Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

3 de agosto de 2020

Definição

Seja A um conjunto não vazio

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$,*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);\\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$
$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$
$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$
$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$
$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y\}.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y\}.$$

Então R *é uma relação de equivalência.*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y\}.$$

Então R é uma relação de equivalência.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$

Exemplos

3) *Seja* $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,$$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.