Funções

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

15 de setembro de 2020

Definição

*Uma **função** $f : A \to B$, de um conjunto A em um conjunto B, é uma relação que associa os elementos de A com os elementos em B satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

ii) Se $x \in A$ é tal que $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$ com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

*Nesse caso y é chamado de **imagem** de x segundo f.*

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e será denotado por $\mathrm{dom}\,(f)$. O conjunto B é chamado de **contra-domínio** de f. O conjunto

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

é chamado **imagem** de f.

Exemplos

1) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$*. Quais das seguintes relações são funções?*

a) $R_1 = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7)\}$
b) $R_2 = \{(0, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$
c) $R_3 = \{(0, 4), (1, 5), (2, 7), (3, 8)\}$
d) $R_4 = \{(0, 5), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

Solução:

a) Não é função pois $3 \in A$ *e* 3 *não está associado à nenhum elemento de B.*

b) Não é função pois $1 \in A$ *está associado a dois elementos diferentes em B.*

c) É uma função.

d) É uma função.

Exemplos

2) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2\}$

Solução:

Não é função pois, por exemplo, para $x = 1$ temos $y = -1$ ou $y = 1$.

3) $R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Solução:

Não é função pois, por exemplo, para $x = 0$ temos $y = 1$ ou $y = -1$.

4) $R_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

Solução:

É uma função.

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função.

*i) Dizemos que f é **injetora** se dados $x_1,\, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. De modo equivalente, dizemos que f e **injetora** se dados $x_1,\, x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

*ii) Dizemos que f é **sobrejetora** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

*iii) Dizemos que f e **bijetora** se f for **injetora** e **sobrejetora** simultaneamente.*

Exemplos

Verifique se as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras:

1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(x) = 3x + 1$

Exemplos

2) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *dada por* $f(x) = 3x + 1$

Exemplos

3) A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(x) = x^2$

Definição

Sejam $f\colon A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. Definimos a* ***função composta*** *de* g *com* f *como sendo a função denotada por* $g \circ f\colon A \to C$ *tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *para todo* $x \in A$.

Exemplos

1) Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *e* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dadas por* $f(x)=x^2$ *e* $g(x)=x+1$.
Assim podemos definir $g\circ f$ *e* $f\circ g$ *e:*

Exemplos

2) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$ *e* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g(x) = \ln x$*.*
Nesse caso só podemos definir $g \circ f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ *e:*

Proposição

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f : A \to C$ é injetora.

Prova: Dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ queremos mostrar que $x_1 = x_2$. Temos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) &= (g \circ f)(x_2) \\ g(f(x_1)) &= g(f(x_2)). \end{aligned}$$

Como por hipótese g é injetora, dessa última igualdade segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas f também é injetora, por hipótese, daí $x_1 = x_2$, como queríamos. Portanto $g \circ f$ é injetora. ■