$x^2 = x * x$

Exercício

Seja $(G, *)$ *um grupo com elemento neutro* e.

(a) *Prove que se* $\boxed{x^2} = e$, *para todo* $x \in G$, *então* G *é um grupo abeliano.*

(b) *Mostre que se* $x \in G$ *é tal que* $x^2 = x$, *então* $\boxed{x \text{ é o elemento neutro.}}$

$\rightarrow \underbrace{x * y} = \underbrace{y * x}, \quad \forall x, y \in G.$

$x * y \in G$

Solução:

a) SEJAm $x, y \in G$. como $x * y \in G$, PELA HIPÓTESE TEMOS

$$(x * y)^2 = e .$$

ΔΑί

$$e = (x * y)^2 = (x * y) * (x * y)$$

Α 6ΟΠΑ

$$(x * y) * (x * y) = e \qquad (* y)$$

$$(x * y) * (x * (y) * y) = \underbrace{e * y}$$

$$(x*y)*x*\underbrace{(y*y)}_{y^2=e} = y$$

$$(x*y)*x*e = y$$

$$(x*y)*x = y \qquad (*x)$$

$$(x * y) * \underbrace{(x * x)}_{x^2 = e} = y * x$$

$$\underbrace{(x * y) * e} = y * x$$

$$x * y = y * x$$

PORTANTO, G É UM GRUPO ABELIANO. $\#$

b) SEJA $x \in G$ TAL QUE

$$x^2 = x$$

OU SEJA,

$$\rightarrow x * x = x \leftarrow$$

SEJA $x^{-1} \in G$ O INVERSO DE x.

Assim

$$\underbrace{(x * \boxed{x}) * x^{-1}}_{e}) = \underbrace{x * x^{-1}}$$

$$x * e = e$$

Logo, $x = e$, como queríamos. #