# Relação de Equivalência - Classes de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

25 de agosto de 2020

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$*

**Definição**

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

### Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$,*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$,*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

*ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

*ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

*i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

*ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

*iii) Se $(x, y) \in R$*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

- *i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*
- *ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*
- *iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,*

**Definição**

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizem que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

## Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$,*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$,*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$",*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação $xRy$*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y \ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$.*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$,*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y$ $(R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "x é equivalente a y módulo R", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $xRx$. (Propriedade Reflexiva)*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $xRx$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $xRy$, então $yRx$. (Propriedade Simétrica)*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $xRx$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $xRy$, então $yRx$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $xRy$ e $yRz$, então $xRz$. (Propriedade Transitiva)*

## Observações:

*Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$.*

1) *Para dizermos que $(x, y) \in R$ usaremos a notação $x \equiv y\ (R)$, que se lê "$x$ é equivalente a $y$ módulo $R$", ou ainda a notação $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
2) *Em alguns casos vamos utilizar a notação $\sim$ para representar a relação $R$. Nesse caso, escrevemos $x \sim y$ para dizer que $(x, y) \in R$, ou que, $xRy$.*

## Definição

*Seja $A$ um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que $R$ é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $xRx$. (Propriedade Reflexiva)*
ii) *Se $xRy$, então $yRx$. (Propriedade Simétrica)*
iii) *Se $xRy$ e $yRz$, então $xRz$. (Propriedade Transitiva)*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$.*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$,*

**Definição**

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência***

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$*

**Definição**

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$*

**Definição**

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$,*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *$R$, denotada por* $\overline{\text{b}}$ *ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} =$$

### Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) =$$

**Definição**

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** b ***módulo*** *$R$, denotada por* $\overline{\text{b}}$ *ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A$$

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** $b$ ***módulo*** $R$*, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\}$$

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *$b$* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A$$

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *b* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

## Definição

*Seja $R$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $A$. Dado $b \in A$, chamamos de* ***classe de equivalência determinada por*** *b* ***módulo*** *$R$, denotada por $\overline{b}$ ou $C(b)$, o subconjunto de $A$ dado por*

$$\overline{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

## Exemplos

*Seja* $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

## Exemplos

*Seja $A=\{1,2,3,4\}$. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);$$
$$(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

*são relações de equivalência sobre A.*

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1)\}$$

$$R_5 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1); (2,4); (4;2)\}$$

*são relações de equivalência sobre A. Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.*

## Exemplos

*Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);\\ (2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

*De um exemplo anterior sabemos que*

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

*são relações de equivalência sobre A. Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.*

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} =$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} =$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de* $R_1$ *são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} =$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} =$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_1\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

## Exemplos

*1) As classes de equivalência de $R_1$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_1\} = \{1,2,3,4\}$$

*Nesse caso temos somente uma classe de equivalência.*

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de* $R_3$ *são:*

$$\overline{1}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_3\} = \{1,2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_3\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\} = \{4\}$$

## Exemplos

*2) As classes de equivalência de $R_3$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\} = \{4\}$$

*Aqui temos três classes de equivalência diferentes.*

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} =$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de* $R_4$ *são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} =$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} =$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} =$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_4\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x,1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x,2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x,3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x,4) \in R_4\} = \{4\}$$

## Exemplos

*3) As classes de equivalência de $R_4$ são:*

$$\overline{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\overline{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\overline{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\overline{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_4\} = \{4\}$$

*Aqui temos quatro classes de equivalência diferentes.*

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} =$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} =$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

## Exemplos

4) *Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} =$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} =$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \text{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 4, \pm 7, \dots\}$$

## Exemplos

*4) Para a relação de equivalência*
$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,\ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}$ *temos:*

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 4, \pm 7, \dots\}$$

*Neste caso existem somente duas classes de equivalência. (Por quê?)*