Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado)

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária***

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma **operação binária** quando existe uma função*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a\Delta b \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A está munido (ou equipado) de uma ***operação binária*** *quando existe uma função*

$$\begin{aligned} \Delta : A \times A &\to A \\ (a, b) &\longmapsto a \Delta b \end{aligned}$$

Uma operação binária também é chamada de uma ***operação interna*** *em A.*

Exemplos

1) A soma usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$,

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo.*

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m =$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$

Exemplos

1) A soma usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) A multiplicação usual nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) Seja $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) A operação $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) Já em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\mathbb{Q}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

Exemplos

1) *A soma usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

2) *A multiplicação usual nos conjuntos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *é uma operação binária.*

3) *Seja* $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ *fixo. A soma e a multiplicação definidos em* $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}$ *são operações binárias.*

4) *A operação* $\div$ *em* $\mathbb{Q}^*$ *é uma operação binária.*

5) *Já em* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ *e em* $\boxed{\mathbb{Q}}$ *a operação* $\div$ *não é uma operação binária.*

$1, 2 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$; $1, 0 \in \mathbb{Q}$

$1, 2 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$,

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que*

$(A, \oplus, \otimes)$

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****:*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x,

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y,*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos $x, y, z \in A$*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$*, chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x*,* y*,* $z \in A$ *vale*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus \underline{z}$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa***

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos $x, y, z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****:*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x,*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos x, $y \in A$*

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

*i) **Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

*ii) **Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação***. *Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade***: *para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade***: *Para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$\underline{x \oplus y} =$$

Definição

*Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias $\oplus$ e $\otimes$, chamadas **soma** e **produto** ou **multiplicação**. Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um **anel** quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade**: para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

*Essa propriedade é chamada de **propriedade associativa** da soma.*

ii) ***Comutatividade**: Para todos x, $y \in A$ vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

Seja $A \neq \emptyset$ *um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias* $\oplus$ *e* $\otimes$, *chamadas* ***soma*** *e* ***produto*** *ou* ***multiplicação****. Dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel*** *quando as seguintes condições são verdadeiras:*

i) ***Associatividade****: para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

Essa propriedade é chamada de ***propriedade associativa*** *da soma.*

ii) ***Comutatividade****: Para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***:

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em* A *um elemento denotado por* 0

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A*

Definição

*iii) **Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em* A *um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$ *vale*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por* 0 *(zero) ou* 0_A *tal que para todo elemento* $x \in A$ *vale*

$$x \oplus 0_A = x$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A

Definição

*iii) **Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma***

Definição

*iii) **Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****:*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$,*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo***

Definição

iii) ***Elemento Neutro**: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

*Tal elemento 0_A é chamado de **elemento neutro da soma** ou simplesmente **elemento neutro**.*

iv) ***Elemento Oposto**: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

*Tal elemento y é chamado de **oposto aditivo** de x*

Definição

iii) ***Elemento Neutro****: Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro****.*

iv) ***Elemento Oposto****: Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

iii) ***Elemento Neutro***: *Existe em A um elemento denotado por 0 (zero) ou 0_A tal que para todo elemento $x \in A$ vale*

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x.$$

Tal elemento 0_A é chamado de ***elemento neutro da soma*** *ou simplesmente* ***elemento neutro***.

iv) ***Elemento Oposto***: *Para cada elemento $x \in A$, existe $y \in A$ tal que*

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x.$$

Tal elemento y é chamado de ***oposto aditivo*** *de x ou simplesmente* ***oposto*** *de x.*

Definição

v) ***Associatividade***:

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x,

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos x, y,*

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos* $x, y, z \in A$,

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos $x, y, z \in A$, vale*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y)$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \underline{\otimes z}$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes$$

Definição

*v) **Associatividade**: Para todos* $x, y, z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x,\ y,\ z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***:

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x,*

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x, y,

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y,* $z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y,* $z \in A$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* $x, y, z \in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos* $x,\ y,\ z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos* $x,\ y,\ z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y)$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos* x, y, $z \in A$, *vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, z* $\in A$*, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, z* $\in A$ *vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus$$

Definição

v) ***Associatividade****: Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

*Essa propriedade é chamada **distributiva da soma em relação ao produto**.*

Definição

v) ***Associatividade***: *Para todos x, y, $z \in A$, vale*

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

vi) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Essa propriedade é chamada ***distributiva da soma em relação ao produto***.

Definição

vii) ***Distributividade****:*

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x,

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y,

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z)$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y$$

Definição

vii) ***Distributividade****: Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* $x, y, z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos* x, y, $z \in A$ *vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma***.

$(A, \oplus, \otimes)$ é um ANEL.

Definição

vii) ***Distributividade***: *Para todos x, y, $z \in A$ vale*

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Essa é a propriedade ***distributiva do produto em relação à soma****.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

T A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos x,*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* x, $y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x,\ y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***:

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em A*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em A um elemento denotado por* 1

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade****: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo****.*

2) ***Unidade****: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*,*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$\boxed{x \otimes 1_A = x} = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo***.

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel com unidade*** *ou um* ***anel unitário*** *ou ainda um* ***anel com identidade***. *O elemento* 1_A *é chamado de* ***unidade*** *de* A

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação***

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade**: Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel comutativo**.*

2) ***Unidade**: Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x,$$

para todo $x \in A$*, então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação** de* A*.*

Observações:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

1) ***Comutatividade***: *Se para todos* $x, y \in A$ *vale*

$$x \otimes y = y \otimes x.$$

Dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel** $\boxed{\textbf{comutativo}}$.*

2) ***Unidade***: *Se existe em* A *um elemento denotado por* 1 *ou* 1_A *tal que*

$$\boxed{x \otimes 1_A} = x = \boxed{1_A \otimes x},$$

para todo $x \in A$, *então dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um **anel com unidade** ou um **anel unitário** ou ainda um **anel com identidade**. O elemento* 1_A *é chamado de **unidade** de* A *ou **elemento neutro da multiplicação** de* A.

MAT-UnB

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade***

Observações:

3) *Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja* $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observações:

3) *Se um anel* $(A, \oplus, \otimes)$ *satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que* $(A, \oplus, \otimes)$ *é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário***.

4) *Seja* $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que*

Observações:

3) *Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um* ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) *Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é um anel.*

Observações:

3) Se um anel $(A, \oplus, \otimes)$ satisfaz as duas propriedades anteriores dizemos que $(A, \oplus, \otimes)$ é um ***anel comutativo com unidade*** *ou um* ***anel comutativo unitário****.*

4) Seja $(A, \oplus, \otimes)$ um anel. Quando não houver chance de confusão com relação às operações envolvidas diremos simplesmente que A é um anel.

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$,

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

Exemplos

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ *são anéis comutativos e com unidade.*

$x \in \mathbb{Q}$, EXISTE $y \in \mathbb{Q}$ T.Q $x \star y = 0_{\mathbb{Q}}$?

$x \star y = 0_{\mathbb{Q}}$; $x \star y = 8 \Leftrightarrow x + y - 8 = 8 \Leftrightarrow y = 16 - x \in \mathbb{Q}$

Exemplos

2) Considere as operações $\star$ e $\odot$ em $\mathbb{Q}$ definidas por

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ é um anel comutativo e com unidade.

$0_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$; $x \star 0_{\mathbb{Q}} = x$, PARA TODO $x \in \mathbb{Q}$

$\rightarrow \cancel{x} + 0_{\mathbb{Q}} - 8 = \cancel{x} \Leftrightarrow \underline{0_{\mathbb{Q}} = 8} \in \mathbb{Q}$

SOLUÇÃO: INICIALMENTE OBSERVE QUE AS OPERAÇÕES $*$ E $\odot$ DEFINIDAS EM $\mathbb{Q}$ SÃO DE FATO OPERAÇÕES BINÁRIAS.

i) SEJAM $x, y, z \in \mathbb{Q}$. TEMOS

$$(x * y) * z = (x + y - 8) * z = \underbrace{(x + y - 8) + z}_{\in \mathbb{Q}} - 8$$

$$= \boxed{x + y + z - 16}$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 8) = x + \underbrace{(y + z - 8)}_{\in \mathbb{Q}} - 8 =$$

$$= \boxed{x+y+z-16}$$

Logo

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

ii) PARA TODOS $x, y \in \mathbb{R}$, TEMOS

$$x * y = \underbrace{x + y - 8}_{\in \mathbb{R}} = y + x - 8 = y * x.$$

LOGO VALE A COMUTATIVIDADE PARA A OPERAÇÃO $*$.

iii) TOME $0_{\mathbb{R}} = 8$. ASSIM PARA TODO

$x \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$x * 0_{\mathbb{Q}} = x * 8 = x + \cancel{8} - \cancel{8} = x$

$0_{\mathbb{Q}} * x$

LOGO $0_{\mathbb{Q}} = 8$ É O ELEMENTO NEUTRO

DA OPERAÇÃO $*$ EM $\mathbb{Q}$.

iv) DADO $x \in \mathbb{Q}$, TOME $y = 16 - x \in \mathbb{Q}$. DAÍ

$$x * y = x * (16 - x) = \underbrace{\cancel{x} + (16 - \cancel{x})}_{\in \mathbb{Q}} - 8 = 8 = 0_{\mathbb{Q}}$$

$$y * x$$

LOGO O OPOSTO DE x NA OPERAÇÃO $*$

DEFINIDA EM $\mathbb{Q}$ É $16 - x$.

ii) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$(x \odot y) \odot z = \left(x + y - \frac{xy}{8}\right) \odot z = \left(x + y - \frac{xy}{8}\right) + z$$

$$- \frac{\left(x + y - \frac{xy}{8}\right) \cdot z}{8} = x + y + z - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{8}$$

$$-\frac{yz}{8} = \frac{xyz}{64}$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot \left(y + z - \frac{yz}{8}\right) = x + \left(y + z - \frac{yz}{8}\right)$$

$$- \frac{x\left(y + z - \frac{yz}{8}\right)}{8} = x + y + z - \frac{yz}{8} - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{8} + \frac{xyz}{64}$$

LOGO

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z).$$

OU SEJA, A OPERAÇÃO $\odot$ EM $\mathbb{Q}$ É ASSOCIATIVA.

vi) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$(x * y) \odot z = (x + y - 8) \odot z = (x + y - 8) + z - \frac{(x+y-8) \cdot z}{8}$$

$$= \underbrace{x + y + z - 8}_{} - \frac{xz}{8} - \frac{yz}{8} + z$$

$$(x \odot z) * (y \odot z) = \left(x + z - \frac{xz}{8}\right) * \left(y + z - \frac{yz}{8}\right) =$$

$$= \left(x + z - \frac{xz}{8}\right) + \left(y + z - \frac{yz}{8}\right) - 8$$

$$= x + y + z - 8 - \frac{xz}{8} - \frac{yz}{8} + z$$

Logo

$$(x * y) \odot z = (x \odot z) * (y \odot z).$$

viii) PARA TODOS $x, y, z \in \mathbb{Q}$ TEMOS

$$x \odot (y * z) = x \odot (y + z - 8) = x + (y + z - 8) - \frac{x(y+z-8)}{8}$$

$$= x + y + z - 8 - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{8} + x$$

$$(x \odot y) * (x \odot z) = \left(x + y - \frac{xy}{8}\right) * \left(x + z - \frac{xz}{8}\right) =$$

$$= \left(x+y-\frac{xy}{8}\right) + \left(x+z-\frac{xz}{8}\right) - 8$$

$$= x+y+z-8 - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{8} + x$$

Logo

$$x \odot (y * z) = (x \odot y) * (x \odot z).$$

PORTANTO, $(\mathbb{Q}, *, \odot)$ É UM ANEL.

AGORA SEJAM $x, y \in \mathbb{Q}$. TEMOS

$$x \odot y = \overbrace{x + y - \frac{xy}{8}}^{\in \mathbb{Q}} = y + x - \frac{yx}{8} = y \odot x.$$

OU SEJA, A OPERAÇÃO $\odot$ É COMUTATIVA.

DAÍ $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ É UM ANEL COMUTA-TIVO.

$1_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$, $x \odot 1_{\mathbb{Q}} = x$, PARA TODO $x \in \mathbb{Q}$?

$$\cancel{x} + 1_{\mathbb{Q}} - \frac{x \cdot 1_{\mathbb{Q}}}{8} = \cancel{x} \Leftrightarrow \boxed{1_{\mathbb{Q}}}\left(1 - \frac{x}{8}\right) = 0$$

AGORA TOME $1_{\mathbb{Q}} = 0 \in \mathbb{Q}$. ASSIM TEMOS

$$x \odot 1_{\mathbb{Q}} = x \odot 0 = x + 0 - \frac{x \cdot 0}{2} = x$$

PARA TODO $x \in \mathbb{Q}$. LOGO $1_{\mathbb{Q}} = 0$ É

O ELEMENTO NEUTRO DA OPERAÇÃO

$\odot$ DEFINIDA EM $\mathbb{Q}$. LOGO $(\mathbb{Q}, *, \odot)$ É UM ANEL COM UNIDADE. PORTANTO, $(\mathbb{Q}, *, \odot)$ É UM ANEL COMUTATIVO E COM UNIDADE. #