Funções

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

*Uma **função***

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$,

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A*

Definição

Uma ***função*** $f: A \to B$, *de um conjunto* A *em um conjunto* B,

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$, *de um conjunto* A *em um conjunto* B, *é uma relação que associa os elementos de* A

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$*, de um conjunto* A *em um conjunto* B*, é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B

Definição

Uma ***função*** $f : A \rightarrow B$, *de um conjunto* A *em um conjunto* B, *é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

Definição

*Uma **função** $f : A \rightarrow B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$,

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1 \in B$

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2 \in B$

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$, *de um conjunto* A *em um conjunto* B, *é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, *existe* $y \in B$ *tal que* $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ *é tal que* $f(x) = y_1$ *e* $f(x) = y_2$ *com* y_1,

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

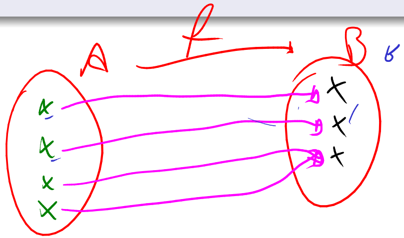
ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$,

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$*, de um conjunto* A *em um conjunto* B*, é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

i) *Para todo* $x \in A$*, existe* $y \in B$ *tal que* $f(x) = y$*.*

ii) *Se* $x \in A$ *é tal que* $f(x) = y_1$ *e* $f(x) = y_2$ *com* $y_1, y_2 \in B$*, então* $y_1 = y_2$*.*



Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem***

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio**

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$*, de um conjunto* A *em um conjunto* B*, é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$*, existe* $y \in B$ *tal que* $f(x) = y$*.*

ii) Se $x \in A$ *é tal que* $f(x) = y_1$ *e* $f(x) = y_2$ *com* $y_1, y_2 \in B$*, então* $y_1 = y_2$*.*

Nesse caso y *é chamado de* ***imagem*** *de* x *segundo* f*.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$.

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio**

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f.

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) *Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.*

ii) *Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.*

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\mathrm{Im}\,(f) =$$

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) *Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.*

ii) *Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com y_1, $y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.*

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x)$$

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$*, de um conjunto* A *em um conjunto* B*, é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$*, existe* $y \in B$ *tal que* $f(x) = y$*.*

ii) Se $x \in A$ *é tal que* $f(x) = y_1$ *e* $f(x) = y_2$ *com* $y_1, y_2 \in B$*, então* $y_1 = y_2$*.*

Nesse caso y *é chamado de* ***imagem*** *de* x *segundo* f*.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Definição

Uma ***função*** $f : A \to B$*, de um conjunto* A *em um conjunto* B*, é uma relação que associa os elementos de* A *com os elementos em* B *satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$*, existe* $y \in B$ *tal que* $f(x) = y$*.*

ii) Se $x \in A$ *é tal que* $f(x) = y_1$ *e* $f(x) = y_2$ *com* $y_1, y_2 \in B$*, então* $y_1 = y_2$*.*

Nesse caso y *é chamado de* ***imagem*** *de* x *segundo* f*.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\operatorname{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

é chamado **imagem** de f.

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\operatorname{dom}(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

é chamado **imagem** de f.

Exemplos

1) *Sejam* $A = \{0, 1, 2, 3\}$

Exemplos

1) *Sejam* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

$f : A \to B$

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. *Quais das seguintes relações são funções?*

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$*. Quais das seguintes relações são funções?*

a) $R_1 = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7)\}$

b) $R_2 = \{(0, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

c) $R_3 = \{(0, 4), (1, 5), (2, 7), (3, 8)\}$

d) $R_4 = \{(0, 5), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

SOLUÇÃO: a) $R_1 = \{(0,5); (1,6); (2,7)\}$

NÃO É FUNÇÃO POIS $3 \in A$ E

3 NÃO POSSUI UMA IMAGEM,

OU SETA, NÃO EXISTE UM PAR

ORDENADO $(3, y)$, COM $y \in B$,

TAL QUE $(3, y) \in R_1$.

b) $R_2 = \{(0,4); (1,5); (1,6); (2,7); (3,8)\}$

NÃO É FUNÇÃO POIS $(1,5), (1,6) \in R_2$

É NO ENTANTO, $5 \neq 6$.

c) $R_3 = \{ (0,4) ; (1,5) ; (2,7) ; (3,8) \}$

É UMA FUNÇÃO POIS SATISFAZ

AS DUAS CONDIÇÕES DA DEFI-

NIÇÃO DE FUNÇÃO.

d) $R_4 = \{(0,5); (1,5); (2,6); (3,7)\}$

É UMA FUNÇÃO POIS SATISFAZ
A DEFINIÇÃO.

Exemplos

2) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2\}$

3) $R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

4) $R_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \underline{y = x^2}\}$

$x^2 = y_1 \; , \; x^2 = y_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$

SOLUÇÃO: a) R_5 NÃO É FUNÇÃO

POIS $(1,1)$; $(1,-1) \in R_5$ UMA

VEZ QUE

$1^2 = 1^2$

$1^2 = (-1)^2$

É NO ENTANTO $1 \neq -1$. ASSIM FALHA A CONDIÇÃO (ii) DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.

b) R_6 NÃO É FUNÇÃO POIS

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in R_6$ UMA VEZ

QUE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

E NO ENTANTO $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. LOGO

FALHA A CONDIÇÃO (ii) DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.

c) R_7 É UMA FUNÇÃO POIS SATIS-

FAZ AS DUAS CONDIÇÕES DA

DEFINIÇÃO.

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dizemos que f é ***injetora***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dizemos que f é ***injetora*** *se dados x_1,*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dizemos que f *é* ***injetora*** *se dados* $x_1, x_2 \in A$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) =$*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$,*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente,*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dizemos que f é ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é* ***injetora***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dizemos que f é ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é* ***injetora*** *se dados x_1,*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$,*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$, então $\boxed{x_1 = x_2}$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

*ii) Dizemos que f é **sobrejetora***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) *Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$,*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dizemos que f é ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é* ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) Dizemos que f é ***sobrejetora*** *se para todo $y \in B$, existe $x \in A$*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dizemos que f é ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é* ***injetora*** *se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) Dizemos que f é ***sobrejetora*** *se para todo $y \in B$, $\boxed{\text{existe} \; x \in A}$ tal que $f(x) = y$.*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) *Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

iii) *Dizemos que f é **bijetora***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) *Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

iii) *Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora***

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) *Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

iii) *Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora***

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) *Dizemos que* f *é* ***injetora*** *se dados* $x_1, x_2 \in A$ *tais que* $f(x_1) = f(x_2)$, *então* $x_1 = x_2$. *De modo equivalente, dizemos que* f *é* ***injetora*** *se dados* $x_1, x_2 \in A$ *tais que* $x_1 \neq x_2$, *então* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) *Dizemos que* f *é* ***sobrejetora*** *se para todo* $y \in B$, *existe* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$.

iii) *Dizemos que* f *é* ***bijetora*** *se* f *for* ***injetora*** *e* ***sobrejetora*** *simultaneamente.*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) *Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f é **injetora** se dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

ii) *Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

iii) *Dizemos que f é **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora** simultaneamente.*

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras:

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras:

1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 3x + 1$

$y \in \mathbb{Z}$, EXISTE $x \in \mathbb{Z}$ TAL QUE

$f(x) = y$?

$3x + 1 = y$

$3x = y - 1$

$\boxed{y = 0}$

$x = \dfrac{y-1}{3} \notin \mathbb{Z}$

$-\dfrac{1}{3}$

SOLUÇÃO: SETAM $\boxed{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}}$ TAIS QUE

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \quad \dots \quad x_1 \overset{?}{=} x_2$$

ASSIM

$$3x_1 + \cancel{1} = 3x_2 + \cancel{1}$$

$$3(\underline{x_1 - x_2}) = 0$$

$\neq \quad \neq$

DAÍ $x_1 - x_2 = 0$, ISTO É, $\boxed{x_1 = x_2}$.

PORTANTO, f É UMA FUNÇÃO INJETORA.

AGORA f NÃO É SOBREJETORA

POIS PARA $y = 0 \in \mathbb{Z}$ NÃO EXISTE

$x \in \mathbb{Z}$ TAL QUE

$$f(x) = 0$$

UMA VEZ QUE

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

E ESSA EQUAÇÃO NÃO TEM SOLUÇÃO EM $\mathbb{Z}$.

MAT-UnB

$\otimes = \cdot \quad ; \quad \oplus = + \qquad \mathbb{Z}_m$

Exemplos

2) $g : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ *tal que* $g(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{2}\bar{x} + \bar{3}, \bar{4}\bar{y} + \bar{5})$

$(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$, Existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ T.Q

$g(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$

$(\bar{2}\bar{x} + \bar{3}, \bar{4}\bar{y} + \bar{5}) = (\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow$

$\bar{2}\bar{x} + \bar{3} = \bar{a} \quad \oplus \bar{2}$

$\bar{4}\bar{y} + \bar{5} = \bar{b} \quad \oplus \bar{4}$

$\bar{2}\bar{x} = \bar{a} + \bar{2} \quad \times 3 \quad \Rightarrow \underline{\bar{x} = \bar{3}\bar{a} + \bar{1}} \in \mathbb{Z}_5$

$\bar{4}\bar{y} = \bar{b} + \bar{4} \quad \times 7 \quad \Rightarrow \underline{\bar{y} = \bar{7}\bar{b} + \bar{1}} \in \mathbb{Z}_9$

SOLUÇÃO: SEJAM $\boxed{(\bar{x}_1, \bar{y}_1) ; (\bar{x}_2, y_2) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9}$

TAIS QUE

$$\boxed{g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = g(\bar{x}_2, \bar{y}_2)}$$

ASSIM

$$(\underbrace{\bar{2}\bar{x}_1 + \bar{3}}, \underbrace{\bar{4}\bar{y}_1 + \bar{5}}) = (\underbrace{\bar{2}\bar{x}_2 + \bar{3}}, \underbrace{\bar{4}\bar{y}_2 + \bar{5}})$$

DAÍ

$\mathbb{Z}_5$, $\bar{2}\,\bar{x}_1 + \underline{\underline{\bar{3}}} = \bar{2}\,\bar{x}_2 + \underline{\underline{\bar{3}}}$ $+\,\bar{2}$

$\mathbb{Z}_9$, $\bar{4}\,\bar{y}_1 + \underline{\underline{\bar{5}}} = \bar{4}\,\bar{y}_2 + \underline{\underline{\bar{5}}}$ $+\,\bar{4}$

COM ISSO OBTEMOS

$\mathbb{Z}_5 \quad \bar{2}\bar{x}_1 + \underbrace{\bar{3} + \bar{2}}_{=\bar{5}=\bar{0}} = \bar{2}\,\bar{x}_2 + \underbrace{\bar{3} + \bar{2}}_{=\bar{5}=0}$

$\mathbb{Z}_9 \quad \bar{4}\bar{y}_1 + \underbrace{\bar{5} + \bar{4}}_{\bar{9}=\bar{0}} = \bar{4}\,\bar{y}_2 + \underbrace{\bar{5} + \bar{4}}_{=\bar{9}=0}$

DONDE

$\mathbb{Z}_5 \quad \bar{2}\bar{x}_1 = \bar{2}\,\bar{x}_2 \qquad \times\bar{3}$

$\mathbb{Z}_9 \quad \bar{4}\,\bar{y}_1 = \bar{4}\,\bar{y}_2 \qquad \times\bar{7}$

ASSIM

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2$$

OU SEJA, $\boxed{(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)}$

PORTANTO g É INJETORA.

AGORA DADO $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ TOME

$(\bar{3}\bar{a}+\bar{1}, \bar{7}\bar{b}+\bar{1}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$. ASSIM

$g(\bar{3}\bar{a}+\bar{1}, \bar{7}\bar{b}+\bar{1}) = \bar{2}(\bar{3}\bar{a}+\bar{1})+\bar{3}, \bar{4}(\bar{7}\bar{b}+\bar{1})+\bar{5})$

$$= \left(\bar{a} + \underbrace{\bar{2} + \bar{3}}_{"\bar{5} = \bar{0}"}, \; \bar{b} + \underbrace{\bar{4} + \bar{5}}_{"\bar{9} = \bar{0}"} \right) = \boxed{(\bar{a}, \bar{b})}.$$

LOGO g É SOBREJETORA.

PORTANTO g É BIJETORA.

Exemplos

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$

$y \in \mathbb{R}$; existe $x \in \mathbb{R}$ t.q

$h(x) = y$?

$x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$y \geq 0$

SOLUÇÃO: h NÃO É INJETORA

POIS TOMANDO $x_1 = -1$ E $x_2 = 1$

TEMOS

$$h(x_1) = (-1)^2 = 1 = h(x_2)$$

E NO ENTANTO $x_1 \neq x_2$.

h NÃO É SOBREJETORA POIS, POR EXEMPLO, PARA $y = -2 \in \mathbb{R}$ NÃO EXISTE $x \in \mathbb{R}$ TAL QUE $x^2 = -2$. $h(x) = -2$