

# Homomorfismo de Grupos - Continuação

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

5 de novembro de 2020

## Definição

*Sejam  $(G, *)$ ,*

## Definição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos*

## Definição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos.*

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo**

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel**

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$



## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$  ou  $\ker(f)$

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$  ou  $\ker(f)$  o seguinte subconjunto de  $G$ :

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$  ou  $\ker(f)$  o seguinte subconjunto de  $G$ :

$$\ker(f) =$$

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$  ou  $\ker(f)$  o seguinte subconjunto de  $G$ :

$$\ker(f) = \{x \in G$$

## Definição

Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Chama-se de **núcleo** ou **kernel** de  $f$  e denota-se por  $N(f)$  ou  $\ker(f)$  o seguinte subconjunto de  $G$ :

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 1_H\}.$$

## Exemplos

1) Considere o homomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$

## Exemplos

1) Considere o homomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$  dado por  $f(x) = i^x$ .

## Exemplos

1) Considere o homomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$  dado por  $f(x) = i^x$ . O kernel de  $f$  é:



## Exemplos

2) Considere o homomorfismo  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

## Exemplos

2) Considere o homomorfismo  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $g(x) = \ln(x)$ .

## Exemplos

2) Considere o homomorfismo  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $g(x) = \ln(x)$ . O núcleo de  $g$  é:

## Exemplos

3) Considere o homomorfismo  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$

## Exemplos

3) Considere o homomorfismo  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dado por  $h(x) = \bar{x}$ ,

## Exemplos

3) Considere o homomorfismo  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dado por  $h(x) = \bar{x}$ ,  $m > 0$  fixo.

## Exemplos

3) Considere o homomorfismo  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dado por  $h(x) = \bar{x}$ ,  $m > 0$  fixo. O kernel de  $h$  é:

## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,*



## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos*

## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos.*

## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Então:*

## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Então:*

*i)  $\ker(f)$  é um subgrupo de  $G$ .*

## Proposição

*Sejam  $(G, *)$ ,  $(H, \triangle)$  grupos e  $f: G \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos. Então:*

- i)  $\ker(f)$  é um subgrupo de  $G$ .*
- ii)  $f$  é um monomorfismo se, e somente se,  $\ker(f) = \{1_G\}$ .*

## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos.*

## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos. Se  $f: H \rightarrow J$*

## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos. Se  $f: H \rightarrow J$  e  $g: J \rightarrow L$*



## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos. Se  $f: H \rightarrow J$  e  $g: J \rightarrow L$  são homomorfismos de grupos,*

## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos. Se  $f: H \rightarrow J$  e  $g: J \rightarrow L$  são homomorfismos de grupos, então  $g \circ f: H \rightarrow L$*

## Proposição

*Sejam  $H$ ,  $J$  e  $L$  grupos. Se  $f: H \rightarrow J$  e  $g: J \rightarrow L$  são homomorfismos de grupos, então  $g \circ f: H \rightarrow L$  também é um homomorfismo de grupos.*

## Corolário

*Se  $f$  e  $g$  são homomorfismo*

## Corolário

*Se  $f$  e  $g$  são homomorfismo injetores*

## Corolário

*Se  $f$  e  $g$  são homomorfismo injetores (sobrejetores), então  $g \circ f$*

## Corolário

*Se  $f$  e  $g$  são homomorfismo injetores (sobrejetores), então  $g \circ f$  também é um homomorfismo injetor*

## Corolário

*Se  $f$  e  $g$  são homomorfismo injetores (sobrejetores), então  $g \circ f$  também é um homomorfismo injetor (sobrejetor).*



## Proposição

*Se  $f: G \rightarrow H$  é um isomorfismo de grupos,*

## Proposição

*Se  $f: G \rightarrow H$  é um isomorfismo de grupos, então  $f^{-1}: H \rightarrow G$*

## Proposição

*Se  $f: G \rightarrow H$  é um isomorfismo de grupos, então  $f^{-1}: H \rightarrow G$  também é um isomorfismo de grupos.*