

Funções - Composição

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

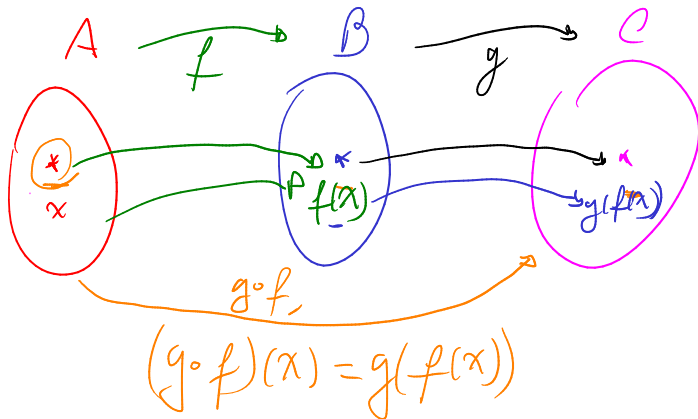
Sejam $f: A \rightarrow B$

Definição

Sejam $f: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ e $g: \underline{B} \rightarrow \underline{C}$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções.



Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a função composta

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(\underline{g \circ f})(\underline{x})$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Definição

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. Definimos a **função composta** de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \underline{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\underline{f(x)} = \underline{x^2}$

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

Aqui existe $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Aqui também podemos definir

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por}$$

$$\begin{aligned}(\underline{f \circ g})(x) &= f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 \\ &= \underline{x^2 + 2x + 1}.\end{aligned}$$

OBSEQUE QUE NEM SEMPRE

$g \circ f$ E $f \circ g$ ESTÃO DEFINIDAS.

NAS MESMO ALANDOS $f \circ g \neq g \circ f$

EXISTEM, PODE OCORRER DE

$$(f \circ g) \neq (g \circ f).$$

Exemplos

$$2) \underline{f}: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Exemplos

$$2) f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ e } g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \underline{x^2 + 1}$

Exemplos

2) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \ln x$.

$\rightarrow g \circ f$ EXISTE: $f \circ g$ NÃO ESTÁ DEFINIDA.

NESSE CASO $g \circ f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1).$$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$

$g \circ f$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras,

Proposição

Se $f: \underline{A} \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow \underline{C}$ são funções injetoras, então $g \circ f$:

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$

$f: A \rightarrow B$ É INJETORA SE DADOS
 $x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE $f(x_1) = f(x_2)$
 ISSO IMPLICA EM $x_1 = x_2$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é injetora.

$$x_1, x_2 \in A; \quad \underline{(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)} \quad \dots \quad \underline{x_1 = x_2}$$

$$\underbrace{g(f(x_1))}_{y_1} = \underbrace{g(f(x_2))}_{y_2} \quad g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow \underline{y_1 = y_2}$$

$$\underbrace{f(x_1)}_A = \underbrace{f(x_2)}_A \Rightarrow \underline{x_1 = x_2}$$

PROVA: SEJAM $x_1, x_2 \in A$ TAIS QUE

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

ASSIM, POR DEFINIÇÃO DE COMPOSTA,

$$\overbrace{g(f(x_1))} = \overbrace{g(f(x_2))}.$$

MAI g È INJETTA, DA'

$$f(x_1) = f(x_2).$$

MA f TAMBE' È INJETTA.
LOGO

$$x_1 = x_2.$$

PONTANTO, $g \circ f$ è INJETTO.

#

Proposição

Se $f: \underline{A} \rightarrow B$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras,

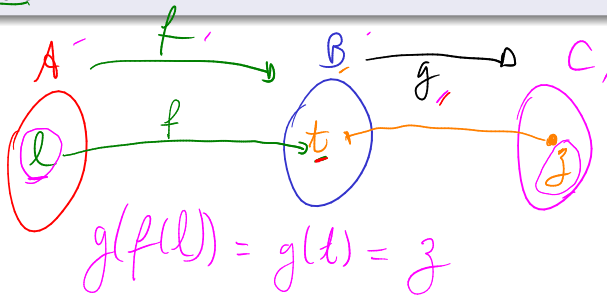
Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $\underline{g \circ f}: \underline{A} \rightarrow \underline{C}$

$f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal ou $f(x) = y$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.



PROVA: SEJA $z \in C$ como g é

SUBCONTÍNUA, EXISTE $\underline{t} \in B$ TAL

OU \bar{t}

$$g(t) = z.$$

MAS f É SOBREJETORA, LOGO EXISTE

$l \in A$ TAL QUE

$$f(l) = t.$$

Q.T.

$$(\underline{g \circ f})(l) = g(f(l)) = g(k) = j$$

Portanto, g é sobrejetor na.
#