

Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Defina a relação \sim em \mathbb{Q} por

$$x \sim y \text{ quando } \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}.$$

a) Mostre que \sim é uma relação de equivalência em \mathbb{Q} .

b) Determine as classes de equivalências de $\bar{0}$, $\bar{1}$ e $\bar{1/2}$.

i) PARA todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \sim x$.

ii) SE $x \sim y$, ENTÃO $y \sim x$

iii) SE $x \sim y$ e $y \sim z$, ENTÃO $x \sim z$.

$$x \sim x \quad (=)$$

SOLUÇÃO: a) SEJA $x \in \mathbb{Q}$. DAÍ

$$\frac{x-x}{2} = \frac{0}{2} = 0 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Logo } x \sim x.$$

AGORA SUFICIENTE QUE $x \sim y$.

$$\frac{y-x}{2} \in \mathbb{Z}?$$

DA:

$$\frac{x-y}{2} = k$$

on DE $k \in \mathbb{Z}$. Assum

$$\frac{y-x}{2} = - \left(\frac{x-y}{2} \right) = -k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\frac{x-y}{2}} \in \mathbb{Z}$$

ou $SE \nexists A, y \sim x$.

FINALMENTE, SUPONHA QUE

\downarrow
 $x \sim y \in y \sim z$. DAÍ

$$\rightarrow \frac{x - \boxed{y}}{2} = \underline{n} \quad \in \quad \frac{\boxed{y} - z}{2} = \underline{l}$$

ONDE $n, l \in \mathbb{Z}$. ASSIM

$$\downarrow$$
$$\frac{x-z}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{y-z}{2} = \underline{n+l} \in \mathbb{Z}$$

ISTO É, $x \sim z$.

Portanto \sim é uma relação

de equivalência em \mathbb{Q} .

\cdot R RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

SOBRE A , TOMANDO $x \in A$

$$\bar{x} = \{ y \in A \mid y R x \} \subseteq A.$$

b) TEMOS

$$\bar{0} = \{ y \in \mathbb{Q} \mid \underline{y \sim 0} \}$$

$$y \sim 0 \quad (\Rightarrow) \quad \underbrace{y - 0}_2 = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \boxed{2n} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\bar{0} = \{ y \in \mathbb{Q} \mid y = 2k, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\bar{0} = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \}$$

AGORA

$$\bar{1} = \{ t \in \mathbb{Q} \mid t \sim 1 \}$$

$$t \sim 1 \Leftrightarrow \underline{t-1} = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{2} \\ t-1 = 2n \Leftrightarrow t = \underline{2n+1}$$

\mathbb{Q}_1

$$I = \{ t \in \mathbb{Q} \mid t = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$J = \{ \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \}$$

FINALMENTE

$$\overline{\frac{1}{2}} = \left\{ z \in \mathbb{Q} \mid z \sim \frac{1}{2} \right\}$$

$$z \sim \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z - \frac{1}{2}}{2} = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$j - \frac{1}{2} = 2h \quad (\Rightarrow) \quad j = \underbrace{2h + \frac{1}{2}}$$

Def:

$$\overline{\frac{1}{2}} = \left\{ j \in \mathbb{Q} \mid j = 2h + \frac{1}{2}, h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{2} = \left\{ \dots, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots \right\}$$

#