

Isomorfismos de Grupos

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

11 de novembro de 2020

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$.

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$. Aqui

$$S_2 = \left\{ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \right.$$

Considere o grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$. Aqui

$$S_2 = \left\{ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Temas

Temos

G

.	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Temos

G

.	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

.	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

Temos

G

\cdot	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

\cdot	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

Defina $\sigma : G \rightarrow S_2$ por

Temos

G

\cdot	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

\cdot	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

Defina $\sigma : G \rightarrow S_2$ por

$$\sigma(1) = f_0$$

Temos

G

\cdot	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2

\cdot	f_0	f_1
f_0	f_0	f_1
f_1	f_1	f_0

Defina $\sigma : G \rightarrow S_2$ por

$$\sigma(1) = f_0$$

$$\sigma(-1) = f_1.$$

Da definição de σ

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) =$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$.

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Como σ também é bijetora,

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2 .

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2 . Nesse caso, dizemos que G e S_2 são grupos isomorfos

Da definição de σ é fácil ver que essa função é bijetora. Além disso,

$$\sigma(1) \circ \sigma(1) = f_1 \circ f_1 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1)$$

$$\sigma(1) \circ \sigma(-1) = f_1 \circ f_2 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(1 \cdot -1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(1) = f_2 \circ f_1 = f_2 = \sigma(-1) = \sigma(-1 \cdot 1)$$

$$\sigma(-1) \circ \sigma(-1) = f_2 \circ f_2 = f_1 = \sigma(1) = \sigma(-1 \cdot -1)$$

ou seja, $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x) \circ \sigma(y)$ para todos $x, y \in G$. Assim função σ é um homomorfismo de G em S_2 .

Como σ também é bijetora, então σ é um isomorfismo de G em S_2 . Nesse caso, dizemos que G e S_2 são grupos isomorfos e denotamos isso escrevendo $G \cong S_2$.

Definição

*Sejam $(G, *)$ e (H, \triangle) grupos.*

Definição

*Sejam $(G, *)$ e (H, \triangle) grupos. Se existe $f: G \rightarrow H$ um isomorfismo,*

Definição

Sejam $(G, *)$ e (H, \triangle) grupos. Se existe $f: G \rightarrow H$ um isomorfismo, diremos que G e H são **grupos isomorfos**

Definição

Sejam $(G, *)$ e (H, \triangle) grupos. Se existe $f: G \rightarrow H$ um isomorfismo, diremos que G e H são **grupos isomorfos** e denotaremos esse fato escrevendo $G \cong H$.

Definição

Sejam $(G, *)$ e (H, \triangle) grupos. Se existe $f: G \rightarrow H$ um isomorfismo, diremos que G e H são **grupos isomorfos** e denotaremos esse fato escrevendo $G \cong H$.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos, então

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos, então G é comutativo se, e somente se, H é comutativo.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Se $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos, então G é comutativo se, e somente se, H é comutativo.

Exemplos

1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3*

Exemplos

1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos*

Exemplos

1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo*

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*
- 2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$.*

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*
- 2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*
- 2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$.

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*
- 2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$,

Exemplos

- 1) Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.
- 2) Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$, onde $\phi : H \rightarrow \mathbb{Z}_6$ dada por $\phi(f^k) = \bar{k}$

Exemplos

- 1) Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.
- 2) Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$, onde $\phi : H \rightarrow \mathbb{Z}_6$ dada por $\phi(f^k) = \bar{k}$ é um isomorfismo de grupos.

Exemplos

- 1) *Os grupos \mathbb{Z}_6 e S_3 não são isomorfos pois \mathbb{Z}_6 é comutativo e S_3 não é comutativo.*
- 2) *Considere o grupo S_6 das permutações em $\{1, 2, \dots, 6\}$. Tome*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Seja $h = [f]$. Então $H \cong \mathbb{Z}_6$, onde $\phi : H \rightarrow \mathbb{Z}_6$ dada por $\phi(f^k) = \bar{k}$ é um isomorfismo de grupos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos. Então $x \in G$

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$ se, e somente se, $o(f(x)) = h$.

Proposição

Sejam G e H grupos multiplicativos. Seja $f: G \rightarrow H$ é um isomorfismo de grupos. Então $x \in G$ é tal que $o(x) = h$ se, e somente se, $o(f(x)) = h$.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $a^r \neq a^s$

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $a^r \neq a^s$ sempre que $r \neq s$.

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico. Dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $a^r \neq a^s$ sempre que $r \neq s$.

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**,

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**, então a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ por $f(r) = a^r$

Proposição

*Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**, então a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfismo de grupos.*

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**, então a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfismo de grupos. Ou seja, $G \cong \mathbb{Z}$.

Proposição

Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 1**, então a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ por $f(r) = a^r$ é um isomorfismo de grupos. Ou seja, $G \cong \mathbb{Z}$.

Caso 2: $a^r = a^s$

Caso 2: $a^r = a^s$ para algum par de inteiros distintos, r e s .

Caso 2: $a^r = a^s$ para algum par de inteiros distintos, r e s .

Proposição

*Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**.*

Proposição

*Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que*

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que

$$i) \ a^m = e$$

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que

- i) $a^m = e$
- ii) $a^r \neq e$, sempre que $0 < r < m$.

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que

- i) $a^m = e$
- ii) $a^m \neq e$, sempre que $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G é m

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$, sempre que $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G é m e

$$G = [a] = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}.$$

Proposição

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico que cumpre a condição do **Caso 2**. Então existe um inteiro $m > 0$ tal que

i) $a^m = e$

ii) $a^m \neq e$, sempre que $0 < r < m$.

Nesse caso, a ordem do grupo G é m e

$$G = [a] = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}.$$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m .

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m . Então a função $f: \mathbb{Z}_m \rightarrow G$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m . Então a função $f: \mathbb{Z}_m \rightarrow G$ dada por $f(\bar{x}) = a^x$

Corolário

Seja $G = [a]$ um grupo cíclico de ordem finita igual a m . Então a função $f: \mathbb{Z}_m \rightarrow G$ dada por $f(\bar{x}) = a^x$ é um isomorfismo de grupos.