Anéis - Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

14 de outubro de 2020

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade***

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x*,* $y \in A$*, se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade***

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x, y \in A$*, se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio****.*

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos*

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x, y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$, *então* x *e* y *são chamados de*

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x, y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$, *então* x *e* y *são chamados de* ***divisores próprios de zero***.

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$, *então* x *e* y *são chamados de* ***divisores próprios de zero***.

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ não é anel de integridade,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ não é anel de integridade, por exemplo, em $\mathbb{Z}_4$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$,

Exemplos

1) *Os anéis* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) *Em geral* $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto*

$$\overline{2} \otimes \overline{2}$$

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ não é anel de integridade, por exemplo, em $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, no entanto

$$\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4}$$

Exemplos

1) *Os anéis* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) *Em geral* $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto*

$$\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}.$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade,*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. Logo, se m não é primo,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. Logo, se m não é primo, então $\mathbb{Z}_m$ não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\overline{x}$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$,

Exemplos

3) *$M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. Logo, se m não é primo, então $\mathbb{Z}_m$ não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ tais que $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, ou seja, $xy \equiv 0 \pmod{p}$.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se,*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se,* m *é primo.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se,* m *é primo.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos x, $y \in I$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de ***ideal*** *de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos $x, y \in I$*, temos* $x - y \in I$*.*

ii) Para todo $\alpha \in A$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos $x, y \in I$*, temos* $x - y \in I$*.*

ii) Para todo $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$*, temos* $\alpha \cdot x \in I$*.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de ***ideal*** *de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos $x, y \in I$*, temos* $x - y \in I$*.*

ii) Para todo $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$*, temos* $\alpha \cdot x \in I$*.*

Observação:

Quando $I = A$ *ou* $I = \{0_A\}$*, dizemos que* I

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

*Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I é um **ideal trivial**.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:*

i) para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

*Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I é um **ideal trivial**.*

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação.

Exemplos

1) *Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z}$$

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$.

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$*. Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$*.*

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*
$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$,

Exemplos

1) *Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de $\mathbb{Z}$.

2) *No anel $\mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo,*

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*
$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo, os únicos ideais são os triviais:* $\{\overline{0}\}$

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. Então I é um ideal de $\mathbb{Z}$.

2) No anel $\mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo, os únicos ideais são os triviais: $\{\overline{0}\}$ e $\mathbb{Z}_p$.

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo, os únicos ideais são os triviais:* $\{\overline{0}\}$ *e* $\mathbb{Z}_p$.

Proposição

Seja A um anel comutativo

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

iii) *Se* $1_A \in I$,

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

iii) Se $1_A \in I$, *então* $I = A$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

iii) Se $1_A \in I$, *então* $I = A$.

Prova:

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$
$$I_2 = \{\overline{0}, \overline{4}\}$$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$
$$I_2 = \{\overline{0}, \overline{4}\}$$

Definição

Seja I um ideal

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x ***é congruente a*** *y*

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I*

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x ***é congruente a*** *y* ***módulo*** *I quando $x - y \in I$.*

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x ***é congruente a*** *y* ***módulo*** *I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x ***é congruente a*** *y* ***módulo*** *I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$,

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x,\ y \in A$dizemos que x ***é congruente a*** *y* ***módulo*** *I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Prova:

Seja $y \in A$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y)$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) =$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$)

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

MAT-UnB

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de ***quociente do anel*** *A* ***pelo ideal*** *I.*

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de ***quociente do anel*** A ***pelo ideal*** I.

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) =$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} =$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1}$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A.

Exemplos

1) Seja A um anel com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A.

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$,

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única*

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, *para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalência*

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalênciae*

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalênciae*

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$*, para algum* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$*, para algum* $k \in \mathbb{Z}$*. Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,*

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$.

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$. *Portanto,*

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \mathbb{Z}_m.$$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$. *Portanto,*

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \mathbb{Z}_m.$$

Agora seja I ideal

Agora seja I ideal e A um anel.

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} =$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) =$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\frac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= \end{aligned}$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

para $x + I$,

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$\begin{gathered}(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I\end{gathered}$$

para $x + I,\ y + I \in \dfrac{A}{I}$.

Agora seja I ideal e A um anel. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$\begin{gathered}(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I\end{gathered}$$

para $x + I,\ y + I \in \dfrac{A}{I}$.

Verifiquemos que a soma

Verifiquemos que a soma e o produto

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I & \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I \\ &(x_2 + I) \oplus (y_2 + I) \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (x_1 + I) \oplus (y_1 + I) &= (x_1 + y_1) + I \\ (x_2 + I) \oplus (y_2 + I) &= (x_2 + y_2) + I \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (x_1 + I) \oplus (y_1 + I) &= (x_1 + y_1) + I \\ (x_2 + I) \oplus (y_2 + I) &= (x_2 + y_2) + I \end{aligned}$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$.

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo
$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo
$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Agora,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$

Agora,

$$
\begin{aligned}
(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I \\
(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I
\end{aligned}
$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$.

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade.*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*,*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade.

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ *e a unidade do produto*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ *e a unidade do produto é a classe* $1_A + I$*.*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ *e a unidade do produto é a classe* $1_A + I$*.*