Anéis - Ideais

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

14 de outubro de 2020

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$

$\rightarrow x \cdot y = y \cdot x$; PARA TODOS $x, y \in A$!

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade***

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x, y \in A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = \boxed{0_A,}$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$\underline{x = 0_A}$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade***

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x, y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x e y são elementos não nulos

$\neq 0_A$

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio***.

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio****.*

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$,

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* x, $y \in A$, *se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio****.*

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$, *então* x *e* y *são chamados de*

Definição

Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ *é dito ser um* ***anel de integridade*** *quando para todos* $x,\ y \in A$*, se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Um anel de integridade também é chamado de ***domínio de integridade*** *ou simplesmente de* ***domínio****.*

Observação:

Se x *e* y *são elementos não nulos de um anel* A *tais que* $xy = 0_A$*, então* x *e* y *são chamados de* ***divisores próprios de zero****.*

Definição

*Um anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é dito ser um **anel de integridade** quando para todos x, $y \in A$, se*

$$xy = 0_A,$$

então

$$x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

*Um anel de integridade também é chamado de **domínio de integridade** ou simplesmente de **domínio**.*

Observação:

*Se x e y são elementos não nulos de um anel A tais que $xy = 0_A$, então x e y são chamados de **divisores próprios de zero**.*

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) Em geral $\boxed{\mathbb{Z}_m}$

$\mathbb{Z}_4$; $\bar{2} \neq \bar{0}$

$\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}$.

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ não é anel de integridade,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$,

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ não é anel de integridade, por exemplo, em $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$,

Exemplos

1) *Os anéis* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) *Em geral* $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto*

$$\underline{\overline{2} \otimes \overline{2}}$$

Exemplos

1) *Os anéis* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) *Em geral* $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto*

$$\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4}$$

Exemplos

1) Os anéis $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *são anéis de integridade.*

2) Em geral $\mathbb{Z}_m$ *não é anel de integridade, por exemplo, em* $\mathbb{Z}_4$, $\overline{2} \neq \overline{0}$, *no entanto*

$$\overline{2} \otimes \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}.$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade,*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $\boxed{m = nk,}$

$1 < n < m \Rightarrow \bar{n} \in \mathbb{Z}_m ; \bar{n} \neq \bar{0}$

$1 < k < m \Rightarrow \bar{k} \in \mathbb{Z}_m ; \bar{k} = \bar{0}$

$\bar{n} \odot \bar{k} = \overline{nk} = \bar{m} = \bar{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo,*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ não é um anel de integridade, por exemplo, em $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ e $m > k > 1$. Logo, em $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ e $\overline{k} \neq \overline{0}$ e no entanto $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. Logo, se m não é primo, então $\mathbb{Z}_m$ não é um anel de integridade. Agora, suponha que $m = p$ primo. Sejam $\overline{x}$,

$\rightarrow \underline{\overline{x} \neq \overline{0}}$ e $\overline{y} \neq \overline{0}$ T.Q $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$

$$\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{xy} = \overline{0} \Leftrightarrow xy \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow p \mid (xy - 0) \Leftrightarrow p \mid (xy) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \mid x \text{ ou } p \mid y \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{p}$$

ou $y \equiv 0 \pmod p \iff \bar{x} = \bar{0}$ ou

$\bar{y} = \bar{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$,

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$.

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) *Suponha que* $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se,*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se m não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se, m é primo.*

Exemplos

3) $M_n(\mathbb{R})$ *não é um anel de integridade, por exemplo, em* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Suponha que $m = nk$, $m > n > 1$ *e* $m > k > 1$. *Logo, em* $\mathbb{Z}_m$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{k} \neq \overline{0}$ *e no entanto* $\overline{n} \otimes \overline{k} = \overline{m} = \overline{0}$. *Logo, se* m *não é primo, então* $\mathbb{Z}_m$ *não é um anel de integridade. Agora, suponha que* $m = p$ *primo. Sejam* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ *tais que* $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{0}$, *ou seja,* $xy \equiv 0 \pmod{p}$. *Daí* $p \mid xy$. *Logo* $p \mid x$ *ou* $p \mid y$. *Portanto,* $\overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0}$. *Assim,* $\mathbb{Z}_m$ *é anel de integridade se, e somente se,* m *é primo.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal***

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de **ideal** de* A *se:*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos $x, y \in I$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos x, $y \in I$, *temos* $x - y \in I$.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) *para todos* $x, y \in I$, *temos* $x - y \in I$.

ii) *Para todo* $\alpha \in A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de ***ideal*** *de A se:*

i) *para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.*

ii) *Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$,*

$y \in I \Rightarrow -y \in I$

$x \in I \Rightarrow x - (-y) \in I$

$x + y \in I$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de ***ideal*** *de A se:*

i) *para todos x, $y \in I$, temos $x - y \in I$.*

ii) *Para todo $\alpha \in A$ e todo $\boxed{x \in I}$ temos $\boxed{\alpha \cdot x} \in I$.*

$$\underbrace{\alpha \cdot x}_{\in I} = \underbrace{x \cdot \alpha}_{\in I}$$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) para todos $x, y \in I$*, temos* $x - y \in I$*.*

ii) Para todo $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$*, temos* $\alpha \cdot x \in I$*.*

Observação:

Quando $I = A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) *para todos* $\underbrace{x, y \in I}$, *temos* $\underbrace{x - y} \in I$.

ii) *Para todo* $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$, *temos* $\underbrace{\alpha \cdot x} \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ *ou* $I = \{0_A\}$,

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) *para todos* $x, y \in I$, *temos* $x - y \in I$.

ii) *Para todo* $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$, *temos* $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ *ou* $I = \{0_A\}$, *dizemos que* I

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio* $I \subseteq A$ *é chamado de* ***ideal*** *de* A *se:*

i) *para todos* $x, y \in I$*, temos* $x - y \in I$.

ii) *Para todo* $\alpha \in A$ *e todo* $x \in I$*, temos* $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

Quando $I = A$ *ou* $I = \{0_A\}$*, dizemos que* I *é um* ***ideal trivial***.

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um subconjunto não-vazio $I \subseteq A$ é chamado de **ideal** de A se:*

i) para todos $x, y \in I$, temos $x - y \in I$.

ii) Para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in I$, temos $\alpha \cdot x \in I$.

Observação:

*Quando $I = A$ ou $I = \{0_A\}$, dizemos que I é um **ideal trivial**.*

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação.*

Exemplos

1) *Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{ mk \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ as operações usuais de soma e multiplicação. Seja

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Exemplos

1) Considere no anel $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$.

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*
$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

1) SEJAM $x, y \in I$. DAÍ EXISTEM $k, l \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$$x = km \quad e \quad y = lm$$

ASSIM

$$x - y = km - lm = (k - l)m \in I.$$

AGORA SEJA $\alpha \in \mathbb{Z}$. ASSIM

$$\underline{\alpha x} = \alpha(nm) = (\alpha n)\underline{m} \in I$$

PORTANTO, I É UM IDEAL DE $\mathbb{Z}$.

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$,

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo,*

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo, os únicos ideais são os triviais:* $\{\overline{0}\}$

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo, os únicos ideais são os triviais:* $\{\overline{0}\}$ *e* $\mathbb{Z}_p$.

Exemplos

1) *Considere no anel* $\mathbb{Z}$ *as operações usuais de soma e multiplicação. Seja*

$$I = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

com $m > 1$. *Então* I *é um ideal de* $\mathbb{Z}$.

2) *No anel* $\mathbb{Z}_p$, *onde* p *é um número primo, os únicos ideais são os triviais:* $\{\bar{0}\}$ *e* $\mathbb{Z}_p$.

$I \neq \{\bar{0}\}$; $\rightarrow \bar{x} \in I$, EXISTE $\bar{y} \in A$

TAL QUE $\bar{1} = \underbrace{\bar{y} \otimes \bar{x}}\in I \Rightarrow I = \mathbb{Z}_p$.

Proposição

Seja A um anel comutativo

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ *para todo* $x \in I$.

iii) Se $1_A \in I$,

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.

iii) Se $\underline{1_A \in I}$, então $I = A$.

Proposição

Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Então:

i) $0_A \in I$.

ii) $-x \in I$ para todo $x \in I$.

iii) Se $1_A \in I$, então $I = A$.

Prova:

i) COMO I É IDEAL DE A, ENTÃO $I \neq \emptyset$. SEJA $x \in I$. ALÉM DISSO, O FATO DE I SER UM IDEAL GARANTE QUE $\alpha \cdot x \in I$ PARA

$x \in A$. EM PARTICULAR PARA $x = 0_A$ TEMOS

$$\boxed{0_A} = 0_A \cdot x \in \underline{I}$$

LOGO, $0_A \in I$.

$(-x \in I)$

(ii) SEJA $x \in I$. ENTÃO COMO

$0_A \in I$, TEMOS

$$-x = 0_A - (x) \in I$$

LOGO, $-x \in I$ PARA TODO $x \in I$.

$I = A \Leftrightarrow \underline{I \subseteq A}$ e $A \subseteq I$

iii) POR DEFINIÇÃO $I \subseteq A$. PROVEMOS QUE $\underline{A \subseteq I}$. POR HIPÓTESE $\underline{1_A \in I}$. SEJA $\underline{x \in A}$. DAÍ

$x = x \cdot 1_A \in I$

OU SEJA, $x \in I$ E COM ISSO

$A \subseteq I$.

PORTANTO, $A = I$. #

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$
$$I_2 = \{\overline{0}, \overline{4}\}$$

$\overline{3} \in \overline{I} \Rightarrow \overline{1} \in \overline{I}$

Exemplos

i) Os únicos ideais não triviais de $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ *são:*

$$I_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$$
$$I_2 = \{\overline{0}, \overline{4}\}$$

Definição

Seja I um ideal

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$.

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $x, y \in A$

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x ***é congruente a*** *y*

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I*

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados $\boxed{x, y \in A}$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$.*

Definição

Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x ***é congruente a*** *y* ***módulo*** *I quando $\boxed{x - y \in I}$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

$m \mid (x - y)$

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$,

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$.*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Definição

*Seja I um ideal de um anel comutativo $(A, +, \cdot)$. Dados x, $y \in A$ dizemos que x **é congruente a** y **módulo** I quando $x - y \in I$. Neste caso, escrevemos $x \equiv y \pmod{I}$*

Proposição

A congruência módulo I é uma relação de equivalência em $A \times A$, onde é um A anel comutativo unitário.

Prova: i) $x R x$, $\forall x \in A$

ii) SE $x R y$, ENTÃO $y R x$

iii) SE $x R y$ E $y R z$, ENTÃO $x R z$.

i) SEJA $x \in A$. TEMOS

$$x - x = 0_A \in I$$

DAÍ $x \equiv x \pmod{I}$.

$y \equiv x \pmod{I} \Leftrightarrow y - x \in I$

ii) SUPONHA QUE $x \equiv y \pmod{I}$.

DAÍ

$$x - y \in I.$$

SEJA 1_A A UNIDADE DE A. TOME -1_A O OPOSTO ADITIVO DE 1_A. ASSIM,

$$-(a_1 + \dots + a_m) = (-a_1) + \dots + (-a_m)$$

$$-(xy) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$$

$$y - x = -(x-y) = (-x) + -(-y) = y - x$$

$$= -[1_A(x-y)] = \underbrace{(-1_A)}_{\in A} \underbrace{(x-y)}_{\in I} \in I$$

ISTO É, $y \equiv x \pmod I$.

iii) SUPONHA QUE $x \equiv y \pmod{I}$

E $y \equiv z \pmod{I}$. DAÍ

$$x - y \in I \quad \text{E} \quad y - z \in I$$

AGORA,

$$x \equiv z \pmod{I} \Leftrightarrow \underbrace{x - z \in I}$$

$$x - z = \underbrace{(x-y)}_{\in I} + \underbrace{(y-z)}_{\in I} \in I$$

LOGO, $x \equiv z \pmod{I}$.

PORTANTO, É UM RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM $A \times A$. #

Seja $y \in A$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y)$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{\underline{x \in A}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A$$

MAT-UnB

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid \underline{x - y} \in I\}.$$

$x - y = t, \quad t \in \overline{I}$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod I\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $\underbrace{x - y \in I}$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) =$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in \boxed{I}\}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + \underline{I}.$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$)

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência,

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de ***quociente do anel*** A ***pelo ideal*** I.

Seja $y \in A$. A classe de equivalência módulo I de y é

$$C(y) = \{x \in A \mid x \equiv y \pmod{I}\} = \{x \in A \mid x - y \in I\}.$$

Agora, $x - y \in I$ significa que existe $t \in I$, tal que $x - y = t$. Logo, $x = y + t$, onde $t \in I$.
Assim,

$$C(y) = \{y + t \mid t \in I\} = y + I.$$

Observação:

Denotamos por $y + I$ (ou $I + y$) a classe de equivalência de $y \in A$ módulo I. Denotamos por

$$\frac{A}{I}$$

*o conjunto de todas as classes de equivalência, tal conjunto é chamado de **quociente do anel** A **pelo ideal** I.*

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais.

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

   i) *Dado ~~$x \in A$:~~*

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

   i) *Dado $x \in A$:*

$$C(x) =$$

Exemplos

1) *Seja* A *um anel comutativo com unidade e* $I_1 = \{0\}$ *e* $I_2 = A$ *ideais. Então:*

   i) *Dado* $x \in A$*:*

$$C(x) = x + I_1$$

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

   i) *Dado $x \in A$:*

$$C(x) = x + I_1 = \{\cancel{x + 0}\} =$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$.

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1}$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{\cancel{x +} I$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + A \mid x \in A\},$$

Exemplos

1) Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:

i) Dado $x \in A$:

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem ~~tantas~~ classes de equivalência

Exemplos

1) *Seja A um anel comutativo com unidade e $I_1 = \{0\}$ e $I_2 = A$ ideais. Então:*

   i) *Dado $x \in A$:*

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A.

Exemplos

1) *Seja* A *um anel comutativo com unidade e* $I_1 = \{0\}$ *e* $I_2 = A$ *ideais. Então:*

   i) *Dado* $x \in A$*:*

$$C(x) = x + I_1 = \{x + 0\} = \{x\}.$$

Assim

$$\frac{A}{I_1} = \{x + I \mid x \in A\},$$

logo existem tantas classes de equivalência quantos forem os elementos de A*.*

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I =$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ temos:

$$C(0_A) = 0_A + I_2 = \{0_A + t \mid t \in I_2\}. = \{t \mid t \in I_2\}$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\} = A$$

Como $I_2 = A$,

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, *para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$

Exemplos

ii) *Para* $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, *para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única*

Exemplos

ii) *Para* $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$, *para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalência*

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalênciae*

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

ii) Para $I_2 = A$ *temos:*

$$C(0_A) = 0_A + I = \{0_A + t \mid t \in I_2\}.$$

Como $I_2 = A$*, para todo* $x \in A$ *temos* $x \in C(0_A)$ *logo existe uma única classe de equivalênciae*

$$\frac{A}{I_2} = \{0_A + I\}.$$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$.

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*.*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

$$x - y \in I = m\mathbb{Z}$$

$$x - y = mk \Leftrightarrow m \mid (x - y)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \equiv y \pmod{m}$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$*. Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. Os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. Seja $I = m\mathbb{Z}$ um ideal de $\mathbb{Z}$. Assim

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$,

Exemplos

2) Seja $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

2) Seja $A=\mathbb{Z}$*. Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$*,* $m>1$*. Seja* $I=m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$*. Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x-y=mk$*, para algum* $k\in\mathbb{Z}$*. Logo* $x\equiv y \pmod{I}$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,*

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$.

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$. *Portanto,*

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \mathbb{Z}_m.$$

Exemplos

2) *Seja* $A = \mathbb{Z}$. *Os ideais de* $\mathbb{Z}$ *são da forma* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$. *Seja* $I = m\mathbb{Z}$ *um ideal de* $\mathbb{Z}$. *Assim*

$$x \equiv y \pmod{I}$$

se, e só se,

$$x - y \in I.$$

Mais isso ocorre se, e somente se, $x - y = mk$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Logo* $x \equiv y \pmod{I}$ *se, e só se,* $m \mid (x - y)$. *Portanto,*

$$\frac{\mathbb{Z}}{I} = \boxed{\mathbb{Z}_m.}$$

Agora seja I ideal

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} =$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$

$\mathbb{Z}_m$ $\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\frac{A}{I}$ por

$$\begin{array}{rl} \oplus & x + I \\ & y + I \\ \hline & (x+y) + I \end{array}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$\underbrace{(x + I)} \oplus \underbrace{(y + I)} =$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = \underbrace{(\underline{x + y}) + I}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$\begin{aligned}(x + I) \oplus (y + I) &= (x + y) + I \\ (x + I) \otimes (y + I) &= \end{aligned}$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

para $x + I$,

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $y + I = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

para $x + I$, $y + I \in \dfrac{A}{I}$.

Agora seja I ideal e A um anel comutativo unitário. Temos

$$\to \frac{A}{I} = \{y + I \mid y \in A\}$$

onde $\boxed{y + I} = \{y + t \mid t \in I\}$ e $y \in A$.

Vamos definir uma soma $\oplus$ e um produto $\otimes$ em $\dfrac{A}{I}$ por

$\mathbb{Z}_m$

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I$$
$$(x + I) \otimes (y + I) = (xy) + I$$

para $x + I$, $y + I \in \dfrac{A}{I}$.

Verifiquemos que a soma

Verifiquemos que a soma e o produto

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$,

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$
\begin{aligned}
& x_1 + I = x_2 + I \\
& y_1 + I
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$
\begin{aligned}
x_1 + I &= x_2 + I \\
y_1 + I &= \underbrace{y_2 + I}
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$x_1 - x_2 \in I$$
$$+ \quad y_1 - y_2 \in I$$

$$(x_1 - x_2)y_1 \in I$$
$$(y_1 - y_2)x_2 \in I$$

COMO I É IDEAL, ENTÃO

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in I$$

$$\to (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$$

$$[(x_1 + y_1) + I] = [(x_2 + y_2) \in I]$$

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) \qquad\qquad (x_2 + I) \oplus (y_2 + I)$$

DAÍ:

$$(\underline{x}_1 + \bar{I}) \,\dot{\bar{\oplus}}\, (\underline{y}_1 + \bar{I}) = (\underline{x}_2 + \bar{I}) \,\bar{\oplus}\, (\underline{y}_2 + \bar{I})$$

LOGO A MUDANÇA DOS REPRE-

SENTANTES NÃO ALTERA

A SOMA.

AGORA, COMO I É IDEAL

E $(x_1 - x_2), (y_1 - y_2) \in I$; $y_1, x_2 \in A$

ENTÃO

$$(x_1 - x_2) y_1 \in I$$

$$(y_1 - y_2) x_2 \in I$$

MAJ

$$(x_1 - x_2) y_1 = x_1 y_1 - \boxed{x_2 y_1}$$

$+$

$$(y_1 - y_2) x_2 = \boxed{y_1 x_2} - y_2 x_2$$

LOGO,

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$

$$x_1 y_1 - \boxed{\cancel{x_2 y_1}} + \boxed{\cancel{y_1 x_2}} - y_2 x_2 \in I$$

$$\Rightarrow x_1 y_1 - (y_2 x_2) \in I$$

COM ISSO

$$\underbrace{x_1 y_1}_{} + I = \underbrace{x_2 y_2}_{} + I$$

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I)$$

LOGO A MUDANÇA DOS REPRE-
SENTANTES NÃO ALTERAM O
PRODUTO.

$$x_1 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2 \in I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I,\ x_2 + I,\ y_1 + I,\ y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + I &= x_2 + I \\ y_1 + I &= y_2 + I \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} (x_1 + I) \oplus (y_1 + I) &= (x_1 + y_1) + I \\ (x_2 + I) \oplus (y_2 + I) & \end{aligned}$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \oplus (y_2 + I) = (x_2 + y_2) + I$$

Verifiquemos que a soma e o produto em $\dfrac{A}{I}$ não dependem do representante da classe de equivalência.

Para isso, sejam $x_1 + I$, $x_2 + I$, $y_1 + I$, $y_2 + I \in \dfrac{A}{I}$ tais que

$$x_1 + I = x_2 + I$$
$$y_1 + I = y_2 + I$$

Então

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_1 + y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \oplus (y_2 + I) = (x_2 + y_2) + I$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$.

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$,

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I)$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Como $x_1 + I = x_2 + I$, então $x_1 - x_2 \in I$ e como $y_1 + I = y_2 + I$, então $y_1 = y_2 \in I$. Mas I é ideal, logo $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in I$, ou seja

$$(x_1 + I) \oplus (y_1 + I) = (x_2 + I) \oplus (y_2 + I).$$

Agora,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) &= (x_1 y_1) + I\\ (x_2 + I) \otimes (y_2 + I) &= (x_2 y_2) + I\end{aligned}$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$\begin{gathered}(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I\\ x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I\end{gathered}$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$.

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I)$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Agora,

$$(x_1 + I) \otimes (y_1 + I) = (x_1 y_1) + I$$
$$(x_2 + I) \otimes (y_2 + I) = (x_2 y_2) + I$$

Como $(x_1 - x_2)y_1 \in I$ e $(y_1 - y_2)x_2 \in I$ então

$$(x_1 - x_2)y_1 + (y_1 - y_2)x_2 \in I$$
$$x_1 y_2 - \underbrace{x_2 y_1 + y_1 x_2}_{=0} - y_2 x_2 \in I$$
$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \in I,$$

ou seja, $xy + I = x_2 y_2 + I$. Portanto,

$$(x_1 + I) \otimes (y + I) = (x_2 + I) \otimes (y_2 + I).$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade.*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*,*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade.

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ *e a unidade do produto*

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel comutativo e com unidade. Se* I *é um ideal de* A*, então*

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ *e a unidade do produto é a classe* $1_A + I$*.*

Exercício!

Teorema

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo e com unidade. Se I é um ideal de A, então

$$\left(\frac{A}{I}, \oplus, \otimes\right)$$

é um anel comutativo e com unidade. O elemento neutro da soma é a classe $0_A + I$ e a unidade do produto é a classe $1_A + I$.