Anéis - Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

$A \neq \emptyset$, $\oplus$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias.

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x,

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y,

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos $x, y, z \in A$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x,

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y =$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$\underline{x \oplus 0_A}$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale
$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale
$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$.

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A$$

$A \neq \emptyset$, $\oplus$ e $\otimes$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:

i) para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos x, $y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

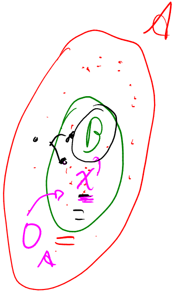
$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

em A

$A \neq \emptyset$, $\boxed{\oplus \text{ e } \otimes}$ operações binárias. $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** se:



i) para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

ii) Para todos $x,\ y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

iii) Existe $0_A \in A$ tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

iv) Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

v) Para todos x,

v) Para todos x, y,

v) Para todos $x, y, z \in A$,

v) Para todos $x, y, z \in A$, vale

v) Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(\underline{x \otimes y})$$

v) Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

P

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x,

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y,

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x,\ y,\ z \in A$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z$$

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = \underline{x \otimes z}$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos x,

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos x, y,

v) Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos $x, y, z \in A$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos x, y, $z \in A$ vale

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$x \otimes$$

v) Para todos $x,\ y,\ z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos $x,\ y,\ z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z)$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = \underline{x \otimes y}$$

v) Para todos x, y, $z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos x, y, $z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

v) Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

vii) Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

- $x \otimes y = y \otimes x$ PARA TODOS $x, y \in A$

$(A, \oplus, \otimes)$ É UM ANEL COMUTATIVO.

IDENTIDADE OU UNIDADE

- EXISTE $1_A \in A$ TAL QUE

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x$$

PARA TODO $x \in A$.

$(A, \oplus, \otimes)$ É UM ANEL COM UNIDADE.

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\odot$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) *O elemento neutro é $\boxed{\text{único}}$.*

$0_1 = 0_2$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $\boxed{x \in A}$ *existe um* $\boxed{\text{único oposto.}}$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

$\cancel{(-x)x}$

$\to \mathbb{Z}_5$ $\quad \bar{0}$

$-(\bar{2}) = \bar{3}$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) Para todo $x \in A$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

$$x + (-x) = 0_A = (-x) + x$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) *Para todo $x \in A$,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) *Para todo $x \in A$,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α,

Proposição

v) Para todos α, $\underset{\sim}{x}$,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) *Para todos* $\alpha, x, y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $\boxed{x = y.}$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

vii) Para todos x,

Proposição

vii) *Para todos* $x, y \in A$,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$*, temos*

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y)$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$\boxed{x \cdot (-y)} = \boxed{(-x) \cdot y} = -(x \cdot y).$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos x,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x,\ y \in A$,

$$\underline{x \cdot y}$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

PROVA: (i) SUPONHA QUE EXISTEM DOIS ELEMENTOS NEUTROS NO ANEL A. VAMOS CHAMÁ-LOS DE O_1 E O_2. ASSIM

$$\boxed{0_1} + x = x = x + 0_1$$

$$0_2 + x = x = x + 0_2$$

PARA TODO $\boxed{x \in A}$,

AGORA

$$\boxed{0_1 =} \; 0_1 + 0_2 \; \boxed{= 0_2}$$

LOGO O ELEMENTO NEUTRO É ÚNICO.

(ii) DADO $x \in A$, SUPONHA QUE $y_1, y_2 \in A$ SÃO OPOSTOS DE x. DAÍ

$$x + y_1 = 0_A = y_1 + x$$

$$x + y_2 = 0_A = y_2 + x$$

Assim

$$\boxed{y_1 =} \; y_1 + 0_A = (y_1 + (x) + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

$$= 0_A + y_2 \; \boxed{= y_2}$$

LOGO O OPOSTO DE x É ÚNICO E
SERÁ DENOTADO POR $-x$.

iii) DADO $x \in A$, PELO ITEM (ii) SABE-
MOS QUE O OPOSTO DE x É ÚNICO.

ASSIM NA EQUAÇÃO

$$x + (-x) = 0_A = (-x) + x$$

TEMOS QUE O OPOSTO DE $(-x)$ É

x, ISTO É, $-(-x) = x$.

(v) SEJAM $\alpha, x, y \in A$ TAIS QUE

$$\underline{\alpha + x} = \underline{\alpha + y}.$$

ASSIM

$$x = x + 0_A = x + (\alpha + (-\alpha))$$

ONDE $-\alpha$ É O OPOSTO DE α EM A.

DA i

$$\boxed{x =} \left(x + \left(\alpha + (-\alpha)\right)\right) = (x + \alpha) + (-\alpha)$$

$$= (\alpha + x) + (-\alpha) = (\alpha + y) + (-\alpha)$$

$$= \left((y + \alpha) + (-\alpha)\right) = y + (\alpha + (-\alpha)) = y + 0_A$$

$$\boxed{= y}$$

(vi) SEJA $x \in A$. ASSIM

$$x \cdot 0_A = x \cdot 0_A + 0_A$$

$$0_A + 0_A$$

$$x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + 0_A$$

$$\underbrace{\cancel{x \cdot 0_A}}_{\alpha} + \underbrace{x \cdot 0_A}_{x} \underset{?}{=} \underbrace{\cancel{x \cdot 0_A}}_{\alpha} + \underbrace{0_A}_{y}$$

USANDO O ITEM (v) OBTEMOS

$x \cdot 0_A = 0_A$.

A PROVA QUE $0_A \cdot x = 0_A$ FICA COMO

EXERCÍCIO!

(vii) SEJAM $x, y \in A$. TEMOS

$$\boxed{\underline{x \cdot y}} + \boxed{\underline{(-x) \cdot y}} = (x + (-x)) \cdot y = 0_A \cdot y = \underline{0_A}$$

LOGO, $-(xy) = (-x) \cdot y$.

ALÉM DISSO

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0_A = 0_A.$$

LOGO, $-(xy) = x \cdot (-y)$

PORTANTO.

$$-(xy) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y).$$

(viii) SEJAM $x, y \in A$. TEMOS

$$(-x)\cdot(-y) = -(x\cdot(-y)) = -(-(x\cdot y)) = x\cdot y.$$

$\cancel{\times}$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel* A *sempre tem dois subanéis:*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A *sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A,

Definição

Seja $(A,+,\cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B,+,\cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel* A *sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$ *e* A*, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$,*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $m > 1$*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$ *para todos* $x, y \in B$.

PROVA: PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) SE B É SUBANEL, ENTÃO

$x+(-y) \in B$, $x \cdot y \in B$ PARA TODOS

$x, y \in B$.

ii) SE $x+(-y) \in B$ $x.y \in B$ PARA TODOS $x, y \in B$, ENTÃO B É SUBANEL DE A.

$x = y$

A PROVA DE (i) É UMA CONSEQUÊNCIA

DA DEFINIÇÃO DE ANEL.

AGORA PARA PROVAR (ii) VAMOS

MOSTRAR QUE $(B, +, \cdot)$ É UM ANEL.

AS PROPRIEDADES (i), (ii), (v), (vi) E

(viii) SÃO VERDADEIRAS EM B POIS SÃO VERDADEIRAS EM TODO O CON-
JUNTO A E $B \subseteq A$.

O PRODUTO É UMA OPERAÇÃO BINÁ-

RIA EM B DEVIDO À HIPÓTESE DE

QUE $x \cdot y \in B$, PARA TODOS $x, y \in B$.

COMO, POR HIPÓTESE, $B \neq \emptyset$ SEJA

$x \in B$. COMO $x + (-y) \in B$, PARA TODOS

$x, y \in B$, então

$0_A = x + (-x) \in B$.

Além disso, como $x \in B$ e $0_A \in B$ então

$$-x = 0_A + (-x) \in B.$$

FINALMENTE, DADOS $x, y \in B$. SABEMOS QUE $\underline{-y \in B}$. DAÍ

$$x + y = x + [-(-y)] \in \underline{B}$$

PORTANTO $(B, +, \cdot)$ É UM ANEL.

DAÍ, $(B, +, \circ)$ É UM SUBANEL.

#

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

2) *No anel* $\mathbb{Z}$, *o conjunto* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

$$\{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplos

2) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

SOLUÇÃO: PRIMEIRO $0 \in m\mathbb{Z}$ POIS

$0 = m \cdot 0$

DAÍ, $\boxed{m\mathbb{Z} \neq \emptyset}$.

AGORA SEJAM $x, y \in m\mathbb{Z}$. ASSIM EXISTEM $n, l \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$x = mn$ e $y = m\ell$.

Além disso, $-y = -(m\ell) = m(-\ell)$. Daí

$$x + (-y) = mn + m(-\ell) = m(\underbrace{n - \ell}_{\in \mathbb{Z}}) \in m\mathbb{Z}$$

$$x \cdot y = (mn)(m\ell) = m(\underbrace{nm\ell}_{\in \mathbb{Z}}) \in m\mathbb{Z}$$

PORTANTO $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ É UM SUBANEL

DE $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Exemplos

3) Considere o anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$

Exemplos

3) Considere o anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

Exemplos

3) Considere o anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$

Exemplos

3) Considere o anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Exemplos

3) Considere o anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

Exemplos

3) *Considere o anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

3) *Considere o anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *são definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\neq \emptyset$; $0_A \in B$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$0_{\mathbb{Q}} = 8$

SOLUÇÃO: INICIALMENTE, NOTE QUE

$0_Q = 8$ E $-x = 16 - x$

PARA TODO $x \in Q$.

(a) COMO $0_Q = 8 = 2 \cdot 4$, ENTÃO $0_Q \in B$.

$x * (-y) \in B$; $x \ominus y \in B$

DAÍ, $B \neq \emptyset$.

SEJAM $x, y \in B$. ASSIM

$x = 2n$ E $y = 2l$

COM $n, l \in \mathbb{Z}$. COM ISSO,

$$x \odot y = (2n) \odot (2\ell) = 2n + 2\ell - \frac{(2n)(2\ell)}{8}$$

$$= 2n + 2\ell - \frac{n\ell}{2} \in B \, ?$$

NESSE CASO, B NÃO É SUBANEL

POIS, $2 \in B$ E NO ENTANTO

$2 \cdot n \, , \, n \in \mathbb{Z}$

$$2 \odot 2 = 2 + 2 - \frac{2 \cdot 2}{8} = 2 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \notin B.$$

b) COMO $0_{Q} = 8 = 8 \cdot 1$, ENTÃO $0_{Q} \in C$.

AGORA SEJAM $x, y \in C$. DAÍ, EXISTEM

$x * (-y)$

$k, l \in \mathbb{Z}$ tais que

$x = 8k$ e $y = 8l$.

Além disso, $-y = 16 - 8l$. Daí

$$x * (-y) = 8k * (16 - 8l) = 8k + (16 - 8l) - 8$$

$$= 8k - 8l - 8 = 8(\underbrace{k - l}_{\in \mathbb{Z}} - 1) \in C$$

$$x \odot y = (8n) \odot (8l) = (8n) + (8l) - \frac{(\cancel{8}n)(8l)}{\cancel{8}}$$

$$= 8n + 8l - 8nl = 8(\underbrace{n + l - nl}_{\in \mathbb{Z}}) \in C.$$

PORTANTO, $(C, *, \odot)$ É UM SUBANEL.

#