

Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

$$a, 1-a$$

Exercício

Considere o anel $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ onde

$$\rightarrow \underline{a \oplus b} = \underline{a + b - 1}$$

$$\rightarrow \underline{a \otimes b} = \underline{a + b - ab},$$

para todos $a, b \in \mathbb{Q}$. O conjunto $\boxed{I = \mathbb{Z}}$ é um ideal desse anel?

$$a \otimes b = a + b - ab = b + a - ba = b \otimes a$$

$$0_{\mathbb{Q}} = 1 \in I$$

Solução: Primeiramente note que

$$a \oplus b = a + b - ab = b + a - ba = b \oplus a$$

ou seja, (\mathbb{Q}, \oplus) é um ANEL

COMUTATIVO. ALÉM DISSO, O

ELEMENTO NEUTRO DA SOMA É

$1 \in I = \mathbb{Z}$. daí $I \neq \emptyset$.

AGORA SE TAMBÉM $x, y \in I$.

O OPÓSTO DE y NA OPERAÇÃO

$$\oplus \quad e' - y = 1 - y. \quad \text{DAI'}$$

$$x \oplus (-y) = x \oplus (1 - y) = x + \cancel{(1 - y)} - \cancel{1} \\ = x - y \in \mathbb{Z} = I.$$

AGORA PROVA $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in I$

TEMOS

$$\rightarrow \tilde{\alpha} \otimes x = \underbrace{\alpha + x - \alpha x}_{\in I = \mathbb{Z}} ?$$

Porque $N \neq 0$, $I = \mathbb{Z}$, NÃO É um
IDEAL DE $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ pois, por

EXAMPLE, TO MAKE $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

$x = 0 \in \mathbb{Z} = I$ TC MOD

$$\underline{\alpha \otimes x} = \frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} = I.$$

~~✗~~