Anéis - Continuação

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

16 de setembro de 2020

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Prova: FAZER!!!!!

Exemplos

COLOCAR EXEMPLOS

Definição

Um homomorfismo do anel $(A, +, \cdot)$ *no anel* $(B, \oplus, \otimes)$ *é uma função* $f : A \to B$ *que satisfaz:*

i) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$, *para todos* x, $y \in A$;

ii) $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$, *para todos* x, $y \in A$.

Proposição

Sejam $(A,+,\cdot)$ *e* $(B,\oplus,\otimes)$ *anéis e seja* $f: A \to B$ *um homomorfismo. Então:*

i) $f(0_A) = 0_B$

ii) $f(-x) = -f(x)$, *para todo* $x \in A$.

Prova:

i) Fazendo $x = y = 0_A$, temos

$$f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) \oplus f(0_A)$$

Somando $-f(0_A)$ em ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned} f(0_A) \oplus (-f(0_A)) &= (f(0_A) \oplus f(0_A)) \oplus (-f(0_A)) \\ 0_B &= f(0_A) \oplus 0_B \\ f(0_A) &= 0_B \end{aligned}$$

ii) Temos $0_B = f(0_A) = f(x + (-x)) = f(x) \oplus f(-x)$. Assim somando $-f(x)$ em ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned} 0_B \oplus (-f(x)) &= [f(x) \oplus f(-x)] + (-f(x)) \\ -f(x) &= f(-x) \oplus (f(x) \oplus (-f(x))) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

como queríamos. $\blacksquare$

Definição

Seja $f : A \to B$ *um homomorfismo, onde* A *e* B *são anéis. Dizemos que*

i) f *é um epimorfismo se* f *for sobrejetora.*

ii) f *é um monomorfismo se* f *for injetora.*

iii) f *é um isomorfismo se* f *for bijetora.*

iv) *Quando* $A = B$ *e* f *é um isomorfismo, então* f *é um automorfismo.*

Definição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então o subconjunto de* A *definido por*

$$\ker(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$$

é chamado de ***kernel*** *ou* ***núcleo*** *de* f*.*

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ *e* $(B, \oplus, \otimes)$ *anéis e* $f: A \to B$ *um homomorfismo de anéis. Então:*

i) $\ker(f)$ *é um subanel de* A*.*

ii) f *é injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0_A\}$*.*

Prova:

i) Primeiro note que sendo f é um homomorfismo então $f(0_A) = 0_B$. Logo $0_A \in \ker(f)$, isto é, $\ker(f) \neq \emptyset$.
Agora dados $x, y \in \ker(f)$ precisamos mostrar que $x - y \in \ker(f)$ e $xy \in \ker(f)$, e para mostrar isso basta mostrar que $f(x-y) = 0_B$ e$f(xy) = 0_B$. Inicialmente como $x, y \in \ker(f)$ daí $f(x) = f(y) = 0_B$. Assim

$$f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x) \oplus f(-y) = f(x) \oplus (-f(y)) = 0_B \oplus 0_B = 0_B$$
$$f(xy) = f(x) \otimes f(y) = 0_B \otimes 0_B = 0_B$$

Logo $x - y \in \ker(f)$ e $xy \in \ker(f)$. Portanto $\ker(f)$ é um subanel de A.

ii) Primeiro suponha que f é injetora e vamos mostrar que $\ker(f) = \{0_A\}$. Para isso seja $x \in \ker(f)$. Então

$$f(x) = 0_B,$$

mas f sendo um homomorfismo temos $f(0_A) = 0_B$. Daí

$$f(x) = 0_B = f(0_A).$$

E como f é injetora, por hipótese, segue que $x = 0_A$. Logo $\ker(f) = \{0_A\}$.

Agora suponha que $\ker(f) = \{0_A\}$ e vamos mostrar que f é injetora. Para isso sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Daí

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ f(x_1) \oplus (-f(x_2)) &= 0_B \\ f(x_1) \oplus f(-x_2) &= 0_B \\ f(x_1 - x_2) &= 0_B \end{aligned}$$

Logo $x_1 - x_2 \in \ker(f) = \{0_A\}$. Com isso $x_1 - x_2 = 0_A$, isto é, $x_1 = x_2$. Portanto f é injetora. ■

Proposição

Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \oplus, \otimes)$ anéis e seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis.

i) Se A tem unidade, então B tem unidade e

$$f(1_A) = 1_B.$$

ii) Se A tem unidade e $x \in A$ possui inverso multiplicativo, então $f(x)$ tem inverso e

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

Prova:

i) Incialmente como num anel a unidade é única, para mostrar que B possui unidade basta mostrar que

$$y \otimes f(1_A) = y = f(1_A) \otimes y$$

para todo $y \in B$. Sendo assim, seja $y \in B$. Como f é sobrejetor então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Assim

$$y \otimes f(1_A) = f(x) \otimes f(1_A) = f(x \cdot 1_A) = f(x) = y$$
$$f(1_A) \otimes y = f(1_A) \otimes f(x) = f(1_A \cdot x) = f(x) = y$$

para todo $y \in B$. Portanto B possui unidade e

$$1_B = f(1_A).$$

ii) Novamente, devido á unicidade do inverso em um anel, para mostrar que $f(x)$ possui inverso basta mostrar que

$$f(x) \otimes f(x^{-1}) = 1_B = f(x^{-1}) \otimes f(x)$$

desde que $x \in A$ possua inverso multiplicativo. Sendo assim suponha que $x \in A$ possui inverso multiplicativo. Seja x^{-1} o inverso multiplicativo de x em A. Temos

$$f(x) \otimes f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1_A) = 1_B$$
$$f(x^{-1}) \otimes f(x) = f(x^{-1} \cdot x) = f(1_A) = 1_B$$

Portanto $f(x)$ possui inverso multiplicativo e

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}),$$

como queríamos. $\blacksquare$