

Funções

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Considere a função $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por

$$h(\underline{m}, \underline{n}) = \frac{\underline{m}}{|\underline{n}| + 1}.$$

Determine se h é injetora ou sobrejetora.

$f: A \rightarrow B$ é INJETORA SE PARA TODOS
 $x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE $f(x_1) = f(x_2)$,
TEMOS $x_1 = x_2$.

$x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$

Solução: Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$$h(x_1, x_2) = h(y_1, y_2).$$

Assim,

$$\frac{x_1}{|x_2|+1} \neq \frac{y_1}{|y_2|+1}$$

ISSO IMPlica QUE L PODE NÃO

SER INJEÇÃO. VAMOS TENTAR
ENCONTRAR EXEMPLOS.

ENTÃO \sim NÃO É INJETORA

POIS, POR EXEMPLO, TOMAMOS

$(1, -1), (1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ALÉM

DISSO $(1, -1) \neq (1, 1)$ É NO EN-

TANTO

$$h(z, -1) = \frac{1}{(-1)+1} = \frac{1}{2}$$

||

$$h(z, 1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

AGORA $f: A \rightarrow B$ É SOBRE-

JETORA SE PARA TODO $z \in B$

EXISTE $t \in A$ TAL QUE

$$f(t) = z.$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}, b > 0$$

$$g \in \mathbb{Q} : t \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$h(t) = z^a = \frac{a}{b}$$

$$x = a$$

$$\frac{x}{|y|+1} = z$$

$$\frac{x}{|y|+1} = \frac{a}{b}$$

$$y = \underline{\underline{b-1}} > 0$$

AGORA h É SOBREJETORA

POIS DADO $z \in \mathbb{Q}$ COM

$$z = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$$

$$\text{TEM } \underbrace{(a, b-1)} \in \underline{\underline{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}} \in$$

TE MOS

$$\underline{h(a, b-1)} = \frac{a}{|b-1|+1} = \frac{a}{b-1+1} = \frac{a}{b} = \boxed{f}$$

#