Função Inversa - Exercício

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

f é SOBREJETORA SE PARA TODO $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, EXISTE $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ TAL QUE $f(a, b) = (\alpha, \beta)$

Exercício

Verifique se a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y^5)$ *é bijetora. Caso afirmativo, encontre* f^{-1}.

$\hookrightarrow$ INJETORA E SOBREJETORA

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ldots$

$(a, b) \overset{?}{=} (c, d)$

$x_1 = x_2$

SOLUÇÃO: PRIMEIRO SEJAM (a,b), $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ TAIS QUE

$$f(a,b) = f(x,y).$$

DAÍ,

$$\left(\sqrt[3]{a},\ b^5\right) = \left(\sqrt[3]{x},\ y^5\right)$$

ASSim

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$\sqrt[5]{b^5} = \sqrt[5]{y^5}$$

E então

$a = x$ é $b = y$. Isto é,

$(a, b) = (x, y)$. Logo f é

<u>INJETORA</u>.

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ? $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$f(a,b)=(\alpha,\beta)$$

$$(\sqrt[3]{a},\ b^5)=(\alpha,\beta)$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \alpha^3 \qquad = \sqrt[5]{b^5} = \sqrt[5]{\beta}.$$

$$\boxed{a = \alpha^3 \atop \in \mathbb{R}} \quad e \quad \boxed{b = \sqrt[5]{\beta} \atop \in \mathbb{R}}$$

AGORA f É SOBREJETORA POIS

DADO $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, TOME

$(\alpha^3, \sqrt[5]{\beta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ASSIM

$$f(\alpha^3, \sqrt[5]{\beta}) = \left(\sqrt[3]{\alpha^3}, (\sqrt[5]{\beta})^5\right)$$

$$= (\alpha, \beta).$$

PORTANTO f É BIJETORA E

COM ISSO EXISTE A FUNÇÃO

INVERSA $f^{-1}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. E

$f^{-1}(x,y) = (x^3, \sqrt[5]{y})$. #

$\to f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$.