

Anéis - Homomorfismos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

14 de outubro de 2020

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes)

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**,

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**,

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

i) $f(x + y)$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \ f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$ii) \quad f(x \cdot y)$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$ii) \quad f(x \cdot y) = f(x)$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$ii) \quad f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$ii) \quad f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

para todos $x, y \in A$.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de um **homomorfismo de anéis**, ou simplesmente **homomorfismo**, se satisfaz:

$$i) \quad f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

$$ii) \quad f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

para todos $x, y \in A$.

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$,

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Verifique se as seguintes funções $f: A \rightarrow B$, são homomorfismos de anéis:

i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$ e $f(x) = x + 1$

ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = M_2(\mathbb{Z}_5)$ e

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

i) $f(0_A)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

$$i) f(0_A) = 0_B$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

$$i) \ f(0_A) = 0_B$$

$$ii) \ f(-x)$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

$$i) \ f(0_A) = 0_B$$

$$ii) \ f(-x) = -f(x),$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

- i) $f(0_A) = 0_B$
- ii) $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis. Se $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo, então:

- i) $f(0_A) = 0_B$
- ii) $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$,

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$,

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo.

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis,

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:

Observação:

A condição (i) da proposição anterior serve para determinar quando uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são anéis, não é um homomorfismo. Caso $f(0_A) \neq 0_B$, então f não é um homomorfismo. Mas pode acontecer de $f(0_A) = 0_B$ e mesmo assim f não é um homomorfismo de anéis, como o exemplo a seguir mostra:

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$,

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais.

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais. A função

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais. A função

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right)$$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais. A função

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais. A função

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ e no entanto f não é um homomorfismo de anéis.

Exemplo

Sejam $A = M_2(\mathbb{R})$, $B = \mathbb{R}$ anéis com as operações usuais. A função

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x$$

é tal que $f(0_A) = 0_B$ e no entanto f não é um homomorfismo de anéis.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um **epimorfismo**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.

ii) f é um **monomorfismo**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.

- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo**

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo** se f for bijetora.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo** se f for bijetora.
- iv) Quando $A = B$

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo** se f for bijetora.
- iv) Quando $A = B$ e f é um isomorfismo,

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo** se f for bijetora.
- iv) Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um **automorfismo**.

Definição

Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo, onde A e B são anéis. Dizemos que:

- i) f é um **epimorfismo** se f for sobrejetora.
- ii) f é um **monomorfismo** se f for injetora.
- iii) f é um **isomorfismo** se f for bijetora.
- iv) Quando $A = B$ e f é um isomorfismo, então f é um **automorfismo**.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis.

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) =$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de **kernel**

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de **kernel** ou **núcleo**

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de **kernel** ou **núcleo** de f .

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de A definido por

$$\ker(f) = N(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de **kernel** ou **núcleo** de f .

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplos

Determine o **kernel** dos seguintes homomorfismo de anéis:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ tal que

$$f(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

ii) Seja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ um anel com as seguintes operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$$

para todos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. O homomorfismo $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dado por $f(a, b) = a$.

Exemplos

$$iii) f: \mathbb{Q} \rightarrow M_3(\mathbb{Q})$$

Exemplos

iii) $f: \mathbb{Q} \rightarrow M_3(\mathbb{Q})$ dada por

Exemplos

iii) $f: \mathbb{Q} \rightarrow M_3(\mathbb{Q})$ dada por

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Exemplos

iii) $f: \mathbb{Q} \rightarrow M_3(\mathbb{Q})$ dada por

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Solução:

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

i) $\ker(f)$ é um subanel de A .

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

i) $\ker(f)$ é um subanel de A .

ii) f é injetora

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

- i) $\ker(f)$ é um subanel de A .
- ii) f é injetora se, e somente se,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

- i) $\ker(f)$ é um subanel de A .
- ii) f é injetora se, e somente se, $\ker(f) = \{0_A\}$.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Então:

- i) $\ker(f)$ é um subanel de A .
- ii) f é injetora se, e somente se, $\ker(f) = \{0_A\}$.

Prova:

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível**

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso**

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$ tal que

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$ tal que

$$x \cdot y = 1_A$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$ tal que

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. Dado $x \in A$, dizemos que x é **invertível** ou que x **possui inverso** se existe $y \in A$ tal que

$$x \cdot y = 1_A = y \cdot x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$, se existir,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$, se existir, é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel unitário. O inverso multiplicativo de um elemento $x \in A$, se existir, é único.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo,

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo, então $f(x)$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo, então $f(x)$ tem inverso e

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo, então $f(x)$ tem inverso e

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \otimes) anéis e seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo, então $f(x)$ tem inverso e

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Prova: