Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

$a \,,\ 1-a$

Exercício

Considere o anel $(\mathbb{Q}, \oplus, \boxed{\otimes})$ *onde*

$$a \oplus b = a + b - 1$$
$$a \otimes b = a + b - ab,$$

para todos $a, b \in \mathbb{Q}$. *O conjunto* $\boxed{I = \mathbb{Z}}$ *é um ideal desse anel?*

$a \otimes b = a + b - ab = b + a - ba = b \otimes a$

$0_\oplus = 1 \in I$

Solução: Primeiro note que

$a \otimes b = a + b - ab = b + a - ba = b \otimes a$

ou seja, $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ é um anel

comutativo. Além disso, o

ELEMENTO NEUTRO DA SOMA É

$1 \in I = \mathbb{Z}$. DAÍ $I \neq \emptyset$.

AGORA SEJAM $x, y \in \overset{\mathbb{Z}}{I}$.

O OPOSTO DE y NA OPERAÇÃO

$\ominus$ É $-y = 1 - y$. DAÍ

$x \ominus (-y) = x \ominus (1-y) = x + (\cancel{1} - y) - \cancel{1}$

$= x + y \in \mathbb{Z} = I$.

AGORA DADO $\alpha \in \mathbb{Q}$ E $x \in I$

TEMOS

$\rightarrow \alpha \otimes X = \underbrace{\alpha + X - \alpha X}_{} \in I = \mathbb{Z}$!

PORTANTO, $I = \mathbb{Z}$ NÃO É UM IDEAL DE $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ POIS, POR

EXEMPLO, TOMANDO $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

E $x = 0 \in \mathbb{Z} = I$ TEMOS

$$\alpha \otimes x = \frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} = I.$$

$\#$