G$ ,

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo  $x \in G$ ,

$$(x^{-1})^{-1}$$

## Proposição

iii) Para todos  $x, y \in G$ ,

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Por indução,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in G$ ,

$$(x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1} * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * x_{n-1}^{-1} * \dots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$$

iv) Para todo  $x \in G$ ,

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$