$\underline{e \in G}$:

$\rightarrow x, y \in \boxed{\underline{N(a)}}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} xy \in N(a) \\ y^{-1} \in N(a) \end{cases}$

$\begin{cases} xa = ax \\ ya = ay \end{cases}$

$ea \overset{?}{=} ae$

SEMANA 18:

6) $f: G \to L$ HOMOMORFISMO SOBREJETOR

H SUBGRUPO NORMAL DE G

$f(H)$ É SUBGRUPO NORMAL DE L.

$$y f(H) = f(H) y \quad , \forall y \in L$$

$$y f(H) y^{-1} \overset{?}{\subseteq} f(H) \quad ; \forall y \in L.$$

SE $t \in f(H)$. DAÍ EXISTE $h \in H$ TAL QUE
$f(h) = t$.

AGORA COMO f É SOBREJETOR, PARA TODO
$y \in L$, EXISTE $x \in G$ TAL QUE

$$f(x) = y.$$

MAS, H É SUBGRUPO NORMAL DE G, LOGO
$xHx^{-1} = H$ PARA TODO $x \in G$. ASSIM

$h = xgx^{-1}$ com $g \in \underline{H}$. Daí,

$$f(h) = f(xgx^{-1})$$

$$\|$$

$$t = f(x)\underbrace{f(g)}_{\substack{\cap \\ f(H)}}f(x)^{-1}$$

$$\cap$$

$$f(H)$$

$$\cup$$

$$t \in y\,f(H)\,y^{-1}$$

Logo, $f(H) \subseteq y\,f(H)\,y^{-1}$.

AGORA SEJA $t \in y f(H) y^{-1}$. LOGO EXISTE

$\alpha \in f(H)$ TAL QUE

$$t = y \alpha y^{-1}$$

COMO $\alpha \in f(H)$, EXISTE $z \in H$ COM

$$f(z) = \alpha.$$

$$\Rightarrow t = y f(z) y^{-1}$$

NOVAMENTE USANDO QUE f É SOBREJETORA EXISTE $x \in G$ TAL QUE $f(x) = y$. DAÍ

$$t = f(x) f(g) f(x)^{-1}$$

$$t = f(\underline{x g x^{-1}}).$$

COMO H É NORMAL E $g \in H$ ENTÃO $x g x^{-1} \in H$. OU SEJA, $t = f(\underline{x g x^{-1}}) \in f(H)$

LOGO, $y f(H) y^{-1} \subseteq f(H)$.

PORTANTO

$$y f(H) y^{-1} = f(H)$$

PARA TODO $y \in L$. OU SEJA, $f(H)$ É NORMAL EM L. #

LISTA 16:

3) $p > 1$ NÚMERO PRIMO.

$\Rightarrow$ a) $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, SE $\bar{a} \neq \bar{0}$, ENTÃO $(\bar{a})^{p-1} = \bar{1}$.

b) $a \in \mathbb{Z}$, ENTÃO $\underbrace{a^p \equiv a}$ $(\mathrm{mod}\, p)$.

$\mathbb{Z}_p^*$ É GRUPO MULTIPLICATIVO

$o(\mathbb{Z}_p^*) = p - 1$ ✓

$|G| = n \; ; \quad x \in G, \quad x^n = e.$

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_p, \quad \bar{a} \neq \bar{0}$

$(\bar{a})^{p-1} = \bar{1}$

b) $a = 0 \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$

$a \neq 0 \Rightarrow \bar{a} \neq \bar{0}; \; \bar{a} \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow \underline{(\bar{a})^{p-1} = \bar{1}}$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \times (a) \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$. #

SEMANA 12:

9) H SUBGRUPO DE G

$\Rightarrow \mathcal{P} = \{aH;\ a \in G\}$ $\quad b^{-1}H \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \mathcal{Q} = \{Hb,\ b \in G\}$

$f: \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$; $f(aH) = Ha^{-1}$.

SEJA $t \in \mathcal{Q}$, EXISTE $x \in \mathcal{P}$, $f(x) = t$.

$t = Hb$; $b \in G \Rightarrow b^{-1} \in G$

Тоже $x = b^{-1}H \in \underline{P}$, ОА:

$$f(x) = f(b^{-1}H) = H(b^{-1})^{-1} = Hb = \underline{t}$$