Aplicações do Teorema de Lagrange

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

Exemplo

Determine todos os subgrupos do grupo S_3.

$|S_3| = 3! = 6$

T. LANGRANGE

H É UM SUBGRUPO DE $S_3 \Rightarrow o(H) \mid |S_3|$

$\Leftrightarrow o(H) \mid 6 \Leftrightarrow o(H) = \boxed{1}, 2, 3, \boxed{6}$

$\{Id\}$ $= S_3$

SOLUÇÃO: COMO $|S_3| = 3! = 6$, ENTÃO SE $H \subseteq S_3$ É UM SUBGRUPO TEMOS PELO TEOREMA DE LAGRANGE QUE $o(H) \mid o(S_3)$, ISTO É,

$o(H) \mid 6$. $[x]$

Logo

$o(H) = 1, 2, 3$ ou 6.

Se $o(H) = 1$, então $H = \{Id\}$.

SE $o(H) = 6$, ENTÃO $H = S_3$.

AGORA, TOMANDO

$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

TEMOS $o(f)=3$ $o(g)=2$

$$S_3=\{\underbrace{Id,\ f,\ f^2}\ ,\ g,\ gf,\ gf^2\}.$$

$$(gf)(gf)=g\underset{\substack{\shortparallel\\ gf^2}}{(fg)}f=ggf^2f=Id$$

$$(gf^2)(gf^2) = g(\underline{f^2 g})f^2 = g\underline{g f} f^2 = Id$$

ASSIM S_3 POSSUI UM ÚNICO SUB-

GRUPO DE ORDEM 3 QUE É

$\rightarrow \langle f \rangle = \{Id, f, f^2\}$

E S_3 POSSUI 3 SUBGRUPOS DE ORDEM 2 QUE SÃO

$$\begin{cases} [g] = \{Id, g\} \\ [gf] = \{Id, gf\} \\ [gf^2] = \{Id, gf^2\} \end{cases}$$

ALÉM DISSO S_3 NÃO CONTÉM

NENHUM OUTRO SUBGRUPO DE ORDEM

2 OU 3 POIS COMO ESSES NÚMEROS

SÃO PRIMOS, ENTÃO SUBGRUPOS

DE ORDEM 2 OU 3 SÃO CÍCLICOS. #

6

$|S_4| = 24$

$o(H) \mid 24$, $\underbrace{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}$

Proposição

Se G é um grupo finito tal que $o(G) \leq 5$, então G é abeliano.

$\{e\}$, $2, 3, 5$

4

PROVA: SE $o(G) = 1$, ENTÃO $G = \{e\}$

E DAÍ É ABELIANO.

SE $o(G) = 2, 3$ OU 5, COMO ESSES

NÚMEROS SÃO PRIMOS SEGUE

QUE G É CÍCLICO. LOGO G

É ABELIANO.

SUPONHA QUE $o(G) = 4$. ASSIM

SEJA $x \in G$ COM $x \neq e$. DAÍ

PELO TEOREMA DE LAGRANGE,

$o([\underline{x}]) \mid 4$, LOGO $o(x) = 2$ OU

$o(x) = 4$.

SE $o(x) = 4$, ENTÃO $[x] = G$, OU SEJA,

G É CÍCLICO E COM ISSO

ABELIANO.

AGORA SE $o(x) = 2$, ASSIM PARA

TODO $x \in G$, $x \neq e$, $\langle x \rangle \neq G$.

DAÍ PELO TEOREMA DE LAGRANGE

$o([x]) = 2$. LOGO

$$\Rightarrow x^2 = e$$

PARA TODO $x \in G$. PORTANTO G É

ABELIANO. #

Proposição

Seja G um grupo tal que $|G| = pq$, onde p e q são números primos. Se G é abeliano e $p \neq q$, então G é um grupo cíclico.

$$[x] = G$$

PROVA: SEJA G UM GRUPO ABELIANO TAL QUE $o(G) = pq > 1$ ONDE p E q SÃO NÚMEROS PRIMOS COM $\underbrace{p \neq q}$.

COMO $o(G) > 1$, EXISTE $x \in G$ TAL QUE $x \neq e$. DAÍ PELO TEOREMA DE LAGRANGE, $o(x) \mid o(G)$, ISTO É, $o(x) \mid pq$. DAÍ $o(x) = p, q$

OU pq.

SE $o(x) = pq$, ENTÃO $o([x]) = pq$

LOGO, $G = [x]$, COMO QUERÍAMOS.

SE $\underbrace{o(x) = p}_{}$, ENTÃO SERIA

q

$H = [x]$. DAÍ G/H É UM GRUPO

POIS G É ABELIANO E DAÍ H É UM

SUBGRUPO NORMAL DE G. ALÉM

DISSO, $o(G/H) = q$ QUE É PRIMO.

p

ASSIM G/H É UM GRUPO CÍCLICO. DAÍ EXISTE $yH \in G/H$ TAL QUE

$$\frac{G}{H} = [\underline{yH}]$$

$xy = e \Rightarrow y = x^{-1} \in H = [x]$

ONDE $o(yH) = \underline{y}$ E $y \in G$.

AGORA SEJA $z = \underbrace{xy} \in G$. NOTE

QUE $z \neq e$ POIS $y \notin H$. MAIS

AINDA

$y^q \neq e \qquad (yH)^q = y^q H \neq H$

$$z^p = (xy)^p = x^p y^p = y^p \neq e$$

$$z^q = (xy)^q = x^q y^q = x^q \neq e$$

LOGO $o(z) = pq$. PORTANTO

$G = [xy]$.

O CASO EM QUE $o(x) = g$ É ANÁLOGO AO CASO ANTERIOR.

PORTANTO G É UM GRUPO CÍCLICO, COMO QUERÍAMOS. #