# Homomorfismo de Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

4 de novembro de 2020

### Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) =$$

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f : G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

## Definição

*Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(H, \triangle)$ *dizemos que uma função* $f: G \to H$ *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se*

$$f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$$

*para todos* $x,\ y \in G$.

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo.*

*1)* *Se* $G = H$*,*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

*1) Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$, *neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora,*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que f é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*

## Observação:

*Sejam* $(G, *)$ , $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

1) *Se* $G = H$*, neste caso* $f : G \to G$ *é chamado de um* ***endomorfimos*** *de grupos.*

2) *Se* $f : G \to H$ *é uma função injetora, então dizemos que* $f$ *é um* ***monomorfismo*** *de grupos.*

## Observação:

*3) Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora,*

## Observação:

*3) Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que $f$ é um **epimorfismo** de grupos.*

## Observação:

*3) Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que $f$ é um **epimorfismo** de grupos.*

*4) Se $f : G \to H$ é uma função bijetora,*

## Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que $f$ é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que $f$ é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

## Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que $f$ é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que $f$ é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

5) *Se $f : G \to G$ é uma função bijetora,*

## Observação:

3) *Se $f : G \to H$ é uma função sobrejetora, então dizemos que $f$ é um* ***epimorfismo*** *de grupos.*

4) *Se $f : G \to H$ é uma função bijetora, então dizemos que $f$ é um* ***isomorfismo*** *de grupos.*

5) *Se $f : G \to G$ é uma função bijetora, então dizemos que $f$ é um* ***automorfismo*** *de grupos.*

## Exemplos

*1) A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$

## Exemplos

*1) A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$

## Exemplos

*1) A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$

## Exemplos

1) *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *dada por* $f(x) = i^x$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

## Exemplos

*2) A função* $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

## Exemplos

*2) A função* $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$

## Exemplos

2) *A função* $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

## Exemplos

2) *A função* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln(x)$ *é um homomorfismo de* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}, +)$.

## Exemplos

*3) Sejam m um inteiro positivo fixo.*

## Exemplos

*3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

## Exemplos

*3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \overline{x}$

## Exemplos

*3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$

## Exemplos

*3) Sejam m um inteiro positivo fixo. A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ *definida por* $f(x) = \bar{x}$ *é um homomorfimos de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$.

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,*

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado*

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* $z^{-1}$ *seu inverso.*

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* $z^{-1}$ *seu inverso. Então a aplicação*

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* $z^{-1}$ *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$

## Exemplos

*4) Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* $z^{-1}$ *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \to G$$
$$f_z(x) = z^{-1} * x * z,$$

## Exemplos

4) *Sejam* $(G, *)$ *um grupo,* $z \in G$ *um elemento fixado e* $z^{-1}$ *seu inverso. Então a aplicação*

$$f_z : G \longrightarrow G$$
$$f_z(x) = z^{-1} * x * z,$$

*para todo* $x \in G$*, é um isomorfismo de grupos.*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$,

## Proposição

*Sejam* $(G,*)$, $(H,\triangle)$ *grupos*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo.*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ e $1_H$

### Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f\colon G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ *e* $1_H$ *os elementos neutros de* $G$ *e* $H$*,*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ *e* $1_H$ *os elementos neutros de* $G$ *e* $H$, *respectivamente.*

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ *e* $1_H$ *os elementos neutros de* $G$ *e* $H$*, respectivamente.*

*i)* $f(1_G) = 1_H$

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f: G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ *e* $1_H$ *os elementos neutros de* $G$ *e* $H$*, respectivamente.*

*i)* $f(1_G) = 1_H$

*ii)* $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$

## Proposição

*Sejam* $(G, *)$, $(H, \triangle)$ *grupos e* $f : G \to H$ *um homomorfismo. Denote por* $1_G$ *e* $1_H$ *os elementos neutros de* $G$ *e* $H$*, respectivamente.*

*i)* $f(1_G) = 1_H$

*ii)* $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$ *para todo* $x \in G$*.*

## Proposição

*Sejam $I$ é um subgrupo de $H$*

## Proposição

*Sejam $I$ é um subgrupo de $H$ e $f : G \to H$*

## Proposição

*Sejam $I$ é um subgrupo de $H$ e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos.*

## Proposição

*Sejam $I$ é um subgrupo de $H$ e $f: G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$*

## Proposição

*Sejam $I$ é um subgrupo de $H$ e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então $f^{-1}(I)$ é um subgrupo de $G$.*