Homomorfismo de Anéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exercício

Seja $f : \boxed{\mathbb{C}} \to \boxed{M_2(\mathbb{R})}$ *dada por*

$$f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

(a) *Mostre que f é um homomorfismo de anéis.*

(b) *Esse homomorfismo é injetor?*

(c) *É sobrejetor?*

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$; $(M_2(\mathbb{R}), +, \circ)$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$0 + 0i$

SOLUÇÃO: a) NOTE QUE

$$f(0+0i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

AGORA SEJAM $x, y \in \mathbb{C}$. DAÍ

$x = a + bi$, $y = c + di$, ONDE

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ASSIM

$$f(x+y) = f((a+bi)+(c+di)) =$$

$$= f(\underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{R}} i) = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$

$$f(x)+f(y)=f(a+bi)+f(c+di)$$

$$=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$

ØA7´

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

A G ont

$$f(x \cdot y) = f((a+bi)(c+di)) =$$

$$= f\big((ac-bd)+(ad+bc)i\big) =$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$f(x)\cdot f(y) = f(a+bi)\cdot f(c+di) =$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$$

Lo60

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PORTANTO f É UM HOMOMORFIS-
MO DE ANÉIS.

b) AQUI PODEMOS DETERMINAR
SE f É INJETORA CALCULAN-

DO O NÚCLEO DE f QUE

É O CONJUNTO

$$\ker(f) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

MAS, SE $x = a + bi$, ENTÃO

$$f(x) = f(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ASSIM,

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = b = 0$.

LOGO, $x = a + bi = 0 + 0i = \underline{\underline{0}}$. PORTANTO

$\rightarrow \ker(f) = \{0 + 0i\} = \{0\}$

OU SEJA, f É INJETORA.

c) $A \in M_2(\mathbb{R})$, EXISTE $\overset{\alpha+\beta i}{\overset{\shortparallel}{x}} \in \mathbb{C}$ TAL QUE

$$f(x) = A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = a \;;\; -\beta = b \\ \beta = c \;;\; \alpha = d \end{cases}$$

f NÃO É SOBREJETORA POIS,

POR EXEMPLO, TOMANDO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \text{ NÃO}$$

EXISTE $x = a + bi \in \mathbb{C}$ TAL QU

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pois

$$f(x) = f(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

E NESSE CASO DEVERÍAMOS

TEM $\alpha = 1$ E $\alpha = 0$, O QUE É

IMPOSSÍVEL.