# Homomorfismo de Grupos - Continuação

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

5 de novembro de 2020

## Definição

*Sejam* $(G, *)$,

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos.*

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo***

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel***

## Definição

*Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f: G \to H$ um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de $f$ e denota-se por*

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de* $f$ *e denota-se por* $N(f)$

## Definição

*Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de $f$ e denota-se por $N(f)$ ou* $\ker(f)$

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de* $f$ *e denota-se por* $N(f)$ *ou* $\ker(f)$ *o seguinte subconjunto de* $G$*:*

## Definição

*Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de $f$ e denota-se por $N(f)$ ou $\ker(f)$ o seguinte subconjunto de $G$:*

$$\ker(f) =$$

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de* $f$ *e denota-se por* $N(f)$ *ou* $\ker(f)$ *o seguinte subconjunto de* $G$*:*

$$\ker(f) = \{x \in G$$

## Definição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Chama-se de* ***núcleo*** *ou* ***kernel*** *de* $f$ *e denota-se por* $N(f)$ *ou* $\ker(f)$ *o seguinte subconjunto de* $G$*:*

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 1_H\}.$$

## Exemplos

*1) Considere o homomorfismo* $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$

## Exemplos

*1) Considere o homomorfismo* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dado por* $f(x) = i^x$.

$f(0) = i^0 = 1$

$f(4) = i^4 = 1$

$f$ NÃO É INJETORA.

## Exemplos

1) *Considere o homomorfismo* $f : \mathbb{Z} \to \boxed{\mathbb{C}^*}$ *dado por* $f(x) = i^x$. *O kernel de f é:*

$\ker(f) = \{ x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = 1 \}$

$f(x) = 1$

$i^x = 1 \iff x = 4n ; n \in \mathbb{Z}$

$\ker(f) = \{ 4n \mid n \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{Z}$

## Exemplos

*2) Considere o homomorfismo* $g : \underbrace{\mathbb{R}_+^*} \to \mathbb{R}$

## Exemplos

2) *Considere o homomorfismo* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dado por* $g(x) = \ln(x)$.

$\ker g = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid g(x) = 0\}$

$g(x) = 0$

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \Leftrightarrow x = 1$

$\ker g = \{1\}$.

## Exemplos

*3) Considere o homomorfismo* $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

## Exemplos

*3) Considere o homomorfismo* $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *dado por* $h(x) = \overline{x}$,

## Exemplos

3) *Considere o homomorfismo* $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *dado por* $h(x) = \bar{x}$, $m > 0$ *fixo.*

## Exemplos

3) *Considere o homomorfismo* $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *dado por* $h(x) = \bar{x}$, $m > 0$ *fixo. O kernel de h é:*

$$\ker h = \{x \in \mathbb{Z} \mid h(x) = \bar{0}\}$$

$$h(x) = \bar{0}$$

$$\bar{x} = \bar{0} \iff x \equiv 0 \pmod{m}$$

$$x = mk, \ k \in \mathbb{Z}$$

$\ker h = \{ mn \mid n \in \underline{\mathbb{Z}} \}$

$h(0) = \bar{0}$

$h(\overset{\#}{m}) = \bar{m} = \bar{0}$

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$,

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos.*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo de grupos. Então:*

## Proposição

*Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então:*

*i)* $\ker(f)$ *é um subgrupo de* $G$.

## Proposição

*Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então:*

i) $\ker(f)$ é um subgrupo de $G$.

ii) $f$ é um monomorfismo se, e somente se, $\boxed{\ker(f) = \{1_G\}}$.

$K \subseteq G$ é SUBGRUPO SE:

i) $K \neq \emptyset$ ;

ii) $x^{-1} \in K$, PARA TODO $x \in K$

iii) $x*y \in K$ PARA TODOS $x, y \in K$

PROVA: i) COMO $f$ É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS, ENTÃO $f(1_G) = 1_H$, LOGO $1_G \in \ker f$. OU SEJA, $\ker f \neq \emptyset$.

ΑΓΟΝΑ ΣΕ ΤΑΜ $x, y \in \ker f$.

ΔΑ;

- $f(x) = 1_H$

  $f(y) = 1_H$.

LOGO,

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} = 1_A^{-1} = 1_H$$

$$f(x * y) = f(x) \Delta f(y) = 1_H \Delta 1_H = 1_H$$

E ASSIM $x^{-1} \in Ker(f)$ E $xy \in Ker(f)$.

PORTANTO, $Ker(f)$ É UM SUBGRUPO DE $G$.

ii) SUPONHA QUE $f$ É um HOMOMORFISMO INJETOR.

SEJA $x \in \ker(f)$. DAÍ

$$f(x) = 1_H = f(1_G)$$

$$f(x) = f(y) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$$

MAS $f$ É INJETORA, LOGO

$x = 1_G$. DAÍ $\boxed{\ker(f) = \{1_G\}.}$

AGORA SUPONHA QUE $\ker(f) = \{1_G\}$

SEJAM $x, y \in G$ TAIS QUE

$$\rightarrow f(\overset{H}{\overset{\in}{x}}) = f(\overset{H}{\overset{\in}{y}}) \cdot \triangle [f(y)]^{-1}$$

Assim

$$f(x) \triangle \underset{\overset{\shortparallel}{f(y^{-1})}}{[f(y)]^{-1}} = \underbrace{f(y) \triangle [f(y)]^{-1}}_{e_H}$$

$$f(x) \star f(y^{-1}) = 1_H$$

$$f(\underbrace{x \star y^{-1}}) = \underline{1}_H$$

E ENTÃO $x \star y^{-1} \in \ker(f) = \{1_G\}$.

DA'

$$x * y^{-1} = 1_G \quad (* \, y)$$

$$x * (\underbrace{y^{-1} * y}_{1_G}) = 1_G * y$$

$$\rightarrow x = y$$

LOGO, $f$ É INJETORA. #

$(H, \cdot)$; $(J, \circ)$; $(L, \cdot)$

## Proposição

*Sejam $H$, $J$ e $L$ grupos.*

## Proposição

*Sejam $H$, $J$ e $L$ grupos. Se $f : H \to J$*

## Proposição

*Sejam $H$, $J$ e $L$ grupos. Se $f : H \to J$ e $g : J \to L$*

## Proposição

*Sejam $H$, $J$ e $L$ grupos. Se $f : H \to J$ e $g : J \to L$ são homomorfismos de grupos,*

## Proposição

*Sejam $H$, $J$ e $L$ grupos. Se $f: H \to J$ e $g: J \to L$ são homomorfismos de grupos, então $g \circ f: H \to L$*

$(g \circ f)(xy) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$

## Proposição

*Sejam H, J e L grupos. Se $f : H \to J$ e $g : J \to L$ são homomorfismos de grupos, então $g \circ f : H \to L$ também é um homomorfismo de grupos.*

PROVA: SEJAM $x, y \in H$. TEMOS

$(g \circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(\underbrace{f(x)}_{\in J} \cdot \underbrace{f(y)}_{\in J})$

$= g(f(x)) \cdot g(f(y)) =$

$= (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$

PORTANTO, $g \circ f$ É UM HOMO-

MORFISMO DE GRUPOS. #

## Corolário

*Se $f$ e $g$ são homomorfismo*

## Corolário

*Se $f$ e $g$ são homomorfismo injetores*

## Corolário

*Se $f$ e $g$ são homomorfismo injetores (sobrejetores), então $g \circ f$*

## Corolário

*Se $f$ e $g$ são homomorfismo injetores (sobrejetores), então $g \circ f$ também é um homomorfismo injetor*

## Corolário

*Se $f$ e $g$ são homomorfismo injetores (sobrejetores), então $g \circ f$ também é um homomorfismo injetor (sobrejetor).*

## Proposição

*Se* $f: G \to H$ *é um isomorfismo de grupos,*

## Proposição

*Se* $f: G \to H$ *é um isomorfismo de grupos, então* $f^{-1}: H \to G$

## Proposição

*Se $f : G \to H$ é um isomorfismo de grupos, então $f^{-1} : H \to G$ também é um isomorfismo de grupos.*

PROVA: COMO $f: G \to H$ É BIJETORA, ENTÃO $f^{-1}: H \to G$ EXISTE E É TAMBÉM BIJETORA.

MOSTREMOS QUE $f^{-1}$ É UM

$$f^{-1}(y_1 \underset{\Delta}{\Delta} y_2) = f^{-1}(y_1) \underset{*}{*} f^{-1}(y_2)$$

HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

ASSIM SEJAM $y_1, y_2 \in H$.

COMO $f: G \to H$ É SOBREJETORA,

EXISTEM $x_1, x_2 \in G$ TAIS QUE

$f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

ASSIM

$\rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1$

$\rightarrow f^{-1}(y_2) = x_2$

É então

$$f^{-1}(y_1 \triangle y_2) = f^{-1}(f(x_1) \triangle f(x_2)) =$$

$$= f^{-1}(f(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 =$$

$$= \underbrace{f^{-1}(y_1)} * \underbrace{f^{-1}(y_2)}$$

OU SEJA, $f^{-1}$ É UM HOMOMOR-
FISMO DE GRUPOS.

PORTANTO, $f^{-1}$ É UM ISOMOR-
FISMO DE GRUPOS. #