Anéis - Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

5 de outubro de 2020

Definição

*Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos x, $y \in A$, se $xy = 0_A$, então $x = 0_A$ ou $y = 0_a$. Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.*

Observação:

*Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$, então x e y são chamados de **divisores próprios de zero**.*

Exemplos

1) *Os anéis* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) *Em geral* $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto* $\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se, m é primo.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel* A *sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$ *e* A*, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em* $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

3) *No anel* $\mathbb{Z}$*, o conjunto* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$ *é um subanel de* $\mathbb{Z}$*.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Prova: FAZER!!!!!

Exemplos

COLOCAR EXEMPLOS