Função Inversa - Exercício

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

19 de setembro de 2020

Exercício

Verifique se a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y^5)$ *é bijetora. Caso afirmativo, encontre* f^{-1}.

$f : A \to B$ É INJETORA SE

DADOS $x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE

$f(x_1) = f(x_2)$ ISSO IMPLI-

CA EM $[x_1 = x_2]$.

SEJAM $(x,y),(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ TAIS QUE

$f(x,y) = f(z,t)$. DAÍ

$(\sqrt[3]{x}, y^5) = (\sqrt[3]{z}, t^5)$.

ASSIM

$(\sqrt[3]{x})^3 = (\sqrt[3]{z})^3$ E $\sqrt[5]{y^5} = \sqrt[5]{t^5}$

LOGO, $x = z$ E $y = t$

COM ISSO, $(x,y) = (z,t)$. ENTÃO f É INJETORA.

$f: A \to B$ ($B = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$) É SOBREJETORA QUANDO PARA TODO $t \in B$, EXISTE $z \in A$ ($A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$) TAL QUE $f(z) = t$.

SEJA $(z,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. QUEREMOS ENCONTRAR $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ TAL QUE

$f(x, y) = (z, t)$.

$(\sqrt[3]{x}, y^5) = (z, t)$

$(\sqrt[3]{x})^3 = (z)^3$ e $\sqrt[5]{y^5} = \sqrt[5]{t}$

$x = z^3 \in \mathbb{R}$ e $y = \sqrt[5]{t} \in \mathbb{R}$

DADO $(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, TOME $\underbrace{(z^3, \sqrt[5]{t})}$ $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

ASSIM

$$f(z^3, \sqrt[5]{t}) = \left(\sqrt[\cancel{3}]{z^{\cancel{3}}}, \left(\sqrt[\cancel{5}]{t}\right)^{\cancel{5}}\right) = (z, t).$$

LOGO, f É SOBREJETORA.

PORTANTO, f É BIJETORA.

E $f^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ É DADA

POR $f^{-1}(x, y) = (x^3, \sqrt[5]{y})$.

$\underline{f \circ f^{-1}}$; $\underline{f^{-1} \circ f}$