

Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Considere o anel $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ onde as operações \oplus e \otimes em \mathbb{Q} são definidas por

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y - 6 \\ x \otimes y &= x + y - \frac{xy}{6} \end{aligned}$$

Verifique se o conjunto $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é um subanel de \mathbb{Q} .

$$0_{\mathbb{Q}} = 6$$

$$\mathbb{B}$$

$$0_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{B}$$

$$x, y \in \mathbb{B} \Rightarrow \begin{aligned} x + (-y) &\in \mathbb{B} \\ x \cdot y &\in \mathbb{B} \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: SETA $B = \{ \underline{6}k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

NO ANEL $(\mathbb{Q}, \underline{+}, \cdot)$ O ELEMENTO

NEUTRO DA SOMA $\underline{+}$ É O 6.

MAIS AINDA, O OPÓSTO ADITIVO DE

x em \mathbb{Q} é dada por $\underline{b} - \underline{x}$.

Primeiro, como $b = b.1$, então

$b \in B$, ou seja, $\underbrace{B \neq \emptyset}$.

Agora dados $\underbrace{x, y \in B}$, existem

$h, l \in \mathbb{Z}$ TAIS & UE

$$x = \underline{\underline{6h}} \quad \text{e} \quad y = 6l.$$

$$\text{Log}_2, -y = 6 - 6l. \quad \text{PA}'$$

$$\underline{\underline{x \oplus (-y)}} = x \oplus (6 - 6l) = x + (6 - 6l) - 6 =$$

$$= \underline{6}k + \cancel{6} - \cancel{6}l - \cancel{6} = 6(k-l) \overset{\in \mathbb{Z}}{\in} \mathbb{B} \quad /$$

$$x \oplus y = x + y - \frac{xy}{6} = 6k + 6l - \frac{\cancel{6}k\cancel{6}l}{\cancel{6}}$$

$$= 6k + 6l - 6kl = 6(\underbrace{k+l}_{\in \mathbb{Z}} - kl) \in \mathbb{B} \quad /$$

PORTANTO, $B = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é

um SUBANEL DE $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.



