

SEJA $f: A \rightarrow B$ uma função e sejam

$P \subset A$ e $X \subset B$. Mostre que valem:

$$i) f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$$

$$ii) P \subseteq f^{-1}(f(P))$$

f é INVERSÍVEL!
 \Updownarrow
 f é BIJETORA!

$$\Rightarrow f^{-1}(Q) = \{ \underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) \in Q \}$$

$$Q \subseteq B$$

$$x \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow f(x) \in Q$$

$$f(x) \notin Q \Rightarrow x \notin f^{-1}(Q)$$

MOSTRAR QUE TODA FUNÇÃO INJETORA DE um CONJUNTO FINITO EM SI MESMO É TAMBÉM SOBRETETORA.

SEJA A um CONJUNTO FINITO E $f: A \rightarrow A$ uma FUNÇÃO INJETORA. MOSTRE QUE f É SOBRETETORA. DIGAMOS

$$A = \{ \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{\substack{\uparrow \\ t}} \}$$

$$\begin{aligned} & \bullet t \in A \\ & \bullet x \in A \\ & f(x) = \underline{t} \end{aligned}$$

SUPONHA QUE $f: \underline{A} \rightarrow \underline{A}$ É SOBRETETORA.
ASSIM, EXISTE $\underline{t} \in A$ TAL QUE

$f(x_i) \neq \underline{t}$ PARA TODO $x_i \in A$. A GOMA,

POA HIPÓTESE, f É INJETORA, O L SEJA,

→ $f(\underline{x}_n) \neq f(\underline{x}_\ell)$ PARA TODO $x_\ell \neq x_n$.

MAS f POSSUI, NO MÁXIMO, $n-1$ IMAGENS
DISTANTAS. DAÍ EXISTEM $x_n \neq x_\Delta$ TAIS

QUE $f(x_n) = f(x_\Delta)$. O QUE CONTRADIZ

A HIPÓTESE DE f SER INJETORA. TAL

CONTRADIÇÃO SURTIU DE SUPORMOS QUE
 f NÃO É SOBREJETORA. PORTANTO f É

SOBREJETON.

$$ii) f(P) = \{ f(z) \mid z \in P \}$$

$$\text{SEGA } \underline{t \in P}. \quad \text{ASSIM } \underline{f(t)} \in \underline{f(P)} = Q.$$

$$\text{LOCO } f(t) \in Q \subseteq B. \quad \text{DAI' } \underline{t} \in \underline{f^{-1}(Q)}.$$

$$\text{ISTO E' } \underline{t \in f^{-1}(f(P))}. \quad \text{PORTANTO,}$$

$$P \subseteq f^{-1}(f(P)). \quad \#$$

c) SEJA $\underbrace{z}_{\text{circled}} \in \underbrace{f^{-1}(X^c)}_{\text{underlined}}$. DAÍ $\underbrace{f(z)}_{\text{underlined}} \in X^c$.

Assim $\underbrace{f(z)}_{\text{underlined}} \notin X$. Logo, $z \notin \underbrace{f^{-1}(X)}_{\text{underlined}}$. ENTÃO

$z \in \underbrace{[f^{-1}(X)]^c}_{\text{underlined}}$. OU SEJA

$$f^{-1}(X^c) \subseteq [f^{-1}(X)]^c.$$

AGORA, SEJA $t \in \underbrace{[f^{-1}(X)]^c}_{\text{underlined}}$. DAÍ $t \notin \underbrace{f^{-1}(X)}_{\text{underlined}}$.

Logo, $f(t) \notin X$. Assm $\underline{f}(t) \in \underline{X}^c \subset \overline{MAD}$
 $t \in f^{-1}(\underline{X}^c)$. Logo

$$[f^{-1}(X)]^c \subseteq f^{-1}(X^c).$$

Поэтому,

$$f^{-1}(X^c) = [f^{-1}(X)]^c.$$