

# Função Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

26 de setembro de 2020

Dado  $f: A \rightarrow B$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função,

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ .

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ .



Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,}$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função?

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo:

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:



Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:

$$f(0) = 5$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 5$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 6$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 6$$

$$f(3) = 7.$$

Dado  $f: A \rightarrow B$  uma função, queremos construir uma função  $g: B \rightarrow A$  de modo que

$$g(f(x)) = x,$$

para todo  $x \in A$ . Mas  $f(x) = y$  com  $y \in B$ . Assim podemos tentar definir  $g$  como

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Com essa definição  $g$  é uma função? Vejamos um exemplo: definia  $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$  por:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 6$$

$$f(3) = 7.$$

A partir da definição acima temos

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$



A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores:

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1.

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora.



A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

$$f(0) = 5$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 4$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 6$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 6$$

$$f(3) = 7.$$

A partir da definição acima temos

$$g(5) = 0$$

$$g(5) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Assim  $g$  definida dessa forma não é uma função pois  $g$  atribui ao número 5 dois possíveis valores: 0 e 1. Isso ocorre pois  $f$  não é injetora. Vamos então redefinir  $f$  de modo a torná-la injetora:

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 6$$

$$f(3) = 7.$$

Agora  $g$  torna-se:

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$



Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Portanto para que a condição dada

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Portanto para que a condição dada defina uma função



Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Portanto para que a condição dada defina uma função é necessário que  $f$  seja bijetora.

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Portanto para que a condição dada defina uma função é necessário que  $f$  seja bijetora. Temos então o seguinte teorema:

Agora  $g$  torna-se:

$$g(5) = 0$$

$$g(4) = 1$$

$$g(6) = 2$$

$$g(7) = 3.$$

Ainda assim  $g$  não é função pois  $g$  não associa  $8 \in B$  com nenhum elemento em  $A$ . Isso ocorre pois  $f$  não é sobrejetora.

Portanto para que a condição dada defina uma função é necessário que  $f$  seja bijetora. Temos então o seguinte teorema:

## Teorema

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função.*

## Teorema

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$*

## Teorema

*Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por*

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B$$

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,}$$



## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, y \in B \quad \text{se, e somente se, } f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

- i) Se  $g$  definida como acima é uma função,

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

- i) Se  $g$  definida como acima é uma função, então  $f$  é bijetora.



## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

- i) Se  $g$  definida como acima é uma função, então  $f$  é bijetora.
- ii) Se  $f$  é bijetora,

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

- i) Se  $g$  definida como acima é uma função, então  $f$  é bijetora.
- ii) Se  $f$  é bijetora, então  $g$  definida como acima é uma função.

## Teorema

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Defina  $g: B \rightarrow A$  por

$$g(y) = x, \quad y \in B \quad \text{se, e somente se,} \quad f(x) = y.$$

Então  $g$  é uma função se, e somente se,  $f$  é bijetora.

**Prova:** Precisamos mostrar que:

- i) Se  $g$  definida como acima é uma função, então  $f$  é bijetora.
- ii) Se  $f$  é bijetora, então  $g$  definida como acima é uma função.

Provemos a primeira afirmação:

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função.

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1$ ,



Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y$

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ .

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ ,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ .

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função,



Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ ,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ ,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ ,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ , tal que  $g(y) = x$ ,

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ , tal que  $g(y) = x$ , logo  $f(x) = y$



Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ , tal que  $g(y) = x$ , logo  $f(x) = y$  e assim  $f$  é sobrejetora.

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ , tal que  $g(y) = x$ , logo  $f(x) = y$  e assim  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora.

Provemos a primeira afirmação: suponha que  $g$  é uma função. Precisamos provar que  $f$  é injetora e sobrejetora.

Sejam  $x_1, x_2 \in A$  tais que  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f(x_1) = y$  temos  $g(y) = x_1$ , além disso,  $g(y) = x_2$ . Mas  $g$  é uma função, daí  $x_1 = x_2$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Dado  $y \in B$ , como  $g$  é uma função, existe  $x \in A$ , tal que  $g(y) = x$ , logo  $f(x) = y$  e assim  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora.

Agora vamos provar a segunda afirmação.

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora.

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente,

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ ,



Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora,

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$



Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora,

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) =$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1$



Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1 = x_2$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1 = x_2$ . Assim  $g$  associa cada elemento de  $B$

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1 = x_2$ . Assim  $g$  associa cada elemento de  $B$  com somente um elemento em  $A$ .

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1 = x_2$ . Assim  $g$  associa cada elemento de  $B$  com somente um elemento em  $A$ .

Portanto  $g$  é função.

Agora vamos provar a segunda afirmação. Para isso suponha que  $f$  é bijetora. Precisamos mostrar que  $g$  é uma função.

Primeiramente, dado  $y \in B$ , como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo pela definição de  $g$  segue que  $g(y) = x \in A$ . Logo  $g$  associa cada elemento de  $B$  com algum elemento em  $A$ .

Agora, suponha que  $g(y) = x_1$  e que  $g(y) = x_2$ . Daí, da definição de  $g$  temos  $f(x_1) = y$  e  $f(x_2) = y$ . Mas  $f$  é injetora, logo  $x_1 = x_2$  e então  $g(y) = x_1 = x_2$ . Assim  $g$  associa cada elemento de  $B$  com somente um elemento em  $A$ .

Portanto  $g$  é função.

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$

## Definição

*A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior*

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa**



## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f: A \rightarrow B$

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow B$  funções.

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$

## Definição

A função  $g: B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f: A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ ,



## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$  dada por  $i_A(x)$

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$  dada por  $i_A(x) = x$

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$  dada por  $i_A(x) = x$  é chamada de

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$  dada por  $i_A(x) = x$  é chamada de **função identidade**.

## Definição

A função  $g : B \rightarrow A$  do teorema anterior é chamada de **função inversa** de  $f : A \rightarrow B$  e será denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Definição

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : A \rightarrow B$  funções. Então  $f = g$  quando  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

## Definição

Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , a função  $i_A : A \rightarrow A$  dada por  $i_A(x) = x$  é chamada de **função identidade**.

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora,*



## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1}$*

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$*

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f$*

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .*

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

***Prova:***

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B$  :

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A:$



## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}:$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f:$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ ,

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1})$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$



## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) =$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y)$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,



## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  
 $(f^{-1} \circ f)(x) =$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  
 $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

Portanto  $f \circ f^{-1} =$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

Portanto  $f \circ f^{-1} = i_B$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

Portanto  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

Portanto  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$  como queríamos.



## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  é bijetora, então  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$ .

**Prova:** Temos  $i_B: B \rightarrow B$  e  $i_A: A \rightarrow A$ . Além disso,  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  e  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ , daí  $\text{dom}(f \circ f^{-1}) = \text{dom}(i_B)$  e  $\text{dom}(f^{-1} \circ f) = \text{dom}(i_A)$ .

Agora,  $y \in B$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = i_B(y)$ . E se  $x \in A$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = i_A(x)$ .

Portanto  $f \circ f^{-1} = i_B$  e  $f^{-1} \circ f = i_A$  como queríamos. ■

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções,*

## Proposição

*Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:*

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$



## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

$$i) f \circ i_A = f$$

$$ii) i_B \circ f = f$$

$$iii) g \circ i_B = g$$

$$iv) i_A \circ g = g$$

$$v) \text{ Se } g \circ f = i_A$$

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

v) Se  $g \circ f = i_A$  e  $f \circ g = i_B$ ,

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

v) Se  $g \circ f = i_A$  e  $f \circ g = i_B$ , então

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

v) Se  $g \circ f = i_A$  e  $f \circ g = i_B$ , então  $f$  e  $g$  são bijetoras

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

v) Se  $g \circ f = i_A$  e  $f \circ g = i_B$ , então  $f$  e  $g$  são bijetoras e  $g = f^{-1}$ .

## Proposição

Se  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$  são funções, então:

i)  $f \circ i_A = f$

ii)  $i_B \circ f = f$

iii)  $g \circ i_B = g$

iv)  $i_A \circ g = g$

v) Se  $g \circ f = i_A$  e  $f \circ g = i_B$ , então  $f$  e  $g$  são bijetoras e  $g = f^{-1}$ .

***Prova:***

i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$



***Prova:***

i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$

***Prova:***

i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ .

***Prova:***

i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  
 $\text{dom}(f \circ i_A) =$

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ .

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ ,

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ , temos  $(f \circ i_A)(x) =$

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  
 $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ , temos  
 $(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) =$



***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ , temos  $(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) = f(x)$ . Portanto,

***Prova:***

- i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ , temos  $(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) = f(x)$ . Portanto,  $f \circ i_A = f$ .

***Prova:***

i) Primeiro temos  $f: A \rightarrow B$ ,  $i_A: A \rightarrow A$  e  $f \circ i_A: A \rightarrow B$ . Assim  $\text{dom}(f \circ i_A) = \text{dom}(f)$ . Agora dado  $x \in A$ , temos  $(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) = f(x)$ . Portanto,  $f \circ i_A = f$ .

ii)

iii)

iv)

v) Provemos que  $f$  é bijetora:

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1$ ,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) =$



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ ,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
 Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  
 $(g \circ f)(x_1)$

- v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  
 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ .



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
 Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  
 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
 Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  
 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ ,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .  
 Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  
 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$   
 e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ .



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  
 $y =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y)$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y)$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora.

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso,



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) =$



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) =$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,  $g(x) = f^{-1}(x)$

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,  $g(x) = f^{-1}(x)$  para todo  $x \in B$ .

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,  $g(x) = f^{-1}(x)$  para todo  $x \in B$ . Logo  $g = f^{-1}$ .



v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,  $g(x) = f^{-1}(x)$  para todo  $x \in B$ . Logo  $g = f^{-1}$  como queríamos.

v) Provemos que  $f$  é bijetora: sejam  $x_1, x_2 \in B$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow A$ , então  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , ou seja,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ . Daí,  $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ . Logo,  $x_1 = x_2$  e então  $f$  é injetora.

Agora, dado  $y \in B$ , segue que  $y = i_B(y)$ . Mas  $i_B = f \circ g$ . Daí,  $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ . Assim,  $x = g(y) \in A$  e  $f(x) = y$ . Logo  $f$  é sobrejetora.

Portanto  $f$  é bijetora. Analogamente, prova-se que  $g$  é bijetora.

Provemos agora que  $g = f^{-1}$ . Para isso, primeiro temos  $f^{-1}: B \rightarrow A$  e então  $\text{dom}(g) = B = \text{dom}(f^{-1})$ . Agora,  $f \circ g = i_B = f \circ f^{-1}$ . Assim, para todo  $x \in B$ ,  $(f \circ g)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ . Isto é,  $f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ . Portanto como  $f$  é injetora,  $g(x) = f^{-1}(x)$  para todo  $x \in B$ . Logo  $g = f^{-1}$  como queríamos. ■

## Exemplo

Verifique se a função  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y^5)$  é bijetora. Caso afirmativo, encontre  $f^{-1}$ .

## Exemplo

## Exemplo