Funções - Composição

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Definição

Sejam $f: A \to B$

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$

Definição

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta***

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f*

Definição

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f$*

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f\colon A \to C$*

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f\colon A \to C$ tal que*

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f\colon A \to C$ tal que $(g \circ f)(x)$*

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f\colon A \to C$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Definição

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções. Definimos a ***função composta*** *de g com f como sendo a função denotada por $g \circ f: A \to C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.*

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f\colon A \to C$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *para todo* $x \in A$*.*

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x + 1$.

Exemplos

1) *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x + 1$.
Assim podemos definir $g \circ f$

Exemplos

1) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x + 1$*.*
Assim podemos definir $g \circ f$ *e* $f \circ g$ *e:*

Exemplos

1) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x + 1$*.*
Assim podemos definir $g \circ f$ *e* $f \circ g$ *e:*

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}^*_+$

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}^*_+$ *e* $g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$ *e* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_{-} \to \mathbb{R}^{*}_{+}$ *e* $g : \mathbb{R}^{*}_{+} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = \ln x$.

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$ *e* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = \ln x$.
Nesse caso só podemos definir $g \circ f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ *e:*

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_{-} \to \mathbb{R}_{+}^{*}$ *e* $g : \mathbb{R}_{+}^{*} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = \ln x$.
Nesse caso só podemos definir $g \circ f : \mathbb{R}_{-} \to \mathbb{R}$ *e:*

Proposição

Se $f : A \to B$

Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ *são funções injetoras,*

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f$:

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ *são funções injetoras, então* $g \circ f : A \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova:

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1,

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1)$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora,

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1)$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$.

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora,

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese,

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 =$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos.

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos. Portanto $g \circ f$ é injetora.

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f: A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos. Portanto $g \circ f$ é injetora. ■

Proposição

Se $f : A \to B$

Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras,

Proposição

Se $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *são funções sobrejetoras, então* $g \circ f : A \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova:

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora,

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$,

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

Proposição

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \rightarrow C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora,

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g: B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g: B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \to B$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$.

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g: B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x)$$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z)$$

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g: B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$

Proposição

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g: B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f: A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$ é sobrejetora.

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Prova: Para mostrar que $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora, precisamos mostrar que para todo $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.
Assim seja $y \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas $z \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetora. Assim existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Logo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Portanto $g \circ f$ é sobrejetora. ■