

# Relação de Equivalência - Classes de Equivalência

José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

26 de agosto de 2020

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ .*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:*

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo  $x \in A$ ,

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)



## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ ,

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $(x, y) \in R$

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $(x, y) \in R$  e  $(y, z) \in R$ ,

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $(x, y) \in R$  e  $(y, z) \in R$ , então  $(x, z) \in R$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $(x, y) \in R$  e  $(y, z) \in R$ , então  $(x, z) \in R$ . (Propriedade Transitiva)

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $(x, x) \in R$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $(x, y) \in R$ , então  $(y, x) \in R$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $(x, y) \in R$  e  $(y, z) \in R$ , então  $(x, z) \in R$ . (Propriedade Transitiva)



## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ ,*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

*1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

*1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ ,*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”,*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$*



## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ .*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ ,*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ .*

## Observações:

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .*

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.*
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .*

## Definição

*Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:*

## Observações:

Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $xRx$ . (Propriedade Reflexiva)



## Observações:

Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $xRx$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $xRy$ , então  $yRx$ . (Propriedade Simétrica)

## Observações:

Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $xRx$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $xRy$ , então  $yRx$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $xRy$  e  $yRz$ , então  $xRz$ . (Propriedade Transitiva)

## Observações:

Seja  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , isto é,  $R \subseteq A \times A$ .

- 1) Para dizermos que  $(x, y) \in R$  usaremos a notação  $x \equiv y (R)$ , que se lê “ $x$  é equivalente a  $y$  módulo  $R$ ”, ou ainda a notação  $xRy$ , com o mesmo significado anterior.
- 2) Em alguns casos vamos utilizar a notação  $\sim$  para representar a relação  $R$ . Nesse caso, escrevemos  $x \sim y$  para dizer que  $(x, y) \in R$ , ou que,  $xRy$ .

## Definição

Seja  $A$  um conjunto não vazio e  $R \subseteq A \times A$ . Dizemos que  $R$  é uma **relação de equivalência** se:

- i) Para todo  $x \in A$ ,  $xRx$ . (Propriedade Reflexiva)
- ii) Se  $xRy$ , então  $yRx$ . (Propriedade Simétrica)
- iii) Se  $xRy$  e  $yRz$ , então  $xRz$ . (Propriedade Transitiva)

## Definição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ .*

## Definição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ ,*

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência**

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$**

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$**



## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\overline{b}$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\overline{b}$  ou  $C(b)$ ,

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} =$$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) =$$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) = \{x \in A$$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\}$$



## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A$$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

## Definição

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Dado  $b \in A$ , chamamos de **classe de equivalência determinada por  $b$  módulo  $R$** , denotada por  $\bar{b}$  ou  $C(b)$ , o subconjunto de  $A$  dado por

$$\bar{b} = C(b) = \{x \in A \mid (x, b) \in R\} = \{x \in A \mid xRb\}.$$

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$



## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$

são relações de equivalência sobre  $A$ .

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$

são relações de equivalência sobre  $A$ . Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.

## Exemplos

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Temos

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}.$$

De um exemplo anterior sabemos que

$$R_1 = A \times A$$

$$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2)\}$$

são relações de equivalência sobre  $A$ . Vamos determinar as classes de equivalência para cada uma delas.

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} =$$

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\}$$

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} =$$



## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\}$$

## Exemplos

1) *As classes de equivalência de  $R_1$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} =$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\}$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{4} =$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_1\}$$

## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$



## Exemplos

1) As classes de equivalência de  $R_1$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

*Nesse caso temos somente uma classe de equivalência.*

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$\overline{1}$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$



## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

## Exemplos

2) As classes de equivalência de  $R_3$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\bar{4}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\}$$

## Exemplos

2) *As classes de equivalência de  $R_3$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\} = \{4\}$$

## Exemplos

2) As classes de equivalência de  $R_3$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_3\} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_3\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_3\} = \{4\}$$

*Aqui temos três classes de equivalência diferentes.*

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*



## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} =$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\}$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} =$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\}$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

## Exemplos

3) As classes de equivalência de  $R_4$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} =$$

## Exemplos

3) As classes de equivalência de  $R_4$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\}$$



## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

## Exemplos

3) As classes de equivalência de  $R_4$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\bar{4} =$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_4\}$$

## Exemplos

3) *As classes de equivalência de  $R_4$  são:*

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_4\} = \{4\}$$

## Exemplos

3) As classes de equivalência de  $R_4$  são:

$$\bar{1} = \{x \in A \mid (x, 1) \in R_4\} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{x \in A \mid (x, 2) \in R_4\} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{x \in A \mid (x, 3) \in R_4\} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{x \in A \mid (x, 4) \in R_4\} = \{4\}$$

*Aqui temos quatro classes de equivalência diferentes.*

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} =$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$



## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} =$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} =$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} =$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$



## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

## Exemplos

4) Para a relação de equivalência

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$  temos:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

*Neste caso existem somente duas classes de equivalência. (Por quê?)*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ .*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

*i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ ,*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

*i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

*i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*

*ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ ,*

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*



## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ ,

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ ,

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ .

## Proposição

Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ .

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência

## Proposição

Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$



## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$  e  $bRy$ .

## Proposição

Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$  e  $bRy$ . Pela propriedade transitiva

## Proposição

Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$  e  $bRy$ . Pela propriedade transitiva segue que  $aRb$ ,

## Proposição

*Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:*

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .*
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$  e  $bRy$ . Pela propriedade transitiva segue que  $aRb$ , como queríamos.

## Proposição

Seja  $R$  uma relação de equivalência em um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  temos:

- i) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $aRb$ .
- ii) se  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , então  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Prova:*

- i) Como  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , existe um  $y \in \bar{a} \cap \bar{b}$ , logo  $y \in \bar{a}$  e  $y \in \bar{b}$ . Da definição de classe de equivalência temos  $yRa$  e  $yRb$ . Como  $R$  é relação de equivalência temos  $aRy$  e  $bRy$ . Pela propriedade transitiva segue que  $aRb$ , como queríamos.

ii) Precisamos mostrar que

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ .



ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ .

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ .

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ ,

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ .

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ ,



ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ ,

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ .

ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior



- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ ,

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ .

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ ,



- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

## Corolário

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ .*

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

## Corolário

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$*

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

## Corolário

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  então  $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$*

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

## Corolário

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  então  $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$  ou  $\bar{a} = \bar{b}$ .*

- ii) Precisamos mostrar que  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$  e que  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Para a primeira inclusão seja  $y \in \bar{a}$ . Daí  $yRa$ . Mas, por hipótese,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ , assim pelo item anterior segue que  $aRb$ . Logo, como  $yRa$  e  $aRb$ , segue que  $yRb$ , ou seja,  $y \in \bar{b}$ . Daí  $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ . Agora para provar a segunda inclusão seja  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$ . Novamente,  $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$  e então pelo item anterior segue que  $aRb$ . Assim uma vez que  $R$  é uma relação de equivalência temos  $bRa$  e de  $xRb$  obtemos  $xRa$ , ou seja,  $x \in \bar{a}$ . Com isso  $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ . Portanto  $\bar{a} = \bar{b}$ , como queríamos. ■

## Corolário

*Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ . Dados  $a, b \in A$  então  $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$  ou  $\bar{a} = \bar{b}$ .*