Exercício

Seja G um grupo e N um subgrupo de G. Mostre que N é normal se, e somente se, $x^{-1}Nx = N$, para todo $x \in G$.

$$x^{-1}Nx = \{x^{-1}hx \mid h \in N\} = N$$

N É NORMAL SE $\boxed{xN = Nx}$ PARA TODO $x \in G$.

SOLUÇÃO: PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) SE N É NORMAL, ENTÃO

$\underbrace{x^{-1}Nx}_{\uparrow} = N$ PARA TODO $x \in G$.

ii) SE $\boxed{x^{-1}Nx = N}$ PARA TODO $x \in G$,

ENTÃO $\underbrace{N \text{ É NORMAL}}$.

PARA MOSTRAR (c) SEJA $x \in G$.

QUEREMOS MOSTRAR QUE

$$x^{-1} N x \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} N$$

SUPONDO N NORMAL. ASSIM SEJA

$y \in x^{-1}Nx \quad \rightarrow xN = Nx$

$y \in N$. TEMOS

$y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) \quad (\mathrm{I})$

AGORA N É NORMAL, DAÍ $xN = Nx$.

MAS $xy \in xN = Nx$, COM ISSO EXISTE

$h \in N$ TAL QUE

$$xy = hx \quad \text{(II)}$$

SUBSTITUINDO (II) EM (I):

$$y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \underset{\substack{\cap \\ N}}{h} x \in x^{-1} N x.$$

LOGO $\boxed{N \subseteq x^{-1} N x}$.

AGORA SEJA $z \in x^{-1} N x$. DAÍ

$z = x^{-1}(\underbrace{h x}_{\in Nx})$ (I)

COM $h \in N$. AGORA $hx \in \underbrace{Nx}$ E

COMO N É NORMAL, $Nx = xN$.

DAÍ, $hx \in xN$, ISTO É, EXISTE

$t \in N$ TAL QUE

$$hx = xt \quad (\mathrm{II})$$

SUBSTITUINDO (II) EM (I):

$$g = x^{-1}(hx) = (\underbrace{x^{-1}(x)}_{e}t) = t \in N$$

LOGO,

$$\boxed{x^{-1}Nx \subseteq N.}$$

PORTANTO

$$\Rightarrow x^{-1}Nx = \underline{N}$$

PARA TODO $x \in G$.

AGORA PROVEMOS (ii). PARA ISSO

SEJA $x \in G$. QUEREMOS MOSTRAR

QUE $xN \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \underline{Nx}$. ASSIM SEJA

$y \in xN$. DAÍ, EXISTE $h \in N$ TAL QUE

$y \in Nx$

$$y = xh = xhe = xh(x^{-1}x)$$

$$y = \overbrace{(xhx^{-1})}^{t}\, x$$

$$xNx^{-1} = (\underbrace{x^{-1}}_{z})^{-1} N (\underbrace{x^{-1}}_{z}) = z^{-1}Nz = N$$

Agora $xhx^{-1} \in xNx^{-1}$, pois $h \in N$.

TOMANDO $z = x^{-1} \in G$ PODEMOS ESCRE-
VER

$$xNx^{-1} = z^{-1}Nz = N$$

POR HIPÓTESE. OU SEJA,

$xhx^{-1} \in g^{-1}Ng = N$. LOGO EXISTE

$\underline{t \in N}$ TAL QUE $xhx^{-1} = t$. COM

ISSO,

$$y = (xhx^{-1})x = tx \in Nx$$

$\ell \in xN$

LOGO, $\boxed{xN \subseteq Nx,}$

AGORA SEJA $\ell \in Nx$. DAÍ, EXISTE

$n \in N$ TAL QUE

$$\ell = nx = (xx^{-1})nx = x(\underbrace{x^{-1}nx}_{N = x^{-1}Nx})$$

MAS $x^{-1}nx \in x^{-1}Nx = N$. ASSIM

$x^{-1}nx = h$ COM $h \in N$. LOGO

$$y = x(x^{-1}nx) = xh$$

COM $h \in N$. DAÍ $y \in xN$. LOGO, $\boxed{Nx \subseteq xN.}$

PORTANTO

$$xN = Nx$$

PARA TODO $x \in G$, ISTO É, N É

UM SUBGRUPO NORMAL DE G. #