Exercícios - Imagem Direta e Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

$g^{-1}(X) = \{ t \in A \mid g(t) \in X \} \subseteq A$

Exercício

Seja $g : A \to B$ *uma função e sejam* $X, Y \subset B$. *Mostre que* $g^{-1}(X - Y) = g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$.

SOLUÇÃO: PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) $g^{-1}(X-Y) \subseteq g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$

ii) $g^{-1}(X) - g^{-1}(Y) \subseteq g^{-1}(X-Y)$.

PARA MOSTRAR (i) SEJA $t \in g^{-1}(X-Y)$. DAÍ, $g(t) \in X-Y$.

OU SEJA, $g(\underset{A}{t}) \in \underset{\cap B}{\underline{X}}$ E $g(t) \notin \underset{\cap B}{Y}$.

LOGO, $t \in \underline{g^{-1}(X)}$ E $t \notin \underline{g^{-1}(Y)}$.

ISTO É, $t \in g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$.

ASSIM, $g^{-1}(X - Y) \subseteq g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$.

AGORA PARA MOSTRAR (ii) SEJA

$z \in g^{-1}(X) - g^{-1}(Y)$. DAÍ, $z \in g^{-1}(X)$

E $z \notin g^{-1}(Y)$. LOGO, $g(z) \in X$

E $g(z) \notin Y$. OU SEJA,

$g(z) \in X - Y$. ISTO É, $z \in g^{-1}(X-Y)$.

ASSIM $g^{-1}(X) - g^{-1}(Y) \subseteq g^{-1}(X-Y)$.

PORTANTO

$$g^{-1}(X \cdot Y) = g^{-1}(X) \cdot g^{-1}(Y).$$

#

Exercício

Sejam $f : A \to B$ uma função e $P, Q \subseteq A$. Mostre que se f é injetora, então $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$.

$$f(P) = \{ f(x) \mid x \in P \} \subseteq B$$

SOLUÇÃO: PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) $f(P \cap Q) \subseteq f(P) \cap f(Q)$

ii) $f(P) \cap f(Q) \subseteq f(P \cap Q)$

PARA MOSTRAR (i) SEJA $t \in f(P \cap Q)$.

DAÍ EXISTE $x \in P \cap Q$ TAL QUE

$f(x) = t$.

ASSIM $x \in P$ E $f(x) = t$ E $x \in Q$

e $f(x) = t$. Ou seja,

$t \in f(P)$ e $t \in f(Q)$. Assim

$t \in f(P) \cap f(Q)$. Logo

$$f(P \cap Q) \subseteq f(P) \cap f(Q).$$

AGORA PARA MOSTRAR (ii) SEJA

$z \in f(P) \cap f(Q)$. ASSIM $z \in f(P)$

E $z \in f(Q)$. DAÍ EXISTE

$x_1 \in P$ TAL QUE $f(x_1) = z$ E

EXISTE $x_2 \in \mathbb{Q}$ TAL QUE $f(x_2) = y$.

LOGO

$$f(x_1) = f(x_2).$$

MAS, POR HIPÓTESE, f É INJETORA, DAÍ $\underline{x_1 = x_2}$. ASSIM

$x_1 = x_2 \in \underline{P \cap Q}$ e $f(x_1) = f(x_2) = z$.

LOGO, $z \in f(P \cap Q)$. ASSIM

$$f(P) \cap f(Q) \subseteq f(P \cap Q).$$

PORTANTO, $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$.

#