Funções - Imagem Direta e Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Seja $f: A \to B$

Definição

Seja $f: A \to B$ *uma função.*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$,

Definição

Seja $f: A \to B$ *uma função.*

i) *Dado* $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta***

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) *Dado $P \subseteq A$, chama-se* ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$, *chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) =$$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x)$$

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$, *chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid \boxed{x \in P}\},$$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) *Dado* $P \subseteq A$, *chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P.

ii) *Dado* $Q \subseteq B$,

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) *Dado $P \subseteq A$, chama-se* ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) *Dado $Q \subseteq B$, chama-se* ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q)$$

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A$$

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) *Dado* $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) *Dado* $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ *é o conjunto dos elementos de* A *que tem imagem em* Q

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A que tem imagem em Q através de f.

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$\boxed{f^{-1}}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A que tem imagem em Q através de f.

IMAGEM DIRETA

$f : A \to B$

$P \subseteq A; \; P \neq \emptyset$

$f(P) \neq \emptyset$

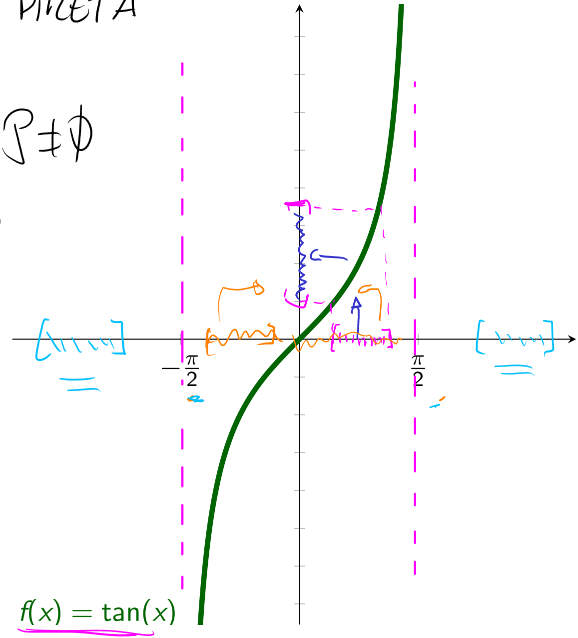


IMAGEM INVERSA

$f : A \to B \,;\; Q \subseteq B$

$f^{-1}(Q) = \{ x \,/\, f(x) \in Q \}$

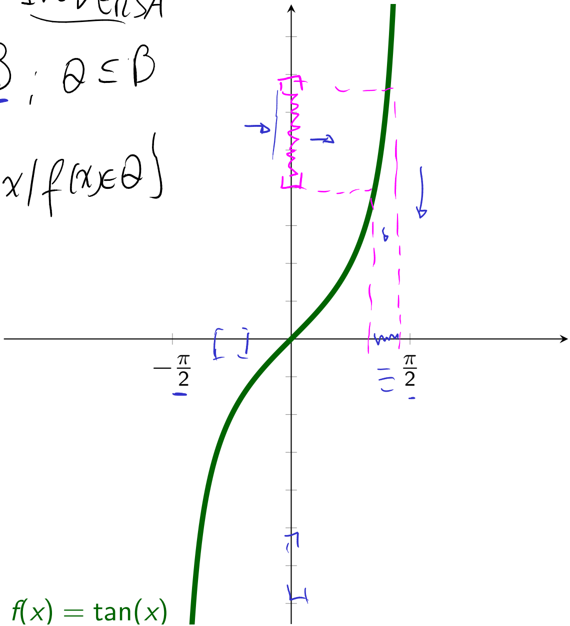


IMAGEM DIRETA

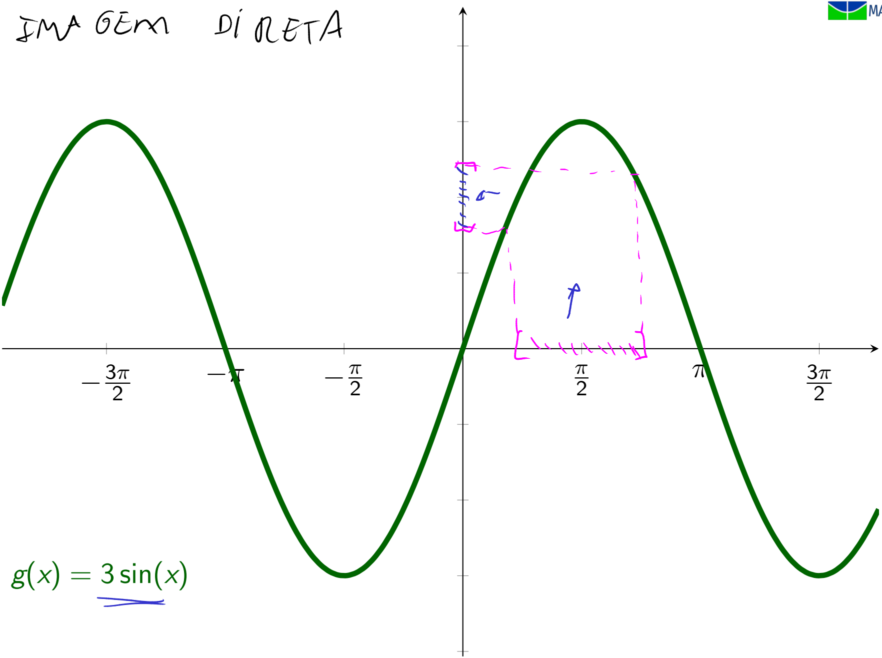
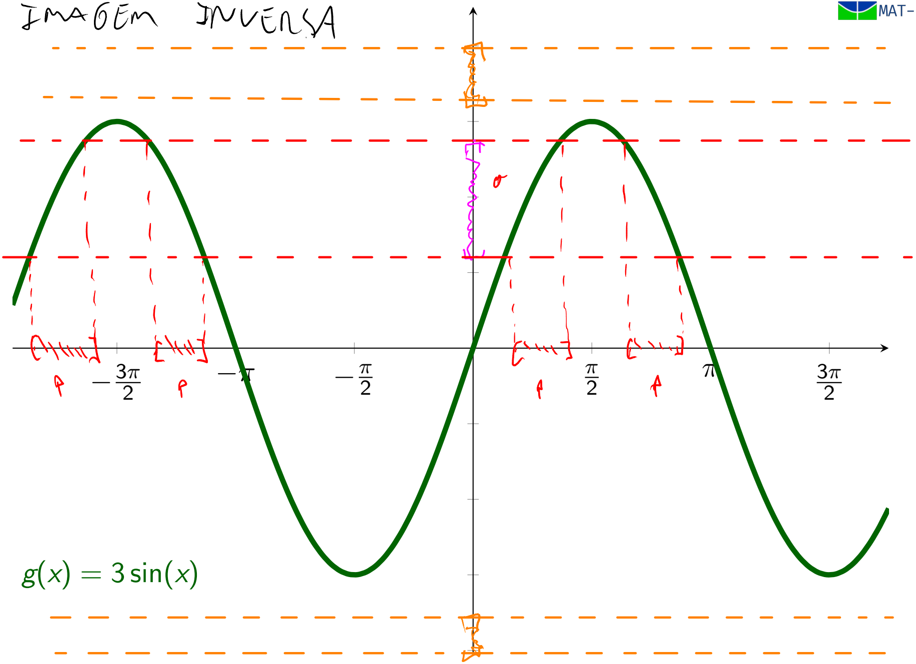


IMAGEM INVERSA



Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f\colon A \to B$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$.

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$\underline{f(\{1\})} = \{f(x) \mid x \in \{1\}\} = \{f(1)\} = \{2\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$\underline{f(\{3, 5, 7\})} = \{f(x) \mid x \in \{3, 5, 7\}\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f: A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$*. Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A)$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3),$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7),$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} =$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\dots,10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2,4,10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2,4,10\}\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\underline{\{2, 4, 10\}}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{\underline{1, 3, 9}\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\})$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2,4,10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2,4,10\}\} = \{1,3,9\}$$

$$f^{-1}(\{0,1,3,5,7,9\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, \boxed{1, 3, 5, 7, 9}\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2,4,10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2,4,10\}\} = \{1,3,9\}$$

$$f^{-1}(\{0,1,3,5,7,9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0,1,3,5,7,9\}\} = \emptyset$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f: A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}\} = \emptyset$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$

Exemplos

2) *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$.

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\underline{\{1,2,3\}}) = \{ f(x) \mid x \in \{1,2,3\} \}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

Exemplos

2) *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \mid x \in [0,2]\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x)$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{\underline{f(x) \in \mathbb{R}} \mid 0 \leq x$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\} = \{x^2 \mid 0 \le x \le 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9] \}$$

$$1 \le f(x) \le 9 \iff 1 \le x^2 \le 9$$

$$x^2 \ge 1 \iff x \le -1 \quad \text{ou} \quad x \ge 1$$

$$x^2 \le 9 \iff -3 \le x \le 3$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Temos:

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3,-1]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3,-1] \cup [1,3]$$

Exemplos

2) *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-3,-1] \cup [1,3]$$

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função

Proposição

Seja $f: A \to B$ *uma função e sejam* P,

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$*,*

Proposição

Seja $f\colon A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, R,

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $R, S \subseteq B$.

Proposição

Seja $f: A \to B$ *uma função e sejam* $P,\ Q \subseteq A,\ R,\ S \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$,

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam P, $Q \subseteq A$, R, $S \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $R, S \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(R \cup S)$

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $R, S \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R)$

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $R, S \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $R, S \subseteq B$.

i) *Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.*

$\subseteq$

ii) $f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$.

$\supseteq$

$t \in f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S) \Rightarrow t \in f^{-1}(R)$ ou $t \in f^{-1}(S)$

$\Rightarrow f(t) \in R$ ou $f(t) \in S \Rightarrow f(t) \in R \cup S$

$\Rightarrow t \in f^{-1}(R \cup S)$.

PROVA: (i) SEJA $y \in f(P)$. DAÍ EXISTE $x \in P$ TAL QUE

$$f(x) = y.$$

MAS, POR HIPÓTESE, $P \subseteq Q$. LOGO, $x \in Q$ E

$$f(x) = y.$$

Assim, $y \in f(Q)$. Logo, $f(P) \subseteq f(Q)$.

(ii) Seja $x \in f^{-1}(R \cup S)$. Daí $f(x) \in R \cup S$.

Assim $f(x) \in R$ ou $f(x) \in S$. Isto é,

$x \in f^{-1}(R)$ ou $x \in f^{-1}(S)$. Logo,

$x \in f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$. ENTÃO $f^{-1}(R \cup S) \subseteq f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)$

AGORA SEJA $t \in \underbrace{f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S)}$. ASSIM

$t \in f^{-1}(R)$ OU $t \in f^{-1}(S)$. ISTO É,

$f(t) \in R$ OU $f(t) \in S$. DAÍ,

$f(t) \in R \cup S$, ISTO É, $t \in f^{-1}(R \cup S)$.

LOGO, $f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(R \cup S)$.

PORTANTO,

$$f^{-1}(R \cup S) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(S).$$

#