Relação de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

29 de agosto de 2020

Definição

Seja A um conjunto não vazio

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

i) Para todo $x \in A$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

Definição

Seja A *um conjunto não vazio e* $R \subseteq A \times A$. *Dizemos que* R *é uma* ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo* $x \in A$, $(x, x) \in R$. *(Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se* $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x,y) \in R$, então $(y,x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência,

Definição

*Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)

ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)

iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$,

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

- *i) Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*
- *ii) Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*
- *iii) Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados**

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Definição

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A \times A$. Dizemos que R é uma ***relação de equivalência*** *se:*

i) *Para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$. (Propriedade Reflexiva)*

ii) *Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. (Propriedade Simétrica)*

iii) *Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$. (Propriedade Transitiva)*

Quando $R \subseteq A \times A$ é uma relação de equivalência, dizemos que R é uma relação de equivalência em A. Quando dois elementos x, $y \in A$ são tais que $(x, y) \in R$, dizemos que x e y **são relacionados** ou que x e y **estão relacionados**.

Exemplos

1) Seja $A=\{1,2,3,4\}$.

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$

Exemplos

1) *Seja A={1,2,3,4}. Temos*

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$$A \times A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = A \times A$$

$$R_2 = \{(1,1);(2,2);(3,3)\}$$

$$R_3 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1)\}$$

$$R_4 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}$$

$$R_5 = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(2,1);(2,4);(4;2)\}$$

Exemplos

1) Seja A={1,2,3,4}. Temos

$A \times A = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}$.

Quais dos seguintes conjuntos são exemplos de relações de equivalência?

$R_0 = \emptyset$

$R_1 = A \times A$

$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3)\}$

$R_3 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1)\}$

$R_4 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4)\}$

$R_5 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (1,2); (2,1); (2,4); (4;2)\}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k,$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \ \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R *é uma relação de equivalência sobre* $\mathbb{Z}$*.*

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$ *e* $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *definida por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \ \text{para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R *é uma relação de equivalência sobre* $\mathbb{Z}$.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, *onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*, onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*. Para* $(a, b), (c, d) \in A$*,*

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*, onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*. Para* $(a, b), (c, d) \in A$*, considere a seguinte relação*

Exemplos

3) *Seja* $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, *onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Para* $(a, b), (c, d) \in A$, *considere a seguinte relação*

$$S = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid ad = bc\}.$$

Mostre que S *é uma relação de equivalência sobre* A.

Exemplos

3) Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, *onde* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Para* $(a, b), (c, d) \in A$, *considere a seguinte relação*

$$S = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid ad = bc\}.$$

Mostre que S *é uma relação de equivalência sobre* A.