

Anéis - Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

2 de outubro de 2020

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes)

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot .

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Observação:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação \oplus por $+$ e a operação \otimes por \cdot e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.*

- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.*
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.
- iii) Para todo $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

- i) O elemento neutro é único.
- ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.
- iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1 ,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2 ,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \dots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geq 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \dots + (-x_n).$$

Proposição

v) *Para todos α ,*

Proposição

v) *Para todos α , x ,*

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

vii) *Para todos x ,*

Proposição

vii) *Para todos $x, y \in A$,*

Proposição

vii) *Para todos $x, y \in A$, temos*

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y)$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$$

Proposição

vii) *Para todos $x, y \in A$, temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos x ,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

$$x \cdot y$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1 ,

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A .

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A . Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1 ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

y_1

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x ,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x , isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x , ou seja, $-(-x) = x$.

ii) Segue usando indução sobre n .

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

- ii) Segue usando indução sobre n .
- iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

- ii) Segue usando indução sobre n .
- iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α .

- ii) Segue usando indução sobre n .
- iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

- ii) Segue usando indução sobre n .
- iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí
$$x = 0_A$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha]$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

ii) Segue usando indução sobre n .

iii) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α . Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

ii) Temos

ii) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y)$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y)$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y]$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-(x \cdot y)$

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

iv) Basta usar o caso anterior.

ii) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

iii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

iv) Basta usar o caso anterior.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis:

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A ,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.
- 3) No anel \mathbb{Z} ,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.
- 3) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.
- 3) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de \mathbb{Z} .

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Exemplos

- 1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A , que são chamados de **subanéis triviais**.
- 2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.
- 3) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de \mathbb{Z} .

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Prova:

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Prova:

Exemplos

1) $Em(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.

Exemplos

2) No anel \mathbb{Z} ,

Exemplos

2) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

Exemplos

2) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de \mathbb{Z} .

Exemplos

2) No anel \mathbb{Z} , o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de \mathbb{Z} .

Exemplos

3) *No anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$x \star y = x + y - 8$$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y - 8 \\ x \odot y &= x + y - \frac{xy}{8}. \end{aligned}$$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$x \star y = x + y - 8$$

$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y - 8 \\ x \odot y &= x + y - \frac{xy}{8}. \end{aligned}$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$\begin{aligned}x \star y &= x + y - 8 \\x \odot y &= x + y - \frac{xy}{8}.\end{aligned}$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ onde as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y - 8 \\ x \odot y &= x + y - \frac{xy}{8}. \end{aligned}$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$