Exercício

Seja G um grupo com notação multiplicativa. Considere o subconjunto $Z(G) = \{x \in G \mid xh = hx, \text{ para todo } h \in G\}$. Mostre que:

(a) $Z(G)$ é um subgrupo de G.

(b) G é abeliano se, e somente se, $\boxed{Z(G) = G}$.

$Z(G)$ CENTRO DE G.

$\to Z(G) \neq \emptyset$

$e \in Z(G)$

$H \subseteq G$ É SUBGRUPO SE:

i) $H \neq \emptyset$

ii) $x^{-1} \in H$, PARA TODO $x \in H$

iii) $xy \in H$, PARA TODOS $x, y \in H$.

$xe = x = ex, \forall x \in G$

$xe = ex, \forall x \in G$

SOLUÇÃO: DENOTE POR e O ELEMENTO NEUTRO DE G.

a) COMO e É O ELEMENTO NEUTRO DE G E

$$xe = x = ex$$

$x^{-1} \in Z(G)$; $\underbrace{x^{-1} \cdot h} = h \cdot x^{-1}$; $\forall h \in G$

PARA TODO $x \in G$, ENTÃO

$e \in Z(G)$. LOGO, $Z(G) \neq \emptyset$.

AGORA, SEJA $x \in Z(G)$. DAÍ

$\rightarrow xh = hx$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$; $(b^{-1})^{-1} = b$

PARA TODO $\underline{h \in G}$. ASSIM

$$\boxed{x^{-1}h} = x^{-1}(h^{-1})^{-1} = (h^{-1}x)^{-1}$$

$$= (xh^{-1})^{-1} = (h^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = \boxed{hx^{-1}}$$

PARA TODO $h \in G$. LOGO, $x^{-1} \in Z(G)$.

AGORA, SEJAM $x, y \in \underline{Z(G)}$.

DAÍ,

$\rightarrow xh = hx \leftarrow$

$\rightarrow yh = hy \leftarrow$

PARA TODO $h \in G$.

ASSIM

$$\underline{(xy)h} = x(yh) = (x(hy)) = (xh)y$$
$$= (h(x)y) = \underline{h.(xy)}$$

PARA TODO $h \in G$. LOGO, $xy \in Z(G)$.

PORTANTO, $Z(G)$ É UM SUBGRUPO DE G.

b) SUPONHA QUE G É ABELIANO. LOGO,

$$xy = yx$$

PARA TODOS $x, y \in G$. POR DE-

FINIÇÃO $Z(G) \subseteq G$. ASSIM SEJA $x \in G$.

COMO G É ABELIANO,

$$xh = hx$$

PARA TODO $h \in G$. OU SEJA,

$x \in Z(G)$. LOGO, $Z(G) = G$.

AGORA SUPONHA QUE $Z(G) = G$.

h

SEJAM $x, y \in G = Z(G)$. DAÍ

POR DEFINIÇÃO DE $Z(G)$, COMO

$x \in Z(G)$, ENTÃO

$$x \cdot y = y x,$$

OU SEJA, G É ABELIANO. #