

# Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

## Exercício

Considere o anel  $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$  onde as operações  $\oplus$  e  $\otimes$  em  $\mathbb{Q}$  são definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x \oplus y = x + y - 6 \\ x \otimes y = x + y - \frac{xy}{6} \end{array} \right.$$

Verifique se o conjunto  $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  é um subanel de  $\mathbb{Q}$ .

$\underline{B \neq \emptyset} : x, y \in B$   
 $\downarrow$   
 $0_{\mathbb{Q}} = 6$

$\left\{ \begin{array}{l} x \oplus (-y) \in B \\ x \otimes y \in B \end{array} \right\}$

$z \in B$   
 $-z = 12 - z$

SOLUÇÃO: PRIMEIRO NOTE QUE O ELEMENTO

NEUTRO DA OPERAÇÃO  $\oplus$  EM  $\mathbb{Q}$  É  $0_{\mathbb{Q}} = 0$ .

ALÉM DISSO, DADO  $z \in \mathbb{Q}$  O OPPOSTO DE

$z$  NA OPERAÇÃO  $\oplus$  É DADO POR  $-z = 12 - z$ .

como  $0_a = 6 = 6 \cdot 1$ ,  $\in \text{nr } \bar{B}$   $6 \in B$ , Logo,  $B \neq \emptyset$ .

Agora sejam  $x, y \in B$ . Assim existem

$n, l \in \mathbb{Z}$  tais que

$$x = 6n \quad \text{e} \quad y = 6l.$$

Assim

$$\underline{x \oplus (-y)} = (6n) \oplus (12 - 6l) = (6n) + (12 - 6l) - 6 =$$

$$= 6n - 6l + 6 = 6(\underbrace{n-l+1}_{\in \mathbb{Z}}) \in B.$$

$$\underline{x \otimes y} = (6n) \otimes (6l) = 6n + 6l - \underbrace{(\cancel{6}n)(\cancel{6}l)}_{\cancel{6}} =$$

$$= 6n + 6l - 6nl = 6(\underbrace{n+l-nl}_{\in \mathbb{Z}}) \in B.$$

PORTANTO  $B = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  é um SUBANEL

DO ANEL  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .  $\#$