

Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

25 de agosto de 2020

Definição

Seja A um conjunto não vazio

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo $x \in A$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)
- iii) Se $(x, y) \in R$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)
- iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)
- iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)
- iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)
- iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A . Quando dois elementos $x, y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$

Exemplos

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre \mathbb{Z} .

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência sobre \mathbb{Z} .

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$,

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, considere a seguinte relação

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, considere a seguinte relação

$$(a, b)S(c, d)$$

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, considere a seguinte relação

$$(a, b)S(c, d) \text{ quando } ad = bc.$$

Mostre que S é uma relação de equivalência sobre A .

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, considere a seguinte relação

$$(a, b)S(c, d) \text{ quando } ad = bc.$$

Mostre que S é uma relação de equivalência sobre A .

