Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

$0_{\mathbb{Q}} = 1 \in \mathbb{Z}$

$-x = 2 - x \; ; \; x \in \mathbb{Q}$

Exercício

Considere o anel $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ *onde*

$$\begin{cases} a \oplus b = a + b - 1 \\ a \otimes b = a + b - ab, \end{cases}$$

para todos $a, b \in \mathbb{Q}$. *O conjunto* $I = \mathbb{Z}$ *é um ideal desse anel?*

$$a \otimes b = \underbrace{a + b - ab}_{\in \mathbb{Q}} = b + a - ba = b \otimes a$$

Solução: INICIALMENTE NOTE QUE PARA TODOS $a, b \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$a \otimes b = a + b - ab = b + a - ba = b \otimes a$$

OU SEJA, A OPERAÇÃO $\otimes$ É COMUTATIVA. ASSIM O ANEL $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ É UM ANEL COMUTATIVO.

PRIMEIRO OBSERVE QUE $0_{\mathbb{Q}} = 1 \in I = \mathbb{Z}$.

SEJAM $x, y \in \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{I}}$. TEMOS

$$-y = 2 - y$$

ASSIM

$$x \oplus (-y) = x \oplus (2-y) = x + \underbrace{(2-y)}_{\in \mathbb{Q}} - 1 = \underbrace{x - y + 1}_{\in \mathbb{Z}} \in I$$

AGORA SEJA $\boxed{\alpha \in \mathbb{Q}}$ E $\boxed{x \in I}$, TEMOS

$$\alpha \otimes x = \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{- \alpha x}_{\notin \mathbb{Z}} \in I\,? \quad \notin I$$

PORTANTO $I = \mathbb{Z}$ NÃO É UM IDEAL DE $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ POIS, POR EXEMPLO, TOMANDO $\alpha = \frac{1}{2}$ E $x = 0$ TEMOS

$$\alpha \circledast x = \alpha + x - \alpha x = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

#