Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Considere o conjunto $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

$$G = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}.$$

Então $(G, \cdot)$*, onde* $\cdot$ *é a multiplicação de números reais, é um grupo multiplicativo? Caso afirmativo, esse grupo é comutativo?*

Solução: sejam $x, y, z \in G$.

Assim

$$x = a + b\sqrt{2}$$

$$y = c + d\sqrt{2}$$

$$z = e + f\sqrt{2}$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Daí:

$$(x \cdot y) \cdot j = [(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})](e + f\sqrt{2})$$

$$= [(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}](e + f\sqrt{2})$$

$$= (ac + 2bd)e + 2(ad + bc)f + \qquad =$$

$$(ac + 2bd)f\sqrt{2} + (ad + bc)e\sqrt{2}$$

$$= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf)$$

$$+ (acf + 2bdf + ade + bce)\sqrt{2}$$

- $x \cdot (y \cdot z) = (a + b\sqrt{2})\left[(c + d\sqrt{2})(e + f\sqrt{2})\right]$

$$= (a + b\sqrt{2})\left[(ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2}\right] =$$

$$= a(ce + 2df) + 2b(cf + de) +$$

$$b(ce + 2df)\sqrt{2} + a(cf + de)\sqrt{2}$$

$$= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde)$$

$$+ (bce + 2bdf + acf + ade)\sqrt{2}$$

com isso

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$x * e = x = e * x$, PARA TODO $x \in G$

$x \cdot e = x$; $x = a + b\sqrt{2}$; $e = \alpha + \beta\sqrt{2}$

$$(a + b\sqrt{2})(\alpha + \beta\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

$$(a\alpha + 2b\beta) + (a\beta + b\alpha)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

$=$

$=$

$a\alpha + 2b\beta = a$; PARA TODOS $a, b \in \mathbb{Q}$

$a\beta + b\alpha = b$

$$\boxed{\alpha = 1 \;;\; \beta = 0}$$

$c = \alpha + \beta\sqrt{2} = 1 + 0\sqrt{2}$

$c = 1$ //

TOMANDO $e = 1 + 0\sqrt{2} = 1 \in G$, TEMOS

$$x \cdot e = (a + b\sqrt{2})(1 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

$$e \cdot x = (1 + 0\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

PARA TODO $x = a + b\sqrt{2} \in G$. LOGO,

$e = 1 + 0\sqrt{2} = 1$ É O ELEMENTO NEUTRO DA OPERAÇÃO DEFINIDA EM G.

$x = a + b\sqrt{2}$; $\exists\, y = c + d\sqrt{2}$ TAL QUE

$\underbrace{x \cdot y = 1} = y \cdot x$?

$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 1$

$$(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} ac+2bd = 1 \\ ad+bc = 0 \end{cases}$$

$(a \neq 0) \vee (b \neq 0)$

$\hookrightarrow d = -\dfrac{bc}{a}$

$$ac + 2b\left(\frac{-bc}{a}\right) = 1$$

$$a^2c - 2b^2c = a$$

$$(a^2 - 2b^2)c = a \Leftrightarrow \boxed{c = \underline{\underline{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}}} \in \mathbb{Q}$$

$$d = \frac{-\cancel{a}b}{\cancel{a}(a^2 - 2b^2)} \Rightarrow d = \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$$

DADO $x = a + b\sqrt{2} \in G$, TOME

$y = \dfrac{a}{a^2-2b^2} - \dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$. ASSIM

$\underline{\underline{x.y}} = a+b\sqrt{2} . \left(\dfrac{a}{a^2-2b^2} - \dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \right) =$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2-2b^2} - \frac{2b^2}{a^2-2b^2} \right) + \overbrace{\left(\frac{ba}{a^2-2b^2} - \frac{ab}{a^2-2b^2} \right)}^{=0} \sqrt{2}$$

$$= 1 = e$$

$$y \cdot x = \left(\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2} \sqrt{2} \right) (a + b\sqrt{2}) =$$

$$= \overbrace{\left(\frac{a^2}{a^2-2b^2} - \frac{2b^2}{a^2-2b^2}\right)}^{1} + \overbrace{\left(\frac{-ba}{a^2-2b^2} + \frac{ab}{a^2-2b^2}\right)}^{=0}\sqrt{2}$$

$$= 1 = e.$$

LOGO O INVERSO DE $x = a + b\sqrt{2} \in G$

É $y = \dfrac{a}{a^2-2b^2} - \dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in G$.

PORTANTO $(G, \cdot)$ É UM GRUPO MULTIPLICATIVO.

AGORA, DADOS $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2} \in G$ TEMOS

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) =$$

$$= (\underbrace{ac + 2bd}_{\in \mathbb{Q}}) + (\underbrace{ad + bc}_{\in \mathbb{Q}})\sqrt{2}$$

$$y \cdot x = (c + d\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) =$$

$$= (\underbrace{ca + 2bd}_{\in \mathbb{Q}}) + (\underbrace{cb + da}_{\in \mathbb{Q}})\sqrt{2} .$$

Daí,

$$xy = yx$$

PARA TODOS $x, y \in G$.

PORTANTO $(G, \cdot)$ É UM GRUPO COMUTATIVO. #