Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

2 de outubro de 2020

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto. Dizemos que* A *está munido (ou equipado) de uma* ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a \Delta b \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em* A.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Exemplos

1) A soma usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m =$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto***

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel***

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****:*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y,*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa***

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade**: Para todos x,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade***: *Para todos x, $y \in A$*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y =$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***:

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por* 0

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em* A *um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma***

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***:

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$,*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo***

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

*Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x ou simplesmente **oposto** de x.*

Definição

v) ***Associatividade***:

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$,*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****:*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, z* $\in$ *A, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

*vi) **Distributividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

*vi) **Distributividade**: Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Definição

v) ***Associatividade**: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade**: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos $x, y, z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos $x, y, z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto****.*

Definição

vii) ***Distributividade***:

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x,

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x*,* y*,*

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y$$

Definição

*vii) **Distributividade**: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x*,* y*,* $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma****.*

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma***.

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos x,*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* x*,* $y \in A$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***:

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* x*,* $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$,

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade**: Se para todos $x,\ y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

*Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

*para todo $x \in A$, então dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

1) ***Comutatividade**: Se para todos $x, y \in A$ vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

*Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

*para todo $x \in A$, então dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade****. O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A *ou* ***elemento neutro da multiplicação*** *de* A*.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação** de* A*.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade***

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel.

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário***.

4) *Seja* $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que* A *é uma anel.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é uma anel.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

2) Considere as operações $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *é um anel comutativo e com unidade.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação $\oplus$ por $+$ e a operação $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação $\oplus$ por $+$ e a operação $\otimes$ por $\cdot$ e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,* x_2*, ...,* $x_n \in A$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,* x_2*, ...,* $x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*, então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α,

Proposição

v) Para todos α, *x,*

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y)$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$*, temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos x*,*

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

$$xy$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Proposição

v) Para todos $x, \ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, \ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1,

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1,\ 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, \ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$x = 0_A$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí $x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha]$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

vi) Temos

vi) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y]$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.