Exercício

Mostre que se um grupo finito G tem um único subgrupo H de uma dada ordem, então H é um subgrupo normal.

$$xH = Hx \quad \forall x \in G$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^{-1}Hx = H} \quad \forall x \in G$$

SOLUÇÃO: VAMOS MOSTRAR QUE

$$x^{-1}Hx = H$$

PARA TODO $x \in G$.

SEJA G UM GRUPO FINITO.
E H O ÚNICO SUBGRUPO DE G

TAL QUE $o(H) = n$.

DADO $x \in G$, MOSTREMOS QUE

O CONJUNTO

$$\rightarrow x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$$

É UM SUBGRUPO DE G.

$\underbrace{x^{-1}Hx \neq \emptyset}_{e?}$, $y, z \in x^{-1}Hx \Rightarrow y^{-1} \in x^{-1}Hx$

$y \cdot z \in x^{-1}Hx.$

COMO H É SUBGRUPO DE G

ENTÃO $e \in H$. DAÍ,

$$\underline{x^{-1}e}\,x \in x^{-1}Hx$$

$$e \in x^{-1}Hx,$$

ISTO É, $x^{-1}Hx \neq \emptyset$.

AGORA SEJAM $y, z \in x^{-1}Hx$. DAÍ

$$y = x^{-1}h_1 x$$

$$z = x^{-1}h_2 x$$

Com $h_1, h_2 \in H$. Assim

$$\Rightarrow y^{-1} = \left((x^{-1}h_1)x\right)^{-1} = x^{-1} \cdot (x^{-1}h_1)^{-1}$$

$$= x^{-1}\underset{\in H}{h_1^{-1}}\, x \in \underline{x^{-1}Hx}.$$

Além disso,

$$y z = (x^{-1} h_1 x)(x^{-1} h_2 x) = x^{-1} h_1 (\underbrace{x x^{-1}}_{e}) h_2 x$$

$$= x^{-1} (\underbrace{h_1 h_2}_{\in H}) x \in \underbrace{x^{-1} H x}.$$

Portanto, $x^{-1} H x$ é um sub-

GRUPO DE G.

AGORA A FUNÇÃO $f : \underline{H} \to \underline{x^{-1} H x}$

TAL QUE

$$f(h) = x^{-1} h x$$

É HOMOMORFISMO DE GRUPOS E MAIS

AINDA, f É BIJETORA. LOGO

f É UM ISOMORFISMO DE GRUPOS.

DAÍ,

$$o(H) = o(x^{-1}Hx).$$

PARA TODO $x \in G$.

MAS COMO H É O ÚNICO

SUBGRUPO DE G DE ORDEM n,

ENTÃO

$$x^{-1}Hx = H$$

PARA TODO $x \in G$. OU SEJA,

H é um subgrupo normal de G. #