Funções - Imagem Direta e Inversa

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

19 de setembro de 2020

Definição

Seja $f : A \to B$

Definição

Seja $f: A \to B$ *uma função.*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$,

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta***

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) =$$

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x)$$

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é,

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$,

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa***

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f*

Definição

Seja $f: A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$*

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q)$$

Definição

Seja $f : A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A$$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é,

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dado $P \subseteq A$, chama-se **imagem direta** de P **segundo** f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

*ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se **imagem inversa** de Q **segundo** f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$

Definição

Seja $f\colon A \to B$ *uma função.*

i) Dado $P \subseteq A$*, chama-se* ***imagem direta*** *de* P ***segundo*** f *e indica-se por* $f(P)$ *o subconjunto de* B *dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ *é o conjunto das imagens por* f *dos elementos de* P*.*

ii) Dado $Q \subseteq B$*, chama-se* ***imagem inversa*** *de* Q ***segundo*** f *e indica-se por* $f^{-1}(Q)$ *o subconjunto de* A *dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ *é o conjunto dos elementos de* A

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A que tem imagem em Q

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A que tem imagem em Q através de f.

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função.

i) Dado $P \subseteq A$, chama-se ***imagem direta*** *de P* ***segundo*** *f e indica-se por $f(P)$ o subconjunto de B dado por*

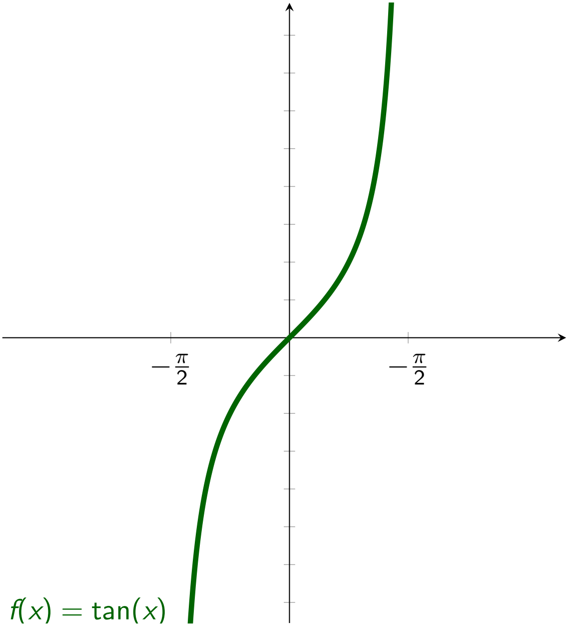
$$f(P) = \{f(x) \mid x \in P\},$$

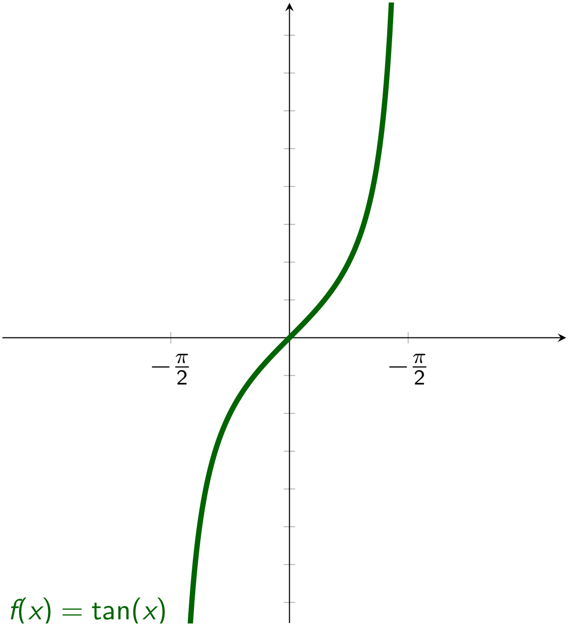
isto é, $f(P)$ é o conjunto das imagens por f dos elementos de P.

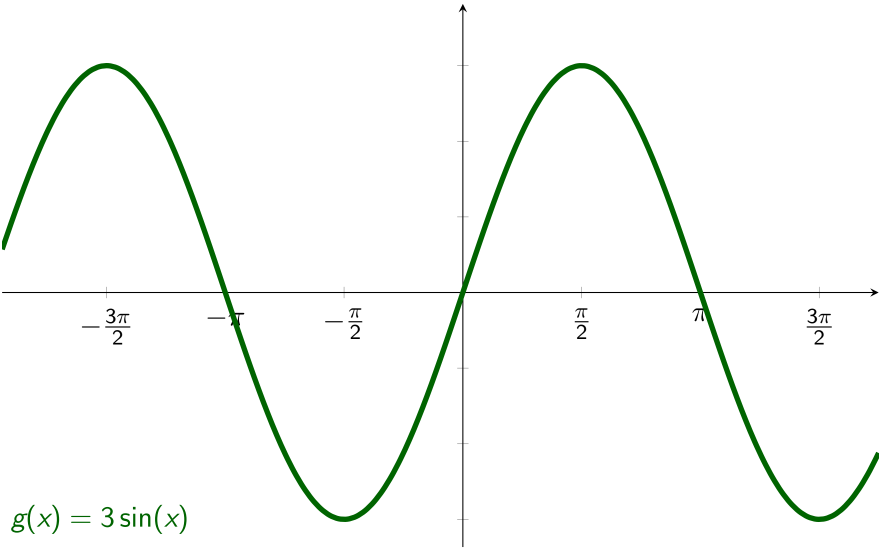
ii) Dado $Q \subseteq B$, chama-se ***imagem inversa*** *de Q* ***segundo*** *f e indica-se por $f^{-1}(Q)$ o subconjunto de A dado por*

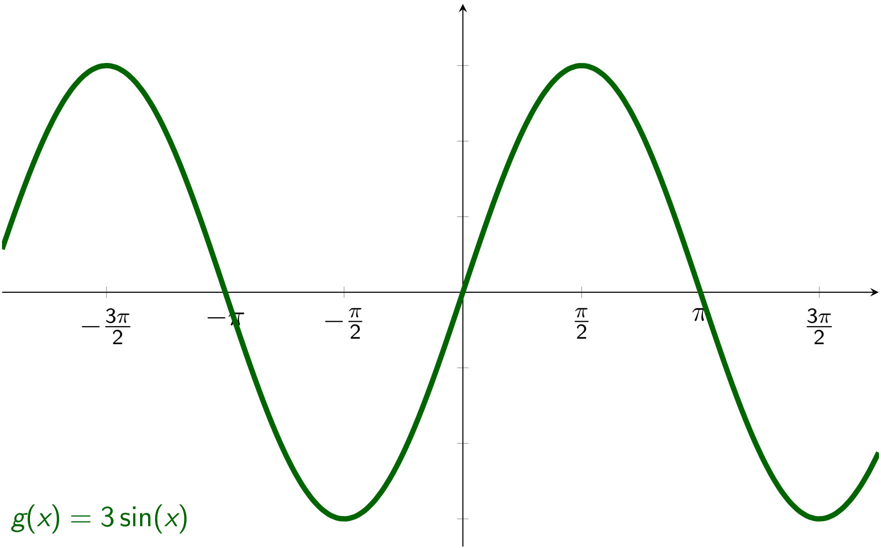
$$f^{-1}(Q) = \{x \in A \mid f(x) \in Q\},$$

isto é, $f^{-1}(Q)$ é o conjunto dos elementos de A que tem imagem em Q através de f.


$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \tan(x)$


$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \tan(x)$


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$g(x) = 3\sin(x)$



$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$g(x) = 3\sin(x)$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$.

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) =$$

Exemplos

1) *Seja* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\})$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f \colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7),$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} =$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) =$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2,4,10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2,4,10\}\} = \{1,3,9\}$$

$$f^{-1}(\{0,1,3,5,7,9\})$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f \colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x)$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ *e* $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ *e* $f\colon A \to B$ *dada por* $f(x) = x+1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3,5,7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4,6,8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2,4,6,8,10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2,4,10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2,4,10\}\} = \{1,3,9\}$$

$$f^{-1}(\{0,1,3,5,7,9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0,1,3,5,7,9\}\} = \emptyset$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(x) = x + 1$. *Temos:*

$$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{2\}$$

$$f(\{3, 5, 7\}) = \{f(3), f(5), f(7)\} = \{4, 6, 8\}$$

$$f(A) = \{f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{2, 4, 10\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{2, 4, 10\}\} = \{1, 3, 9\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}) = \{x \in A \mid f(x) \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}\} = \emptyset$$

Exemplos

2) *Sejam* $A = B = \mathbb{R}$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*.*

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\})$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2])$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x)$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\} = \{x^2 \mid 0 \le x \le 2\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$*. Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9])$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Temos:

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$$

$$f([0, 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$$

$$f^{-1}([1, 9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\}$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-1,-3]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-1,-3] \cup [1,3]$$

Exemplos

2) Sejam $A = B = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Temos:*

$$f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$$

$$f([0,2]) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} = \{x^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [0,4]$$

$$f^{-1}([1,9]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,9]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x) \leq 9\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\} = [-1,-3] \cup [1,3]$$

Proposição

Seja $f: A \to B$ uma função

Proposição

Seja $f: A \rightarrow B$ *uma função e sejam* P,

Proposição

Seja $f\colon A \to B$ *uma função e sejam* $P,\ Q \subseteq A$,

Proposição

Seja $f\colon A \to B$ *uma função e sejam* P, $Q \subseteq A$, X,

Proposição

Seja $f: A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$,

Proposição

Seja $f: A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y)$

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X)$

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ *uma função e sejam* $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) *Se* $P \subseteq Q$, *então* $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$,

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$. Mas como $P \subseteq Q$,

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$. Mas como $P \subseteq Q$, então $x \in Q$

Proposição

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$. Mas como $P \subseteq Q$, então $x \in Q$ e daí $y \in f(Q)$.

Proposição

Seja $f: A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$. Mas como $P \subseteq Q$, então $x \in Q$ e daí $y \in f(Q)$. Logo $f(P) \subseteq f(Q)$.

Proposição

Seja $f: A \to B$ uma função e sejam $P, Q \subseteq A$, $X, Y \subseteq B$.

i) Se $P \subseteq Q$, então $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Prova:

i) Se $y \in f(P)$, então existe $x \in P$ tal que $f(x) = y$. Mas como $P \subseteq Q$, então $x \in Q$ e daí $y \in f(Q)$. Logo $f(P) \subseteq f(Q)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Logo $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Logo $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

Portanto,

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Logo $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

Portanto, $f^{-1}(X \cup Y) =$

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Logo $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

Portanto, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

ii) Seja $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Então $f(z) \in X \cup Y$. Se $f(z) \in X$, então $z \in f^{-1}(X)$ e daí $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $f(z) \in Y$, então $z \in f^{-1}(Y)$ e assim $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Logo, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

Agora, seja $z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Se $z \in f^{-1}(X)$, então $f(z) \in X$, daí $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Se $z \in f^{-1}(Y)$, então $f(z) \in Y$ e assim $f(z) \in X \cup Y$, isto é, $z \in f^{-1}(X \cup Y)$. Logo $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$.

Portanto, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. $\blacksquare$