Isomorfismos de Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

11 de novembro de 2020

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$.

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$. Aqui

$$S_2 = \left\{ id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \right.$$

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$. Aqui

$$S_2 = \left\{ id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos

Temos

G

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Temos

G

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

$\cdot$	id	f
id	id	f
f	f	id

Temos

G

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

$\cdot$	id	f
id	id	f
f	f	id

Defina $\sigma : G \to S_2$ por

Temos

G

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

$\cdot$	id	f
id	id	f
f	f	id

Defina $\sigma : G \to S_2$ por

$$\sigma(1) = id$$

Temos

G

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

$\cdot$	id	f
id	id	f
f	f	id

Defina $\sigma : G \to S_2$ por

$$\sigma(1) = id$$

$$\sigma(-1) = f.$$

Da definição de σ

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1)\circ\sigma(1) = id\circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1\cdot 1)$$

$$\sigma(1)\circ\sigma(-1) = id\circ f = f = \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1)\circ\sigma(1) = id\circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1\cdot 1)$$

$$\sigma(1)\circ\sigma(-1) = id\circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1\cdot -1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(1) = f\circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1\cdot 1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1)\circ\sigma(1) = id\circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1\cdot 1)$$

$$\sigma(1)\circ\sigma(-1) = id\circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1\cdot -1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(1) = f\circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1\cdot 1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(-1) = f\circ f = id$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) =$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x,\ y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Como σ também é bijetora,

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1)\circ\sigma(1) = id\circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1\cdot 1)$$

$$\sigma(1)\circ\sigma(-1) = id\circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1\cdot -1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(1) = f\circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1\cdot 1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(-1) = f\circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1\cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x\cdot y) = \sigma(x)\circ\sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = id \circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = id \circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f \circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f \circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2. Nesse caso, dizemos que G e S_2 são grupos isomorfos

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1)\circ\sigma(1) = id\circ id = id = \sigma(1) = \sigma(1\cdot 1)$$

$$\sigma(1)\circ\sigma(-1) = id\circ f = f = \sigma(-1) = \sigma(1\cdot -1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(1) = f\circ id = f = \sigma(-1) = \sigma(-1\cdot 1)$$

$$\sigma(-1)\circ\sigma(-1) = f\circ f = id = \sigma(1) = \sigma(-1\cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x\cdot y) = \sigma(x)\circ\sigma(y)$ para todos $x,\ y\in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2.

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2. Nesse caso, dizemos que G e S_2 são grupos isomorfos e denotamos isso escrevendo $G\cong S_2$.

Definição

Sejam $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *grupos.*

Definição

Sejam $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *grupos. Se existe* $f : G \to H$ *um isomorfismo,*

Definição

Sejam $(G, *)$ e $(H, \triangle)$ grupos. Se existe $f\colon G \to H$ um isomorfismo, diremos que G e H são ***grupos isomorfos***

Definição

Sejam $(G, *)$ e $(H, \triangle)$ grupos. Se existe $f\colon G \to H$ um isomorfismo, diremos que G e H são ***grupos isomorfos*** *e denotaremos esse fato escrevendo $G \cong H$.*

Definição

Sejam $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *grupos. Se existe* $f\colon G \to H$ *um isomorfismo, diremos que* G *e* H *são* ***grupos isomorfos*** *e denotaremos esse fato escrevendo* $G \cong H$*.*

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f\colon G \to H$ é um isomorfimos de grupos, então

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f\colon G \to H$ é um isomorfimos de grupos, então G é comutativo se, e somente se, H é comutativo.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f: G \to H$ é um isomorfimos de grupos, então G é comutativo se, e somente se, H é comutativo.

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ *e* S_3

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ *e* S_3 *não são isomorfos pois* $\mathbb{Z}_6$ *é comutativo*

Exemplos

1) *Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.*

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.

2) Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \cdots, 6\}$.

Exemplos

1) *Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.*

2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \cdots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Exemplos

1) *Os grupos* $\mathbb{Z}_6$ *e* S_3 *não são isomorfos pois* $\mathbb{Z}_6$ *é comutativo e* S_3 *não é comutativo.*

2) *Considere o grupo* S_6 *das permutações em* $\{1, 2, \cdots, 6\}$*. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$*.*

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.

2) Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \cdots, 6\}$. Tome

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$,

Exemplos

1) *Os grupos* $\mathbb{Z}_6$ *e* S_3 *não são isomorfos pois* $\mathbb{Z}_6$ *é comutativo e* S_3 *não é comutativo.*

2) *Considere o grupo* S_6 *das permutações em* $\{1, 2, \cdots, 6\}$. *Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. *Então* $H \cong \mathbb{Z}_6$, *onde* $\phi : H \to \mathbb{Z}_6$ *dada por* $\phi(f^k) = \overline{k}$

Exemplos

1) *Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.*

2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \cdots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$, onde $\phi : H \to \mathbb{Z}_6$ dada por $\phi(f^k) = \overline{k}$ é um isomorfimo de grupos.

Exemplos

1) Os grupos $\mathbb{Z}_6$ e S_3 não são isomorfos pois $\mathbb{Z}_6$ é comutativo e S_3 não é comutativo.

2) Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \cdots, 6\}$. Tome

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$, onde $\phi : H \to \mathbb{Z}_6$ dada por $\phi(f^k) = \overline{k}$ é um isomorfimo de grupos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \to H$ é um isomorfimos de grupos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f\colon G \to H$ é um isomorfimos de grupos. Então $x \in G$

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f : G \to H$ é um isomorfimos de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \to H$ é um isomorfimos de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$ se, e somente se, $o(f(x)) = h$.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \to H$ é um isomorfimos de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$ se, e somente se, $o(f(x)) = h$.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:
Caso 1: $a^r \neq a^s$

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:
Caso 1: $a^r \neq a^s$ sempre que $r \neq s$.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:
Caso 1: $a^r \neq a^s$ sempre que $r \neq s$.

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 1****,*

Proposição

*Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**, então a função $f : \mathbb{Z} \to G$ por $f(r) = a^r$*

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 1****, então a função $f : \mathbb{Z} \to G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfimo de grupos.*

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 1****, então a função $f : \mathbb{Z} \to G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfimo de grupos. Ou seja, $G \cong \mathbb{Z}$.*

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 1***, *então a função $f : \mathbb{Z} \to G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfimo de grupos. Ou seja, $G \cong \mathbb{Z}$.*

Caso 2: $a^r = a^s$

Caso 2: $a^r = a^s$ para algum par de inteiros distintos, r e s.

Caso 2: $a^r = a^s$ para algum par de inteiros distintos, r e s.

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 2****.*

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 2****. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que*

Proposição

Seja $G = [a]$ *um grupo cíclico que cumpre a condição do* ***Caso 2****. Então existe um inteiro* $m > 0$ *tal que*

i) $a^m = e$

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 2****. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que*

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$, *sempre que* $0 < r < m$.

Proposição

Seja $G = [a]$ *um grupo cíclico que cumpre a condição do* ***Caso 2***. *Então existe um inteiro* $m > 0$ *tal que*

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$, *sempre que* $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G *é* m

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do ***Caso 2****. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que*

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$, *sempre que* $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G é m e

$$G = [a] = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}.$$

Proposição

Seja $G = [a]$ *um grupo cíclico que cumpre a condição do* ***Caso 2****. Então existe um inteiro* $m > 0$ *tal que*

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$*, sempre que* $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G *é* m *e*

$$G = [a] = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}.$$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m.

Corolário

Seja $G = [a]$ *um grupo cíclico de ordem finita igual a m. Então a função* $f : \mathbb{Z}_m \to G$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m. Então a função $f : \mathbb{Z}_m \to G$ dada por $f(\overline{x}) = a^x$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m. Então a função $f : \mathbb{Z}_m \to G$ dada por $f(\overline{x}) = a^x$ é um isomorfimo de grupos.