Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Defina a relação $\sim$ *em* $\mathbb{Z}$ *por*

$$x \sim y \text{ quando } x + 2y = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que $\sim$ *é uma relação de equivalência em* $\mathbb{Z}$.

$$\sim \; = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \boxed{x + 2y = 3k}, \; k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$x \sim y \iff (x,y) \in \sim \; !$$

$$(2,1) \notin \sim \qquad 2 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 3 \cdot k \, ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$(1,2) \to 1 + 2\cdot 2 = 1 + 4 = 5 \neq 3n,\ n \in \mathbb{Z}.$

$(2,2) \in \sim \ \mapsto\ 2 + 2\cdot 2 = 6 = 3\cdot \boxed{2}\ n$

$(3,6) \in \sim \ \mapsto\ 3 + 2\cdot 6 = 15 = 3\cdot \boxed{5}\ n$

$R \subseteq A \times A$, $A \neq \emptyset$, R É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA SE:

i) PARA TODO $x \in A$, $(x, x) \in R$

ii) SE $(x, y) \in R$, ENTÃO $(y, x) \in R$.

iii) SE $(x,\boxed{y}) \in R$ E $(\boxed{y},z) \in R$,

ENTÃO $(x,z) \in R$.

$(\overset{t}{x}, \overset{s}{y}) \in \sim \iff \underline{x + 2y = 3n}, \; n \in \mathbb{Z}.$

Solução: Aqui $A = \mathbb{Z}$ e $R = \sim$.

Primeiro seja $\underline{x \in \mathbb{Z}}$. Daí,

$\underline{(\underset{p}{x}, \underset{A}{x})} \in \sim$ pois

$$x + 2x = 3x = 3 \cdot n,$$ onde

$n = x$, $x \in \mathbb{Z}$.

$(y,x) \iff \boxed{y+2x} = \underline{3 \cdot l}, \quad l \in \mathbb{Z}.$

AGORA SUPONHA QUE $(x,y) \in \sim$.

ASSIM

$$\boxed{x+2y = 3n} \iff \boxed{x = 3n - 2y}$$

PARA $n \in \mathbb{Z}$.

DAÍ

$$\underline{y + 2x} = y + 2(3x - 2y)$$

$$= y + 6x - 4y = 6x - 3y = 3(\underbrace{2x - y}_{\in \mathbb{Z}})$$

LOGO $(y, x) \in \sim$.

FINALMENTE, SUPONHA QUE

$(x, y) \in \sim$ E QUE $(y, z) \in \sim$.

ASSIM

$x + 2y = 3k$ (1) E $y + 2z = 3l$ (2)

$(x, z) \in \sim$? $\underline{x + 2z} = 3 \cdot t$

ONDE $n, l \in \mathbb{Z}$. DAÍ SOMANDO

(1) E (2) OBTEMOS

$$\boxed{x +} \boxed{2y} + \boxed{y} + \boxed{2z} = 3n + 3l$$

$$x + 2z = \underline{3n + 3l - 3y}$$

$$x+2z = 3(\underbrace{n+l-y}_{\in \mathbb{Z}})$$

Isto é, $x+2z = 3t$, onde $t = n+l-y \in \mathbb{Z}$. Logo, $(x,z) \in \sim$.

PORTANTO $\sim$ É UMA RELAÇÃO

DE EQUIVALÊNCIA EM $\mathbb{Z}$. #