Anéis - Subanéis

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

7 de outubro de 2020

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação $\oplus$ por $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \cdot)$ um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação $\oplus$ por $+$ e a operação $\otimes$ por $\cdot$ e assim escrever simplesmente que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*, então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,
$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*
$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,* x_2*, ...,* $x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*, então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2, *...,* $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α*,*

Proposição

v) Para todos α, *x,*

Proposição

v) Para todos α*,* x*,* $y \in A$*,*

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$*, temos*

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y)$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, temos

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x(-y) = (-x)y = -(xy).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$xy = (-x)(-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1,

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1,\, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$x = 0_A$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) =$
$[(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

vi) Temos

vi) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y]$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x(-y) = -(xy)$:

$$x(-y) + xy = x[(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-xy = x(-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel* A *sempre tem dois subanéis:*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais***.

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) Todo anel A *sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$ *e* A*, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

3) No anel $\mathbb{Z}$*,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais***.

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$ *para todos* $x, y \in B$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x,\ y \in B$.

Prova:

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x,\ y \in B$.

Prova:

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$