Conjuntos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Mostre que se A e B são conjuntos então

$$A \cup B = A \cap B \text{ se, e somente se, } A = B.$$

PROVA:

PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) SE $\underset{H}{\boxed{A = B}}$, ENTÃO $\underset{T}{\boxed{A \cup B = A \cap B}}$.

ii) SE $\underset{H}{\boxed{A \cup B = A \cap B}}$, ENTÃO $\underset{T}{\boxed{A \overset{?}{=} B}}$.

$C = D$ QUANDO $C \subset D$ e $D \subset C$

PARA MOSTRAR (i) SUPONHA

QUE $\boxed{A = B}$. DAÍ

$$\underline{A \cup B} = A \cup A = A$$

$$\underline{A \cap B} = A \cap A = A$$

LOGO

$$A \cup B = A \cap B.$$

PARA MOSTRAR (ii) SUPONHA QUE

$\underbrace{A \cup B} = \underbrace{A \cap B}$. PRECISAMOS

MOSTRAR QUE $\underline{A = B}$. MAS PARA

MOSTRAR ESSA IGUALDADE PRE-

CISAMOS MOSTRAR QUE

$\rightarrow$ 1) $\boxed{A \subseteq B}$ E 2) $B \subseteq A$.

SEJA $\boxed{x \in A}$. DAÍ $x \in \underline{A \cup} B$

E POR HIPÓTESE, $A \cup B = \underline{A \cap B}$.

ASSIM $x \in \underline{A} \cap \underline{B}$. LOGO $\boxed{x \in B.}$

ISTO É, $A \subseteq B$.

AGORA SEJA $\boxed{y \in B}$. ASSIM $y \in A \cup B$. MAS, POR HIPÓTESE, $A \cup B = A \cap B$. DAÍ $y \in A \cap B$.

ASSIM $\boxed{y \in A}$. LOGO $B \subseteq A$.

PORTANTO $A = B$. PROVANDO

(ii). #