

# Teoria de Conjuntos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

13 de junho de 2020

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

$$x \in A$$



Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

Além disso, para dois elementos  $x, y \in A$ , sempre ocorre:

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

Além disso, para dois elementos  $x, y \in A$ , sempre ocorre:

$$x = y$$

Um conjunto é uma “coleção” ou “família” de elementos.

Denotaremos os conjuntos por letras maiúscula e os elementos de um dado conjunto por letras minúsculas.

Seja  $A$  um conjunto, para indicar que  $x$  é um elemento de  $A$ , escrevemos:

$$x \in A.$$

Para dizer que um elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ , escrevemos:

$$x \notin A.$$

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$ .

Dado um conjunto  $A$  e  $x$  um elemento, temos:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

Além disso, para dois elementos  $x, y \in A$ , sempre ocorre:

$$x = y \text{ ou } x \neq y$$

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:



Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- 1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.
- 2)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros não negativos.

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- 1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.
- 2)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros não negativos.
- 3)  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros.

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- 1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.
- 2)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros não negativos.
- 3)  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros.
- 4)  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$  o conjunto dos números racionais.

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- 1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.
- 2)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros não negativos.
- 3)  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros.
- 4)  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$  o conjunto dos números racionais.
- 5)  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais.

Um conjunto  $A$  pode ser dado pela simples listagem dos seus elementos, entre chaves:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\textit{verdade}, \textit{falso}\}.$$

Ou pela descrição das propriedades dos seus elementos, também entre chaves:

$$A = \{n \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- 1)  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.
- 2)  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros não negativos.
- 3)  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros.
- 4)  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$  o conjunto dos números racionais.
- 5)  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais.
- 6)  $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$  o conjunto dos números complexos.

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ ,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais***



## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ .*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$*



## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ .*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ .*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .*

## Definição

*Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .*

## Exemplo

*Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .*

## Definição

*Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$*

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ .



## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ . Ou seja, se para todo elemento  $x \in A$ ,

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ . Ou seja, se para todo elemento  $x \in A$ , temos  $x \in B$ .

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ . Ou seja, se para todo elemento  $x \in A$ , temos  $x \in B$ . Nesse caso, escrevemos  $A \subseteq B$  (ou  $A \subset B$ )

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ . Ou seja, se para todo elemento  $x \in A$ , temos  $x \in B$ . Nesse caso, escrevemos  $A \subseteq B$  (ou  $A \subset B$ ) ou  $B \supseteq A$  (ou  $B \supset A$ ).

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **iguais** se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, para todo  $x \in A$  também vale que  $x \in B$  e para todo  $y \in B$  também vale que  $y \in A$ . Se  $A$  e  $B$  são iguais, escrevemos  $A = B$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ ,  $B = \{3, 2, 1, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$  e  $D = \{2, 3\}$ . Então temos  $A = B$ . Agora como  $1 \in C$  e  $1 \notin D$  então  $C \neq D$ .

## Definição

Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  **está contido** em  $B$  ou que  $B$  **contém**  $A$  se todo elemento de  $A$  for elemento de  $B$ . Ou seja, se para todo elemento  $x \in A$ , temos  $x \in B$ . Nesse caso, escrevemos  $A \subseteq B$  (ou  $A \subset B$ ) ou  $B \supseteq A$  (ou  $B \supset A$ ).

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .



## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

4)  $C \subseteq A$

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

4)  $C \subseteq A$

## Observação:

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$*

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

4)  $C \subseteq A$

## Observação:

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  para que  $A$  **não esteja contido em**  $B$  basta

## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

4)  $C \subseteq A$

## Observação:

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  para que  $A$  **não esteja contido em**  $B$  basta que exista  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ .



## Exemplos

Sejam  $A = \{1, 2, 3, x, y, z\}$ ,  $B = \{x, y\}$  e  $C = \{x, y, z\}$ .

1)  $A \not\subseteq B$  pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

2)  $B \subsetneq A$

3)  $B \subseteq C$

4)  $C \subseteq A$

## Observação:

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  para que  $A$  **não esteja contido em**  $B$  basta que exista  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ . Nesse caso escrevemos  $A \not\subseteq B$ .

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma:

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,}$$

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B$$

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$



Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

## Proposição

*Dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos:*

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

## Proposição

*Dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos:*

*i)  $A \subseteq A$  (Reflexividade)*

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

## Proposição

*Dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos:*

- i)  $A \subseteq A$  (Reflexividade)*
- ii) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ , então  $A = B$ . (Antissimetria)*

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

## Proposição

*Dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos:*

- i)  $A \subseteq A$  (Reflexividade)*
- ii) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ , então  $A = B$ . (Antissimetria)*
- iii) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ . (Transitividade)*

Pela definição de continência de conjuntos, podemos reescrever a igualdade de conjuntos, da seguinte forma: dados dois conjuntos  $A$  e  $B$

$$A = B \quad \text{se, e somente se,} \quad A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A.$$

Ou seja,

$$\text{se } A = B \text{ então } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Além disso,

$$\text{se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } A = B.$$

Quando  $A$  e  $B$  não são iguais, escrevemos  $A \neq B$ .

## Proposição

*Dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos:*

- i)  $A \subseteq A$  (Reflexividade)*
- ii) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ , então  $A = B$ . (Antissimetria)*
- iii) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ . (Transitividade)*

Considere os seguintes conjuntos:

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$



Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ .

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ .

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin A$ .



Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin A$ . Mas por definição, o conjunto vazio não contém elementos.

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin A$ . Mas por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo a existência de  $x \in \emptyset$  é uma contradição.

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin A$ . Mas por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo a existência de  $x \in \emptyset$  é uma contradição. Tal contradição surgiu por termos suposto que  $\emptyset \not\subseteq A$ .

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, \dots\}.$$

Neste caso,  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq A$ . Portanto, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , nem sempre temos  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ .

## Proposição

*Seja  $A$  um conjunto. Então  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Prova:** Suponha que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Logo existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin A$ . Mas por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo a existência de  $x \in \emptyset$  é uma contradição. Tal contradição surgiu por termos suposto que  $\emptyset \not\subseteq A$ . Portanto,  $\emptyset \subseteq A$ , como queríamos demonstrar. ■