

Anéis - Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade**

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade**

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos de um anel A

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$, então x e y são chamados de

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$, então x e y são chamados de **divisores próprios de zero**.

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos $x, y \in A$, se

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$, então x e y são chamados de **divisores próprios de zero**.

Exemplos

1) *Os anéis* \mathbb{Z} ,

Exemplos

1) *Os anéis* \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ,

Exemplos

1) *Os anéis* \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ,

Exemplos

1) *Os anéis* \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}

Exemplos

1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*

Exemplos

1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*

2) *Em geral \mathbb{Z}_m*

Exemplos

- 1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*
- 2) *Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade,*

Exemplos

- 1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*
- 2) *Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade, por exemplo, em \mathbb{Z}_4 ,*

Exemplos

- 1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*
- 2) *Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade, por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $\bar{2} \neq \bar{0}$,*

Exemplos

1) Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.

2) Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade, por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $\bar{2} \neq \bar{0}$, no entanto

$$\bar{2} \otimes \bar{2}$$

Exemplos

1) *Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.*

2) *Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade, por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $\bar{2} \neq \bar{0}$, no entanto*

$$\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{4}$$

Exemplos

1) Os anéis \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} são anéis de integridade.

2) Em geral \mathbb{Z}_m não é anel de integridade, por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $\bar{2} \neq \bar{0}$, no entanto

$$\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}.$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m ,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \overline{nk} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam \bar{x} ,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$. Assim, \mathbb{Z}_m é anel de integridade

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$. Assim, \mathbb{Z}_m é anel de integridade se, e somente se,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$. Assim, \mathbb{Z}_m é anel de integridade se, e somente se, m é primo.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em \mathbb{Z}_m , $\bar{n} \neq \bar{0}$ e $\bar{k} \neq \bar{0}$ e no entanto $\bar{n} \otimes \bar{k} = \bar{m} = \bar{0}$. Logo, se m não é primo, então \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$. Daí $p \mid xy$. Logo $p \mid x$ ou $p \mid y$. Portanto, $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$. Assim, \mathbb{Z}_m é anel de integridade se, e somente se, m é primo.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal**

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

i) para todos $x, y \in I$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I é um **ideal trivial**.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:

- i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.
- ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I é um **ideal trivial**.

Exemplos

1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z}$$

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$.

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

- 2) No anel \mathbb{Z}_p ,

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação.
Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

- 2) No anel \mathbb{Z}_p , onde p é um número primo,

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

- 2) No anel \mathbb{Z}_p , onde p é um número primo, os únicos ideais são os triviais: $\{\bar{0}\}$

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

- 2) No anel \mathbb{Z}_p , onde p é um número primo, os únicos ideais são os triviais: $\{\bar{0}\}$ e \mathbb{Z}_p .

Exemplos

- 1) Considere no anel \mathbb{Z} as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de \mathbb{Z} .

- 2) No anel \mathbb{Z}_p , onde p é um número primo, os únicos ideais são os triviais: $\{\bar{0}\}$ e \mathbb{Z}_p .

Proposição

Seja A um anel comutativo

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A .

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

i) $0_A \in I$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

- i) $0_A \in I$.*
- ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.*

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

- i) $0_A \in I$.*
- ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.*
- iii) Se $1_A \in I$,*

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

- i) $0_A \in I$.*
- ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.*
- iii) Se $1_A \in I$, então $I = A$.*

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A . Então:

- i) $0_A \in I$.*
- ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.*
- iii) Se $1_A \in I$, então $I = A$.*

Prova:

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de

Exemplos

i) *Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ são:*

Exemplos

i) *Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ são:*

$$I_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ são:

$$I_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

$$I_2 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ são:

$$I_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

$$I_2 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$$

Definição

Seja I um ideal

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a** y

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I**

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x **é congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.

Proposição

A congruência módulo I

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$,

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x é **congruente a y módulo I** quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Prova:

Seja $y \in A$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y)$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo,
 $x = y + t$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) =$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$)

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

*Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .
Denotamos por*

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .

Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .

Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .

Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

*o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de **quociente do anel A pelo ideal I** .*

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I .

Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

*o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de **quociente do anel A pelo ideal I** .*

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade*

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$*

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.*

Exemplos

- 1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

Exemplos

- 1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*
- i) Dado $x \in A$:*

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) =$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} =$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1}$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I_1\}$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.
Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A .

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A .

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$,

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$ temos $x \in C(0_A)$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$ temos $x \in C(0_A)$ logo existe uma única

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$ temos $x \in C(0_A)$ logo existe uma única classe de equivalência

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$ temos $x \in C(0_A)$ logo existe uma única classe de equivalência

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, para todo $x \in A$ temos $x \in C(0_A)$ logo existe uma única classe de equivalência

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z}

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$

Exemplos

2) *Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} .*

Exemplos

2) *Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim*

Exemplos

2) *Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
Logo $x \equiv y \pmod{I}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $x \equiv y \pmod{I}$ se, e só se,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $x \equiv y \pmod{I}$ se, e só se, $m \mid (x - y)$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $x \equiv y \pmod{I}$ se, e só se, $m \mid (x - y)$. Portanto,

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \mathbb{Z}_m.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de \mathbb{Z} são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de \mathbb{Z} . Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $x \equiv y \pmod{I}$ se, e só se, $m \mid (x - y)$. Portanto,

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \mathbb{Z}_m.$$

Agora seja I ideal

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} =$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) =$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= \end{aligned}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= (xy) + I\end{aligned}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= (xy) + I\end{aligned}$$

para $x + I$,

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= (xy) + I\end{aligned}$$

para $x + I, y + I \in \frac{A}{I}$.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma \oplus e um produto \otimes em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= (xy) + I\end{aligned}$$

para $x + I, y + I \in \frac{A}{I}$.

Verifiquemos que a soma

Verifiquemos que a soma e o produto

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$\begin{aligned} (x_1 + I) \oplus (y_1 + I) &= (x_1 + y_1) + I \\ (x_2 + I) \oplus (y_2 + I) &= (x_2 + y_2) + I \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$

$$(x_2 + I) \oplus (y_2 + I) = (x_2 + y_2) + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\frac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I, x_2 + I, y_1 + I, y_2 + I \in \frac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$

$$(x_2 + I) \oplus (y_2 + I) = (x_2 + y_2) + I$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$.

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I,$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I, \text{ ou seja}$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I, \text{ ou seja}$$

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo

$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 - y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo

$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Agora,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I)\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja,

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$.

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I)$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I \\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 &\in I \\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 &\in I \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 &\in I,\end{aligned}$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade.

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A ,

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade.

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ e a unidade do produto

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ e a unidade do produto é a classe $1_A + I$.

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A , então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes \right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ e a unidade do produto é a classe $1_A + I$.