Homomorfismo de Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

4 de novembro de 2020

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) =$$

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

H

Definição

Dados dois grupos $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

para todos $x, y \in G$.

Observação:

Sejam $(G, *)$

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$,

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) Se $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f: G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora,*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* f *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*

Observação:

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que f é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*

Observação:

3) *Se* $f : G \to H$ *é uma função sobrejetora,*

Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que f é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

Observação:

3) *Se $f : G \rightarrow H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que f é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \rightarrow H$ é uma função bijetora,*

Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que f é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que f é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

Observação:

3) *Se* $f : G \to H$ *é uma função sobrejetora, então dizemos que* f *é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se* $f : G \to H$ *é uma função bijetora, então dizemos que* f *é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

5) *Se* $f : G \to G$ *é uma função bijetora,*

Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que f é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que f é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

5) *Se $f : G \to G$ é uma função bijetora, então dizemos que f é um* ***automorfismo*** *de grupos.*

Exemplos

1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$

Exemplos

1) A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$

Exemplos

1) *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$

Exemplos

1) *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

SEJAM $x, y \in \mathbb{Z}$. ASSIM

$$f(x+y) = i^{x+y} = i^x \cdot i^y = f(x) \cdot f(y)$$

LOGO, f É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$

Exemplos

2) *A função* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

$\rightarrow f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Exemplos

2) A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$ é um homomorfismo de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ em $(\mathbb{R}, +)$.

DE FATO, DADOS $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ TEMOS

$f(\underbrace{x \cdot y}_{\in \mathbb{R}_+^*}) = \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

PORTANTO, f É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS. #

Exemplos

3) Sejam m *um inteiro positivo fixo.*

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$

Exemplos

3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$

$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$

Exemplos

3) *Sejam m um inteiro positivo fixo. A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \overline{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$.

DE FATO, DADOS $x, y \in \mathbb{Z}$ TEMOS

$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} \oplus \overline{y} = f(x) \oplus f(y)$

PORTANTO, f É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS. #

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,*

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $\boxed{z \in G}$ *um elemento fixado*

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso.*

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$

Exemplos

4) Sejam $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} f_z : G &\longrightarrow G \\ f_z(x) &= z^{-1} * x * z, \end{aligned}$$

f É HOMOMORFISMO

f É BIJETORA.

Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* z^{-1} *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$
$$f_z(x) = z^{-1} * x * z,$$

para todo $x \in G$*, é um isomorfismo de grupos.*

$$\underline{f(x*y)} = \underbrace{f(x)}\ \underline{*}\ \underbrace{f(y)}$$

DADOS $x, y \in G$ TEMOS

$$f(\overbrace{x*y}^{\in G}) = \underbrace{z^{-1} * (x*y) * z}$$

$$f(x) * f(y) = (z^{-1} * x * z) * (z^{-1} * y * z)$$

$$= z^{-1} * x * (\underbrace{z * z^{-1}}_{=e}) * y * z =$$

$$= g^{-1} * x * e * y * g = g^{-1} * (x * y) * g$$

LOGO

$$f(x * y) = f(x) * f(y),$$

ISTO É, f É UM HOMOMORFISMO DE GRUPOS.

AGORA DADOS $x, y \in G$ TAIS QUE

$$f(x) = f(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$$

TEMOS

$$z^{-1} * x * z = z^{-1} * y * z$$

$$\underbrace{z * z^{-1}}_{e} * x * z = \underbrace{z * z^{-1}}_{e} * y * z$$

$$x * z = y * z \qquad * z^{-1}$$

$$x * \underbrace{z * z^{-1}}_{e} = y * \underbrace{z * z^{-1}}_{e}$$

ASSIM $x = y$, ISTO É, f É INJETORA.

$\left[\rightarrow \overline{y \in G}, \overline{\text{EXISTE}}\ \overline{x \in G} \text{ T.Q } f(x) = y \text{ ?} \right.$

$\rightarrow z^{-1} * \underline{x} * z = y$?

$\left. \rightarrow x = \underline{z * y * z^{-1}} \in G ! \right]$

AGORA, DADO $y \in G$ TOME $x = z * y * z^{-1} \in G$.

ASSIM

$$f(x) = z^{-1} * x * z = \left(\underbrace{z^{-1} * (z)}_{e} * y * \underbrace{(z^{-1}) * z}_{e} \right) = y$$

OU SEJA, f É SOBREJETORA.
ENTÃO f É BIJETORA.

PORTANTO, f É UM ISOMORFISMO DE GRUPOS. #

Proposição

Sejam $(G, *)$,

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G e 1_H

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H,

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H, *respectivamente.*

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H*, respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H, *respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

ii) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$

Proposição

Sejam $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* 1_G *e* 1_H *os elementos neutros de* G *e* H, *respectivamente.*

i) $f(1_G) = 1_H$

ii) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ *para todo* $x \in G$.

$$\begin{cases} f(x) \triangle f(x^{-1}) = 1_H \\ f(x^{-1}) \triangle f(x) = 1_H \end{cases}$$

PROVA: i) COMO $f(1_G) \in H$ E 1_H É O ELEMENTO NEUTRO DE H TEMOS

$$f(1_G) \,\Delta\, 1_H = f(1_G) = f(\overline{1_G * 1_G})$$

$$\Delta\, f(1_G)^{-1} \quad f(1_G) \,\Delta\, 1_H = f(1_G) \,\Delta\, f(1_G)$$

DA :

$$\underbrace{f(1_G)^{-1} \Delta f(1_G)}_{1_H} \Delta 1_A = \underbrace{f(1_G)^{-1} \Delta f(1_G)}_{1_H} \Delta f(1_G)$$

$$1_H \Delta 1_A = 1_H \Delta \underline{f(1_G)}$$

$$f(1_G) = \underline{1_H} .$$

iii) SEJA $x \in G$ E x^{-1} O SEU INVERSO. DAÍ

$$\underbrace{f(x)}\,\Delta\,\underbrace{f(x^{-1})} = f(x * x^{-1}) = f(1_G) = 1_H$$

$$\underbrace{f(x^{-1})}\,\Delta\,\underbrace{f(x)} = f(x^{-1} * x) = f(1_G) = 1_H.$$

PORTANTO

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) . \quad \#$$

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos.

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$

$\rightarrow f^{-1}(I) = \{ x \in G \mid f(x) \in I \}$

Proposição

Sejam I é um subgrupo de H e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$ é um subgrupo de G.

$K \subseteq G$; i) $K \neq \phi$ ou $1_G \in K$

$\Rightarrow$ ii) $x^{-1} \in K$, PARA TODO $x \in K$

iii) $x * y \in K$, PARA TODOS $x, y \in K$.

PROVA: COMO I É SUBGRUPO DE H, ENTÃO $1_H \in I$. ALÉM DISSO, f É HOMOMORFISMO E ENTÃO $f(1_G) = 1_H \in I$. ASSIM $1_G \in f^{-1}(I)$

E ENTÃO $f^{-1}(I) \neq \emptyset$.

AGORA, SEJAM $x, y \in f^{-1}(I)$.

ENTÃO

$$f(x) \in I \quad \text{E} \quad f(y) \in I.$$

COMO I É SUBGRUPO DE H,

ENTÃO

$$f(x^{-1}) = \left(f(x)\right)^{-1} \in I$$

$$f(x * y) = f(x) \Delta f(y) \in I$$

E DO FATO DE f SER HOMO-MORFISMO SEGUE

$$f(\underline{x}^{-1}) \in \underline{I}$$

$$f(\underline{x * y}) \in I.$$

OU SEJA,

$$x^{-1} \in f^{-1}(I) \text{ e}$$

$$x \cdot y \in f^{-1}(I)$$

PORTANTO, $f^{-1}(I)$ É UM SUBGRUPO DE G. #