Anéis - Subanéis

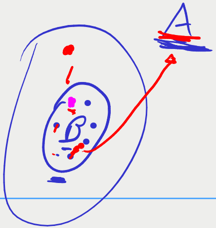
José Antônio O. Freitas

MAT-UnB

2 de outubro de 2020

$A \neq \emptyset$; $\oplus$; $\otimes$

$(A, \oplus, \otimes)$ É UM ANEL SE:



i) PARA TODOS $x, y, z \in A$

$$\to (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

ii) PARA TODOS $x, y \in A$

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x, y \in B \\ x + y \in B \\ x \cdot y \in B \\ 0_A \in B \\ -x \in B \end{array} \right\}$$

ELEMENTO NEUTRO DE $\oplus$

iii) EXISTE $0_A \in A$ TAL QUE

$$x \oplus 0_A = x = 0_A \oplus x$$

PARA TODO $x \in A$.

iv) PARA $x \in A$, EXISTE $y \in A$ TAL QUE

$$x \oplus y = 0_A = y \oplus x$$

v) PARA TODOS $x, y, z \in A$ VALE

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

vi) PARA TODOS $x, y, z \in A$ VALE

$$\Rightarrow (x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z$$

vii) PARA TODOS $x, y, z \in A$ VALE

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

$\Rightarrow x \otimes y = y \otimes x$

$\Rightarrow x \otimes 1_A = x = 1_A \otimes x$

NÃO SÃO OBRIGATÓRIAS.

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$

$$x \cdot y = xy$$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Observação:

Seja $(A, \oplus, \otimes)$ *um anel. Para simplificar a notação vamos denotar a operação* $\oplus$ *por* $+$ *e a operação* $\otimes$ *por* $\cdot$ *e assim escrever simplesmente que* $(A, +, \cdot)$ *é um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

MAT-UnB

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é $\boxed{\textit{único.}}$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

$\cancel{(-1)} \cdot x$

$\mathbb{Z}_5 ; \quad -(\overline{2}) = \overline{3}$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um* $\boxed{\text{único}}$ *oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) *Para todo* $x \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) Para todo $x \in A$,

$$\underbrace{-(-x)} = x.$$

iv) Dados x_1,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados x_1, x_2,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in A$,

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1*,* x_2*, ...,* $x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$*.*

iii) *Para todo* $x \in A$*,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* $x_1, x_2, ..., x_n \in A$*,* $n \geqslant 2$*, então*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada $x \in A$ existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de $x \in A$ será denotado por $-x$.*

iii) *Para todo $x \in A$,*

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

MAT-UnB

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2)$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) O elemento neutro é único.

ii) Para cada $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) Para todo $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Então:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *Para cada* $x \in A$ *existe um único oposto. Neste caso o* ***oposto*** *de* $x \in A$ *será denotado por* $-x$.

iii) *Para todo* $x \in A$,

$$-(-x) = x.$$

iv) *Dados* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $n \geqslant 2$, *então*

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) + \cdots + (-x_n).$$

Proposição

v) Para todos α*,*

Proposição

v) Para todos α, *x,*

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x$$

Proposição

v) Para todos α*, x, y* $\in$ *A, se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\cancel{\alpha} + x = \cancel{\alpha} + y,$$

então $x = y$.

Proposição

v) Para todos $\alpha, x, y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

Proposição

v) *Para todos* α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) *Para todo* $x \in A$,

$$x \cdot 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos α, x, $y \in A$, *se*

$$\alpha + x = \alpha + y,$$

então $x = y$.

vi) Para todo $x \in A$,

$$x \cdot 0_A = 0_A = 0_A \cdot x.$$

Proposição

v) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y)$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$$

Proposição

v) Para todos x, $y \in A$, temos

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

vi) Para todos x,

Proposição

v) Para todos $x, y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

vi) Para todos $x, y \in A$,

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

vi) Para todos $\underline{x,\ y} \in A$,

$$\underline{x \cdot y}$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Proposição

v) Para todos $x,\ y \in A$, *temos*

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

vi) Para todos $x,\ y \in A$,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

Prova:

Prova:

i) Suponha que existam 0_1,

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A.

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$\underbrace{x + 0_1}$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$.

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 +$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

Prova:

i) Suponha que existam 0_1, $0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

Prova:

i) Suponha que existam $0_1, 0_2 \in A$ elementos neutros de A. Assim

$$x + 0_1 = x \quad \text{e} \quad x + 0_2 = x$$

para todo $x \in A$. Assim

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

e portanto o elemento neutro é único.

ii) De fato,

ii) De fato, dado $x \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$y_1 + x = x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_1 + 0_A = (y_1 + (x) + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

$$= 0_A + y_2 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

y_1

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x)$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $\boxed{-x.}$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$,

$$x + \boxed{(-x)} = 0_A$$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, x

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + \boxed{(-x)} = 0_A$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam y_1, $y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja,

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x)$

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1,\ y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

ii) De fato, dado $x \in A$ suponha que existam $y_1, y_2 \in A$ tais que

$$x + y_1 = 0_A \quad \text{e} \quad x + y_2 = 0_A.$$

Daí

$$y_1 = y_2 + 0_A = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0_A + y_2 = y_2.$$

Logo o oposto de x é único e daí será denotado por $-x$.

iii) Dado $x \in A$, então $-x$ é oposto de x, isto é, $x + (-x) = 0_A$. Logo o oposto de $(-x)$ é x, ou seja, $-(-x) = x$.

iv) Segue usando indução sobre n.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x$

iv) Segue usando indução sobre n.

$\in A$

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\boxed{\alpha + x} = \boxed{\alpha + y}$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = x + 0_A = (x + (\alpha + (-\alpha))) = (x + \alpha) + (-\alpha)$$

$$= (\alpha + x) + (-\alpha) = (\alpha + y) + (-\alpha) =$$

$$= (y + \alpha) + (-\alpha) = y + (\alpha + (-\alpha)) = y + 0_A = y.$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x =$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí $x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) +$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y)$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí
$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) =$
$[(-\alpha) + \alpha]$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\alpha + x = \alpha + y$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

iv) Segue usando indução sobre n.

v) Suponha que $\underbrace{\cancel{\alpha} + x} = \underbrace{\cancel{\alpha} + y}$. Seja $-\alpha$ o oposto de α. Daí

$$x = 0_A + x = [(-\alpha) + \alpha] + x = (-\alpha) + (\alpha + x) = (-\alpha) + (\alpha + y) = [(-\alpha) + \alpha] + y = 0_A + y = y$$

como queríamos.

$$x \cdot \underline{0_A} = 0_A$$

vi) Temos

$$\underbrace{x \cdot 0_A}_{\in A} + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

$$\underbrace{\cancel{x \cdot 0_A}}_{\alpha} + 0_A = \underbrace{\cancel{x \cdot 0_A}}_{\alpha} + x \cdot 0_A$$

$$x \cdot 0_A = 0_A .$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A +$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = \underline{x \cdot 0_A}$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$\cancel{x \cdot 0_A} + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = \cancel{x \cdot 0_A} + x \cdot 0_A.$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

$0_A \cdot x = 0_A$ (Exercício!)

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y)$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $\boxed{x \cdot (-y)} = -(x \cdot y)$

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0_A = 0_A$$

$$\underbrace{x \cdot y} + \underbrace{x \cdot (-y)} = 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y)$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y]$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-x \cdot y$

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-x \cdot y = x \cdot (-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

$(-x) \cdot (-y) = -[(-x) \cdot y] = [-(x \cdot y)] = x \cdot y$ #

Z.

vi) Temos

$$x \cdot 0_A + 0_A = x \cdot 0_A = x \cdot (0_A + 0_A) = x \cdot 0_A + x \cdot 0_A.$$

Assim do item anterior segue que $x \cdot 0_A = 0_A$.

vii) Provemos que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$:

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot [(-y) + y] = x \cdot 0_A = 0_A,$$

portanto $-x \cdot y = x \cdot (-y)$.

viii) Basta usar o caso anterior.

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis:*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A,*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um* ***subanel*** *de* A *quando* $(B, +, \cdot)$ *é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel* A *sempre tem dois subanéis:* $\{0_A\}$ *e* A*, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em* $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ *é um subanel.*

Definição

Seja $(A,+,\cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B,+,\cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$,*

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $\underline{m\mathbb{Z}}$, $m > 1$*

$\parallel$

$\{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$

Definição

*Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um **subanel** de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de **subanéis triviais**.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Definição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um ***subanel*** *de A quando $(B, +, \cdot)$ é um anel.*

Exemplos

1) *Todo anel A sempre tem dois subanéis: $\{0_A\}$ e A, que são chamados de* ***subanéis triviais****.*

2) *Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ o conjunto $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é um subanel.*

3) *No anel $\mathbb{Z}$, o conjunto $m\mathbb{Z}$, $m > 1$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel.*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,*

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$

Proposição

Seja $(A,+,\cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = x + (-y) \in B$ *e* $x \cdot y \in B$

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um subconjunto $\boxed{\text{não vazio}}$ $B \subseteq A$ é um subanel de A se, e somente se, $x - y = x + (-y) \in B$ e $x \cdot y \in B$ para todos $x, y \in B$.

Prova: PRECISAMOS MOSTRAR QUE

i) SE B É $\underbrace{\text{SUBANEL}}$, ENTÃO

$x + (-y) \in B$ E $x \cdot y \in B$

PARA TODOS $x, y \in B$.

ii) SE $\overbrace{x+(-y)\in B}$ E $\overbrace{x\cdot y\in B}$, PARA TODOS $\boxed{x, y \in B}$, ENTÃO B É UM <u>SUBANEL</u> DE A.

A PROVA DE (i) É CONSEQUÊNCIA DIRETA DA DEFINIÇÃO DE SUBANEL.

PROVEMOS (ii). PARA ISSO PRECI-
SAMOS MOSTRAR QUE $(B, \underline{+}, \underline{\cdot})$

É UM ANEL.

POR HIPÓTESE, $x \cdot y \in B$ PARA TODOS
$x, y \in B$. LOGO A MULTIPLICAÇÃO É
UMA OPERAÇÃO BINÁRIA EM B.

$\subseteq A$

COMO $B \neq \emptyset$, EXISTE $x \in B$. SEJA $-x$ O OPOSTO DE x EM A. DAÍ

$$\underbrace{x + (-x)}_{0_A} \in B$$

LOGO $0_A \in B$.

AGORA, DADO $\boxed{x} \in B$, SEJA $-x$ O OPOSTO DE x EM A. COMO $\boxed{0_A} \in B$,

ENTÃO, POR HIPÓTESE

$$\underbrace{0_A + (-x)}_{-x} \in B$$

OU SEJA, $-\underline{x} \in \underline{B}$.

SEJAM $x, y \in B$. SABEMOS QUE $-y \in B$. DAÍ, USANDO A HIPÓTESE TEMOS

$$\underbrace{x + [-(\underset{\in B}{-y})]}_{\shortparallel} \in B$$

$$x + y \in B$$

Logo, $x + y \in B$.

Como as demais propriedades

VALEM PARA TODOS OS ELEMENTOS DE A, ELAS VALEM TAMBÉM EM B.

PORTANTO, $(B,+,\cdot)$ É UM ANEL, OU SEJA, B É UM SUBANEL DE A. #

Proposição

Seja $(A, +, \cdot)$ *um anel. Um subconjunto não vazio* $B \subseteq A$ *é um subanel de* A *se, e somente se,* $x - y = \underline{x + (-y)} \in B$ *e* $\underline{x \cdot y} \in B$ *para todos* $x, y \in B$.

Prova:

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

Exemplos

1) *Em* $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

$x + (-y) \in B$, $x \cdot y \in B$ PARA TODOS $x, y \in B$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Exemplos

1) Em $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$ *o conjunto* $B = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *é um subanel.*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$*,*

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$, *o conjunto* $m\mathbb{Z}$, $m > 1$

Exemplos

2) *No anel* $\mathbb{Z}$*, o conjunto* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$ *é um subanel de* $\mathbb{Z}$*.*

$m\mathbb{Z} = \{ m\ell \mid \ell \in \mathbb{Z} \}$

$0 \in m\mathbb{Z}$, POIS $0 = m \cdot 0$, LOGO $m\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

SEJAM $x, y \in m\mathbb{Z}$. ASSIM EXISTEM $\ell, k \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$x = m\ell$ E $y = mk$

DAÍ:

$x - y = m\ell - mk = m(\ell - k) \in m\mathbb{Z}$

$x \cdot y = (ml)(mk) = m(mlk) \in m\mathbb{Z}$

LOGO $m\mathbb{Z}$ É UM SUBANEL DE $\mathbb{Z}$.

Exemplos

2) No anel $\mathbb{Z}$*, o conjunto* $m\mathbb{Z}$*,* $m > 1$ *é um subanel de* $\mathbb{Z}$*.*

Exemplos

2) *No anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

Exemplos

2) *No anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplos

2) *No anel* $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid \boxed{k \in \mathbb{Z}}\}$

$-y = 16 - x$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$0_{\mathbb{Q}} = 8$

a) COMO $0_{\theta} = 8$ E $8 = 2 \cdot 4$, ENTÃO

$\underbrace{0_{\theta} = 8 \in B.}$

AGORA SEJAM $x, y \in B$. DAÍ EXISTEM $n, l \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$$x = 2n \quad e \quad y = 2l.$$

ASSIM, TEMOS

$$x \odot y = (2n) \odot (2l) = 2n + 2l - \frac{(2n)(2l)}{8}$$

$$= 2n + 2l - \boxed{\frac{nl}{2}} \in \underline{B}$$

B NÃO É UM SUBANEL DE E POIS, POR EXEMPLO, $x = y = 2 \in B$

E

$$2 \odot 2 = 2 + 2 - \frac{2.2}{8} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \notin B.$$

b) COMO $8 = 8.1$, ENTÃO $0_Q = 8 \in C$.
ASSIM $C \neq \emptyset$.
AGORA, SEJAM $x, y \in C$.
DAÍ EXISTEM $n, l \in \mathbb{Z}$ TAIS QUE

$x = 8n$ E $y = 8\ell$. ENTÃO,

$-y = 16 - 8\ell$ E TEMOS

$$x * (-y) = 8n * (16 - 8\ell) = 8n + 16 - 8\ell - 8$$

$$= 8n - 8\ell + 8 = 8(\underbrace{n - \ell + 1}_{\in \mathbb{Z}}) \in C$$

$$x \odot y = (8n) \odot (16 - 8l) = 8n + (16 - 8l)$$

$$- \underbrace{(\cancel{8}n)(16 - 8l)}_{\cancel{8}} = 8n - 8l - 16n + 8nl$$

$$= 8(\underbrace{n - l - 2n + nl}_{\in \mathbb{Z}}) \in C$$

PORTANTO, $(C, *, \odot)$ É UM SUBANEL DE $\mathbb{Q}$. #

Exemplos

2) No anel $(\mathbb{Q}, \star, \odot)$ *onde as operações* $\star$ *e* $\odot$ *em* $\mathbb{Q}$ *definidas por*

$$x \star y = x + y - 8$$
$$x \odot y = x + y - \frac{xy}{8}.$$

Quais dos seguintes subconjuntos são subanéis?

(a) $B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $C = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$