Subgrupos Normais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

17 de novembro de 2020

$(G, *)$ GRUPO . $H \leq G$ SUBGRUPO

$\rightarrow x \sim y \iff x * y^{-1} \in H$; $x, y \in G$

$\rightarrow xH$; $x \in G$ $\qquad Hx$

$\rightarrow G/H = \{ xH , x \in G \}$.

$(A, +, \cdot)$ ANEL COMUTATIVO

→ I IDEAL DE A

$\left(\dfrac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$ É UM ANEL

$(x+I) \oplus (y+I) = (x+y) + I$

→ $x \equiv y \pmod{m}$ $\quad \otimes \quad (xy) + I$

→ $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \otimes)$, $\mathbb{Z}$

$S_3 \to$ PERMUTAÇÕES em $\{1, 2, 3\}$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2A'

$$\to S_3 = \{ Id, f, f^2, g, gf, gf^2 \}$$

$f^2 \hookrightarrow f \circ f$

$gf \hookrightarrow g \circ f$

$gf^2 \hookrightarrow g \circ f \circ f$

$\sigma H \; ; \; \sigma \in S_3$

SEJA $H = \{g\}$. ASSIM

$H = \{Id, g\}$ $\quad g^2 = g \circ g = Id$

VAMOS DETERMINAR S_3/H. TEMOS

$Id\, H = H$

$$fH = \{ f\sigma \mid \sigma \in H \} = \{ f, \underline{fg} \}$$

MAS $fg = gf^2$ DAÍ

$$fH = \{ f, gf^2 \} = (gf^2)H$$

AGORA

$$f^2 H = \{ f^2, f^2 g \}$$

MAS $f^2 g = g f$, DAÍ

$$f^2 H = \{ f^2, g f \} = (g f) H$$

$$(xH)(yH) = (xy)H$$

LOGO

$$G/H = \{H, fH, f^2H\}.$$

DEFINA EM G/H A OPERAÇÃO

$$(\underline{x}H)(yH) = (xy)H.$$

Agora

$$\begin{cases} \underline{f} H = (g f^2) H \\ \underline{f}^7 H = (g f) H \end{cases}$$

E

$$(fH)(f^2 H) = (f f^2) H = f^3 H = H$$

$$[(gf^2)H][(gf)H] = [(g(f^2))(g)f)]H$$

$$= [g(f^2g)f]H = [(g(g)(f)f)]H$$

$$= g^2f^2H = \underbrace{f^2H}$$

ĐAI

$$(fH)(f^2H) \neq [(gf^2)H][(gf)H]$$

$fH = \{f, gf^2\}$ $\forall$

$Hf = \{f, gf\}$ $\forall$

$(G, *)$ GRUPO

H SUBGRUPO

$$\boxed{\frac{G}{H}}$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset,$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

$= yx$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo,

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e A e B subconjuntos de G. Vamos indicar por

$$AB$$

e chamaremos de **produto** de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$AB = \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset.$$

Assim o **produto** de A por B é uma operação sobre o subconjuntos das partes de G, $\mathcal{P}(G)$, chamada de **multiplicação de subconjuntos** de G.

Como G é associativo, então a **multiplicação de subconjuntos** também será associativa. Além disso, caso o grupo G seja comutativo, então **multiplicação de subconjuntos** também será comutativa.

Exemplos

(1) *Seja* $G = \{e, a, b, c\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$a^2 = e$

$b^2 = e$

$c^2 = e$

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Se $A = \{e, a\}$

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Se $A = \{e, a\}$ *e* $B = \{b, c\}$,

Exemplos

(1) Seja $G = \{e, a, b, c\}$ *o grupo tal que*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Esse grupo é chamada de ***grupo de Klein****.*

Se $A = \{e, a\}$ *e* $B = \{b, c\}$*, então:*

$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$

$$AB = \{ b, c, ab, ac \} = \{ b, c \}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais.

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 0\}$$

Exemplos

(2) Considere o grupo multiplicativo dos números reais. Se

$$A = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \underline{x > 0}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \underline{x < 0}\}$$

então:

$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\} = B$

Definição

Um subgrupo N

Definição

Um subgrupo N de um grupo G

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal***

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****)*

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$,*

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$, vale*

$$xN$$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo* $x \in G$*, vale*

$$\underline{xN} = \underline{Nx}.$$

$\{xt \mid t \in N\}$

$xy \neq yx$

$xy = tx$

Definição

Um subgrupo N de um grupo G é chamado de ***subgrupo normal*** *(ou* ***invariante****) se, para todo $x \in G$, vale*

$$xN = Nx.$$

Denotaremos esse fato escrevendo $H \trianglelefteq G$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$*. Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\, f \,]$

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ] = \{Id, f, f^2\}$.

Exemplos

(1) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ] = \{Id, f, f^2\}$. *Então* H *é um subgrupo normal de* G.

DE FATO

$IdH = HId$

$fH = \{f, f^2, Id\}; \ Hf = \{f, f^2, Id\}$

$fH = Hf.$

$$f^2H = \{f^2, Id, f\} = Hf^2$$

$$gH = \{g, gf, gf^2\}$$

$$Hg = \{g, \underset{\substack{\parallel \\ gf^2}}{fg}, \underset{\substack{\parallel \\ gf}}{f^2g}\} = \underset{\substack{\parallel \\ gH}}{\{g, gf^2, gf\}}$$

$$Hg = gH$$

$$(gf)H = \{gf, gf^2, g\}$$

$$H(gf) = \{gf, fgf, f^2gf\}$$

$$f(gf) = f f^2 g = g$$

$$f^2(gf) = f^2 f^2 g = fg$$

Logo

$$H(gf) = \{gf,\ g,\ fg\}$$

$$(gf)H = H(gf)$$

Finalmente

$$(gf^2)H = \{gf^2,\ g,\ gf\}$$

$$H(gf^2) = \{ gf^2, fgf^2, f^2gf^2 \}$$

$$f(gf^2) = ffg = f^2g$$

$$f^2(gf^2) = f^2fg = g$$

DA: $H(gf^2) = \{ gf^2, f^2g, g \}$

$$(gf^2)H = H(gf^2)$$

PORTANTO

$$xH = Hx$$

PARA TODO $x \in S_3$, LOGO

H É UM SUBGRUPO NORMAL DE S_3.

Exemplos

(2) Se G é um grupo abeliano,

Exemplos

(2) Se G é um grupo abeliano, então todo subgrupo de G é normal.

$xy = yx, \forall x, y \in G$

N SUBGRUPO DE G

$xN = \{\underset{\overset{\shortparallel}{tx}}{xt} \mid t \in N\} = \{tx \mid t \in N\} = Nx$

PARA $x \in G$.

Exemplos

(3) Seja H um subgrupo de G

Exemplos

(3) *Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais.*

$$\frac{G}{H} = \{ \underset{\substack{\shortparallel \\ eH}}{H}, xH \}$$

Exemplos

(3) *Seja H um subgrupo de G tal que H possui somente duas classes laterais. Então H é um subgrupo normal de G.*

DE FATO, COMO AS CLASSES LATERAIS À DIREITA SÃO DUAS: H E xH ONDE $x \notin H$ ENTÃO $xH = C_G(H)$.

AGORA AS CLASSES LATE-
RAIS À ESQUERDA SÃO SO-
MENTE DUAS TAMBÉM:
H e Hx, $x \notin H$. DAÍ

$$Hx = C_G(H) = xH.$$

LOGO $xH = Hx$, PARA TODO $x \in G$. PORTANTO H É UM SUBGRUPO NORMAL DE G.

Proposição

Seja G um grupo.

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G,

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G, então $\underline{H \cap L}$

Proposição

Seja G um grupo. Se H e L são subgrupos normais de G, então $H \cap L$ é um subgrupo normal de G.

$$xH = Hx$$
$$xL = Lx \quad , \forall x \in G$$

$x(H \cap L) = (H \cap L)x, \quad \forall x \in G.$

PROVA: SEJA $x \in G$. DADO

$y \in x(H \cap L)$, TEMOS

$$y = xt$$

ONDE $t \in H \cap L$. DAÍ

$y = \underline{x\bar{t}}$, com $\underline{t \in H}$ e $\bar{t} \in L$.

Daí $y \in \overset{Hx}{\overset{\shortparallel}{xH}}$ e $y \in \overset{Lx}{\overset{\shortparallel}{xL}}$. Mas

por hipótese H e L são

subgrupos normais. Assim

$y \in Hx$ e $y \in Lx$. Logo

existem $h_1 \in H$ e $l_1 \in L$ tais

que

$$y = \underbrace{h_1 x}_{\substack{\uparrow \\ \underline{L}X}} \quad \text{e} \quad y = \underbrace{l_1 x}_{\substack{\uparrow \\ \underline{H}X}}$$

E ENTÃO $h_1 = l_1$. ASSIM $y \in Hx$

E $y \in Lx$, ISTO É, $y = tx$

COM $t \in H \cap L$. LOGO, $y \in \underline{(H \cap L)}x$.

COM ISSO, $x(H \cap L) \subseteq (H \cap L)x$.

AGORA, SEJA $z \in (H \cap L)x$.

DAÍ $z = tx$ COM $t \in H \cap L$.

OU SEJA, $z \in \underset{\overset{\parallel}{xH}}{\underline{Hx}}$ E $z \in \underset{\overset{\parallel}{xL}}{Lx}$.

COMO H E L SÃO SUBGRUPOS

NORMAIS, ENTÃO $g \in xH$ E $g \in xL$.

ASSIM

$$g = x h_2 \quad \text{E} \quad g = x l_2$$

LOGO $h_2 = l_2$. DAÍ, $g = xu$ ONDE $u \in H \cap L$. ISTO É, $g \in x(H \cap L)$.

LOGO, $(H \cap L)x \subseteq x(H \cap L)$.

PORTANTO

$$x(H \cap L) = (H \cap L)x,$$

E ASSIM $H \cap L$ É UM SUB-

GRUPO NORMAL DE G. #

Proposição

Seja N um subgrupo normal

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G.

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN)$$

Proposição

Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$ temos

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

"Nb

$(aN)(bN) \subseteq (ab)N$

$(ab)N \subseteq (aN)(bN)$

PROVA: SEJA $x \in (aN)(bN)$.

DAÍ, $x = \alpha\beta$ ONDE $\alpha \in aN$ E

$\beta = bN$. ISTO É,

$\to x = (an_1)(bn_2)$

ONDE $\alpha = a n_1$ E $\beta = a n_2$.

ASSIM

$$x = (a n_1)(b n_2) = a(\underline{n_1 b})n_2$$

MAS POR HIPÓTESE, N É UM

SUBGRUPO NORMAL, DAÍ $bN = Nb$.

ASSIM $n_1 b \in Nb = bN$, LOGO

EXISTE $n_3 \in N$ TAL QUE

$$\boxed{n_1 b = b n_3}$$

DAÍ

$$x = a(n_1 b)n_2 = a(b n_3)n_2$$

$$x = (ab)(\underbrace{n_3 n_2}_{\in \mathbb{N}}) \in (ab)\mathbb{N}$$

E ENTÃO $x \in (ab)\mathbb{N}$, OU SERÁ,

$(aN)(bN) \subseteq (ab)N.$

AGORA SEJA $y \in (ab)N$. DAÍ

$y = (ab)n = (\underbrace{ae}_{\in aN})(\underbrace{bn}_{bN})$.

ISTO É, $y \in (aN)(bN)$.

Logo, $(ab)N \subseteq (aN)(bN)$.

Portanto

$$(aN)(bN) = (ab)\underline{N}. \quad \#$$

$$\boxed{G/\underline{N}}$$