

Funções

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Uma função

Definição

Uma **função** $\underline{f}: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$,

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B ,

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

i) Para todo $x \in A$,

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.



Definição

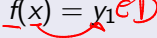
Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$  $y_1 \in B$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2 \in B$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com y_1 ,

Definição

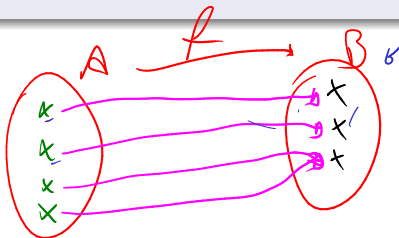
Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$,

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.



Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de imagem

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio**

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$.

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio**

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f .

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\underline{\underline{\text{Im}(f) =}}$$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{ \underline{f(x)} \}$$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid \underline{x \in A}\}$$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = \underline{y_1}$ e $f(x) = \underline{y_2}$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.
- ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

é chamado **imagem** de f .

Definição

Uma **função** $f: A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B , é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f .

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\text{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f . O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

é chamado **imagem** de f .

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

$$f: A \rightarrow B$$

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Quais das seguintes relações são funções?

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Quais das seguintes relações são funções?

a) $R_1 = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7)\}$

b) $R_2 = \{(0, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

c) $R_3 = \{(0, 4), (1, 5), (2, 7), (3, 8)\}$

d) $R_4 = \{(0, 5), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

SOLUÇÃO: a) $R_1 = \{(\underline{0}, 5); (\underline{1}, 6); (\underline{2}, 7)\}$

NÃO É FUNÇÃO POIS $3 \in A$ E

3 NÃO POSSUI UMA IMAGEM,

OU SÉTA, NÃO EXISTE UM PAR

ORDENAÇÃO $(3, y)$, com $y \in B$,

TAL QUE $(3, y) \in R_1$.

b) $R_2 = \{(a, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

NÃO É FUNÇÃO POIS $(1, 5), (1, 6) \in R_2$

É NO ENTANTO, $5 \neq 6$.

$$\Rightarrow R_3 = \{ (0,4); (1,5); (2,7); (3,8) \}$$

É UMA FUNÇÃO POIS SATISFAZ

AS DUAS CONDIÇÕES DA DEFINI-

NIÇÃO DE FUNÇÃO.

$$d) R_4 = \{(0,5); (1,5); (2,6); (3,9)\}$$

É uma função pois SATISFAZ
A DEFINIÇÃO.

Exemplos

$$2) R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2\}$$

$$3) R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$4) R_7 = \{(\cancel{x}, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \underline{y = x^2}\}$$

$$x^2 = y_1, \quad x^2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

SOLUÇÃO: a) R_5 NÃO É FUNÇÃO

pois $(1, 1); (1, -1) \in R_5$ UMA

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists! y \in \mathbb{Z}$

$$1^2 = 1^2$$

$$1^2 = (-1)^2$$

E NO ENTANTO $1 \neq -1$. ASSIM

FALHA A CONDIÇÃO (ii) DA

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.

b) R_b NÃO É FUNÇÃO pois

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) ; \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \in R_b \quad \text{UMA VEZ}$$

OU

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

E NO ENTANTO $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo

FALTA A CONDIÇÃO (ii) DA
DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.

c) R_T é uma função pois satis-

FAZ AS DUAS CONDIÇÕES DA

DEFINIÇÃO.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

i) Dizemos que f é **injetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

i) Dizemos que f é **injetora** se dados x_1 ,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) =$

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $\underline{x_1}, x_2 \in A$ tais que $\underline{f(x_1)} = \underline{f(x_2)}$, então $\underline{x_1 = x_2}$.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados x_1 ,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- iii) Dizemos que f é **bijetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- iii) Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- iii) Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- iii) Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora** simultaneamente.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função.

- i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- iii) Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora** simultaneamente.

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras:

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras:

1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ ✓

$y \in \mathbb{Z}$, Existe $x \in \mathbb{Z}$ TAL QUE

$f(x) = y$?

$$3x + 1 = y$$

$$3x = \underline{y - 1}$$

$y = 0$
 $-\frac{1}{3}$
 $x = \frac{y - 1}{3} \notin \mathbb{Z}$

SOLV (A): SETAM $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ TAIS
AVE

$$f(x_1) = f(x_2) \dots x_1 \stackrel{?}{=} x_2$$

ASSIM

$$3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$$

$$\underbrace{3}_{\uparrow} (\underbrace{x_1 - x_2}_{\uparrow}) = 0$$

DAÍ $x_1 - x_2 = 0$, ISTO É, $x_1 = x_2$.

PORTANTO, f É UMA FUNÇÃO INJE-
TORA.

AGORA f NÃO É SOBREJETORA

POIS PARA $y = 0 \in \mathbb{Z}$ NÃO EXISTE

$x \in \mathbb{Z}$ TAL QUE
 $f(x) = 0$

UMA $v \in \mathbb{Z}$ QUE
 $3x + 1 = 0$

$$3x = -1$$

É ESSA EQUAÇÃO NÃO TEM

SOLUÇÃO EM \mathbb{Z} .

$$\otimes = \cdot \quad ; \quad \oplus = + \quad \mathbb{Z}_m$$

Exemplos

2) $g: \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{2}\bar{x} + \bar{3}, \bar{4}\bar{y} + \bar{5})$

$(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$, \exists isto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ T. q

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$$

$$(\bar{2}\bar{x} + \bar{3}, \bar{4}\bar{y} + \bar{5}) = (\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{2}\bar{x} + \bar{3} = \bar{a} \quad \oplus \quad \bar{2} \\ \bar{4}\bar{y} + \bar{5} = \bar{b} \quad \oplus \quad \bar{4} \end{array}$$

$$\bar{2}\bar{x} = \bar{a} + \bar{2} \quad \times \quad \bar{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{3}\bar{a} + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{4}\bar{y} = \bar{b} + \bar{4} \quad \times \quad \bar{7} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \bar{7}\bar{b} + \bar{1} \in \mathbb{Z}_9$$

SOLU (50): SE TAM $(\bar{x}_1, \bar{y}_1); (\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$

Tais $Q \cup \bar{e}$

$$g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = g(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

Assim

$$\begin{aligned} & \overbrace{(2\bar{x}_1 + \bar{3}, 4\bar{y}_1 + \bar{5})} = \overbrace{(2\bar{x}_2 + \bar{3}, 4\bar{y}_2 + \bar{5})} \\ & \underbrace{(2\bar{x}_1 + \bar{3}, 4\bar{y}_1 + \bar{5})} = \underbrace{(2\bar{x}_2 + \bar{3}, 4\bar{y}_2 + \bar{5})} \end{aligned}$$

DA_i

$$Z_5, \quad \overline{2} \overline{x}_1 + \underline{\underline{\overline{3}}} = \overline{2} \overline{x}_2 + \underline{\underline{\overline{3}}} \quad + \overline{2}$$

$$Z_9, \quad \overline{4} \overline{y}_1 + \underline{\underline{\overline{5}}} = \overline{4} \overline{y}_2 + \underline{\underline{\overline{5}}} \quad + \overline{4}$$

com ISSO DDT E MOS

$$\mathbb{Z}_5 \quad \bar{2} \bar{x}_1 + \underbrace{\bar{3} + \bar{2}}_{\text{"}\bar{5}=\bar{0}\text{"}} = \bar{2} \bar{x}_2 + \underbrace{\bar{3} + \bar{2}}_{\text{"}\bar{5}=\bar{0}\text{"}}$$

$$\mathbb{Z}_5 \quad \bar{4} \bar{y}_1 + \underbrace{\bar{5} + \bar{4}}_{\bar{5}=\bar{0}} = \bar{4} \bar{y}_2 + \underbrace{\bar{5} + \bar{4}}_{\text{"}\bar{5}=\bar{0}\text{"}}$$

done

$$\mathbb{Z}_5 \quad \textcircled{\bar{2}} \bar{x}_1 = \bar{2} \bar{x}_2 \quad \times \bar{3}$$

$$\mathbb{Z}_5 \quad \bar{4} \bar{y}_1 = \bar{4} \bar{y}_2 \quad \times \bar{4}$$

Assim

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2$$

ou seja, $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$

PONTIANTO g È INJETTORE.

AGONA DADO $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ TAME

$(\bar{3}\bar{a} + \bar{1}, \bar{7}\bar{b} + \bar{1}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$. ASSIM

$$g(\bar{3}\bar{a} + \bar{1}, \bar{7}\bar{b} + \bar{1}) = \bar{2}(\bar{3}\bar{a} + \bar{1}) + \bar{3}, \bar{4}(\bar{7}\bar{b} + \bar{1}) + \bar{5}$$

$$= (\bar{a} + \underbrace{\bar{z} + \bar{s}}_{\text{"}\bar{s}=\bar{0}\text{"}}, \bar{b} + \underbrace{\bar{y} + \bar{t}}_{\text{"}\bar{t}=\bar{0}\text{"}}) = \underline{(\bar{a}, \bar{b})}.$$

Logo g é SOBREJETORA.

PONTANTO g é BIJETORA.

Exemplos

3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$

$y \in \mathbb{R}$: existe $x \in \mathbb{R}$ t. a.
 $h(x) = y$?

$$x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y} \\ y \geq 0$$

SOLUÇÃO: h NÃO É INJETORA

Pois TOMAMOS $x_1 = -1$ E $x_2 = 1$

TEMOS

$$\underline{h(x_1)} = (-1)^2 = 1 = \underline{h(x_2)}$$

E NO ENTANTO $x_1 \neq x_2$.

h NÃO É SOBREJETORA POIS,

POA EXEMPLO, PARA $y = -2 \in \mathbb{R}$

NÃO EXISTE $x \in \mathbb{R}$ TAL QUE

$$\underline{x^2 = -2} \quad h(x) = -2$$