Anéis - Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

*ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

*ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o **oposto** de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,
$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, $n \geqslant 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, então

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,
$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*
$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*, então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α*,*

Proposição

v) *Para todos* α, x,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, se

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

vii) Para todos x,

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, *temos*

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, temos

$$x \cdot (-y)$$

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$$

Proposição

vii) Para todos x, $y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos x,

Proposição

vii) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Proposição

vii) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

viii) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Definição

Seja $(A,+,\cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um **subanel** de* A

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis:*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de ***subanéis triviais****.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de ***subanéis triviais****.*

2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais***.

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de ***subanéis triviais****.*

2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.

3) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de ***subanéis triviais****.*

2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.

3) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$ *para todos* $x, y \in B$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$ *para todos* $x, y \in B$.

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, *o conjunto* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ *é um subanel de* $\mathbb{Z}$.

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

3) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$