Subgrupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

27 de outubro de 2020

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo.*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Se* G *é um conjunto com uma quantidade finita de elementos,*

Definição

*Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um **grupo finito**.*

Definição

*Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um **grupo finito**. Denotamos por $|G|$*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de* ***ordem*** *de G*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Se* G *é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que* G *é um* ***grupo finito****. Denotamos por* $|G|$ *o número de elementos de* G *e que será chamado de* ***ordem*** *de* G *ou* ***cardinalidade*** *de* G*.*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Se* G *é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que* G *é um* ***grupo finito****. Denotamos por* $|G|$ *o número de elementos de* G *e que será chamado de* ***ordem*** *de* G *ou* ***cardinalidade*** *de* G*. Quando o conjunto* G *não é finito,*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de* ***ordem*** *de G ou* ***cardinalidade*** *de G. Quando o conjunto G não é finito, dizemos que G é um* ***grupo infinito****.*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de* ***ordem*** *de G ou* ***cardinalidade*** *de G. Quando o conjunto G não é finito, dizemos que G é um* ***grupo infinito****.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}_m, +)$ *é um grupo finito para todo* $m > 1$

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de* ***ordem*** *de G ou* ***cardinalidade*** *de G. Quando o conjunto G não é finito, dizemos que G é um* ***grupo infinito****.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo finito para todo $m > 1$ e $|G| = m$.

Definição

*Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um **grupo finito**. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de **ordem** de G ou **cardinalidade** de G. Quando o conjunto G não é finito, dizemos que G é um **grupo infinito**.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}_m, +)$ *é um grupo finito para todo* $m > 1$ *e* $|G| = m$.

2) $(S_n, \circ)$ *é um grupo finito*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Se G é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que G é um ***grupo finito****. Denotamos por $|G|$ o número de elementos de G e que será chamado de* ***ordem*** *de G ou* ***cardinalidade*** *de G. Quando o conjunto G não é finito, dizemos que G é um* ***grupo infinito****.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}_m, +)$ *é um grupo finito para todo* $m > 1$ *e* $|G| = m$.
2) $(S_n, \circ)$ *é um grupo finito e* $|G| = n!$ *elementos.*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Se* G *é um conjunto com uma quantidade finita de elementos, dizemos que* G *é um* ***grupo finito****. Denotamos por* $|G|$ *o número de elementos de* G *e que será chamado de* ***ordem*** *de* G *ou* ***cardinalidade*** *de* G*. Quando o conjunto* G *não é finito, dizemos que* G *é um* ***grupo infinito****.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}_m, +)$ *é um grupo finito para todo* $m > 1$ *e* $|G| = m$*.*

2) $(S_n, \circ)$ *é um grupo finito e* $|G| = n!$ *elementos.*

3) $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo infinito.*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo.*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de ***subgrupo*** *de G*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é chamado de* ***subgrupo*** *de* G *se, e somente se,* $(H, *)$

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é chamado de* ***subgrupo*** *de* G *se, e somente se,* $(H, *)$ *é um grupo.*

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de ***subgrupo*** *de G se, e somente se, $(H, *)$ é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ um grupo.

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de ***subgrupo*** *de G se, e somente se, $(H, *)$ é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de ***subgrupo*** *de G se, e somente se, $(H, *)$ é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é um subgrupo de G

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é chamado de* ***subgrupo*** *de* G *se, e somente se,* $(H, *)$ *é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é um subgrupo de* G *se, e somente se*

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é chamado de* ***subgrupo*** *de* G *se, e somente se,* $(H, *)$ *é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é um subgrupo de* G *se, e somente se*

i) $x^{-1} \in H$,

Definição

*Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de **subgrupo** de G se, e somente se, $(H, *)$ é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é um subgrupo de G se, e somente se

i) $x^{-1} \in H$, *para todo* $x \in H$;

ii) $x * y \in H$,

Definição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é chamado de ***subgrupo*** *de G se, e somente se, $(H, *)$ é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é um subgrupo de G se, e somente se

i) $x^{-1} \in H$, *para todo* $x \in H$;

ii) $x * y \in H$, *para todos* x, $y \in H$.

Definição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é chamado de* ***subgrupo*** *de* G *se, e somente se,* $(H, *)$ *é um grupo.*

Proposição

Seja $(G, *)$ *um grupo. Um subconjunto não vazio* $H \subseteq G$ *é um subgrupo de* G *se, e somente se*

i) $x^{-1} \in H$*, para todo* $x \in H$*;*

ii) $x * y \in H$*, para todos* x*,* $y \in H$*.*

Prova:

Exemplos

1) Dado $(G, *)$ *grupo,*

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$

Exemplos

1) Dado $(G, *)$ grupo, $H = \{e\}$ e $H = G$

Exemplos

1) Dado $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*,*

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*

Exemplos

1) Dado $(G, *)$ grupo, $H = \{e\}$ e $H = G$ são subgrupos de G, chamados de ***subgrupos triviais****.*

2) Seja $(\mathbb{Z}, +)$ um grupo.

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*

2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*

Exemplos

1) *Dado* $(G,*)$ *grupo,* $H=\{e\}$ *e* $H=G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z},+)$ *um grupo. Tomando* $H=m\mathbb{Z}$*, onde* $m>1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*
3) $G=U(\mathbb{Z}_8)=\{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7}\}$.

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*
3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo*

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*
3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo com* $|G| = 4$*.*

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*

2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*

3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo com* $|G| = 4$*. Além disso,*

Exemplos

1) *Dado $(G, *)$ grupo, $H = \{e\}$ e $H = G$ são subgrupos de G, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja $(\mathbb{Z}, +)$ um grupo. Tomando $H = m\mathbb{Z}$, onde $m > 1$, então H é subgrupo de $\mathbb{Z}$.*
3) *$G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Então $(G, \odot)$ é um grupo com $|G| = 4$. Além disso,*

$$H_1 = \{\overline{1}, \overline{3}\}$$

MAT-UnB

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*
3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo com* $|G| = 4$*. Além disso,*

$$H_1 = \{\overline{1}, \overline{3}\}$$
$$H_2 = \{\overline{1}, \overline{5}\}$$

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*

2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*

3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo com* $|G| = 4$*. Além disso,*

$$H_1 = \{\overline{1}, \overline{3}\}$$
$$H_2 = \{\overline{1}, \overline{5}\}$$
$$H_3 = \{\overline{1}, \overline{7}\}$$

Exemplos

1) *Dado* $(G, *)$ *grupo,* $H = \{e\}$ *e* $H = G$ *são subgrupos de* G*, chamados de* ***subgrupos triviais****.*
2) *Seja* $(\mathbb{Z}, +)$ *um grupo. Tomando* $H = m\mathbb{Z}$*, onde* $m > 1$*, então* H *é subgrupo de* $\mathbb{Z}$*.*
3) $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$*. Então* $(G, \odot)$ *é um grupo com* $|G| = 4$*. Além disso,*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\overline{1}, \overline{3}\} \\ H_2 &= \{\overline{1}, \overline{5}\} \\ H_3 &= \{\overline{1}, \overline{7}\} \end{aligned}$$

   São subgrupos de G*.*
4) *Considere o grupo aditivo* $M_2(\mathbb{R})$*. Mostre que o conjunto*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}$$

   é um subgrupo de $M_2(\mathbb{R})$*.*

Seja $(G, *)$ um grupo.

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) =$

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) = (G, \cdot)$.

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) = (G, \cdot)$. Assim, dados $x,\ y \in G$ vamos denotar

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) = (G, \cdot)$. Assim, dados x, $y \in G$ vamos denotar

$$x * y =$$

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) = (G, \cdot)$. Assim, dados $x,\ y \in G$ vamos denotar

$$x * y = x \cdot y =$$

Seja $(G, *)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G, *) = (G, \cdot)$. Assim, dados $x, y \in G$ vamos denotar

$$x * y = x \cdot y = xy.$$

Nesse caso vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Seja $(G,*)$ um grupo. Para simplificar a notação vamos adotar uma notação multiplicativa e escrever $(G,*) = (G,\cdot)$. Assim, dados $x,\ y \in G$ vamos denotar

$$x * y = x \cdot y = xy.$$

Nesse caso vamos dizer simplesmente que G é um grupo.

Proposição

Seja G um grupo. Dado $H \subset G$ um subgrupo defina

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } x^{-1}y \in H$$

para todos $x, y \in G$.

1) *A relação $\sim$ sobre G definida acima é uma relação de equivalência.*
2) *Se $a \in G$, então a classe de equivalência determinada por a é o conjunto*
$$aH = \{ah \mid h \in H\}.$$