

# Grupo Quociente

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

17 de novembro de 2020

Seja  $N$  um subgrupo normal

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ .

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por  $N$ .

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por  $N$ .

Defina em  $G/N$  a operação

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por  $N$ .

Defina em  $G/N$  a operação

$$(aN)(bN)$$



Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por  $N$ .

Defina em  $G/N$  a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

Seja  $N$  um subgrupo normal de um grupo  $G$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por  $N$ .

Defina em  $G/N$  a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

para todos  $a, b \in N$ .

Temos:

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN)$

Temos:

$$\text{i) } [(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$$

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;

ii)  $(aN)(eN)$

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;

ii)  $(aN)(eN) = (ae)N$



Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N$

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;

ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;

Temos:

i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;

ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;

iii)  $(aN)(a^{-1}N)$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N$



Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ .

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ .

Assim, o conjunto  $G/N$  é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ .

Assim, o conjunto  $G/N$  é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é  $eN$

Temos:

- i)  $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$  para todos  $aN, bN, cN \in G/N$ ;
- ii)  $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ ;
- iii)  $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$  para todo  $aN \in G/N$ .

Assim, o conjunto  $G/N$  é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é  $eN$  e  $(aN)^{-1} = (a^{-1})N$ .

## Definição

*Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ .*

## Definição

*Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Nessas condições,*

## Definição

*Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Nessas condições, o **grupo quociente***



## Definição

*Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Nessas condições, o **grupo quociente** de  $G$  por  $N$*

## Definição

Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Nessas condições, o **grupo quociente** de  $G$  por  $N$  é o par formado pelo conjunto quociente  $G/N$

## Definição

Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Nessas condições, o **grupo quociente** de  $G$  por  $N$  é o par formado pelo conjunto quociente  $G/N$  e da operação de multiplicação de conjuntos aplicadas aos elementos desse conjunto.

## Exemplos

(1) *Seja  $G = \{1, -1, i, -i\}$  um grupo*

## Exemplos

(1) Seja  $G = \{1, -1, i, -i\}$  um grupo e  $N = \{1, -1\}$ .

## Exemplos

(2) Seja  $G = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

## Exemplos

(2) Seja  $G = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$  e  $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ .

## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ .



## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ . Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ . Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ . Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ . Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo  $H = [f]$

## Exemplos

(3) Seja  $G = S_3$ . Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo  $H = [f] = \{Id, f, f^2\}$ .

## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ ,*

## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então a função  $\mu : G \rightarrow G/N$*

## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então a função  $\mu : G \rightarrow G/N$  definida por  $\mu(a) = aN$*



## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então a função  $\mu : G \rightarrow G/N$  definida por  $\mu(a) = aN$  é um homomorfismo sobrejetor*

## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então a função  $\mu : G \rightarrow G/N$  definida por  $\mu(a) = aN$  é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que*

## Proposição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então a função  $\mu : G \rightarrow G/N$  definida por  $\mu(a) = aN$  é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que*

$$\ker(\mu) = N.$$

## Definição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ ,*

## Definição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então o homomorfismo  $\mu : G \rightarrow G/N$*

## Definição

*Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então o homomorfismo  $\mu : G \rightarrow G/N$  definido por  $\mu(a) = aN$*

## Definição

Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então o homomorfismo  $\mu : G \rightarrow G/N$  definido por  $\mu(a) = aN$  é chamado de **homomorfismo canônico**

## Definição

Se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então o homomorfismo  $\mu : G \rightarrow G/N$  definido por  $\mu(a) = aN$  é chamado de **homomorfismo canônico** de  $G$  sobre  $G/N$ .



## Lema

*Se  $f: G \rightarrow L$  é um homomorfismo de grupos,*

## Lema

*Se  $f: G \rightarrow L$  é um homomorfismo de grupos, então  $N = \ker(f)$*

## Lema

*Se  $f: G \rightarrow L$  é um homomorfismo de grupos, então  $N = \ker(f)$  é um subgrupo normal de  $G$*

## Lema

*Se  $f: G \rightarrow L$  é um homomorfismo de grupos, então  $N = \ker(f)$  é um subgrupo normal de  $G$  e, portanto,  $G/N$  é um grupo.*

## Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

*Seja  $f: G \rightarrow L$  um homomorfismo sobrejetor*

## Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

*Seja  $f: G \rightarrow L$  um homomorfismo sobrejetor de grupos.*

## Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

*Seja  $f: G \rightarrow L$  um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se  $N = \ker(f)$ ,*

## Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

*Seja  $f: G \rightarrow L$  um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se  $N = \ker(f)$ , então o grupo quociente  $G/N$  é isomorfo ao grupo  $L$ .*



## Exemplo

*Dado um inteiro  $m > 1$ ,*

## Exemplo

*Dado um inteiro  $m > 1$ , considere o homomorfismo  $\rho_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$*

## Exemplo

*Dado um inteiro  $m > 1$ , considere o homomorfismo  $\rho_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  definido por  $\rho_m(x) = \bar{x}$ .*