Relação de Equivalência - Classes de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Seja A um conjunto não vazio

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A,

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y \ (R)$,*

Observações:

Seja R *uma relação de equivalência em* A*, isto é,* $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que* $(x, y) \in R$ *usaremos a notação* $x \equiv y\ (R)$*, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R",*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y \ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R.*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$,*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y \ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, xRx. (Propriedade Reflexiva)*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y$ (R), que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, xRx. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se xRy, então yRx. (Propriedade Simétrica)*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

i) *Para todo $x \in A$, xRx. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se xRy, então yRx. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se xRy e yRz, então xRz. (Propriedade Transitiva)*

Observações:

Seja R uma relação de equivalência em A, isto é, $R \subseteq A \times A$.

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que deve ser lido como "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação xRy , com o mesmo significado anterior.*

2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação R. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, xRy.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, xRx. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se xRy, então yRx. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se xRy e yRz, então xRz. (Propriedade Transitiva)*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A.

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$,

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência***

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** *b*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** *b* ***módulo*** *R*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R*, denotada por* $\overline{b}$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R*, denotada por* $\overline{b}$ *ou* $C(b)$,

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por** b **módulo** R, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de A*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R*, denotada por* $\overline{b}$ *ou* $C(b)$*, o subconjunto de A dado por*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R*, denotada por* $\overline{b}$ *ou* $C(b)$*, o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} =$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R*, denotada por* $\overline{b}$ *ou* $C(b)$*, o subconjunto de* A *dado por*

$$\overline{b} = C(b) =$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *R, denotada por* $\overline{\text{b}}$ *ou $C(b)$, o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *R, denotada por* $\overline{\mathrm{b}}$ *ou $C(b)$, o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\}$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *R, denotada por $\overline{\mathrm{b}}$ ou $C(b)$, o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *R, denotada por* $\overline{\text{b}}$ *ou $C(b)$, o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Dado $b \in A$, chamamos de ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** R, *denotada por* $\overline{b}$ *ou* $C(b)$, *o subconjunto de A dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$R_1 = A \times A$

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$R_1 = A \times A$

$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

são relações de equivalência sobre A.

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

são relações de equivalência sobre A. Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.

Exemplos

Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

são relações de equivalência sobre A. Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 *são:*

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} =$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} =$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{3} =$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} =$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_1\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

Exemplos

1) As classes de equivalência de R_1 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

Nesse caso temos somente uma classe de equivalência.

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\} = \{3\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_3\} = \{4\}$$

Exemplos

2) As classes de equivalência de R_3 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\} = \{4\}$$

Aqui temos três classes de equivalência diferentes.

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} =$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} =$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} =$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} =$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_4\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_4\} = \{4\}$$

Exemplos

3) As classes de equivalência de R_4 são:

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_4\} = \{4\}$$

Aqui temos quatro classes de equivalência diferentes.

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$\overline{0} =$

Exemplos

4) *Para a relação de equivalência*
$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} =$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} =$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} =$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum}\ k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplos

4) Para a relação de equivalência
$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

Exemplos

4) *Para a relação de equivalência*
$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xS1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

Neste caso existem somente duas classes de equivalência. (Por quê?)

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) *se* $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$,

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$,

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$,

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$,

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados a, $b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados a, $b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados a, $b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy e yRb.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy e yRb. Pela propriedade transitiva

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy e yRb. Pela propriedade transitiva segue que aRb,

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy e yRb. Pela propriedade transitiva segue que aRb, como queríamos.

Proposição

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Dados a, $b \in A$ temos:

i) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então aRb.

ii) se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$.

Prova:

i) Como $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, existe um $y \in \overline{a} \cap \overline{b}$, logo $y \in \overline{a}$ e $y \in \overline{b}$. Da definição de classe de equivalência temos yRa e yRb. Como R é relação de equivalência temos aRy e yRb. Pela propriedade transitiva segue que aRb, como queríamos.

ii) Precisamos mostrar que

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$,

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. $\blacksquare$

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. ∎

Corolário

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. ■

Corolário

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. ■

Corolário

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Dados $a,\ b \in A$ então $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. ■

Corolário

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ então $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ ou $\overline{a} = \overline{b}$.

ii) Precisamos mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e que $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Para a primeira inclusão seja $y \in \overline{a}$. Daí yRa. Mas, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, assim pelo item anterior segue que aRb. Logo, como yRa e aRb, segue que yRb, ou seja, $y \in \overline{b}$. Daí $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Agora para provar a segunda inclusão seja $x \in \overline{b}$. Então xRb. Novamente, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e então pelo item anterior segue que aRb. Assim uma vez que R é uma relação de equivalência temos bRa e de xRb obtemos xRa, ou seja, $x \in \overline{a}$. Com isso $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos. ■

Corolário

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Dados $a, b \in A$ então $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ ou $\overline{a} = \overline{b}$.

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A.

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

1) $A/R_1 = \{\overline{1}\}$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

1) $A/R_1 = \{\overline{1}\}$

2) $A/R_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

1) $A/R_1 = \{\overline{1}\}$

2) $A/R_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$

3) $A/R_4 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Definição

*Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de **conjunto quociente** de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

1) $A/R_1 = \{\overline{1}\}$

2) $A/R_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$

3) $A/R_4 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

4) $\mathbb{Z}/S = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

Definição

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. O conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por R será denotado por A/R e é chamado de ***conjunto quociente*** *de A por R.*

Exemplos

Do Exemplo anterior temos:

1) $A/R_1 = \{\overline{1}\}$

2) $A/R_3 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\}$

3) $A/R_4 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

4) $\mathbb{Z}/S = \{\overline{0}, \overline{1}\}$