

Funções - Composição

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

19 de setembro de 2020

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções.

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta**

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x)$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Exemplos

1) *Sejam* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Exemplos

1) *Sejam* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.
Assim podemos definir $g \circ f$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.
Assim podemos definir $g \circ f$ e $f \circ g$ e:

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.
Assim podemos definir $g \circ f$ e $f \circ g$ e:

Exemplos

$$2) f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Exemplos

$$2) f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ e } g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \ln x$.

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \ln x$.
 Nesse caso só podemos definir $g \circ f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ e:

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \ln x$.
 Nesse caso só podemos definir $g \circ f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ e:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f$:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados x_1 ,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1)$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1)$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 =$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos. Portanto $g \circ f$ é injetora.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos. Portanto $g \circ f$ é injetora. ■

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora,

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x)$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z)$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Assim seja $y \in C$. Como $g: B \rightarrow C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$ é sobrejetora. ■