Grupo Quociente

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

17 de novembro de 2020

$(G, \cdot)$ GRUPO : $xN = Nx \quad \forall x \in G$

$\rightarrow (xN)(yN) = (xy)N$

Seja N um subgrupo normal

$\frac{G}{N}$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN)$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$a + N$

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

para todos $a, b \in N$.

$$\begin{cases} aN = xN \\ bN = yN \end{cases}$$

SEJAM $a, b, x, y \in G$ TAIS QUE

$aN = xN$

$bN = yN$

QUEREMOS MOSTRAR QUE

$$(aN)(bN) = (xN)(yN)$$

AGORA

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

$$(xN)(yN) = (xy)N$$

$z \in (xy)\mathbb{N} \Leftrightarrow z = xy \cdot t, \quad t \in \mathbb{N}$

SEJA $z \in (ab)\mathbb{N}$. DAÍ

$z = ((a)(b)n), \quad n \in \mathbb{N}.$

ASSIM

$z = a(\underbrace{bn}_{\in b\mathbb{N} = y\mathbb{N}}) = a(yn_1)$

$\stackrel{?}{=} \mathbb{N}y$

MAS N É SUBGRUPO NORMAL,

LOGO, $yN = Ny$. ENTÃO

$$\boxed{z} = (a(n_2)y) = (\underbrace{a n_2}_{\in aN = xN}) y = (x(n_3)y)$$

$$= x(n_3 y) = x(y n_4) = \underbrace{(xy) n_4}_{xyN}$$

$t \in (ab)N$; $\to \underset{\underset{\underline{Nb}}{\shortparallel}}{bN} = y\underline{N}$ | $\underline{x}N = \underline{a}N$

DAÍ, $z = (xy)n_4$, ISTO É, $y \in (xy)N$.

AGORA SEJA $t \in (xy)N$. DAÍ

$$t = (xy)\underset{\underset{N}{\cap}}{n} = x(yn) = x(bn_1) = x(n_2 b)$$

$$= (xn_2)b = (an_3)b = a(\underset{\underset{Nb}{\cap}}{n_3 b}) =$$

$(ab)n$

$$= (ab)^{\shortparallel} n_4$$

DAÍ $t = (ab)n$, ISTO É, $t \in (ab)N$.

PORTANTO

$$(ab)N = (xy)N$$

$$(aN)(bN) \qquad (xN)(yN)$$

$$[(aN)(bN)](cN) = [(ab)N](cN)$$

$$= [(ab)c]N = [a(bc)]N =$$

$$= (aN)[(bc)N] = (aN)[(bN)(cN)].$$

Temos:

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (aN)[(bN)(cN)]$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é eN

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é eN e $(aN)^{-1} = (a^{-1})N$.

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G.

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições,

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente***

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N*

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N*

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N e da operação de multiplicação de conjuntos aplicadas aos elementos desse conjunto.*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$.

$1N = N = \{1, -1\}$

$iN = \{it \mid t \in N\} = \{i, -i\}$

LOGO N É UM SUBGRUPO NORMAL.

ASSIM PODEMOS CONSTRUIR O

GRUPO QUOCIENTE G/N. AQUI

$$\frac{G}{N} = \{N, iN\}$$

E

$\{1,-1\}$

$\parallel$

	$1N$	iN
$1N$	N	iN
iN	iN	N

4

Exemplos

(2) Seja $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

Exemplos

(2) *Seja* $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ *e* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.

COMO $\mathbb{Z}_6$ É ABELIANO, ENTÃO

H É UM SUBGRUPO NORMAL.

AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

SÃO

$\bar{0} + H = H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$\bar{1} + H = \{\bar{1} + t \mid t \in H\} = \{\underline{\bar{1}, \bar{4}}\}$

$\bar{2} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

DA i

$\{\bar{0},\bar{3}\}$

$\|$

$$\mathbb{Z}_6/H = \{H, \bar{1}+H, \bar{2}+H\}$$

E

b

$\cdot$	H	$\bar{1}+H$	$\bar{2}+H$
H	H	$\bar{1}+H$	$\bar{2}+H$
$\bar{1}+H$	$\bar{1}+H$	$\bar{2}+H$	H
$\bar{2}+H$	$\bar{2}+H$	H	$\bar{1}+H$

Exemplos

(3) *Seja* $G = S_3$.

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$*. Já vimos que se tomamos*

$$Id = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}},$$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$a N = \{ a \circ t \mid t \in N \}$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$f \circ f \quad g \circ f \quad g \circ f \circ f$

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\,f\,]$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ] = \{Id, f, f^2\}$. QUE É NORMAL

COMO H É UM SUBGRUPO NOR-
MAL, PODEMOS DEFINIR O
GRUPO QUOCIENTE S_3/H.
SABEMOS QUE AS CLASSES

LATERAIS DE H SÃO 2 E

SÃO DADAS POR

H

$gH = \{g, gf, gf^2\}$

DA: $S_3/H = \{H, gH\}$ è

$\circ$	H	gH
H	H	gH
gH	gH	H

$(gH)(gH)$

$(gg)H$

H

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G,

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que

yN ; $\exists!$ EXISTE $x \in G$ T. Q $\mu(x) = yN$

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que

$$\ker(\mu) = N.$$

(iii)

$x, y \in G$; $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$

PROVA: SEJAM $x, y \in G$. DAÍ

$$\mu(\underbrace{xy}_{\in G}) = (xy)N = (xN)(yN) = \mu(x)\mu(y)$$

LOGO μ É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

AGORA, DADA $yN \in G/N$ TOME

$y \in G$ E COM ISSO

$\mu(y) = yN$

LOGO, μ É SOBREJETORA.

SEJA $\underline{x} \in \boxed{\underline{N}}$, DAÍ

$\mu(x) = x\underline{N} = \underline{N} = \underline{e\underline{N}}$

E COMO N É O ELEMENTO NEU-

TRO DE G/N ENTÃO $x \in \ker(\mu)$.

LOGO, $N \subseteq ker(\mu)$.

AGORA SEJA $t \in ker(\mu)$. DAÍ

$\mu(t) = eN = N$

tN

ENTÃO

$$tN = eN$$

O QUE OCORRE SE, E SÓ SE,

$te^{-1} \in N$, OU SEJA, $t \in N$.

DAI: $\ker(\mu) \subseteq N$.

PORTANTO

$$\ker(\mu) = N. \qquad \#$$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G,

Definição

Se N *é um subgrupo normal de* G, *então o homomorfismo* $\mu : G \to G/N$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ *definido por* $\mu(a) = aN$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$ é chamado de ***homomorfismo canônico***

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$ é chamado de ***homomorfismo canônico*** *de G sobre G/N.*

Lema

Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos,

Lema

Se $f: G \to L$ é um homomorfismo de grupos, então $N = \ker(f)$

Lema

Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos, então $N = \ker(f)$ é um subgrupo normal de G

$$xN = Nx, \ \forall x \in G$$

PROVA: SEJA $x \in G$. QUEREMOS MOSTRAR QUE

$$xN \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} Nx.$$

ASSIM SEJA $y \in xN$. DAÍ

$y = xh$, com $h \in \overset{\ker(f)}{\overset{\shortparallel}{N}}$. AGORA

$$y = xh = (xh\underbrace{(x^{-1})x}_{=e}) = \underbrace{(xhx^{-1})}_{\in N}x \in Nx$$

MAS

$$f(\underbrace{xhx^{-1}}_{\in \ker(f)}) = f(x)\overset{e}{\overset{\shortparallel}{f(h)}}\underbrace{f(x^{-1})}_{=[f(x)]^{-1}}$$

$$= f(x) \cdot e_L \cdot [f(x)]^{-1} = f(x) \cdot (f(x))^{-1} = e_L$$

DAÍ $xhx^{-1} \in \ker(f) = N$. E ENTÃO

$y = (\underbrace{xhx^{-1}}_{\in N})x \in Nx$. LOGO $xN \subseteq Nx$.

AGORA SEJA $z \in Nx$. DAÍ $z = \ell x$

COM $\ell \in N$ E COM ISSO

$$z = e(\ell x) = (x x^{-1})(\ell x) = x(x^{-1}\ell x)$$

E $$f(\underbrace{x^{-1}\ell x}_{\in \ker(f) = N}) = f(x^{-1})f(\ell)f(x) = e_L.$$

DAÍ $x^{-1}\ell x \in \ker(f) = N$, OU SEJA,

$\ell = x(x^{-1}\ell x) \in xN$. LOGO, $Nx \subseteq xN$.

PORTANTO $xN = Nx$, PARA TODO

$x \in G$, OU SEJA, $N = \ker(f)$ É

UM SUBGRUPO NORMAL DE G. #

Lema

Se $f : G \to L$ *é um homomorfismo de grupos, então* $N = \ker(f)$ *é um subgrupo normal de* G *e, portanto,* G/N *é um grupo.*

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f : G \to L$ *um homomorfismo* $\boxed{\textit{sobrejetor}}$

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f: G \to L$ um homomorfismo sobrejetor de grupos.

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f : G \to L$ *um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se* $N = \ker(f)$,

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f : G \to L$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se $N = \ker(f)$, então o grupo quociente G/N é isomorfo ao grupo L.

$$\frac{G}{N} = \{ aN \mid a \in G \}$$

$$L = \{ f(x) \mid x \in G \}.$$

$$aN = bN$$

$$f(a)$$

PROVA: VAMOS DEFINIR UMA REGRA $\sigma : G/N \to L$ DA SE-GUINTE FORMA

$$\rightarrow \sigma(aN) = f(a)$$

PARA $aN \in G/N$. MOSTREMOS

QUE σ É UMA FUNÇÃO. DA

DEFINIÇÃO DE σ SEGUE QUE

TODO ELEMENTO DE G/N POS-

$\sigma(aN) = \sigma(bN) \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

SUI UMA IMAGEM. ASSIM SEJAM

$aN, bN \in G/N$ TAIS QUE

$\Rightarrow aN = bN. \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$

DAÍ $ab^{-1} \in N$ E COMO $N = \ker(f)$

ENTÃO

$$f(ab^{-1}) = e_L$$

$$\parallel$$

$$f(a)\,f(b)^{-1} = e_L$$

$$\sigma(aN) = f(a) = f(b) = \sigma(bN)$$

LOGO

$$\sigma(aN) = f(a) = f(b) = \sigma(bN).$$

ASSIM σ É UMA FUNÇÃO DE

G/N EM L.

MOSTREMOS QUE σ É UM HOMO-
MORFISMO DE GRUPOS. PARA
ISSO SEJAM $a_N, b_N \in G/N$.
TEMOS

$$\sigma[(aN)(bN)] = \sigma[(ab)N] =$$

$$= f(ab) = f(a)\, f(b) = \sigma(aN)\sigma(bN)$$

LOGO σ É UM HOMOMORFISMO

DE GRUPOS.

AGORA

$\ker(\sigma) = \{ a \in N \mid \sigma(aN) = e_L \}$

$\sigma(aN) = e_L$

$f(a) = e_L$

DAÍ $a \in \ker(f) = N$ E ENTÃO

$aN = N = eN$. LOGO

$$\ker(\sigma) = \{N\}$$

ASSIM σ É INJETORA.

FINALMENTE, SEJA $y \in L$.

QUEREMOS ENCONTRAR $x \in \frac{G}{N}$

TAL QUE

$$\sigma(x) = y.$$

MAS

$$L = \{ f(a) \mid a \in G \}$$

DAÍ $y = f(a)$ E TOMANDO

$x = aN$ TEMOS

$$\sigma(\overset{\downarrow}{x}) = \sigma(aN) = f(a) = \overset{\downarrow}{y}$$

OU SEJA, σ É SOBREJETORA.

PORTANTO σ É UM ISOMOR-

FISMO DE GRUPOS, DAÍ

$G/N \cong L$. #

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$,

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$, considere o homomorfismo $\rho_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$, *considere o homomorfismo* $\rho_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definido por* $\rho_m(x) = \overline{x}$.

COMO f_m É SOBREJETORA, ENTÃO DO TEOREMA DO HOMOMORFISMO SEGUE QUE

$$\mathbb{Z}/N \cong \mathbb{Z}_m$$

ONDE

$$N = \ker(f_m)$$

MAS

$$\ker(f_m) = \{ x \in \mathbb{Z} \mid f_m(x) = \bar{0} \}$$

$f_m(x) = \bar{x} = \bar{0} \iff x \equiv 0 \pmod{m}$

$\iff x = km, \; k \in \mathbb{Z}.$

DAI:

$N = \ker(f_m) = \{ mk \mid k \in \mathbb{Z} \} = m\mathbb{Z}$

LOGO

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m .$$