## Grupo Simétrico

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

20 de outubro de 2020





Dada uma função  $f: A \rightarrow A$ , sabemos que f possui inversa



Dada uma função  $f: A \to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.



Dada uma função  $f:A\to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto



Dada uma função  $f \colon A \to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$\mathcal{S} = \{f \colon A \to A$$



Dada uma função  $f:A\to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$



Dada uma função  $f: A \to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em  ${\mathcal S}$  vamos considerar a composição de funções  $\circ$ .



Dada uma função  $f: A \to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em  ${\mathcal S}$  vamos considerar a composição de funções  $\circ$ .

Como  $id: A \rightarrow A$  tal que id(x) = x para todo  $x \in A$ 



Dada uma função  $f:A\to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f \colon A \to A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em  ${\mathcal S}$  vamos considerar a composição de funções  $\circ$ .

Como  $id:A \to A$  tal que id(x)=x para todo  $x \in A$  é uma função bijetora



Dada uma função  $f:A\to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em  ${\mathcal S}$  vamos considerar a composição de funções  $\circ$ .

Como  $id:A\to A$  tal que id(x)=x para todo  $x\in A$  é uma função bijetora então  $id\in\mathcal{S}$ 



Dada uma função  $f:A\to A$ , sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em  ${\mathcal S}$  vamos considerar a composição de funções  $\circ$ .

Como  $id: A \to A$  tal que id(x) = x para todo  $x \in A$  é uma função bijetora então  $id \in S$  e com isso  $S \neq \emptyset$ .



Dadas f,  $g \in \mathcal{S}$ 



Dadas f,  $g \in \mathcal{S}$  como f e g são bijetoras,



Dadas  $f, g \in \mathcal{S}$  como  $f \in g$  são bijetoras, então  $f \circ g$  é bijetora



Dadas f,  $g \in \mathcal{S}$  como f e g são bijetoras, então  $f \circ g$  é bijetora e daí  $f \circ g \in \mathcal{S}$ .



Dadas f,  $g \in \mathcal{S}$  como f e g são bijetoras, então  $f \circ g$  é bijetora e daí  $f \circ g \in \mathcal{S}$ . Isto é,



Dadas f,  $g \in \mathcal{S}$  como f e g são bijetoras, então  $f \circ g$  é bijetora e daí  $f \circ g \in \mathcal{S}$ . Isto é, a composição de funções



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ .

3/13





$$[(f\circ g)$$



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f\circ g)\circ h$$

3/13



$$[(f\circ g)\circ h](x)$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))$$



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

3 / 13



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)]$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x)$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x)))$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x))$$



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

3 / 13



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g)$ 



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h$ 



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

 $\mathsf{Logo}\ (f \circ g) \circ h = f \circ$ 



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

f∘ id



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f$$



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde  $id: A \rightarrow A$ 



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde  $id: A \rightarrow A$  é tal que id(x) = x,



Agora, sejam f, g e  $h \in \mathcal{S}$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde  $id: A \rightarrow A$  é tal que id(x) = x, para todo  $x \in A$ .



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde  $id: A \rightarrow A$  é tal que id(x) = x, para todo  $x \in A$ . Logo id é o elemento neutro da composição.



Agora, sejam f, g e  $h \in S$ . Para todo  $x \in A$  temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
  

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Agora, para toda  $f \in \mathcal{S}$ 

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde  $id: A \rightarrow A$  é tal que id(x) = x, para todo  $x \in A$ . Logo id é o elemento neutro da composição.



Finalmente,



Finalmente, para toda  $f \in \mathcal{S}$ ,



Finalmente, para toda  $f \in \mathcal{S}$ , como f é bijetora









$$f \circ g = id$$



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\mathcal S}$ 



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\mathcal S}$  possui inverso.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\mathcal S}$  possui inverso.

Portanto  $(\mathcal{S}, \circ)$ 



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\mathcal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\mathcal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que  $A\subseteq \mathbb{N}$ 



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que  $A\subseteq\mathbb{N}$  para simplificar a notação.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que  $A\subseteq \mathbb{N}$  para simplificar a notação.

Vamos ver como é o conjunto  ${\mathcal S}$  com essa hipótese.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de  ${\cal S}$  possui inverso.

Portanto  $(S, \circ)$  é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que  $A\subseteq\mathbb{N}$  para simplificar a notação.

Vamos ver como é o conjunto  ${\mathcal S}$  com essa hipótese.



Se 
$$A = \{1\}$$
,



Se  $A=\{1\}$ , então só existe uma função  $f\colon A\to A$ 





$$f: \{1\} \rightarrow \{1\}$$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id.

5/13



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $\mathcal{S}$ 



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ 



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \{id\}$ 



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $S = S_1 = \{id\}$  e  $(S_1, \circ)$  é um grupo,



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $S = S_1 = \{id\}$  e  $(S_1, \circ)$  é um grupo, e nesse caso comutativo.

5 / 13



$$f: \{1\} \to \{1\}$$
  
 $f(1) = 1.$ 

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso  $S = S_1 = \{id\}$  e  $(S_1, \circ)$  é um grupo, e nesse caso comutativo.

5 / 13



Se  $A=\{1,2\}$ 





 $id: A \rightarrow A$ 



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$
  
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \rightarrow A$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \rightarrow A$$
  
 $f(1) = 2$ 

6/13



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim  $\mathcal{S}$ 

6/13



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim  $S = S_2$ 



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim 
$$S = S_2 = \{id,$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim 
$$S = S_2 = \{id, f\}$$



$$id: A \rightarrow A$$
  $f: A \rightarrow A$   $id(1) = 1$   $f(1) = 2$   $id(2) = 2$   $f(2) = 1$ 

Assim  $S = S_2 = \{id, f\}$  e  $(S_2, \circ)$  é um grupo.

$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim  $S = S_2 = \{id, f\}$  e  $(S_2, \circ)$  é um grupo.

0	id	f
id		
f		

$$id: A \rightarrow A$$
  $f: A \rightarrow A$   $id(1) = 1$   $f(1) = 2$   $id(2) = 2$   $f(2) = 1$ 

Assim  $S = S_2 = \{id, f\}$  e  $(S_2, \circ)$  é um grupo.

0	id	f
id		
f		

Além disso, da tabela acima vemos que esse grupo é comutativo.



Agora, seja  $A = \{1, 2, 3\}.$ 





 $id: A \rightarrow A$ 



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(3) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(3) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$



 $f_2:A\to A$ 

$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$
$$id(1) = 1$$
$$id(2) = 2$$
$$id(3) = 3$$

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$   
 $f_1(3) = 3$ 

$$f_2: A \to A$$
$$f_2(1) = 3$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$T_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1: A \rightarrow A$$
  
 $f_1(1) = 2$ 

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$

$$f_2(3) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$
  
 $f_2(3) = 1$ 

$$r_2(3) - 1$$

$$f_3:A\to A$$



$$id: A \to A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$   
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$ 

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$
  
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$



$$id: A \to A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$   
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$   
 $f_1(3) = 3$ 

$$f_2: A \to A$$
  
 $f_2(1) = 3$   
 $f_2(2) = 2$   
 $f_2(3) = 1$   
 $f_3: A \to A$ 

$$f_3(1) = 1$$
  
 $f_3(2) = 3$ 



$$id: A \to A$$
  $f_2: A \to A$   
 $id(1) = 1$   $f_2(1) = 3$   
 $id(2) = 2$   $f_2(2) = 2$   
 $id(3) = 3$   $f_2(3) = 1$   
 $f_1: A \to A$   $f_3: A \to A$ 

$$f_1: A \to A$$
  $f_3: A \to A$   $f_3(1) = 1$   $f_3(2) = 3$   $f_3(3) = 2$ 



 $f_4:A\to A$ 

Agora, seja  $A = \{1, 2, 3\}$ . Podemos definir então as seguintes funções bijetoras em A:

$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 

$$id(1) = 1$$
  $f_2(1) = 3$   
 $id(2) = 2$   $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(2) = 2$$
  
 $f_2(3) = 1$ 

 $f_2:A\to A$ 

$$f_1:A\to A$$

id(3) = 3

$$f_3:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_3(1) = 1$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2)=1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$
  
 $f_2(3) = 1$ 

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(1) = 1$$
  
 $id(2) = 2$   
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$ 

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2: A \rightarrow A$$
  
 $f_2(1) = 3$ 

$$f_2(2) = 3$$
  
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3: A \rightarrow A$$
  
 $f_3(1) = 1$ 

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

$$f_4(2) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(2) = 2$$
  
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$   
 $f_1(3) = 3$ 

$$f_2: A \to A$$
  
 $f_2(1) = 3$   
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3)=1$$

$$f_3:A\to A$$
$$f_3(1)=1$$

$$f_3(2) = 3$$
  
 $f_3(3) = 2$ 

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$
  
 $f_4(2) = 3$ 

$$f_4(3) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(2) = 2$$
  
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$
  
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3)=1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$
  
 $f_4(2) = 3$ 

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5:A\to A$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$ 

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$
  
 $f_2(3) = 1$ 

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$
  
 $f_3(2) = 3$ 

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$
  
 $f_4(2) = 3$ 

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5:A\to A$$

$$f_5(1) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$ 

$$id(3) = 3$$
$$f_1: A \to A$$

$$f_1(1) = 2$$
  
 $f_1(2) = 1$   
 $f_1(3) = 3$ 

$$f_2: A \to A$$
  
 $f_2(1) = 3$   
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3: A \to A$$
  
 $f_3(1) = 1$   
 $f_3(2) = 3$ 

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$
  
 $f_4(2) = 3$ 

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5: A \rightarrow A$$
  
 $f_5(1) = 3$ 

$$f_5(2) = 1$$



$$id: A \to A$$
  
 $id(1) = 1$   
 $id(2) = 2$   
 $id(3) = 3$ 

$$f_1: A \to A$$
  
 $f_1(1) = 2$   
 $f_1(2) = 1$   
 $f_1(3) = 3$ 

$$f_2: A \to A$$
  
 $f_2(1) = 3$   
 $f_2(2) = 2$ 

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3: A \to A$$
  
 $f_3(1) = 1$   
 $f_3(2) = 3$ 

$$f_3(2) = 3$$
  
 $f_3(3) = 2$ 

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$
  
 $f_4(2) = 3$ 

$$f_4(3)=1$$

$$f_5:A\to A$$
  
$$f_5(1)=3$$

$$f_5(2)=1$$

$$f_5(3) = 2$$



Logo  $S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ 







Logo 
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e  $(S_3, \circ)$  é um grupo.

$$(f_1 \circ f_4)(1)$$



Logo 
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e  $(S_3, \circ)$  é um grupo.

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1))$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2)$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$



Logo 
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e  $(S_3, \circ)$  é um grupo.

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$
  
 $(f_4 \circ f_1)(1)$ 



Logo 
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e  $(S_3, \circ)$  é um grupo.

Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$
  
 $(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1))$ 

8/13



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

 $(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2)$ 



Logo 
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e  $(S_3, \circ)$  é um grupo.

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

$$\mathsf{dai}\ (\mathit{f}_{1} \circ \mathit{f}_{4})(1)$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

$$\mathsf{dai}\; (\mathit{f}_{1} \circ \mathit{f}_{4})(1) \neq (\mathit{f}_{4} \circ \mathit{f}_{1})(1)$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí 
$$(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$$
 , isto é,





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí 
$$(f_1\circ f_4)(1) 
eq (f_4\circ f_1)(1)$$
 , isto é,  $f_1\circ f_4$ 



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí 
$$(f_1\circ f_4)(1) \neq (f_4\circ f_1)(1)$$
 , isto é,  $f_1\circ f_4 \neq f_4\circ f_1$ .





Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1\circ f_4)(1)\neq (f_4\circ f_1)(1)$  , isto é,  $f_1\circ f_4\neq f_4\circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3,\circ)$ 



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$
  
 $(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$ 

$$d_{2}(f \circ f)(1) / (f \circ f)(1) : d_{2}(f \circ f) / f \circ f \quad D_{2}(f \circ f)(1) / (f \circ f)(1) = d_{2}(f \circ f) / f \circ f \quad D_{2}(f \circ f)(1) / (f \circ f)(1) = d_{2}(f \circ f) / (f \circ f)(1) / (f \circ f)(1) = d_{2}(f \circ f)(1) = d_{2}$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.

Note que em  $S_2$ 



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.

Note que em  $S_2$  temos 2 = 2! elementos



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.

Note que em  $S_2$  temos 2 = 2! elementos e em  $S_3$ 



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.

Note que em  $S_2$  temos 2=2! elementos e em  $S_3$  temos 6=3! elementos.



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí  $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$ , isto é,  $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$ . Portanto o grupo  $(S_3, \circ)$  não é comutativo.

Note que em  $S_2$  temos 2=2! elementos e em  $S_3$  temos 6=3! elementos.



De modo geral,



De modo geral, se  $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ 



De modo geral, se  $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$  então existem exatamente n!



9/13



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$ 



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

9/13



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \geqslant 3$ , então

9/13



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \ge 3$ , então  $S_n$  é um grupo não comutativo.



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \geqslant 3$ , então  $S_n$  é um grupo não comutativo.

## Definição

O grupo  $S_n$  é chamado de

9/13



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \geqslant 3$ , então  $S_n$  é um grupo não comutativo.

## Definição

O grupo  $S_n$  é chamado de **grupo simétrico** 



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \geqslant 3$ , então  $S_n$  é um grupo não comutativo.

## Definição

O grupo  $S_n$  é chamado de **grupo simétrico** ou **grupo de permutações** 



Assim o grupo  $(S_n, \circ)$  possui n! elementos.

Se  $n \geqslant 3$ , então  $S_n$  é um grupo não comutativo.

## Definição

O grupo  $S_n$  é chamado de **grupo simétrico** ou **grupo de permutações** em  $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ .



Um modo de representar os elementos de  $S_n$  é o seguinte:



Um modo de representar os elementos de  $S_n$  é o seguinte: vamos representar as funções  $f \in S_n$ 



Um modo de representar os elementos de  $S_n$  é o seguinte: vamos representar as funções  $f \in S_n$  na forma de uma matriz contendo 2 linhas



Um modo de representar os elementos de  $S_n$  é o seguinte: vamos representar as funções  $f \in S_n$  na forma de uma matriz contendo 2 linhas e n colunas.



Um modo de representar os elementos de  $S_n$  é o seguinte: vamos representar as funções  $f \in S_n$  na forma de uma matriz contendo 2 linhas e n colunas. A primeira linha é o domínio da função







f =



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$





$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
  $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Assim a composição  $f_3 \circ f_4$  pode ser determinada da seguinte forma:

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Assim a composição  $f_3 \circ f_4$  pode ser determinada da seguinte forma:

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



A composição  $f_4 \circ f_5$  é:

$$f_4 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



A composição  $f_4 \circ f_5$  é:

$$f_4 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$