Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB



Exercício

Considere o conjunto

$$G = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}^* \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

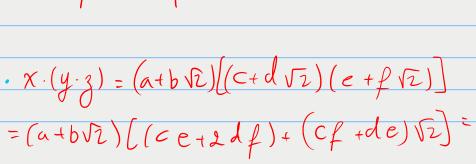
Então (G, \cdot) , onde \bigcirc é a multiplicação de números reais, é um grupo multiplicativo? Caso afirmativo, esse grupo é comutativo?

4=c-d52

3=e+f52

on DE a, h c, d, e, f e
$$\beta$$
. D4.

(x.y) $j = [(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})](e + f\sqrt{2})$
 $= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}](e + f\sqrt{2})$
 $= (ac + 2bd) e + 2(ad + bc)f + = (ac + 2bd)f\sqrt{2} + (ad + bc)e\sqrt{2}$



= a (ce+2df) + 2b(cf+de) + b (ce+2df) \(\frac{1}{2}\) + a (cf+de) \(\frac{1}{2}\)

= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde)

+ (bce + 2bdf + acf+ade) vz

$$(x,y).3 = x.(y.3)$$

$$\chi \times e = \chi = e \times \chi$$
, $\beta = \alpha + b \sqrt{2}$; $e = \alpha + b \sqrt{2}$
 $(\alpha + b \sqrt{2})(\alpha + b \sqrt{2}) = \alpha + b \sqrt{2}$
 $(\alpha + 2b\beta) + (\alpha\beta + b\alpha)\sqrt{2} = \alpha + b \sqrt{2}$

: PANA 10005 A, b & D ax + 2 6 = ~ C = X + B S2 - S+ OVI C = L/ TOMANDO e= 1+0/2=166, TEMOS

x. e= (a+b√2)(J+o√2)= a+b√2

C. 7= (1+012) (a+b12) = a+b12

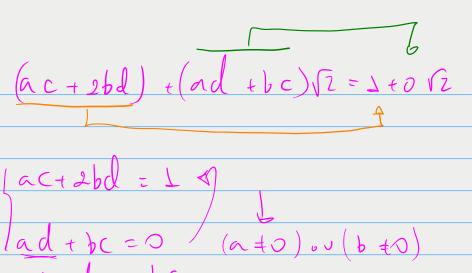
PANA 1000 N=a+b√2 € G. 1060,

En G.

$$x = a + b\sqrt{2}$$
; $\exists y = c + d\sqrt{2}$ TAL Que

 $x \cdot y = 1 = y \cdot x$?

(a+bv2)(c+dv2)=1



$$ac+b(-bc)=1$$

$$a^{2}c-1b^{2}c=a$$

$$a^2 - b^2 = a + b$$

= (a2-262) -1 d

DADO
$$A = a + b \sqrt{2} \in G$$
, TOME

$$y - a - b \sqrt{2} \quad ASSim$$

$$x^2 - 2b^2 \quad x^2 - 2b^2$$

$$x - y - a + b \sqrt{2} \cdot (a - b \sqrt{2}) = a^2 - 9b^2$$

$$(\frac{2}{a^2-2b^2} - \frac{2b^2}{a^2-2b^2}) + (\frac{ba}{a^2-2b^2})$$

 $\frac{1}{a^2-1b^2} = \frac{b}{a^2-1b^2} = \frac{b}$

$$\left(\frac{a^{2}-2b^{2}}{a^{2}-2b^{2}}\right)+\left(\frac{-bu}{a^{2}-2b^{2}}+ab\right)$$

PONTANTO (G.) E UM GRUPO

MULTIPLICATION.

AGOM, DADOS X= a+bVZ,

4= c+d V2 & 6 TEMOS

$$X.Y = (a+b)\sqrt{2}(c+d)\sqrt{2} = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$

$$= (aC+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$

 $y. \chi = (c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2}) =$

= (ca+2bd)+(cb+da) \(\frac{1}{2}\)

xy-yx PANA TODOS X, y & G. PORTANTO (G.) è um 6RU80 COM NATIVO.