

# Funções - Imagem Direta e Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

## Definição

*Seja  $f: A \rightarrow B$*

## Definição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.*

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

i) Dado  $P \subseteq A$ ,

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta**

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$



## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) =$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x)$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$



## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ ,

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa**

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por



## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q)$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,  $f^{-1}(Q)$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,  $f^{-1}(Q)$  é o conjunto dos elementos de  $A$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,  $f^{-1}(Q)$  é o conjunto dos elementos de  $A$  que tem imagem em  $Q$

## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,  $f^{-1}(Q)$  é o conjunto dos elementos de  $A$  que tem imagem em  $Q$  através de  $f$ .



## Definição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.

- i) Dado  $P \subseteq A$ , chama-se **imagem direta** de  $P$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f(P)$  o subconjunto de  $B$  dado por

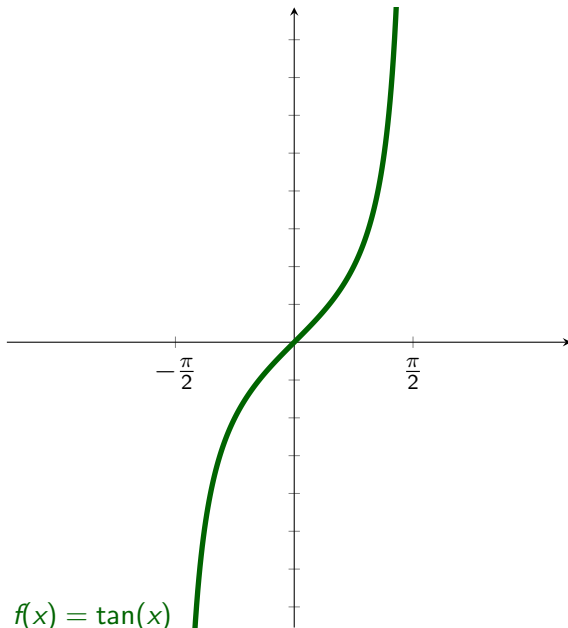
$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,  $f(P)$  é o conjunto das imagens por  $f$  dos elementos de  $P$ .

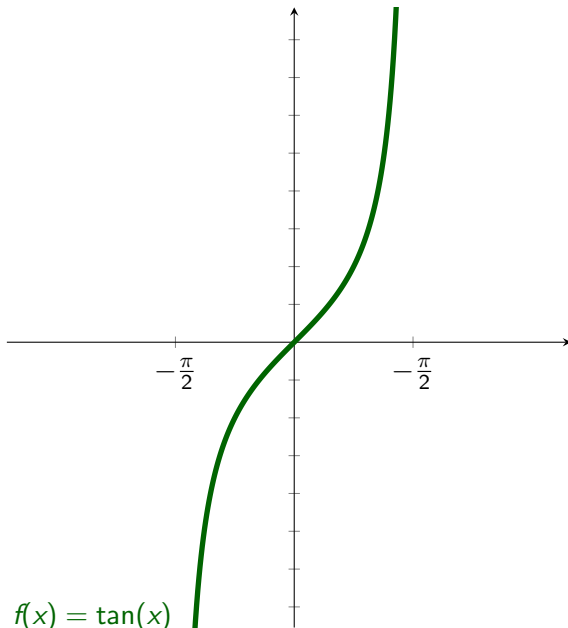
- ii) Dado  $Q \subseteq B$ , chama-se **imagem inversa** de  $Q$  **segundo**  $f$  e indica-se por  $f^{-1}(Q)$  o subconjunto de  $A$  dado por

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

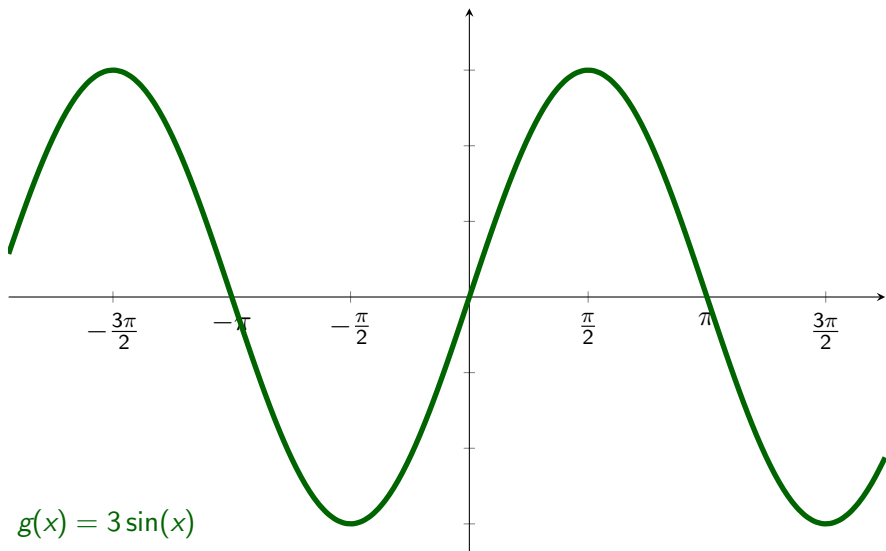
isto é,  $f^{-1}(Q)$  é o conjunto dos elementos de  $A$  que tem imagem em  $Q$  através de  $f$ .



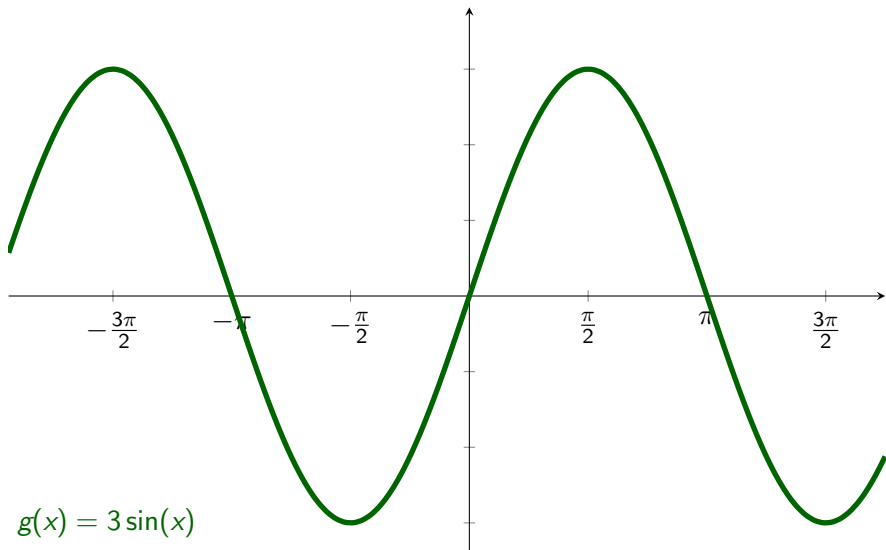
$$f(x) = \tan(x)$$



$$f(x) = \tan(x)$$



$$g(x) = 3 \sin(x)$$



$$g(x) = 3 \sin(x)$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$



## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ .

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) =$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\})$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3),$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5),$$



## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A)$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1),$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3),$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7),$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} =$$



## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset)$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) =$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$



## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\})$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}\}$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}\} = \emptyset$$

## Exemplos

1) Seja  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$  e  $f: A \rightarrow B$  dada por  $f(x) = x + 1$ . Temos:

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}\} = \emptyset$$

## Exemplos

2) *Sejam*  $A = B = \mathbb{R}$

## Exemplos

2) *Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*



## Exemplos

2) *Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ .*

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\})$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2])$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x)$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$$



## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9])$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R}$$



## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3, -1] \cup [1, 3]$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([1, 9]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3, -1] \cup [1, 3] \end{aligned}$$

## Exemplos

2) Sejam  $A = B = \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ . Temos:

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([1, 9]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3, -1] \cup [1, 3] \end{aligned}$$

## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função*



## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P$ ,*

## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A$ ,*

## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R,$*

## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .*

## Proposição

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .*

*i) Se  $P \subseteq Q$ ,*

## Proposição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .

i) Se  $P \subseteq Q$ , então  $f(P) \subseteq f(Q)$ .

## Proposição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .

i) Se  $P \subseteq Q$ , então  $f(P) \subseteq f(Q)$ .

ii)  $f^{-1}(R \cup S)$

## Proposição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .

i) Se  $P \subseteq Q$ , então  $f(P) \subseteq f(Q)$ .

ii)  $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$



## Proposição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .

i) Se  $P \subseteq Q$ , então  $f(P) \subseteq f(Q)$ .

ii)  $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$ .

## Proposição

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função e sejam  $P, Q \subseteq A, R, S \subseteq B$ .

i) Se  $P \subseteq Q$ , então  $f(P) \subseteq f(Q)$ .

ii)  $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$ .