Grupo Quociente

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

17 de novembro de 2020

Seja N um subgrupo normal

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN)$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

Seja N um subgrupo normal de um grupo G, onde e denota o elemento neutro de G. Denote por

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

o conjunto das classes de equivalência determinadas por N.

Defina em G/N a operação

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

para todos $aN, bN \in G/N$.

Temos:

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é eN

Temos:

i) $[(aN)(bN)](cN) = (an)[(bN)(cN)]$ para todos aN, bN, $cN \in G/N$;

ii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$ para todo $aN \in G/N$;

iii) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$ para todo $aN \in G/N$.

Assim, o conjunto G/N é um grupo com a multiplicação de conjuntos.

Nesse grupo o elemento neutro é eN e $(aN)^{-1} = (a^{-1})N$.

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G.

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições,

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente***

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N*

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N*

Definição

Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Nessas condições, o ***grupo quociente*** *de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N e da operação de multiplicação de conjuntos aplicadas aos elementos desse conjunto.*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo*

Exemplos

(1) Seja $G = \{1, -1, i, -i\}$ *um grupo e* $N = \{1, -1\}$.

Exemplos

(2) Seja $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

Exemplos

(2) Seja $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ *e* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$.

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. Já vimos que se tomamos

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$*. Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ]$

Exemplos

(3) Seja $G = S_3$. *Já vimos que se tomamos*

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

então

$$S_3 = \{Id, f, f^2, g, gf, gf^2\}.$$

Considere o subgrupo $H = [\ f\ ] = \{Id, f, f^2\}$.

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G,

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que

Proposição

Se N é um subgrupo normal de G, então a função $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que

$$\ker(\mu) = N.$$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G,

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$ é chamado de ***homomorfismo canônico***

Definição

Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$ é chamado de ***homomorfismo canônico*** *de G sobre G/N.*

Lema

Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos,

Lema

Se $f: G \to L$ *é um homomorfismo de grupos, então* $N = \ker(f)$

Lema

Se $f: G \to L$ *é um homomorfismo de grupos, então* $N = \ker(f)$ *é um subgrupo normal de* G

Lema

Se $f: G \to L$ *é um homomorfismo de grupos, então* $N = \ker(f)$ *é um subgrupo normal de* G *e, portanto,* G/N *é um grupo.*

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f\colon G \to L$ um homomorfismo sobrejetor

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f\colon G \to L$ *um homomorfismo sobrejetor de grupos.*

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f\colon G \to L$ *um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se* $N = \ker(f)$,

Teorema (Teorema do Homomorfismo para Grupos)

Seja $f\colon G \to L$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se $N = \ker(f)$, então o grupo quociente G/N é isomorfo ao grupo L.

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$,

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$, *considere o homomorfismo* $\rho_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$

Exemplo

Dado um inteiro $m > 1$, considere o homomorfismo $\rho_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ definido por $\rho_m(x) = \overline{x}$.