Subgrupos Normais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

16 de novembro de 2020

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset,$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo, então **multiplicação de subconjuntos** também será comutativa.

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
\cdot & e & a & b & c \\ \hline
e & e & a & b & c \\ \hline
a & a & e & c & b \\ \hline
b & b & c & e & a \\ \hline
c & c & b & a & e \\ \hline
\end{array}.$$

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Se $A = \{e, a\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Se $A = \{e, a\}$ *e* $B = \{b, c\}$,

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein***.

Se $A = \{e, a\}$ *e* $B = \{b, c\}$, *então:*

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais.

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 0\}$$

então:

Definição

Um subgrupo N

Definição

Um subgrupo N de um grupo G

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal***

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****)*

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$,*

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$, vale*

$$xN$$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$, vale*

$$xN = Nx.$$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$, vale*

$$xN = Nx.$$

Denotaremos esse fato escrevendo $H \trianglelefteq G$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ]$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$*. Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\, f \,] = \{Id, f, f^2\}$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ] = \{Id, f, f^2\}$. *Então* H *é um subgrupo normal de* G.

Exemplos

(2) Se G é um grupo abeliano,

Exemplos

(2) Se G é um grupo abeliano, então todo subgrupo de G é normal.

Exemplos

(3) Seja H um subgrupo de G

Exemplos

(3) Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais.

Exemplos

(3) Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais. Então H é um subgrupo normal de G.

Proposição

Seja G um grupo.

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G,

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G, então $H \cap L$

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G, então $H \cap L$ é um subgrupo normal de G.

Proposição

Seja N um subgrupo normal

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G.

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN)$$

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$