Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\Delta : A \times A \to A$$
$$(a, b) \longmapsto a\Delta b$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\Delta : A \times A \to A$$
$$(a, b) \longmapsto a\Delta b$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Exemplos

1) A soma usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m =$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é uma operação binária.

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ são operações binárias.

4) A operação $\div$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$,

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****.*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que*
$(A, \oplus, \otimes)$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x,*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x*,* y*,* $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade**:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x,*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y =$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x*,* y*,* $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos* x*,* $y \in A$ *vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***:

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por* 0

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma***

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****:*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$,*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

iv) ***Elemento Oposto**: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A *um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$ *vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A *é chamado de* ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento* $x \in A$, *existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo***

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A *um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$ *vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A *é chamado de* ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento* $x \in A$, *existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y *é chamado de* ***oposto aditivo*** *de* x *ou simplesmente* ***oposto*** *de* x.

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

v) ***Associatividade****:*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y,

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$,

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, z* $\in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****:*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x*,* y*,* $z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x*,*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y,$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

*vi) **Distributividade**: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, z $\in$ A, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, z $\in$ A vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

*vi) **Distributividade**: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto***.

Definição

v) ***Associatividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

vii) ***Distributividade***:

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x,

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y,

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

Definição

vii) ***Distributividade**: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y$$

Definição

*vii) **Distributividade**: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

*vii) **Distributividade**: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma***.

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma***.

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x,

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***:

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade****: Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1_A = x$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$,

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade***: *Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

*Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade***: *Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

*para todo $x \in A$, então dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel com unidade***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade***: *Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

*Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade***: *Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

*para todo $x \in A$, então dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade**: Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

*Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

*para todo $x \in A$, então dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade****. O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A*.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A.

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade***

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

Observações:

3) *Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.*

4) *Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que*

Observações:

*3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é um anel.

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja* $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que* A *é um anel.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

2) *Considere as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *é um anel comutativo e com unidade.*