Exercícios - Imagem Direta e Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

19 de setembro de 2020

Exercício

Seja $g : A \to B$ *uma função e sejam* $X, Y \subset B$*. Mostre que* $g^{-1}(X - Y) = g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$.

$g : A \to B$, $Q \subseteq B$

$g^{-1}(Q) = \{t \in A \mid g(t) \in Q\}$

SEJA $t \in g^{-1}(X-Y)$. DAÍ $g(t) \in X-Y$.

ASSIM $g(t) \in X$ E $g(t) \notin Y$. LOGO

$t \in g^{-1}(X)$ E $t \notin g^{-1}(Y)$. COM ISSO

$t \in g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$. OU SEJA

$$g^{-1}(X-Y) \subseteq \underbrace{g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)}.$$

AGORA SEJA $z \in g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$.

DAÍ $z \in g^{-1}(X)$ E $z \notin g^{-1}(Y)$. ISTO

É, $g(z) \in X$ E $g(z) \notin Y$. ASSIM

$g(y) \in X - Y$. Logo, $y \in g^{-1}(\underbrace{X - Y})$.

Com isso

$$g^{-1}(X) - g^{-1}(Y) \subseteq g^{-1}(X - Y).$$

Portanto,

$$g^{-1}(X - Y) = g^{-1}(X) - g^{-1}(Y). \quad \#$$

Exercício

Sejam $f : A \to B$ uma função e $P, Q \subseteq A$. Mostre que se f é injetora, então $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$. $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ $\subseteq$ $\supseteq$ $\Leftarrow$

$f : A \to B$; $P \subseteq A$

$f(P) = \{ f(x) \mid x \in P \} \ni y \iff$

$y = f(x)$, $x \in P$,

SEJA $t \in f(P \cap Q)$. DAÍ EXISTE $z \in P \cap Q$ TAL QUE $f(z) = t$. ASSIM $z \in P$ E $z \in Q$. LOGO, $t \in f(P)$ E $t \in f(Q)$. ISTO É, $t \in f(P) \cap f(Q)$.

DAÍ

$$f(P \cap Q) \subseteq f(P) \cap f(Q).$$

MAT-UnB

AGORA SE $t \in f(P) \cap f(Q)$. DAÍ $t \in f(P)$ E $t \in f(Q)$. ASSIM EXISTE $x_1 \in P$ TAL QUE $f(x_1) = t$ E EXISTE $x_2 \in Q$ TAL QUE $f(x_2) = t$. LOGO, $f(x_1) = f(x_2)$. MAS f É INJETORA, COM ISSO $x_1 = x_2$. ENTÃO

$x_1 = x_2 \in P \cap Q$ E ASSIM $t \in f(P \cap Q)$.

LOGO

$$f(P) \cap f(Q) \subseteq f(P \cap Q).$$

PORTANTO,

$$f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q). \quad \#$$