Funções - Composição

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

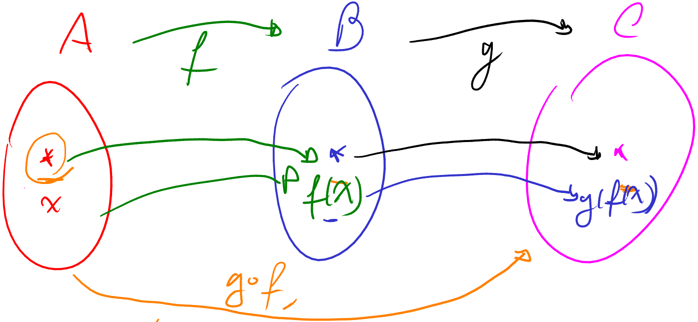
Sejam $f : A \to B$

Definição

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta***

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f*

Definição

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f$

Definição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f : A \to C$

Definição

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f: A \to C$ *tal que*

Definição

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \to C$ tal que*
$(g \circ f)(x)$

Definição

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f: A \to C$ *tal que*
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Definição

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f: A \to C$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *para todo* $x \in A$*.*

Definição

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f: A \to C$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *para todo* $x \in A$.

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

1) *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

AQUI EXISTE $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DADA POR

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

AQUI TAMBÉM PODEMOS DEFINIR

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, DADO POR

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

$= x^2 + 2x + 1.$

OBSERVE QUE NEM SEMPRE

$g \circ f$ E $f \circ g$ ESTÃO DEFINIDAS.

MAS MESMO QUANDO $f \circ g$ E $g \circ f$

EXISTEM, PODE OCORRER DE

$(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$ e $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}^*_+$ *e* $g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$

Exemplos

2) $f : \boxed{\mathbb{R}_-} \to \boxed{\mathbb{R}_+^*}$ e $g : \boxed{\mathbb{R}_+^*} \to \boxed{\mathbb{R}}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \ln x$.

→ $g \circ f$ EXISTE; $f \circ g$ NÃO ESTÁ DEFINIDA.

NESSE CASO $g \circ f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ E

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \ln(x^2+1).$$

Proposição

Se $f : A \to B$

$g \circ f$

Proposição

Se $f : A \to \boxed{B}$ *e* $g : \boxed{B} \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *são funções injetoras,*

Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *são funções injetoras, então* $g \circ f$:

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$

$f: A \to B$ É INJETORA SE DADOS $x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE $f(x_1) = f(x_2)$ ISSO IMPLICA EM $x_1 = x_2$.

MAT-UnB

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

$x_1, x_2 \in A$; $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \cdots x_1 \overset{?}{=} x_2$

$g(\underbrace{f(x_1)}_{y_1}) = g(\underbrace{f(x_2)}_{y_2})$ $\quad g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

PROVA: SEJAM $\boxed{x_1, x_2 \in A}$ TAIS QUE

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

ASSIM, POR DEFINIÇÃO DE COMPOSTA,

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

MAS g É INJETORA, DAÍ

$$f(x_1) = f(x_2).$$

MAS f TAMBÉM É INJETORA, LOGO

$$\boxed{x_1 = x_2}.$$

PORTANTO, $g \circ f$ É INJETORA.

#

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$

Proposição

Se $f : A \to \boxed{B}$ e $g : \boxed{B} \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras,

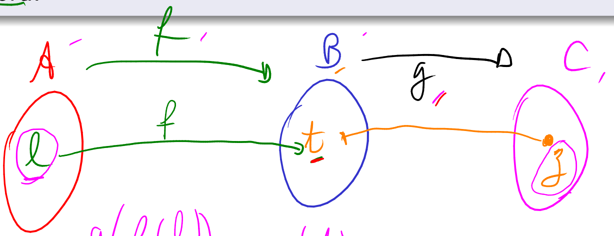
Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *são funções sobrejetoras, então* $g \circ f : A \to C$

$f: A \to B$ É SOBREJETORA SE PARA TODO $y \in B$, EXISTE $x \in A$ TAL QUE $f(x) = y$.

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.



$g(f(l)) = g(t) = z$

PROVA: SEJA $\boxed{z \in C}$. COMO g É SOBREJETORA, EXISTE $t \in B$ TAL QUE

$$g(t) = z.$$

MAS f É SOBREJETORA, LOGO EXISTE

$l \in A$ TAL QUE

$$f(l) = t.$$

DAÍ,

$$(g \circ f)(l) = g(f(l)) = g(t) = z$$

PORTANTO, $g \circ f$ É SOBREJETORA.

#