Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

16 de setembro de 2020

Definição

Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Definição

*Seja A um conjunto não vazio A no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas soma e produto. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale que*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

*Essa propriedade é chamada **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$*, vale que*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

vii) ***Distributividade**: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

*Essa é a propriedade **distributiva do produto em relação à soma**.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *uma anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário****. O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A*.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ uma anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é uma anel.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$, $(\mathbb{Z}_m,\oplus,\otimes)$ *são anéis associativos, comutativos e com unidade.*

Exemplos

2) Consideremos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *as operações* $\oplus$ *e* $\otimes$ *definidas por*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ *é um anel comutativo e com unidade.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *uma anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$, $-(-x) = x$.

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) *Para todos* $a, x, y \in A$, *se* $a + x = a + y$, *então* $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$, $x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x$.

vii) *Para todos* $x, y \in A$, *temos* $x(-y) = (-x)y = -(xy)$.

viii) *Para todos* $x, y \in A$, $xy = (-x)(-y)$.

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $a + x = a + y$. Seja $-a$ o oposto de a daí

$$\begin{aligned} x &= 0_A + x \\ &= [(-a) + a] + x \\ &= (-a) + (a + x) \\ &= (-a) + (a + y) \\ &= [(-a) + a] + y \\ &= 0_A + y = y \end{aligned}$$

como queríamos.

vi) Temos $0_A + x \cdot 0_A = a \cdot 0_A = a(0_A + 0_A) = a \cdot 0_A + a \cdot 0_A$. Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x((-y) + y) = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.