

# Complementar de Conjuntos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ ,*

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar***

## Definição

*Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como*

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) =$$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E$$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

1) Se  $A = E$ ,

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\}$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

- 1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .
- 2)  $(A^C)^C =$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

- 1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .
- 2)  $(A^C)^C = \{x \in E$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

- 1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .
- 2)  $(A^C)^C = \{x \in E \mid x \notin A^C\}$

## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

- 1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .
- 2)  $(A^C)^C = \{x \in E \mid x \notin A^C\} = \{x \in E \mid x \in A\} = A$



## Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $E$  tais que  $A \subseteq E$ , definimos o **complementar** de  $A$  em  $E$ , denotado  $A^C$  ou  $C_E(A)$ , como

$$C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

## Observações:

- 1) Se  $A = E$ , então  $C_A(A) = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$ .
- 2)  $(A^C)^C = \{x \in E \mid x \notin A^C\} = \{x \in E \mid x \in A\} = A$

## Exemplo

*Sejam*  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ ,

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A)$$

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos.

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ ,



## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:*

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$  e como  $A \subseteq B$ ,

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$  e como  $A \subseteq B$ , então  $x \notin A$ .

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$  e como  $A \subseteq B$ , então  $x \notin A$ . Daí por definição  $x \in C_E(A)$ ,

## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$  e como  $A \subseteq B$ , então  $x \notin A$ . Daí por definição  $x \in C_E(A)$ , ou seja,  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ . ■



## Exemplo

Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{1, 2, 3, 5, 4, 0, 8, 9\}$ . Primeiro note que  $A \subseteq E$ , daí

$$A^C = C_E(A) = \{0, 5, 8, 9\}.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  conjuntos. Se  $A \subseteq B \subseteq E$ , então  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ .

*Prova:* Seja  $x \in C_E(B)$ . Assim  $x \notin B$  e como  $A \subseteq B$ , então  $x \notin A$ . Daí por definição  $x \in C_E(A)$ , ou seja,  $C_E(B) \subseteq C_E(A)$ . ■

## Proposição

*Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto*

## Proposição

*Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjuntos tais que  $A \subseteq E$*

## Proposição

*Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ .*

## Proposição

*Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjuntos tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:*

## Proposição

*Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjuntos tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:*

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:*



## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ .

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ ,

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ .

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  
 $x \in A^C$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjuntos tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ ,

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ .

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,



## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado,

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ ,

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ .

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$  e  $y \notin B$ ,

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$  e  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cup B$ ,



## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

i)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii)  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$  e  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cup B$ , logo  $y \in (A \cup B)^C$ .

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$  e  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cup B$ , logo  $y \in (A \cup B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C.$$

## Proposição

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $E$  três conjunto tais que  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq E$ . Então:

$$i) (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$ii) (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

*Prova:* Seja  $x \in (A \cup B)^C$ . Logo  $x \notin A \cup B$ , assim  $x \notin A$  e  $x \notin B$ . Daí,  $x \in A^C$  e  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cap B^C$ . Desse modo,

$$(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C. \quad (1)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cap B^C$ , então  $y \in A^C$  e  $y \in B^C$ . Com isso,  $y \notin A$  e  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cup B$ , logo  $y \in (A \cup B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C. \quad (2)$$

Portanto,

Portanto, de (1) e (2) temos

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^c$ .

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^c$ . Logo  $x \notin A \cap B$ ,



Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^c$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^c$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ .

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ ,

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ .

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C.$$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado,

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ ,



Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ .

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ ,

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ ,

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ .

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C.$$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C. \quad (4)$$

Portanto,



Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C. \quad (4)$$

Portanto, de (3) e (4) temos

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C. \quad (4)$$

Portanto, de (3) e (4) temos

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C,$$

Portanto, de (1) e (2) temos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Seja  $x \in (A \cap B)^C$ . Logo  $x \notin A \cap B$ , assim  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ . Então  $x \in A^C$  ou  $x \in B^C$ , isto é,  $x \in A^C \cup B^C$ . Desse modo,

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C. \quad (3)$$

Por outro lado, se  $y \in A^C \cup B^C$ , então  $y \in A^C$  ou  $y \in B^C$ . Daí,  $y \notin A$  ou  $y \notin B$ , ou seja,  $y \notin A \cap B$ , logo  $y \in (A \cap B)^C$ . Desse modo

$$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C. \quad (4)$$

Portanto, de (3) e (4) temos

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C,$$

como queríamos. ■