Matrizes

José Antônio O. Freitas

Observação:

Vamos utilizar os seguintes conjuntos numéricos:

1) *O conjunto dos números racionais:* $\mathbb{Q}$
2) *O conjunto dos números reais:* $\mathbb{R}$
3) *O conjunto dos números complexos:*
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$.

Teorema

O conjunto dos reais, $\mathbb{R}$*, com as operações de soma e multiplicação usual satisfaz as seguintes propriedades:*

i) *Para todos* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *temos:* $x + y = y + x$.

ii) *Para todos* $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ *temos:* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

iii) *Existe 0 em* $\mathbb{R}$ *tal que* $0 + x = x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

iv) *Para cada* $x \in \mathbb{R}$*, existe um único* $-x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x + (-x) = 0$.

Teorema

i) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ vale: $xy = yx$.

ii) Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ vale: $(xy)z = x(yz)$.

iii) Existe 1 em $\mathbb{R}$ tal que $1 \cdot x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

iv) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Com essas propriedades dizemos que a terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo ou simplesmente que $\mathbb{R}$ é um corpo.

Observação:

As propriedades do teorema anterior também são verdadeiras nas ternas $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, onde para o caso dos complexos temos:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ad + bc) + (ac - bd)i.$$

Assim $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ também são exemplos de corpos.

Definição

Uma matriz A com entrandas num corpo $\mathbb{K}$, é uma tabela contendo $m \cdot n$ números de $\mathbb{K}$ organizados em m linhas e n colunas, onde m e n são números naturais com $m, n \geq 1$ e escrita como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A ***i*-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

para $i = 1$, ..., m.
Agora a ***j*-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para $j = 1$, ..., n.

Uma matriz A com m **linhas** e n **colunas** é dita possuir **ordem** ou **tamanho** $m \times n$.
Usaremos também a notação

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

para denotar uma matriz A de m linhas por n colunas.
Nesse caso diremos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** na posição i, j da matriz A.
Quando $m = n$, diremos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e que os elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} formam a **diagonal principal** de A.

Exemplos

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1/3 & 4\pi & -3/2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 0,3 \\ 2,5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Definição

*Uma matriz que possui uma única linha, isto é, uma matriz de tamanho $1 \times n$ é chamada de **matriz linha**. Uma matriz que possui uma única coluna, isto é, uma matriz de tamanho $m \times 1$ é chamada de uma **matriz coluna**.*

Definição

*Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$, dizemos que A e B são **iguais** e escrevemos $A = B$ se:*

1) $m = p$ e $n = q$,
2) $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Observação:

Denotaremos o conjunto de todas as matrizes com entradas em $\mathbb{R}$ *por* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Assim por exemplo,*

$$M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2,3 \right\}.$$

Quando $m = n$ *vamos escrever* $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

Definição

Dadas duas matrizes de mesmo tamanho, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *definimos a soma de* A *com* B *como sendo a matriz*

$$C = A + B = (c_{ij})_{m\times n}$$

onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$ *e* $j = 1, \ldots, n$.

Exemplos

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Denotando por C a soma de A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+0 \\ 2+1 & 4+3 \\ -3+5 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. *A* ***multiplicação de*** A ***por um escalar(número)*** α *é definida como sendo a matriz*

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando cada entrada da matriz A *pelo número* α*, ou seja,*

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$ *e* $j = 1, \ldots, n$. *Nesse caso dizemos que a matriz* B *é um* ***múltiplo escalar*** *da matriz* A.

Exemplo

O produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

pelo escalar -2 *é dada por*

$$-2A = \begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)(-3) \\ (-2)3 & (-2)7 \\ (-2)2 & (-2)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -6 & -14 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Definição

Dadas duas matrizes A e B tais que $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, isto é, ***o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B*** *podemos definir o* ***produto de A por B*** *denotado por*

$$C = AB.$$

A matriz C será uma matriz $m \times n$ obtida da seguinte forma

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \tag{1}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

A equação (1) está dizendo que para obtermos o elemento na posição i, j da matriz C precisamos realizar a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nessse caso não podemos fazer o produto de A por B pois A é uma matriz 3×2 e B é uma matriz 3×3. Mas podemos realizar o produto BA. Nesse caso fazendo $C = BA$ obtemos

$$C = BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)1 + 1 \cdot 1 + 0(-3) & (-2)3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1(-3) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0(-3) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 12 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Definição

A ***transposta*** *de uma matriz* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *é definida como sendo a matriz* $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas de A, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para $i = 1, \ldots, n$ *e* $j = 1, \ldots, m$.

Exemplos

As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1/3 & 4\pi & -3/2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 8 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 0,3 \\ 2,5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

são as matrizes

$$A^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 2 & 4\pi \\ -\sqrt{2} & -3/2 \end{bmatrix}, C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$D^t = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0,3 & 2,5 \end{bmatrix}, E^t = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. Então as seguintes propriedades são válidas:

1) *(Comutatividade)* $A + B = B + A$
2) *(Associatividade)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) *(Elemento Neutro) A matriz denotada por $\overline{0}$, $m \times n$, definida por $\overline{0} = (0)_{m \times n}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., m$ é tal que*

$$A + \overline{0} = A$$

para toda matriz A, $m \times n$. Tal matriz é chamada de ***matriz nula*** *$m \times n$.*

Teorema

4) *(Elemento simétrico ou oposto) Para cada matriz* $A = (a_{ih})$*, existe uma única matriz* $-A$*, definida por*

$$-A = (-a_{ij})$$

tal que

$$A + (-A) = \overline{0}.$$

5) *(Associatividade)* $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

6) *(Distributividade)* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

7) *(Distributividade)* $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

8) *(Associatividade)* $(AB)C = A(BC)$

Teorema

9) (Elemento Neutro) Para cada inteiro positivo p *a matrix* $p \times p$ *dada por*

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

chamada de ***matriz identidade*** *e é tal que*

$$AI_n = I_m A = A$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Teorema

10) (Distributividade) $A(B+C) = AB + AC$ *e* $(B+C)A = BA + CA$

11) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

12) $(A^t)^t = A$

13) $(A+B)^t = A^t + B^t$

14) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

15) $(AB)^t = B^t A^t$