

Teorema de Lagrange

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G , então existirá uma quantidade finita de classes laterais módulo H . Assim o conjunto

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}$$

é finito.

O número de elementos de G/H é chamada de **índice** de H em G e será denotado por

$$[G : H] = |G/H|.$$

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ um grupo

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ um grupo e $N = \{1, -1\}$. Já vimos que as classes laterais de N em G são

$$N \text{ e } iN.$$

Daí

$$G/N = \{N, iN\}$$

e assim $[G : H] = 2$.

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [g]$

Exemplos

(2) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [g] = \{Id, g\}$. Então H possui 3 classes laterais que são

$$H, fH, f^2H.$$

Daí

$$G/H = \{H, fH, f^2H\}$$

e então $[G : H] = 3$.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G . Então $o(G) = o(H)[G : H]$ e, portanto, $o(H) | o(G)$.

Observação:

Considere o seguinte subconjunto do grupo S_4 :

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que o número de elementos de L divide $|S_4| = 4! = 24$ mas L não é um subgrupo de S_4 pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \notin L.$$

Corolário

Seja G um grupo finito. Então a ordem de um elemento $x \in G$ divide a ordem de G e o quociente é $(G : H)$, onde $H = \langle x \rangle$.

Corolário

Sejam G um grupo finito e $x \in G$. Então

$$x^{o(G)} = e,$$

onde e denota o elemento neutro de G .

Corolário

Seja G um grupo finito cuja ordem é um número primo. Então G é um grupo cíclico e os únicos subgrupos de G são os triviais, ou seja, $\{e\}$ e G .

Exemplo

Determine todos os subgrupos do grupo S_3 .