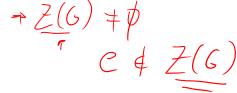


Exercício

Seja \underline{G} um grupo com notação multiplicativa. Considere o subconjunto $Z(G) = \{ \underline{x} \in G \mid x\underline{h} = \underline{h}\underline{x}, \text{ para todo } \underline{h} \in \underline{G} \}$. Mostre que:

(a) Z(G) é um subgrupo de G.

- 2(6) (own-
- (b) G é abeliano se, e somente se, Z(G) = G.





HEG É SUBCRUPO SE. Ji) # + \$ ii) x eH, PAM TOOD X eH (iiv) xyeH, PAM TOOS x, yeH)

re=x=ex Hx=6 xc=ex, YxE6 SOLUCIO DENOTE PON e DECE-MENTO NEUTRO DE 6.

a) como e é o ELENENTO MEU.

MO DE G E

 $\chi e = \chi = e \chi$

$$\chi^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$$
; $\chi^{-1} h = h \cdot \chi^{-1}$; $\forall h \in G$

RAMA TODO $\chi \in G$, $\mathcal{Z}(\pi)$
 $C \in \mathcal{Z}(G)$. LOGO, $\mathcal{Z}(G) \neq \emptyset$.

AGOM, SETA $\chi \in \mathcal{Z}(G)$. OAI

(ab) = ba; (b) = b

PAM TOOD
$$h \in G$$
. Assim
$$x^{-1}h = x^{-1}(h^{-1})^{-1} = (h^{-1}x)^{-1}$$

 $= (\chi \, \text{k}^{-1})^{-1} = (\text{k}^{-1})^{-1} \, \chi^{-1} = [\text{k} \, \chi^{-1}]$ PAM TODO LE G. LOGO, $\chi \in Z(G)$.

A 60 M, SEJAM $\chi, y \in \underline{\mathcal{Z}(G)}$

A, Xh-hX+

 $\rightarrow \chi h = h \chi +$

-yh=hy

PAM TODO LEG.

ASSIM

$$(xy)h = x(yh) = (x(hy) = (xh)y$$

= (h(x)y) = h(xy)

PAM TOOO LEG. 2060, αy € Z(G).

b) SUPONHA QUE G E ABELIANO $\chi y = \chi \chi$

PAM TODOS $x, y \in G$. Pon DE
FINI (10) $Z(G) \subseteq G$. ASSIN $x \in G$.

COMO $G \in ABELIANO$,

PAM TODO LEG. OU SEJA,

 $\chi \in Z(6)$, 1060, Z(G) = G.

SUPONHA QUE Z(G)=G. A 60 M

SEJAM X (y) EG = Z(G). DAÍ

Por DEFINIÇÃO DE Z(G) como

$$\chi \in \mathcal{Z}(G)$$
, $C \sim T \stackrel{\sim}{A} \stackrel{\sim}{\rightarrow}$

X.Y=YX,OU SEJA 6 É ABELIANO. #