Anéis - Homomorfismos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

12 de outubro de 2020

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****,*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****,*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ anéis. Uma função $f : A \to B$ é chamada de um ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis***, *ou simplesmente* ***homomorfismo***, *se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis***, *ou simplesmente* ***homomorfismo***, *se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$

para todos $x,\ y \in A$.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Uma função* $f : A \to B$ *é chamada de um* ***homomorfismo de anéis****, ou simplesmente* ***homomorfismo****, se satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$

para todos $x, y \in A$.

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$,

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$*, são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$*, são homomorfismos de anéis:*

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$, *para todo* $x \in A$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis. Se* $f : A \to B$ *é um homomorfismo, então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$, *para todo* $x \in A$.

Prova:

Observação:

A condição (i) da proposição anterior

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde* A *e* B *são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$*,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, *onde* A e B *são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$, *então* f *não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de* $f(0_A) = 0_B$

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$*, onde* A *e* B *são anéis, não é um homomorfismo. Caso* $f(0_A) \neq 0_B$*, então* f *não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de* $f(0_A) = 0_B$ *e mesmo assim* f *não é um homomorfismo de anéis,*

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f : A \to B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$,

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais.*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ *e no entanto* f *não é um homomorfismo de anéis.*

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ *anéis com as operações usuais. A função*

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ *e no entanto* f *não é um homomorfismo de anéis.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

*i) f é um **epimorfismo***

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) f é um ***monomorfismo***

Definição

Seja $f\colon A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) f é um ***monomorfismo*** *se f for injetora.*

iii) f é um ***isomorfismo***

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) f é um ***monomorfismo*** *se f for injetora.*

iii) f é um ***isomorfismo*** *se f for bijetora.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

iii) *f é um **isomorfismo** se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um ***epimorfismo*** *se f for sobrejetora.*

ii) f é um ***monomorfismo*** *se f for injetora.*

iii) f é um ***isomorfismo*** *se f for bijetora.*

iv) Quando $A = B$ e f é um isomorfismo,

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

iii) *f é um **isomorfismo** se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um **automorfismo**.*

Definição

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) *f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.*

ii) *f é um **monomorfismo** se f for injetora.*

iii) *f é um **isomorfismo** se f for bijetora.*

iv) *Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um **automorfismo**.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por*

$$\ker(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel***

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo***

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo*** *de* f.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo*** *de* f*.*

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Exemplos

Determine o ***kernel*** *dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplos

*Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:*

i) $f : \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ *tal que*

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) *Seja* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ *um anel com as seguintes operações*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *O homomorfismo* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *é dado por* $f(a, b) = a$.

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Exemplos

iii) $f : \mathbb{Q} \to M_3(\mathbb{Q})$ *dada por*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Solução:

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \rightarrow B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A.

ii) f *é injetora*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

ii) f *é injetora se, e somente se,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de A.*

ii) f *é injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0_A\}$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de A.*

ii) *f é injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0_A\}$.

Prova:

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é ***inversível*** *ou que x* ***possui inverso***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é ***inversível*** *ou que x* ***possui inverso*** *se existe $y \in A$*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \cdot y = 1_A$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. Dado* $x \in A$*, dizemos que* x *é* ***inversível*** *ou que* x ***possui inverso*** *se existe* $y \in A$ *tal que*

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*, se existir,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*, se existir, é único.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento* $x \in A$*, se existir, é único.*

Prova:

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f \colon A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f\colon A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ anéis e seja $f: A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ *possui inverso multiplicativo,*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) *Se* A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) *Se* A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A *tem unidade, então* B *tem unidade e*

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A *tem unidade e* $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e seja* $f : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor de anéis.*

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ *possui inverso multiplicativo, então* $f(x)$ *tem inverso e*

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Prova: