Grupo Simétrico

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB





Dada uma função $f: A \rightarrow A$, sabemos que f possui inversa



Dada uma função $f: A \to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.



Dada uma função $f \colon A \to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$\mathcal{S} = \{f \colon A \to A$$



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em ${\mathcal S}$ vamos considerar a composição de funções \circ .



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em ${\mathcal S}$ vamos considerar a composição de funções \circ .

Como $id: A \rightarrow A$ tal que id(x) = x para todo $x \in A$



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em ${\mathcal S}$ vamos considerar a composição de funções \circ .

Como $id:A \to A$ tal que id(x)=x para todo $x \in A$ é uma função bijetora



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em ${\mathcal S}$ vamos considerar a composição de funções \circ .

Como $id:A\to A$ tal que id(x)=x para todo $x\in A$ é uma função bijetora então $id\in\mathcal{S}$



Dada uma função $f:A\to A$, sabemos que f possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Assim considere o conjunto

$$S = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ \'e bijetora}\}.$$

Em ${\mathcal S}$ vamos considerar a composição de funções \circ .

Como $id: A \to A$ tal que id(x) = x para todo $x \in A$ é uma função bijetora então $id \in S$ e com isso $S \neq \emptyset$.



Dadas f, $g \in \mathcal{S}$



Dadas f, $g \in \mathcal{S}$ como f e g são bijetoras,



Dadas $f, g \in \mathcal{S}$ como $f \in g$ são bijetoras, então $f \circ g$ é bijetora



Dadas f, $g \in \mathcal{S}$ como f e g são bijetoras, então $f \circ g$ é bijetora e daí $f \circ g \in \mathcal{S}$.



Dadas f, $g \in \mathcal{S}$ como f e g são bijetoras, então $f \circ g$ é bijetora e daí $f \circ g \in \mathcal{S}$. Isto é,



Dadas f, $g \in \mathcal{S}$ como $f \in g$ são bijetoras, então $f \circ g$ é bijetora e daí $f \circ g \in \mathcal{S}$. Isto é, a composição de funções



Agora, sejam f, g e $h \in \mathcal{S}$.





$$[(f\circ g)$$



$$[(f\circ g)\circ h$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))$$



$$[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)]$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x)$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x)))$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x))$$



$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g)$



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h$



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

 $\mathsf{Logo}\ (f \circ g) \circ h = f \circ$



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

f∘ id



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f$$



Agora, sejam f, g e $h \in \mathcal{S}$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde $id: A \rightarrow A$



Agora, sejam f, g e $h \in \mathcal{S}$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde $id: A \rightarrow A$ é tal que id(x) = x,



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde $id: A \rightarrow A$ é tal que id(x) = x, para todo $x \in A$.



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

 $Logo (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde $id: A \rightarrow A$ é tal que id(x) = x, para todo $x \in A$. Logo id é o elemento neutro da composição.



Agora, sejam f, g e $h \in S$. Para todo $x \in A$ temos

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

 $Logo (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}$

$$f \circ id = f = id \circ f$$
,

onde $id: A \rightarrow A$ é tal que id(x) = x, para todo $x \in A$. Logo id é o elemento neutro da composição.



Finalmente,



Finalmente, para toda $f \in \mathcal{S}$,



Finalmente, para toda $f \in \mathcal{S}$, como f é bijetora









$$f \circ g = id$$



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\mathcal S}$



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\mathcal S}$ possui inverso.

Portanto (\mathcal{S}, \circ)



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\mathcal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\mathcal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\mathcal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que $A\subseteq \mathbb{N}$



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que $A \subseteq \mathbb{N}$ para simplificar a notação.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que $A\subseteq \mathbb{N}$ para simplificar a notação.

Vamos ver como é o conjunto ${\mathcal S}$ com essa hipótese.



$$f \circ g = id = g \circ f$$
.

Logo todo elemento de ${\cal S}$ possui inverso.

Portanto (S, \circ) é um grupo. Além disso, em geral, esse grupo não é comutativo.

Vamos considerar agora o caso particular em que A é um conjunto finito.

Nessa situação podemos supor que $A\subseteq \mathbb{N}$ para simplificar a notação.

Vamos ver como é o conjunto ${\mathcal S}$ com essa hipótese.



Se $A = \{1\}$,



Se $A = \{1\}$, então só existe uma função $f: A \rightarrow A$





$$f: \{1\} \to \{1\}$$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id.



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso ${\mathcal S}$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \{id\}$



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso $S = S_1 = \{id\}$ e (S_1, \circ) é um grupo,



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso $S = S_1 = \{id\}$ e (S_1, \circ) é um grupo, e nesse caso comutativo.



$$f: \{1\} \to \{1\}$$

 $f(1) = 1.$

Ou seja, f é a função a identidade id. Nesse caso $S = S_1 = \{id\}$ e (S_1, \circ) é um grupo, e nesse caso comutativo.



Se $A=\{1,2\}$





$$id: A \rightarrow A$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \rightarrow A$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$
$$f(1) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim \mathcal{S}



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim $S = S_2$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \rightarrow A$$

 $f(1) = 2$
 $f(2) = 1$

Assim
$$S = S_2 = \{id,$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim
$$S = S_2 = \{id, f\}$$



$$id: A \to A$$
 $f: A \to A$ $id(1) = 1$ $f(1) = 2$ $id(2) = 2$ $f(2) = 1$

Assim $S = S_2 = \{id, f\}$ e (S_2, \circ) é um grupo.

$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$f: A \to A$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 1$$

Assim $S = S_2 = \{id, f\}$ e (S_2, \circ) é um grupo.

0	id	f
id		
f		

$$id: A \rightarrow A$$
 $f: A \rightarrow A$ $id(1) = 1$ $f(1) = 2$ $id(2) = 2$ $f(2) = 1$

Assim $S = S_2 = \{id, f\}$ e (S_2, \circ) é um grupo.

0	id	f
id		
f		

Além disso, da tabela acima vemos que esse grupo é comutativo.



Agora, seja $A = \{1, 2, 3\}.$





 $id:A \rightarrow A$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$



$$id:A\rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$id(2) = 2$$

 $id(3) = 3$

$$f_1: A \to A$$

 $f_1(1) = 2$
 $f_1(2) = 1$

$$f_1(3) = 3$$

$$\textit{f}_2: \textit{A} \rightarrow \textit{A}$$

$$f_2(1) = 3$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$

$$f_2(3)=1$$



$$id:A\rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$

 $f_2(3) = 1$

$$f_3:A\to A$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$

$$f_2(3)=1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$



 $f_2:A\to A$

$$id: A \to A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$
 $id(3) = 3$

$$id(1) = 1$$
 $f_2(1) = 3$
 $id(2) = 2$ $f_2(2) = 2$
 $id(3) = 3$ $f_2(3) = 1$
 $f_1: A \to A$ $f_3: A \to A$
 $f_1(1) = 2$ $f_3(1) = 1$
 $f_1(2) = 1$ $f_3(2) = 3$
 $f_1(3) = 3$



 $f_2:A\to A$

$$id: A \to A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$
 $id(3) = 3$

$$id(1) = 1$$
 $f_2(1) = 3$
 $id(2) = 2$ $f_2(2) = 2$
 $id(3) = 3$ $f_2(3) = 1$
 $f_1: A \to A$ $f_3: A \to A$
 $f_1(1) = 2$ $f_3(1) = 1$
 $f_1(2) = 1$ $f_3(2) = 3$
 $f_1(3) = 3$ $f_3(3) = 2$



$$id:A \rightarrow A$$

$$id(1) = 1$$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2)=1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

 $f_2(2) = 2$

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1)=1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

 $f_A:A\to A$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(1) = 1$$

 $id(2) = 2$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_3$$

$$f_2: A \rightarrow A$$

 $f_2(1) = 3$

$$f_2(2) = 2$$

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1)=1$$

$$f_3(2)=3$$

$$f_3(3) = 2$$

 $f_4:A\to A$

 $f_4(1) = 2$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$id(2) = 2$$

 $id(3) = 3$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1)=2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

 $f_2(2) = 2$

$$f_2(3) = 1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

$$f_4(2) = 3$$



$$id: A \rightarrow A$$
$$id(1) = 1$$
$$id(2) = 2$$
$$id(3) = 3$$

$$id(3) = 3$$

 $f_1: A \to A$

$$f_1(1) = 2$$

 $f_1(2) = 1$
 $f_1(3) = 3$

$$f_2: A \to A$$

 $f_2(1) = 3$
 $f_2(2) = 2$
 $f_2(3) = 1$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$

 $f_3(2) = 3$
 $f_3(3) = 2$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

$$f_4(2) = 3$$

$$f_4(3)=1$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$

$$id(2) = 2$$

$$id(3) = 3$$

$$f_1:A\to A$$

$$f_1(1) = 2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

$$f_2(2) = 2$$

 $f_2(3) = 1$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

 $f_4(2) = 3$

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5:A\to A$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$id(2) = 2$$

 $id(3) = 3$

$$f_1:A\to A$$
$$f_1(1)=2$$

$$f_1(2) = 1$$

$$f_1(3) = 3$$

$$f_2:A\to A$$

$$f_2(1) = 3$$

 $f_2(2) = 2$

$$f_2(3)=1$$

$$f_3:A\to A$$

$$f_3(1)=1$$

$$f_3(2) = 3$$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

 $f_4(2) = 3$

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5:A\to A$$

$$f_5(1)=3$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$

$$id(3) = 3$$

 $f_1: A \to A$

$$f_1(1) = 2$$

 $f_1(2) = 1$
 $f_1(3) = 3$

$$f_2: A \to A$$

 $f_2(1) = 3$
 $f_2(2) = 2$

$$f_3:A\to A$$
$$f_3(1)=1$$

 $f_2(3) = 1$

$$f_3(2) = 3$$

 $f_3(3) = 2$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

 $f_4(2) = 3$

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5:A\to A$$
$$f_5(1)=3$$

$$f_5(2) = 1$$



$$id: A \rightarrow A$$

 $id(1) = 1$
 $id(2) = 2$
 $id(3) = 3$

$$f_1: A \to A$$

 $f_1(1) = 2$
 $f_1(2) = 1$

$$f_1(1) = 2$$

 $f_1(2) = 1$
 $f_1(3) = 3$

$$f_2: A \to A$$

 $f_2(1) = 3$
 $f_2(2) = 2$

$$f_2(3)=1$$

$$f_3: A \to A$$

 $f_3(1) = 1$
 $f_3(2) = 3$

$$f_3(3) = 2$$

$$f_4:A\to A$$

$$f_4(1) = 2$$

 $f_4(2) = 3$

$$f_4(3) = 1$$

$$f_5: A \rightarrow A$$

 $f_5(1) = 3$

$$f_5(1) = 3$$

 $f_5(2) = 1$

$$f_5(3) = 2$$



Logo $S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$









Logo
$$S = S_3 = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$
 e (S_3, \circ) é um grupo.

$$(f_1 \circ f_4)(1)$$





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1))$$





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2)$$





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

 $(f_4 \circ f_1)(1)$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

 $(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1))$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2)$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

$$\mathsf{dai}\ (\mathit{f}_{1} \circ \mathit{f}_{4})(1)$$





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

$$\mathsf{dai}\; (\mathit{f}_{1} \circ \mathit{f}_{4})(1) \neq (\mathit{f}_{4} \circ \mathit{f}_{1})(1)$$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí
$$(f_1\circ f_4)(1) \neq (f_4\circ f_1)(1)$$
 , isto é,





$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí
$$(f_1\circ f_4)(1)
eq (f_4\circ f_1)(1)$$
 , isto é, $f_1\circ f_4$



$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí
$$(f_1\circ f_4)(1) \neq (f_4\circ f_1)(1)$$
 , isto é, $f_1\circ f_4 \neq f_4\circ f_1$.





Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1\circ f_4)(1)\neq (f_4\circ f_1)(1)$, isto é, $f_1\circ f_4\neq f_4\circ f_1$. Portanto o grupo (S_3,\circ)



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.

Note que em S_2



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.

Note que em S_2 temos 2 = 2! elementos



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.

Note que em S_2 temos 2=2! elementos e em S_3



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.

Note que em S_2 temos 2=2! elementos e em S_3 temos 6=3! elementos.



Nesse caso temos

$$(f_1 \circ f_4)(1) = f_1(f_4(1)) = f_1(2) = 1$$

$$(f_4 \circ f_1)(1) = f_4(f_1(1)) = f_4(2) = 3$$

daí $(f_1 \circ f_4)(1) \neq (f_4 \circ f_1)(1)$, isto é, $f_1 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_1$. Portanto o grupo (S_3, \circ) não é comutativo.

Note que em S_2 temos 2=2! elementos e em S_3 temos 6=3! elementos.



De modo geral,



De modo geral, se $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$



De modo geral, se $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ então existem exatamente n!





Assim o grupo (S_n, \circ)



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \geqslant 3$, então



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \ge 3$, então S_n é um grupo não comutativo.



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \geqslant 3$, então S_n é um grupo não comutativo.

Definição

O grupo S_n é chamado de



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \geqslant 3$, então S_n é um grupo não comutativo.

Definição

O grupo S_n é chamado de **grupo simétrico**



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \geqslant 3$, então S_n é um grupo não comutativo.

Definição

O grupo S_n é chamado de **grupo simétrico** ou **grupo de permutações**



Assim o grupo (S_n, \circ) possui n! elementos.

Se $n \geqslant 3$, então S_n é um grupo não comutativo.

Definição

O grupo S_n é chamado de **grupo simétrico** ou **grupo de permutações** em $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$.



Um modo de representar os elementos de S_n é o seguinte:



Um modo de representar os elementos de S_n é o seguinte: vamos representar as funções $f \in S_n$



Um modo de representar os elementos de S_n é o seguinte: vamos representar as funções $f \in S_n$ na forma de uma matriz contendo 2 linhas



Um modo de representar os elementos de S_n é o seguinte: vamos representar as funções $f \in S_n$ na forma de uma matriz contendo 2 linhas e n colunas.



Um modo de representar os elementos de S_n é o seguinte: vamos representar as funções $f \in S_n$ na forma de uma matriz contendo 2 linhas e n colunas. A primeira linha é o domínio da função







f =



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$





$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
 $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
 $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Assim a composição $f_3 \circ f_4$ pode ser determinada da seguinte forma:

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Assim a composição $f_3 \circ f_4$ pode ser determinada da seguinte forma:

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



A composição $f_4 \circ f_5$ é:

$$f_4 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



A composição $f_4 \circ f_5$ é:

$$f_4 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$