

Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

$$\begin{aligned}\Delta : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b\end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma **operação interna** em A .

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função

$$\begin{aligned}\Delta : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b\end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma **operação interna** em A .

Exemplos

1) *A soma usual*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} ,*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ,*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C}*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m =$*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^**

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} ,*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^**

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q}*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div não é uma operação binária.*

Exemplos

- 1) *A soma usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 2) *A multiplicação usual nos conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} é uma operação binária.*
- 3) *Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ fixo. A soma e a multiplicação definidos em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ são operações binárias.*
- 4) *A operação \div em \mathbb{Q}^* é uma operação binária.*
- 5) *Já em \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^* e em \mathbb{Q} a operação \div não é uma operação binária.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos x ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos x, y ,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa**

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**:

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x,$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y =$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias \oplus e \otimes , chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:

i) **Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa da soma**.

ii) **Comutatividade**: Para todos $x, y \in A$ vale

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro:***

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma**

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:**

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$,

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y$$

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo**

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x ou simplesmente **oposto** de x .

Definição

- iii) **Elemento Neutro:** Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.

- iv) **Elemento Oposto:** Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x ou simplesmente **oposto** de x .

Definição

v) ***Associatividade:***

Definição

v) **Associatividade:** Para todos x ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos x, y ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:**

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos x ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos x, y ,

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y)$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada **distributiva da soma em relação ao produto**.

Definição

v) **Associatividade:** Para todos $x, y, z \in A$, vale

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada **distributiva da soma em relação ao produto**.

Definição

vii) ***Distributividade:***

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos x ,

Definição

vii) ***Distributividade***: Para todos $x, y,$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y + z) = (x \otimes y) + (x \otimes z)$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade **distributiva do produto em relação à soma**.

Definição

vii) **Distributividade:** Para todos $x, y, z \in A$ vale

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade **distributiva do produto em relação à soma**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos x ,

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um *anel*.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:**

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$,

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes)

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade**

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A .

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação**.

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação** de A .

Observações:

Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

1) **Comutatividade:** Se para todos $x, y \in A$ vale

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo**.

2) **Unidade:** Se existe em A um elemento denotado por 1 ou 1_A tal que

$$x \otimes 1 = x = 1 \otimes x,$$

para todo $x \in A$, então dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento 1_A é chamado de **unidade** de A ou **elemento neutro da multiplicação** de A .

Observações:

3) Se um anel (A, \oplus, \otimes)

Observações:

3) *Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade**

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.

- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é um anel.

Observações:

- 3) Se um anel (A, \oplus, \otimes) satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que (A, \oplus, \otimes) é um **anel comutativo com unidade** ou um **anel comutativo unitário**.
- 4) Seja (A, \oplus, \otimes) um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é um anel.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot),$

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos e com unidade.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos e com unidade.

Exemplos

2) Considere as operações \star e \odot em \mathbb{Q} definidas por

$$x \star y = x + y - 8$$

$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ é um anel comutativo e com unidade.