Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

29 de agosto de 2020

Definição

Seja A *um conjunto não vazio*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

$$A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

$$R \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$,

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos $x, \ y \in A$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados**

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1,2,3,4\}$.

$R \subseteq A \times A$

$A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),$

$(2, \ )$

$(3, \ )$

$(4, \ )$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$R_0 = \emptyset$ $\subseteq A \times A$ NÃO! FALHA (i) DA DEFINIÇÃO

Exemplos

1) Seja $A=\{1,2,3,4\}$*. Temos*

$\rightarrow A\times A=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);$
$(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$R_0=\emptyset$

$R_1=\boxed{A\times A}$

$(x,x)\in R_1$ ✓

SE $(x,y)\in R_1$, ENTÃO $(y,x)\in R_1$

SE $(x,y)\in R_1$ E $(y,z)\in R_1$, ENTÃO $(x,z)\in R_1$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}$.

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

PARA TODO $x \in A$

$R_0 = \emptyset$

$(x, x) \in R_2$

$R_1 = A \times A$ Sim!

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$ NÃO, POIS $(4,4) \notin R_2$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$(x, x) \in R_3$

$(x, y) \in R_3 \Rightarrow$
$(y, x)\ R_3$

$R_0 = \emptyset$

$R_1 = A \times A$

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$

$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1)\}$

$(x, y) \in R_3$ e $(y, z) \in R_3 \Rightarrow (x, z) \in R_3$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$R_0 = \emptyset$

$R_1 = A \times A$

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$

$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1)\}$ Sim

$R_4 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4)\}$ Sim

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$R_0 = \emptyset$ NÃO

$R_1 = A \times A$ SIM

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$ NÃO, $(4,4) \notin R_2$

$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1)\}$ SIM

$R_4 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4)\}$ SIM

$R_5 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1); (2,4); (4,2)\}$ NÃO

$(4,2) \in R_5$ e $(2,1) \in R_5$ e $(4,1) \notin R_5$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R *é uma relação de equivalência sobre* $\mathbb{Z}$.

PROVA: VAMOS VERIFICAR AS PROPRIEDADES DA DEFINIÇÃO.

i) SEJA $x \in A = \mathbb{Z}$. ENTÃO $(x, x) \in R$

POIS $x - x = 0 = 2 \cdot 0$

ii) SUPONHA QUE $(x, y) \in R$. ENTÃO

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R *é uma relação de equivalência sobre* $\mathbb{Z}$.

$\rightarrow x - y = 2k,\ k \in \mathbb{Z}.$ $(y, x) \in R$?

DAÍ

$$y - x = -(x - y) = -(2k) = 2\underbrace{(-k)}_{l'' \in \mathbb{Z}}$$

E ENTÃO $(y, x) \in R$.

(ii) SE $(x, y) \in R$ E $(y, z) \in R$, ENTÃO

EXISTEM $k, l \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$$\boxed{x - y = 2k} \quad E \quad \boxed{y - z = 2l}$$

$+$

AGORA,

$$x - z = (x - y) + (y - z)$$

$$x - z = 2k + 2l$$

$$x - z = 2(\underbrace{k + l}_{\in \mathbb{Z}})$$

Logo, $(x, z) \in R$.

PORTANTO, R É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA SOBRE $\mathbb{Z}$. #

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, *onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Exemplos

3) Seja $A = \boxed{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}$, *onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Para* $(a, b), (c, d) \in A$,

$$S \subseteq A \times A = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in A\}$$

$$\alpha \in A \Rightarrow \alpha = (a, b)$$

$$\beta \in A \Rightarrow \beta = (c, d)$$

$$(\underline{(a, b)}, \underline{(c, d)})$$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*, onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*. Para* $(a, b), (c, d) \in A$*, considere a seguinte relação*

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, considere a seguinte relação

$$S = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid ad = bc\}.$$

Mostre que S é uma relação de equivalência sobre A.

PROVA: i) SEJA $x \in A$. ASSIM $x = (a, b)$. LOGO, $(x, x) = ((a, b), (a, b)) \in S$ POIS,

$$ab = ba = ab \checkmark$$

(c) SUPONHA QUE $((a,b),(c,d)) \in S$.

DAÍ

$$ad = bc.$$

x y

$(x,y) \Rightarrow (y,x)$

ASSIM $((c,d),(a,b)) \in S$ POIS

$$cb = bc = ad = da.$$

iii) SUPONHA QUE $((a, b), (c, d)) \in S$

E $((c, d), (e, f)) \in S$. DAÍ

$ad = bc$ $\times f \neq 0$

$cf = de$

ASSIM

$adf = bcf$

$adf = bde$

$$adf - bde = 0$$

$$\underline{(af - be)}d = 0 \quad , d \neq 0$$

$$af - be = 0$$

$$af = be$$

Logo, $((a,b),(e,f)) \in S$

PORTANTO, S É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊN-CIA SOBRE $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

#