Homomorfismo de Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

3 de novembro de 2020

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f: G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) =$$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

para todos $x, y \in G$.

Observação:

Sejam $(G, *)$

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$,

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo.*

1) Se $G = H$*, neste caso* $f\colon G \to G$

Observação:

Sejam $(G,*)$, $(H,\triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora,*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f: G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que f é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f\colon G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f\colon G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se* $f\colon G \to H$ *é uma função sobrejetora,*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f: G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se* $f: G \to H$ *é uma função sobrejetora, então dizemos que* f *é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G,*)$, $(H,\triangle)$ *grupos e* $f\colon G\to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G=H$*, neste caso* $f\colon G\to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f\colon G\to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se* $f\colon G\to H$ *é uma função sobrejetora, então dizemos que* f *é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*
4) *Se* $f\colon G\to H$ *é uma função bijetora,*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f: G \to H$ um homomorfismo.

1) *Se $G = H$, neste caso $f: G \to G$ é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se $f: G \to H$ é uma função injetora, então dizemos que f é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se $f: G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que f é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*
4) *Se $f: G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que f é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f: G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se* $f: G \to H$ *é uma função sobrejetora, então dizemos que* f *é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*
4) *Se* $f: G \to H$ *é uma função bijetora, então dizemos que* f *é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*
5) *Se* $f: G \to G$ *é uma função bijetora,*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*
2) *Se* $f: G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*
3) *Se* $f: G \to H$ *é uma função sobrejetora, então dizemos que* f *é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*
4) *Se* $f: G \to H$ *é uma função bijetora, então dizemos que* f *é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*
5) *Se* $f: G \to G$ *é uma função bijetora, então dizemos que* f *é um* ***automorfismo*** *de grupos.*

Exemplos

1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

Exemplos

1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(x) = i^x$

Exemplos

1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(x) = i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$

Exemplos

1) A função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ *dada por* $f(x)=i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z},+)$ *em* $(\mathbb{C},\cdot)$.

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) A função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}, +)$.

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo.

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$*.*

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,*

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado*

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso.*

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$
$$f_z(x) = z^{-1} * x * z,$$

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$
$$f_z(x) = z^{-1} * x * z,$$

para todo $x \in G$*, é um isomorfismo de grupos.*

Proposição

Sejam $(G, *)$,

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H,

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H*, respectivamente.*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H, *respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H*, respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

ii) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H*, respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

ii) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ *para todo* $x \in G$.

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos.

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$ é um subgrupo de G.