SEJA $f: A \to B$ UMA FUNÇÃO E SEJAM $P \subset A$ E $X \subset B$. MOSTRE QUE:

i) $f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$

ii) $P \subseteq f^{-1}(f(P))$

f É INVERSÍVEL!

$\Updownarrow$

f É BIJETORA!

$$\Rightarrow f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\}$$

$Q \subseteq B$

$$x \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow f(x) \in Q$$

$$f(x) \notin Q \Rightarrow x \notin f^{-1}(Q).$$

i) SEJA $z \in f^{-1}(X^C)$. DAÍ $f(z) \in X^C$.

ASSIM $f(z) \notin X$. LOGO, $z \notin f^{-1}(X)$. ENTÃO

$z \in [f^{-1}(X)]^C$. OU SEJA

$$f^{-1}(X^C) \subseteq [f^{-1}(X)]^C.$$

AGORA, SEJA $t \in [f^{-1}(X)]^C$. DAÍ $t \notin f^{-1}(X)$.

LOGO, $f(t) \notin X$. ASSIM $\underline{f(t)} \in \underline{X^c}$ E ENTÃO

$t \in f^{-1}(X^c)$. LOGO

$$[f^{-1}(X)]^c \subseteq f^{-1}(X^c).$$

PORTANTO,

$$f^{-1}(X^c) = [f^{-1}(X)]^c.$$

ii) $f(P) = \{ f(z) \mid z \in P \}$

SEGA $\underline{t \in P}$. ASSIM $\underline{f(t)} \in \underline{f(P)} = Q$.

LOGO $f(t) \in Q \subseteq B$. DAÍ $t \in \underbrace{f^{-1}(Q)}$

ISTO É, $\underbrace{t \in f^{-1}(f(P))}$. PORTANTO,

$$P \subseteq f^{-1}(f(P)). \quad \#$$

MOSTRAR QUE TODA FUNÇÃO INJETORA DE UM CONJUNTO FINITO EM SI MESMO É TAMBÉM SOBREJETORA.

SEJA A UM CONJUNTO FINITO E $f: A \to A$ UMA FUNÇÃO INJETORA. MOSTRE QUE f É SOBREJETORA. DIGAMOS

$$A = \{ \underbrace{x_1, x_2, \overset{t}{\dots}, x_n} \}$$

- $t \in A$
- $x \in A$

$f(x) = t$.

SUPONHA QUE f NÃO É SOBREJETORA. ASSIM, EXISTE $t \in A$ TAL QUE

$f(x_i) \neq t$ PARA TODO $x_i \in A$. AGORA,

POR HIPÓTESE, f É INJETORA, OU SEJA,

$\rightarrow f(\underline{x_k}) \neq f(\underline{x_\ell})$ PARA TODOS $x_\ell \neq x_k$.

MAS f POSSUI, NO MÁXIMO, $\underline{\underline{n-1}}$ IMAGENS

DISTINTAS. DAÍ EXISTEM $x_r \neq x_s$ TAIS

QUE $f(x_r) = f(x_s)$. O QUE CONTRADIZ

A HIPÓTESE DE f SER INJETORA. TAL

CONTRADIÇÃO SURGIU DE SUPORMOS QUE

f NÃO É SOBREJETORA. PORTANTO f É

SOBREJETORA.