

**OSCILACIONES MAGNÉTICAS EN ESTRUCTURAS  
BASADAS EN GRAFENO**

**JOSÉ FERNANDO TOBÍAS BUELVAS**

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
PUERTO COLOMBIA  
2021**

**OSCILACIONES MAGNÉTICAS EN ESTRUCTURAS  
BASADAS EN GRAFENO**

**JOSÉ FERNANDO TOBÍAS BUELVAS**

**Trabajo de grado**

**RICARDO VEGA MONROY**

**Doctor en Ciencias Físicas**

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
PUERTO COLOMBIA**

**2021**

## **Nota de aprobación.**

El presente trabajo de grado, titulado “*OSCILACIONES MAGNÉTICAS EN ESTRUCTURAS BASADAS EN GRAFENO*”, es presentado por el estudiante JOSÉ FERNANDO TOBÍAS BUELVAS, identificado con C.C. 1.152.686.854 expedida en la ciudad de Medellín, Antioquia, como requisito parcial para optar al título de Físico, fue evaluado y calificado por los evaluadores como:

---

---

Jurado

---

Jurado

---

Director

---

Secretario

# CONTENIDO

	<b>pág.</b>
Tabla de contenido	II
Lista de Figuras	III
 <b>RESUMEN</b>	 <b>IV</b>
 <b>1. INTRODUCCIÓN</b>	 <b>1</b>
 <b>2. ESPECTRO DE ENERGÍA</b>	 <b>5</b>
2.1. Niveles de Landau en el grafeno.	5
2.2. Estados de Bloch en grafeno en un campo magnético	11
 <b>3. OSCILACIONES MAGNÉTICAS DE LA CONDUCTIVIDAD</b>	 <b>14</b>
3.1. Conductividad eléctrica longitudinal en una capa de grafeno	14
3.2. Oscilaciones magnéticas a altas temperaturas	18
3.3. Tiempo de relajación del electrón	25
 <b>4. CONCLUSIONES</b>	 <b>32</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>37</b>

# LISTA DE FIGURAS

	pág.
1. Alótropos del carbono	2
2. Niveles de Landau.	11
3. Patrón de Moiré en una capa de grafeno sobre hBN.	12
4. Imágenes ópticas de barra de Hall multiterminal usadas por Kumar et Al. [5]	15
5. Conductividad longitudinal vs. Intensidad del campo magnético para temperaturas $T = 150$ K (línea negra), $T = 200$ K (línea roja) y $T = 250$ K (línea azul).	23
6. Conductividad longitudinal vs. Intensidad del campo magnético a temperatura $T = 300$ K.	24
7. Conductividad longitudinal (línea negra) y contribuciones de Boltzmann (línea roja) y cuántica (línea azul) como función de la intensidad del campo magnético a temperatura $T = 300$ K.	25
8. Contribución de Boltzmann como función de la intensidad del campo magnético para temperaturas $T = 150$ K (línea negra), $T = 200$ K (línea roja) y $T = 250$ K (línea azul).	26
9. Contribución cuántica como función de la intensidad del campo magnético para temperaturas $T = 150$ K (línea negra), $T = 200$ K (línea roja) y $T = 250$ K (línea azul).	27

# RESUMEN

El grafeno, catalogado como “el material del futuro”, durante la última década se ha convertido en un objeto de estudio muy interesante para la comunidad científica alrededor del mundo debido a sus propiedades opto-electrónicas, entre muchas otras. El grafeno es un alótropo del Carbono (formas del carbono entre los que se encuentra el diamante, grafito, etcétera). Se han realizado muchas investigaciones sobre este material con el fin de tener un mayor entendimiento de sus características y propiedades. El grafeno es un compuesto bidimensional de átomos de carbono organizado en una red hexagonal de apenas un átomo de espesor, es un semiconductor de gap nulo y los electrones en él se comportan como fermiones de Dirac. La alta movilidad de los portadores de carga conduce a un comportamiento magneto-oscilatorio de las propiedades físicas del grafeno. A partir de esto, el presente trabajo describe el comportamiento oscilatorio de la conductividad eléctrica longitudinal de estructuras basadas en grafeno como función de un campo magnético aplicado para el caso de altas temperaturas.

**Palabras clave:** Grafeno, conductividad eléctrica longitudinal, oscilaciones magnéticas.

# ABSTRACT

Graphene, denoted as "the future's material", at last decade it have been an interesting subject of study for de science community because of its optic-electronics properties, among others. Graphene is an allotropic form of Carbon (such as graphite, diamond, fullerenes, etc.). It has been the focus of a large number of researchings for a better understanding of its properties and characteristics. A Graphene layer is a bi-dimensional arrangement of Carbon atoms latticed in a honeycomb structure, just one atom thick, it is a zero-gap semiconductor and its electrons behave like a massless Dirac fermions. The high mobilities of the charge carriers leads to magnetic-oscillatory behavior of de graphene's physics properties. In this context, the current work describes de oscillatory behavior of the longitudinal electric conductivity as a function of an applied magnetic field in the high-temperature range.

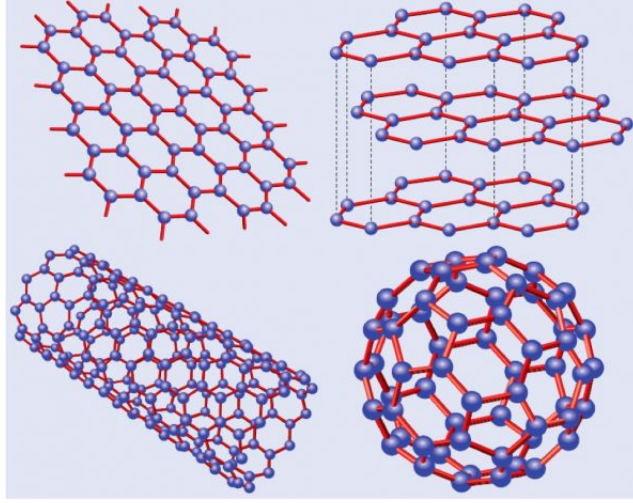
**Keywords:** Graphene, longitudinal electric conductivity, magnetic oscillations.

# 1. INTRODUCCIÓN

El grafeno es una de las formas alotrópicas del carbono, entre las que se encuentran el grafito, diamante, fullereno, entre otras. A diferencia del diamante o el grafito, en el grafeno los átomos están organizados en un arreglo bidimensional, con solo un átomo de espesor y con un patrón hexagonal en forma de panel de abeja. Puede ser envuelto en fullerenos, enrollado en nanotubos de carbono o apilado en multicapas de grafeno o formando grafito[1], en la Figura 1 se muestran algunos de estos ejemplos. Este material es conocido desde mediados del siglo pasado, sin embargo, fue en el año 2004 cuando se logró sintetizar monocapas de grafeno a partir de exfoliación mecánica de un trozo de grafito por parte de dos científicos rusos, Andre Geim y Konstantin Novoselov, en la Universidad de Manchester, en Reino Unido [2]. El grafeno posee propiedades eléctricas, térmicas, mecánicas y ópticas que no habían sido observadas antes en un sólo material, es por esto que ofrece y promete una gran cantidad de aplicaciones tecnológicas, así como mucha investigación en ciencias básicas [3].

Lo que hace único al grafeno es que los electrones se mueven a través de él como si no tuvieran masa [1], lo que se refiere a que las partículas son de carácter ultrarelativistas, es decir, la energía tiene dependencia lineal con el momento, con una movilidad electrónica mucho más alta que en otros materiales utilizados en dispositivos tecnológicos, tales como el silicio (Si). A temperatura ambiente, los electrones pueden viajar varias micras en el grafeno sin presentar dispersión, lo que es mucho mayor que en cualquier otro material. A pesar de ser delgado, de tan solo un átomo de espesor, el grafeno es el material más fuerte conocido, incluso mucho más que el acero. Además,





**Figura 1.** Alótropos del carbono. a) Grafeno(2-D). b) Multicapas de grafeno(3-D). c) Nanotubo de carbono(1-D). d) Fulleren(0-D). *Tomadas de la referencia [4]*

también presenta alta conductividad térmica y posee una baja absorción de luz, por lo que es transparente a la vista.

El movimiento ciclotrónico de los portadores de carga en metales y semiconductores conducen a la cuantización de Landau y al comportamiento magneto-oscilatorio de sus propiedades. Para poder observar estas oscilaciones, se requieren temperaturas muy bajas debido a que en metales este comportamiento desaparece a temperaturas altas. En el caso del grafeno, las oscilaciones persisten incluso a temperatura ambiente en presencia de un campo magnético de algunos teslas. Este fenómeno se atribuye a los cambios repetitivos en la estructura electrónica de las súperredes, de tal forma que las cargas no experimentan ningún campo magnético en fracciones simples del cuanto magnético por celda unitaria en la súper red [5].

Las oscilaciones magnéticas son un fenómeno bien conocido e importante en la físi-

ca de la materia condensada. A pesar de tener una variedad de manifestaciones, solo hay algunos tipos de oscilaciones, sean de origen cuántico o semiclásico. Los efectos semiclásicos aparecen debido a la conmensurabilidad entre la órbita ciclotrónica y una cierta longitud en un sistema experimental. Las oscilaciones magnéticas son diferentes en el sentido que provienen de cambios periódicos en la interferencia a lo largo de la trayectoria ciclotrónica. Generalmente, las oscilaciones cuánticas involucran trayectorias ciclotrónicas. Esto conlleva a la cuantización de Landau y a las oscilaciones de Shubnikov-de Hass (SdH) [6] en la magnetoresistencia y al comportamiento oscilatorio asociado en muchas de las otras propiedades. Además, estas oscilaciones pueden originarse en la interferencia de las trayectorias debidas a la geometría de la muestra [7].

La observación de estos efectos oscilatorios normalmente requiere temperaturas muy bajas, y este requerimiento es bastante estricto en el caso de las oscilaciones cuánticas que se basan en la monocromaticidad de las ondas electrónicas interferentes. Incluso en el grafeno, las oscilaciones de SdH raramente persisten a temperatura por encima de los 100K [8]. A temperatura ambiente, se necesitan campos magnéticos grandes para observar las últimas dos oscilaciones de SdH provenientes de la máxima banda entre el nivel cero y el primer nivel de Landau (LL, por sus siglas en inglés) del grafeno [9]. En otros materiales las oscilaciones cuánticas desaparecen a temperaturas mucho más bajas.

Los sistemas electrónicos también pueden exhibir oscilaciones magnéticas. En este caso, la interferencia de electrones que se difractan en el potencial de la superred en un campo magnético resulta siendo fractal, los espectros autosimilares son a menudo

referidos a las mariposas de Hofstadter (HB) [10]- [11]. Se han reportado estudios de transporte eléctrico en superredes de grafeno colocado sobre una base de nitruro de boro hexagonal (h-BN) [12], donde la movilidad de los portadores de carga es de alta calidad, lo que permite que se observe las características de las HB originadas en la superred en un campo magnético de algunos Teslas (T) [13]. El estudio de estas oscilaciones magnéticas ha sido uno de los campos de mayor interés en la física del estado sólido por décadas pero ha adquirido un gran impulso debido a las recientes observaciones experimentales de las oscilaciones magnéticas a altas temperaturas en sistemas basados en grafeno debido a la emergente periodicidad de estados de Bloch delocalizados en campos magnéticos altos, llamadas oscilaciones de Brown-Zak (BZ).

En este contexto, el presente trabajo pretende ahondar en el estudio de las propiedades magneto-oscilatorias de las estructuras basadas en grafeno en presencia de un campo magnético a altas temperaturas.

## 2. ESPECTRO DE ENERGÍA

### 2.1. Niveles de Landau en el grafeno.

El movimiento de un electrón en un campo magnético aplicado conlleva a que los estados de energía del electrón tomen valores discretos. Esta discretización del espectro de energía del electrón recibe el nombre de cuantización de Landau. De forma clásica se puede decir que la cuantización de Landau es la cuantización de las órbitas del ciclotrón del electrón en un campo magnético. En este sentido, los electrones solo pueden ocupar órbitas con estados discretos de energía, llamados niveles de Landau (L.L, por sus siglas en inglés). El espectro de Landau para materiales convencionales tiene la forma [14]

$$E = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1)$$

donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  es el índice de Landau y  $\omega_c$  es la frecuencia ciclotrónica, dada por la siguiente expresión

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}. \quad (2.2)$$

$\hbar$  es la constante de Planck normalizada,  $B$  es la magnitud del campo magnético,  $m$  es la masa del electrón y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

Estos niveles de Landau presentan degenererancias como se muestra a continuación.

Considerando el movimiento de un electrón libre en un campo magnético externo cons-

tante, tomando  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ , el hamiltoniano no relativista obtiene la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \quad (2.3)$$

donde  $\vec{A}$  es el potencial vector. Tomando el gauge de Landau  $\vec{B} = B\hat{z}$ , se tiene que  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ , con lo que la ecuación de Schrödinger,  $\hat{H}\psi = \varepsilon\psi$ , queda de la siguiente manera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varepsilon \psi \quad (2.4)$$

como la ecuación solo incluye la coordenada x, se propone una solución

$$\psi(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)} \psi(x),$$

sustituyendo en la ecuación (2.4), se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{e}{c} Bx \right)^2 \psi(x) + \frac{p_z^2}{2m} \psi(x) = \varepsilon \psi \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} \left( x - \frac{p_y c}{eB} \right)^2 \psi(x) = \left( \varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} \right) \psi \quad (2.7)$$

la ecuación (2.6) es muy similar a la conocida ecuación del oscilador cuántico unidimen-

sional, cuyos autovalores están dados por

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

que al compararlas, se hacen idénticas cuando se corre el punto de equilibrio una distancia  $\frac{p_y c}{eB}$  del origen. El papel  $\omega$  lo juega la cantidad  $\frac{eB}{mc}$  y  $\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m}$  es la energía del oscilador. Luego, se tiene

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{e\hbar B}{mc} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

De esta manera, los niveles de Landau muestran que en lugar de una dependencia continua de  $\varepsilon$  con  $p_x$  y  $p_y$ , se tienen valores discretos, como se mencionó anteriormente. Debido a que la separación entre los niveles de Landau es proporcional al campo magnético aplicado, cada uno de éstos contiene un intervalo de un espectro continuo proporcional a  $B$ . Por lo tanto, los niveles de Landau tienen una degenerancia proporcional a  $B$ . Para tener una expresión más exacta del grado de degenerancia de cada nivel, consideremos una caja rectangular de lados  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ . La posición del centro depende de  $p_y$ , por lo que el centro debe estar en el intervalo de  $(0, L_x)$ , o sea

$$0 < \frac{p_y c}{eB} < L_x \quad \text{o} \quad 0 < p_y < \frac{eBL_x}{c} \quad (2.10)$$

de manera que  $p_y$  puede tomar varios valores. Lo anterior implica que un mismo nivel de energía puede ser ocupado por varios electrones y el número de electrones ocupantes del nivel de Landau dependerá del campo magnético aplicado.

En el grafeno, la naturaleza ultrarelativista del electrón de Dirac, y la interacción con el campo magnético, determina la siguiente forma para el Hamiltoniano[1]:

$$\hat{H} = v_f \hat{\pi} \cdot \hat{\sigma}, \quad (2.11)$$

donde  $\hat{\sigma}$  son las matrices de Pauli y el operador  $\hat{\pi}$  está definido através del momento efectivo del electrón de Dirac en un campo magnético aplicado, el cual tiene la forma:

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\pi}_- \\ \hat{\pi}_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Los operadores  $\hat{\pi}_{\pm}$  se definen a través de las proyecciones del momento efectivo en el plano complejo:

$$\hat{\pi}_{\pm} = \hat{\pi}_x \pm i\hat{\pi}_y, \quad (2.13)$$

donde  $\hat{\pi}_x$  y  $\hat{\pi}_y$  están dados por las ecuaciones:

$$\hat{\pi}_x = \hat{p}_x - \frac{e}{c} \hat{A}_x, \quad \hat{\pi}_y = \hat{p}_y - \frac{e}{c} \hat{A}_y, \quad (2.14)$$

siendo  $A_x$  y  $A_y$  las componentes del vector potencial magnético  $\vec{A}$ . Los operadores  $\hat{\pi}_x$  y  $\hat{\pi}_y$  satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] &= \left[ \hat{p}_x - \frac{e}{c} A_x, \hat{p}_y - \frac{e}{c} A_y \right] \\ &= i\hbar \frac{e}{c} \left[ \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{ie\hbar}{c} B. \end{aligned}$$

Finalmente se obtienen las siguientes relaciones:

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = -[\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x] = \frac{ie\hbar B}{c}. \quad (2.15)$$

Si se introducen los operadores de segunda cuantización,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ , de la siguiente forma:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} (\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y) \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} (\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y), \quad (2.16)$$

los cuales satisfacen la relación de conmutación  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , de forma final los operadores escalera se expresan a través de los operadores de creación y aniquilación como sigue:

$$\hat{\pi}_+ = \sqrt{\frac{2e\hbar B}{c}} \hat{a}^\dagger \quad \hat{\pi}_- = \sqrt{\frac{2e\hbar B}{c}} \hat{a}. \quad (2.17)$$

De esta manera, el Hamiltoniano puede escribirse en términos de estos operadores

$$\hat{H} = \nu_f \begin{pmatrix} 0 & \hat{\pi}_- \\ \hat{\pi}_+ & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2e\hbar B \nu_f^2}{c}} \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Para obtener el espectro de Landau de manera sencilla, se diagonaliza el Hamiltoniano tomando su cuadrado, teniendo en cuenta que por la relación de conmutación entre los vectores de aniquilación y creación,  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ , entonces se tiene la siguiente expresión:



$$\hat{H}^2 = \frac{2e\hbar B\nu_f^2}{c} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 & 0 \\ 0 & \hat{a}^\dagger \hat{a} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

de manera que los autovalores de la ecuación (2.17) se obtienen inmediatamente a partir de (2.18), luego se tiene la siguiente ley de dispersión de los electrones de Dirac en presencia de un campo magnético aplicado:

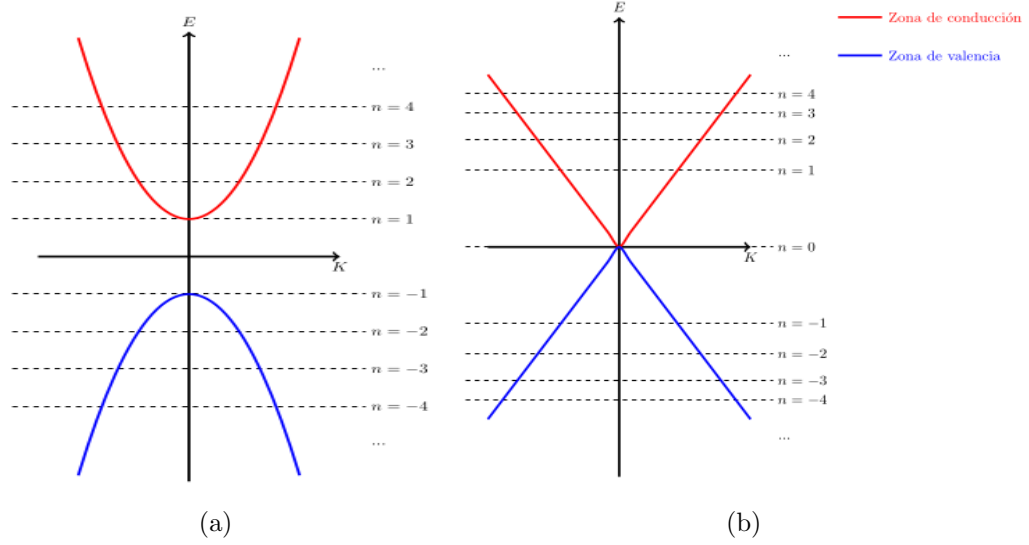
$$\epsilon_n = \pm \frac{\sqrt{2}\hbar\nu_f}{l_B} \sqrt{n} = \pm \hbar\omega_c \sqrt{n}, \quad (2.20)$$

donde

$$\hbar\omega_c = \frac{\sqrt{2}\hbar\nu_f}{l_B}, \quad (2.21)$$

siendo  $l_B = \sqrt{\hbar c/eB}$  la longitud magnética. El signo  $+$ ( $-$ ) corresponde a la banda de conducción (valencia). En el contexto de materia condensada, este espectro fue obtenido por primera vez por McClure [15] al desarrollar su teoría sobre el diamagnetismo del grafito.

En la Figura 2 se muestra la energía en función de  $k$  y además la cuantización de Landau para un material convencional y para el grafeno respectivamente. En el grafeno, se tiene una dispersión aproximadamente lineal en las cercanías a los puntos de Dirac [16]. Por otro lado, es notoria la existencia de un nivel de Landau cero, el cual tiene implicaciones importantes en las propiedades de transporte; adicionalmente, estos niveles no son equidistantes, a diferencia de un metal o semiconductor convencional.



**Figura 2.** Niveles de Landau (líneas punteadas) en: a) Material convencional. b) Grafeno

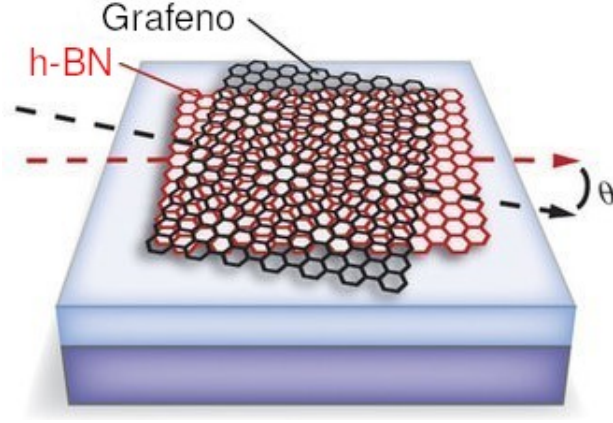
## 2.2. Estados de Bloch en grafeno en un campo magnético

Al colocarse una capa de grafeno sobre un cristal de Nitruro de Boro hexagonal (hBN, por sus siglas en inglés) se induce un patrón de Moiré (ver figura 3) el cual introduce en la hoja de grafeno un potencial periódico hexagonal. El Hamiltoniano para este sistema se puede escribir de la forma:

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + \frac{e}{c} \hat{A} + \hat{U}, \quad (2.22)$$

donde  $\hat{U}(x, y)$  es el potencial modulado hexagonal, el cual se considera débil y puede ser aproximado por la expresión [17]:

$$\hat{U}(x, y) = U_x \cos(K_x x) \cos(K_y y) + \frac{U_y}{2} [1 + \cos(2K_y y)], \quad (2.23)$$



**Figura 3.** Patrón de Moiré en una capa de grafeno sobre hBN.

siendo

$$K_x = \frac{2\pi}{a_x}, \quad K_y = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a_y}, \quad (2.24)$$

donde  $a_x$  y  $a_y$  son los periodos de la celda elemental a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente.

El espectro de energía relacionado a los electrones de Dirac en un campo magnético perpendicular  $\vec{B} = B\hat{z}$  y un potencial de Moiré inducido por el sustrato de hBN está dado por la expresión [17]:

$$\epsilon = \pm\epsilon_n + \zeta(k_x, k_y), \quad (2.25)$$

donde  $\epsilon_n$  está definida por la cuantización de Landau,  $\epsilon_n = \hbar\omega_f\sqrt{n}$ , determinada en la sección anterior y  $\zeta(k_x, k_y)$  es la enenergía asociada a la estructura de estados de Bloch, los cuales son inducidos por el potencial modulado débil  $U(x, y)$ . Por lo tanto, las bandas de Landau se dividen en subbandas, lo que lleva a una ampliación del espectro magnético. La energía relacionada a la dispersión del electrón en las minibandas de Bloch puede obtenerse mediante la teoría de perturbación de primer orden, dando como resultado

la siguiente expresión [17]:

$$\zeta(k_y, \beta) = \frac{U_y}{2} [1 + F_n(4u_y) \cos 2\beta] + U_x F_n(4u_y) \cos \gamma \cos \beta, \quad (2.26)$$

donde la función  $F_n(4u_y)$  tiene la forma:

$$F_n(4u_y) = e^{-u_y/2} [L_n(4u_y) + L_{n-1}(4u_y)], \quad (2.27)$$

En esta función el parámetro  $L_n$  es el polinomio de Laguerre y  $u_y = l^2 K_y^2 / 2$ . Además los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  se definen así:

$$\gamma = K_x l^2 (k_y + K_y) 2, \quad \beta = l^2 K_y k_x \quad (2.28)$$

Las componentes  $k_y$  y  $\beta$  se definen dentro de los intervalos

$$-a_x/2l^2 \leq k_y \leq a_x/2l^2, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (2.29)$$

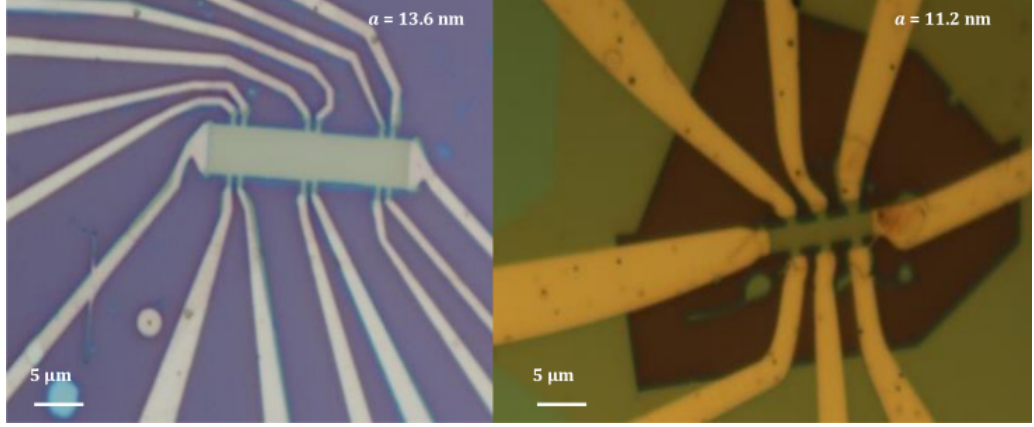
Como se observa, los niveles de Landau son afectados debido al potencial periódico y estos se abren en minibandas que oscilan, como se verá mas adelante, con el campo magnético. El ancho de las bandas de Landau está modulado por los polinomios de Laguerre  $L_n$ , los cuales son funciones oscilantes de la razón  $\Phi_o/\Phi$ .

### 3. OSCILACIONES MAGNÉTICAS DE LA CONDUCTIVIDAD

#### 3.1. Conductividad eléctrica longitudinal en una capa de grafeno

La geometría experimental típica para estudiar la conductividad consiste en una barra de Hall formada por una hoja de grafeno depositada sobre un sustrato de hBN de espesor finito, la Figura 4 muestra imágenes ópticas de algunos de estos dispositivos. A la estructura se le aplica un potencial de compuerta debil  $U_g$ , de modo que se pueda tratar de manera perturbativa. Con el fin de obtener una expresión aproximada de la conductividad longitudinal, se usará el enfoque del hamiltoniano de transferencia. Esta teoría trata los eventos como una perturbación, en la cual una partícula es transferida de un estado del contacto de la izquierda a uno de la derecha a través del potencial de compuerta  $U_g$ .

La tasa de transición es determinada usando teoría de perturbación dependiente del tiempo considerando el electrón de un terminal como un estado inicial y el del otro terminal como un estado final. De esta manera, la tasa de transición de estados de la izquierda a la derecha (ambos considerados como parte de un continuo) puede calcularse usando la regla de oro de Fermi [18]-[19]:



**Figura 4.** Imágenes ópticas de barra de Hall multiterminal usadas por Kumar et Al. [5]

$$d^2W_{l \rightarrow r \in D} = \sum_{\eta'} d^2W_{\eta, \eta'} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\eta'} |t_{\eta, \eta'}|^2 \rho_r(\epsilon') \delta(\epsilon' - \epsilon) d\epsilon', \quad (3.1)$$

donde  $t_{\eta, \eta'}$  son los elementos matriciales relacionados a la transición del electrón entre los estados  $\eta$  y  $\eta'$ , los cuales cuantifican la probabilidad de salto de un electrón entre los estados  $\eta = k, n$  y  $\eta' = k', n'$ . En la ecuación anterior  $\rho(\epsilon')$  es la densidad local de estados electrónicos a la derecha.

Al introducir la función de distribución de energía en cada contacto, se puede evaluar la tasa de transición total de todos los estados ocupados de la izquierda a todos los estados no ocupados de la derecha en el camino entre los dos contactos de la siguiente forma:

$$\Gamma_{l \rightarrow r} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\eta} \int \rho_l(\epsilon) f_l(\epsilon) \left\{ \int \sum_{\eta''} |t_{\eta', \eta''}|^2 \rho_r(\epsilon'') [1 - f_r(\epsilon'')] \delta(\epsilon'' - \epsilon') d\epsilon'' \right\} d\epsilon. \quad (3.2)$$

La transición opuesta se puede calcular de manera similar; así, la corriente de salto neto entre las terminales de la barra de Hall bajo el voltaje de compuerta es:

$$I = e(\Gamma_{l \rightarrow r} - \Gamma_{r \rightarrow l}). \quad (3.3)$$

Asumiendo simetría en la matriz de salto,  $t_{\eta,\eta'} = t_{\eta',\eta}$ , la corriente neta toma la siguiente forma:

$$I = -g \frac{2\pi e}{\hbar} \sum_{\eta'} \int |t_{\eta,\eta'}|^2 [f(\epsilon) - f(\epsilon - eU_g)] \text{Im} G_l^R(\epsilon) \text{Im} G_r^R(\epsilon - eU_g) d\epsilon, \quad (3.4)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $G_R$  son la función estadística de Fermi, la degeneración por valle y espín y la función de Green retardada respectivamente.  $t_{\eta,\eta'}$  son los elementos de la matriz, que cuantifican la probabilidad de salto de electrones entre estados y están relacionados con la velocidad del electrón

$$v_\eta = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \zeta}{\partial k_\eta}, \quad (3.5)$$

a través de la relación

$$|t_{\eta,\eta'}|^2 = \frac{2\pi \hbar^2}{L_\eta L_{\eta'}} v_\eta v_{\eta'}. \quad (3.6)$$

Se utiliza el formalismo de la función de Green debido a su relación con la densidad local de estados del sistema, lo que la convierte en una herramienta muy poderosa en el estudio de la física de materia condensada [20].

La conductividad longitudinal se obtiene derivando la corriente con respecto al potencial  $U_g$

$$\sigma_{xx} = \frac{L_x}{L_y} \left( \frac{dI}{dU_g} \right)_{U_g=0}, \quad (3.7)$$

quedando de la siguiente forma:

$$\sigma_{xx} = \sigma_o \sum_{n,k_y,\beta} \int |t_{x,x}|^2 \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon'} \right) [2\text{Im}G_{n,k}^R(\epsilon')]^2 d\epsilon, \quad (3.8)$$

donde se ha utilizado la relación entre la densidad local de estados y la parte imaginaria de la función de Green retardada

$$\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}G_R(\epsilon). \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.8)

$$\sigma_o = \frac{2e^2 n_L L_x}{\pi \hbar L_y}, \quad (3.10)$$

donde  $L_{x(y)}$  son las dimensiones de la muestra y  $n_L = \Phi/\Phi_o$  es la degeneración de los niveles de Landau, siendo  $\Phi$  el flujo magnético a través de la muestra y  $\Phi_o = 2\pi\hbar/e$  el cuanto de flujo.



### 3.2. Oscilaciones magnéticas a altas temperaturas

La función  $[2\mathbf{Im}G^R(\epsilon)]^2$  se puede escribir de la forma:

$$[2\mathbf{Im}G^R(\epsilon)]^2 = G_R^2 + G_A^2 - 2G_R G_A, \quad (3.11)$$

la cual tiene un polo de primier orden  $-2G_R G_A$  y uno de segundo orden  $G_R^2 + G_A^2$  en cada semiplano complejo. El parámetro  $G_A$  es la función avanzada de Green, la cual para el grafeno toma la forma [21]-[22]:

$$G_A(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon' - \epsilon_n - \Sigma^A(\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon' + \epsilon_n - \Sigma^A(\epsilon)}, \quad (3.12)$$

donde los términos primero y segundo están relacionados con la función de Green avanzada para las bandas de conducción y valencia, respectivamente. La función

$$\Sigma^R(\epsilon) = Re\Sigma(\epsilon) + iIm\Sigma(\epsilon) \quad (3.13)$$

es la auto energía retardada compleja. En una forma compacta  $G_R$  y  $G_A$  pueden escribirse:

$$G_R(\epsilon) = \frac{2(\epsilon' - i|\mathbf{Im}\Sigma|)}{(\epsilon' - i|\mathbf{Im}\Sigma|)^2 - \epsilon_n^2} \quad G_A(\epsilon) = \frac{2(\epsilon' + i|\mathbf{Im}\Sigma|)}{(\epsilon' + i|\mathbf{Im}\Sigma|)^2 - \epsilon_n^2}. \quad (3.14)$$

Por simplicidad, se puede despreciar la cantidad  $Re\Sigma$  dado que esto sólo conduce a pequeñas correcciones para el potencial químico y de esta forma no afecta en esencia el efecto oscilatorio.

Usando la fórmula de sumatoria de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \mathbf{Re} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(y) e^{2\pi i r y} dy, \quad (3.15)$$

donde  $r$  es un número entero; fácilmente, después de algunos cálculos integrales, y aplicando el teorema del residuo, donde los polos están dados por  $\pm 2i\epsilon |\mathbf{Im}\Sigma|/\epsilon_a^2$ , se obtiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_R G_A = \mathbf{Re} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{\epsilon_f^2} \frac{\epsilon'}{|\mathbf{Im}\Sigma|} e^{-4\pi r \frac{\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2}} e^{2\pi i r \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2}}. \quad (3.16)$$

Ahora, para determinar el residuo del polo de segundo orden se tiene en cuenta que éste se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Res}(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - z_0)^n h(z)\}. \quad (3.17)$$

En este sentido,  $G_R^2$  se puede escribir así

$$G_R^2 = \frac{4(\epsilon'^2 - 2i\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|)}{\epsilon_f^4 \left( -\frac{2i\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2} - x^2 \right)^2}. \quad (3.18)$$

Aplicando la ecuación (3.15) se tiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_R^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4(\epsilon'^2 - 2i\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|)}{\epsilon_f^4} e^{2\pi i r \left( \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i r x}}{\left[ -\frac{2i\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2} - x \right]^2} dx. \quad (3.19)$$

Aplicando la expresión (3.17) en la ecuación (3.18) se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_R^2 = \mathbf{Re} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{\epsilon_f^2} \frac{\epsilon'}{|\mathbf{Im}\Sigma|} e^{2\pi i r \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2}} e^{-4\pi |r| \frac{\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2}} \left( \frac{4\pi |r| \epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2} \right). \quad (3.20)$$

De igual manera se tiene

$$\sum_N G_A^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\epsilon'}{\epsilon_f^2 |\text{Im}\Sigma|} e^{2\pi i |r| \left( \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2} \right)} e^{-\frac{4\pi |r| \epsilon' |\text{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2}} \left[ \frac{4\pi |r| \epsilon' |\text{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2} \right]. \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.16), (3.20) y (3.21) en la ecuación (3.11), finalmente se obtiene:

$$[2\text{Im}G_R(k)]^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\epsilon'}{\epsilon_f^2 |\text{Im}\Sigma|} R_D e^{2\pi i r \left( \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2} \right)} \left[ 1 + \frac{8\pi |r| |\text{Im}\Sigma| \epsilon'}{\epsilon_f^2} \right]. \quad (3.22)$$

Luego, la conductividad longitudinal toma la forma:

$$\sigma_{xx} = g \frac{2e^2 L_x}{\hbar L_y \epsilon_f^2} \text{Re} \sum_{k,r} \int |t_{k,k}|^2 G_{xx}(\epsilon, r) \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon, \quad (3.23)$$

donde el parámetro

$$G_{xx}(\epsilon, r) = \frac{\epsilon'}{|\mathbf{Im}\Sigma|} e^{2\pi i r \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2}} R_D(\epsilon, r) \left[ 1 + 8\pi |r| \frac{|\mathbf{Im}\Sigma| \epsilon'}{\epsilon_f^2} \right]. \quad (3.24)$$

El factor

$$R_D(\epsilon, r) = \exp \left( -4\pi |r| \frac{|\mathbf{Im}\Sigma| \epsilon'}{\epsilon_f^2} \right) \quad (3.25)$$

se conoce con el nombre de factor de Dingle generalizado. La ecuación (3.23) se puede compactar introduciendo el factor de forma

$$S(\lambda, \delta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-|r|\lambda} \cos \delta r = \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda - \cos \delta}, \quad (3.26)$$

donde se introdujeron los parámetros

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon'|\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_f^2} \quad (3.27)$$

y

$$\delta = 2\pi \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2}. \quad (3.28)$$

El parámetro  $\lambda$  recibe el nombre de parámetro de desorden y es proporcional a la temperatura de Dingle  $T_D$  que es la temperatura que tiene en cuenta que, en la dispersión de electrones, los niveles de Landau se amplían y esto conduce a una reducción de amplitud de oscilación muy cercana a la que causaría un aumento de temperatura desde la temperatura real  $T$  a una temperatura  $T + T_D$ .

De esta forma, la conductividad longitudinal puede escribirse como la suma de dos partes  $\sigma_{xx} = \sigma_B + \sigma_Q$ , donde la primera es la contribución de Boltzmann:

$$\sigma_B = \sigma_o \int d\epsilon N(\zeta) \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) S(\lambda, \delta). \quad (3.29)$$

Por otra parte, la segunda contribución  $\sigma_Q$ , que es un término asociado a las transiciones cuánticas entre los estados de Bloch correspondientes a las órbitas de Landau más cercanas, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\sigma_Q = -\sigma_o \int d\epsilon N(\zeta) \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \left( \lambda_o \frac{\partial S(\lambda, \delta)}{\partial \lambda} \right), \quad (3.30)$$

donde  $\lambda_o = 8\pi\epsilon'|\mathbf{Im}\Sigma|/\epsilon_f^2$ . El parámetro  $N(\zeta)$  está relacionado con los estados de Bloch

en la estructura de minibandas

$$N(\zeta) = \frac{L_x L_y}{a_x \pi^2 \varepsilon_f^2} \int_0^{a_x/2l^2} dk_y \int_0^{2\pi} d\beta |t_{x,x}|^2. \quad (3.31)$$

La expresión para la conductividad longitudinal se puede escribir de la siguiente forma compacta:

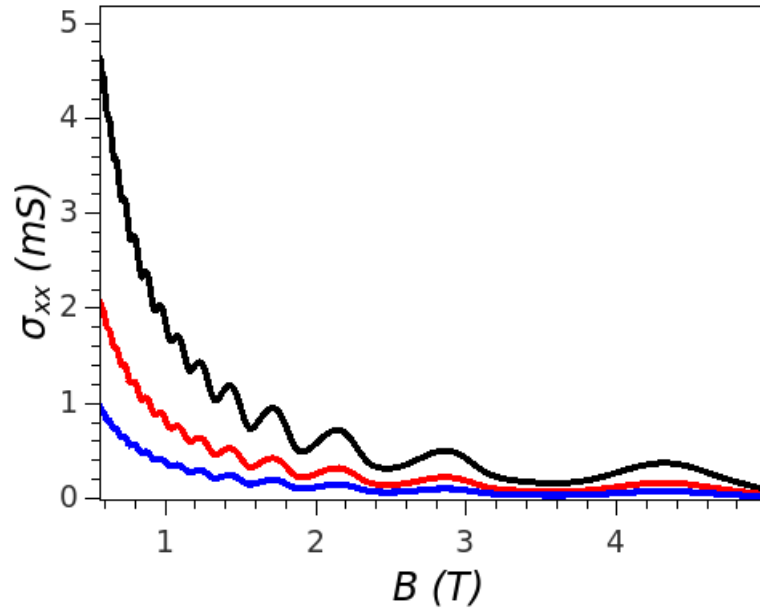
$$\sigma_{xx} = \sigma_o \int N(\zeta) \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} G_{xx}(\delta, \lambda) d\epsilon, \quad (3.32)$$

donde el parámetro  $G_{xx}(\delta, \lambda)$  se expresa a través del factor de forma  $S(\lambda, \delta)$  como sigue:

$$G_{xx}(\delta, \lambda) = \left[ 1 - \lambda_o \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] S(\delta, \lambda). \quad (3.33)$$

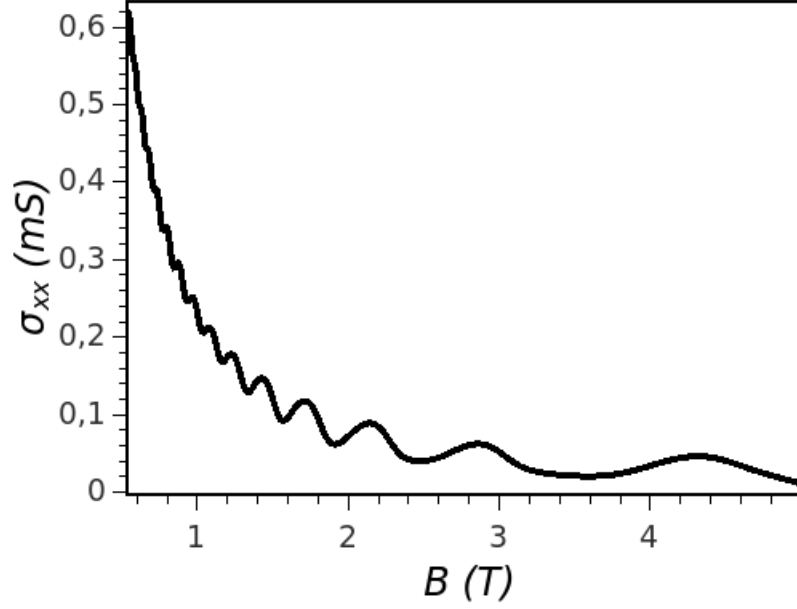
La Figura 5 muestra la conductividad longitudinal de la Ec. (3.32) en función del campo magnético a diferentes temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul). Se observa en estas curvas el comportamiento decreciente característico de la conductividad longitudinal como función del campo magnético, pero además, se conservan las oscilaciones magnéticas a estas altas temperaturas. En la Figura 6 se muestra en detalle la conductividad de la estructura como función del campo magnético a temperatura  $T = 300$  K, donde claramente se conserva el efecto oscilatorio a altas temperaturas. En la Figura 7 se muestra la conductividad longitudinal de la estructura basada en grafeno (línea negra) y las correspondientes contribuciones de Boltzmann  $\sigma_D$  (línea roja) y cuántica  $\sigma_Q$  (línea azul) a temperatura  $T = 300$  K. En la Figura 8 se muestra el comportamiento de la contribución de Boltzmann  $\sigma_D$  como función del campo magnético a temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul). La Figura 9 muestra el comportamiento de la

contribución cuántica  $\sigma_Q$  como función del campo magnético a temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul). Para todos los cálculos los parámetros utilizados son  $v_f = 1,15 \times 10^6$  m/s,  $a_x = a_y = a = 50$  nm,  $V_o = 1 \times 10^{-6}$  eV,  $U_x = U_y = U_o = 0,5 \times 10^{-3}$  eV,  $n_i = 3 \times 10^{15}$  m $^{-2}$  y la energía de Fermi  $\mu_o = 100$  meV.



**Figura 5.** Conductividad longitudinal vs. Intensidad del campo magnético para temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul).

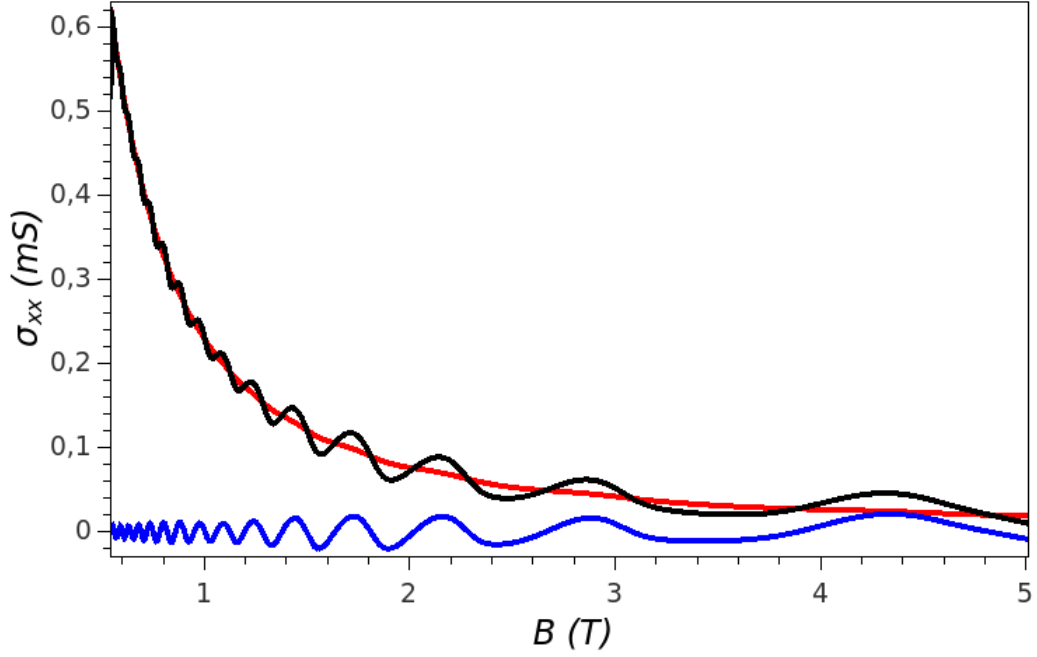
De estas gráficas se observa que el término de Boltzmann no responde al comportamiento oscilatorio de la conductividad a altas temperaturas, sino que determina el comportamiento decreciente monótono de la conductividad longitudinal. Por el contrario, la contribución  $\sigma_Q$  es la que determina el comportamiento oscilatorio a altas temperaturas de la conductividad longitudinal de la estructura basada en grafeno que se estudia en el presente trabajo. Si bien la amplitud de oscilación de  $\sigma_Q$  disminuye con



**Figura 6.** Conductividad longitudinal vs. Intensidad del campo magnético a temperatura  $T = 300$  K.

el aumento de la temperatura, el efecto oscilatorio se mantiene para un rango alto de temperaturas. Es importante resaltar que, como puede verse en la ecuación (3.30), las oscilaciones a altas temperaturas debidas a la contribución  $\sigma_Q$  responden a variaciones periódicas del parámetro de desorden, las cuales están determinadas por la variación del factor de forma  $S(\delta, \lambda)$ , o sea, por la variación del Factor de Dingle  $R_D$ .

En la siguiente sección se estudiará el fenómeno de dispersión electrónica sobre impurezas en el sistema basado en grafeno y se analizará el efecto de esta dispersión en el comportamiento oscilatorio de la conductividad longitudinal de la estructura.

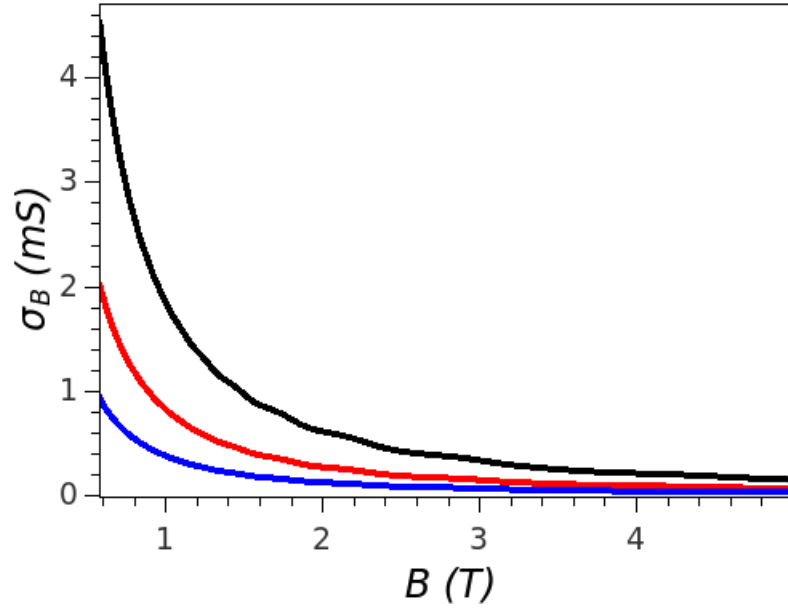


**Figura 7.** Conductividad longitudinal (línea negra) y contribuciones de Boltzmann (línea roja) y cuántica (línea azul) como función de la intensidad del campo magnético a temperatura  $T = 300$  K.

### 3.3. Tiempo de relajación del electrón

El conocimiento del espectro de energía del electrón no es suficiente para determinar la conductividad eléctrica longitudinal, la cual depende también de los mecanismos del transporte de los electrones. El efecto del desorden no sólo conduce al ensanchamiento de las minibandas de Bloch, sino que también propicia la localización electrónica. En este sentido, la localización es el punto clave, ya que solo los estados extendidos dentro de las minibandas contribuyen a la conductividad. Ando y Uemura [23] han estudiado la vida media de relajación del momento del electrón en sistemas bidimensionales debido





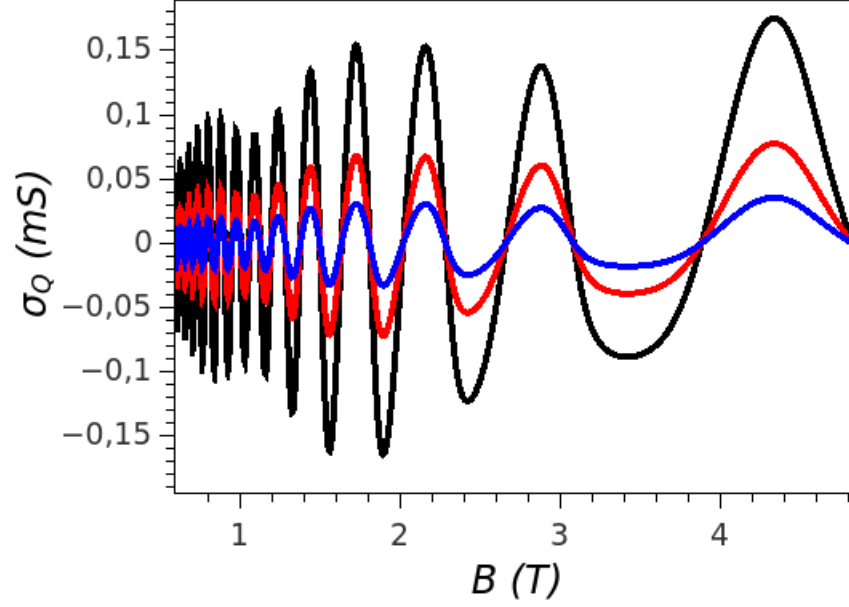
**Figura 8.** Contribución de Boltzmann como función de la intensidad del campo magnético para temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul).

a la dispersión de las impurezas en campos magnéticos externos. En este sentido, la parte imaginaria de la auto energía  $\Sigma(\epsilon)$  está relacionada con la dispersión del electrón por medio del tiempo de relajación electrónico

$$\frac{\hbar}{\tau} = |\text{Im}\Sigma|. \quad (3.34)$$

La contribución más importante a la resistencia eléctrica es debida a la dispersión de impurezas de corto alcance, lo que representa el mecanismo más fuerte de la relajación del momento de electrón.

En este contexto, en este trabajo se analiza un modelo de impurezas como poten-



**Figura 9.** Contribución cuántica como función de la intensidad del campo magnético para temperaturas  $T = 150$  K (línea negra),  $T = 200$  K (línea roja) y  $T = 250$  K (línea azul).

ciales puntuales

$$V(\vec{r} - \vec{R}) = V_0 \delta(\vec{r} - \vec{R}), \quad (3.35)$$

donde  $\vec{R}$  es el vector posición de las impurezas que están distribuidas al azar, siendo  $V_0$  la amplitud del potencial de la impureza. Es importante anotar que en la aproximación auto-consistente de Born (SCBA) también son validos los potenciales aleatorios suaves [16]. De esta manera, la expresión para  $\Sigma(\epsilon)$  puede reducirse en la ecuación de Dyson a la suma de los diagramas de Feynman subsecuentes sin auto intersecciones, cuyas contribuciones son despreciables cuando la concentración de impurezas es pequeña. Así que en esta aproximación no se tiene en cuenta la dispersión de múltiples electrones por

una impureza:

$$\Sigma_R(\epsilon) = n_i V_0 \left[ 1 + V_0 \sum_{n,k} G_R(n, k) \right], \quad (3.36)$$

donde  $n_i$  es la concentración de impurezas y  $V_0$  es la amplitud del potencial de impurezas.

La función de Green retardada está dada por:

$$G_R(n, k) = \frac{1}{\epsilon' - \epsilon_n - \Sigma^R(\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon' + \epsilon_n - \Sigma^R(\epsilon)}, \quad (3.37)$$

donde  $\pm\epsilon_n$  se determinó en la ecuación (2.19), y el parámetro  $\Sigma^R(\epsilon) = Re\Sigma(\epsilon) + iIm\Sigma(\epsilon)$  es la auto-energía compleja. El primer y segundo término de la parte derecha de la ecuación (3.37) están relacionadas con la función de Green retardada en las bandas de conducción y de valencia. Las expresiones en la ecuación (3.37), teniendo en cuenta los parámetros anteriores, se puede escribir en forma compacta:

$$G_R(n, k) = \frac{2(\epsilon' - i|Im\Sigma|)}{(\epsilon' - |Im\Sigma|)^2 - \epsilon_n^2}, \quad (3.38)$$

donde se despreció la parte real  $Re\Sigma$  ya que ésta conlleva unicamente a correcciones en el potencial químico y no afecta el efecto oscilatorio que se pretende estudiar.

Utilizando la fórmula de suma de Poisson como se realizó anteriormente, para la

función de Green retardada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_R = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2(\epsilon' - i|Im\Sigma|)}{\epsilon_f^2} e^{2\pi i r \left( \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i r x}}{\left[ \frac{2i\epsilon'|Im\Sigma|}{\epsilon_f^2} - x \right]} dx \quad (3.39)$$

y separando la parte imaginaria de  $\Sigma(\epsilon)$  finalmente se obtiene:

$$|Im\Sigma| = \frac{n_i L_x L_y V_o^2 \epsilon'}{a_x \pi^2 \epsilon_f^2} \sum_r \int_0^{a_x/2l^2} dk_y \int_0^{2\pi} d\beta e^{-\frac{4\pi\epsilon'|Im\Sigma|}{\epsilon_f^2}} e^{2\pi i r \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_f^2}}. \quad (3.40)$$

Llevando a cabo la integración sobre  $k_y$  y  $\beta$  en la anterior ecuación y luego separando la parte imaginaria de la auto energía se obtiene lo siguiente:

$$\frac{|\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon} = \frac{n_i L_x L_y V_o^2}{a_x \pi^2 \epsilon_f^2} \int_0^{a_x/2l^2} dk_y \int_0^{2\pi} d\beta S(\delta, \lambda). \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta que el parámetro  $S(\delta, \lambda)$  depende débilmente de  $\xi$ , ya que esta es una solución perturbativa, se puede entonces aproximar la expresión para la parte imaginaria de la auto-energía de la siguiente forma:

$$\tau(\epsilon) \frac{\epsilon}{\epsilon_f} S(\delta, \lambda) = \tau_o, \quad (3.42)$$

donde

$$\tau_o = \frac{\pi \hbar l^2 \epsilon_f}{N_i V_o^2}. \quad (3.43)$$

Con la ayuda de la expresión anterior se puede compactar aún más las expresiones para la conductividad longitudinal. Se tiene que la contribución de Boltzmann  $\sigma_B$  puede

escribirse así:

$$\sigma_B = \sigma_\tau \int d\epsilon N(\zeta) \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right), \quad (3.44)$$

donde  $\sigma_\tau = \sigma_o \tau_o$ . Esta expresión concuerda con la expresión de la conductividad longitudinal en investigaciones realizadas anteriormente para la conductividad longitudinal de estructuras de grafeno con patrones de Moiré [5] para explicar el fenómeno de oscilaciones magnéticas de altas temperaturas. Sin embargo, dicha expresión no es suficiente para explicar el fenómeno oscilatorio a altas temperaturas. En contraste, en el presente trabajo, la conductividad longitudinal es complementada por un término cuántico que puede explicar las oscilaciones magnéticas a altas temperaturas.

Con la ayuda de la expresión en la ecuación anterior, la conductividad longitudinal en la estructura basada en grafeno tiene la siguiente forma:

$$\sigma_{xx} = \sigma_\tau \int d\epsilon N(\zeta) \left( -\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \left[ 1 - \chi(\epsilon) \frac{\partial S(\delta, \lambda)}{\partial \lambda} \right], \quad (3.45)$$

donde

$$\chi(\epsilon) = \frac{8\pi}{\tau_o} \frac{\epsilon^2}{\epsilon_f^2} \quad (3.46)$$

La persistencia de las oscilaciones se atribuye a las trayectorias que involucran transiciones entre las diferentes minibandas. Con el aumento de la temperatura, aumenta la energía del sistema, lo que lleva al llenando de las minibandas de bloch, a su vez disminuye de esta manera el tiempo promedio de relajación electrónica en las impurezas, pero en promedio el producto  $\tau(\epsilon)\epsilon S(\lambda, \delta)/\epsilon_f$  se mantiene constante para un valor de campo dado. Este proceso de dispersión sobre las impurezas lleva a que el efecto oscilatorio en el término de Boltzmann no sea observable a altas temperaturas. Dicho fenómeno es

atenuado en la contribución  $\sigma_Q$ , ya que para valores enteros del parámetro de desorden, que corresponden a las variaciones enteras del parámetro de Dingle, el efecto oscilatorio se mantiene a altas temperaturas, lo cual se puede entender debido al desocupamiento de la minibanda de Bloch con el salto del electrón a la siguiente órbita de Landau. Este efecto es responsable de las oscilaciones magnéticas a altas temperaturas y es el principal resultado de este trabajo.

## 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió las oscilaciones magnéticas en una estructura basada en grafeno con un potencial periódico perturbativo. A partir del enfoque teórico planteado, basado en el formalismo del hamiltoniano de transferencia, se encontró una expresión de la conductividad eléctrica longitudinal de una estructura basada en grafeno como función de un campo magnético aplicado y de la temperatura. Se estudió el fenómeno de oscilaciones magnéticas de la conductividad longitudinal para el caso de altas temperaturas.

De manera general se encontraron los siguientes resultados:

1. La conductividad longitudinal tiene dos contribuciones: una de Boltzmann y otra de origen cuántico.
2. La contribución de Boltzmann determina el carácter monótono decreciente de la conductividad, en tanto la contribución cuántica determina el comportamiento oscilatorio de la conductividad longitudinal a altas temperaturas.
3. Con el aumento de la temperatura, en promedio el producto  $\tau(\epsilon)\epsilon S/\epsilon_f$  se mantiene constante para un valor de campo dado. Lo anterior conduce a que el efecto oscilatorio no se observe en la contribución de Boltzmann.
4. Valores enteros del parámetro de desorden, que corresponden a la variaciones enteras del parámetro de Dingle, dan como resultado que el efecto oscilatorio se mantiene a altas temperaturas en la contribución cuántica.

5. Los resultados obtenidos en el presente trabajo pueden explicar de manera cualitativa resultados experimentales de oscilaciones magnéticas a altas temperaturas en estructuras basadas en grafeno [5].



## Bibliografía

- [1] Mikhail I. Katsnelson. *Graphene: carbon in two dimensions*. 2007. DOI: 10.1016/S1369-7021(06)71788-6.
- [2] K. S. Novoselov y col. “Electric field in atomically thin carbon films”. En: *Science* 306.5696 (2004), págs. 666-669. ISSN: 00368075. DOI: 10.1126/science.1102896.
- [3] A. V. Kretinin y col. “Electronic properties of graphene encapsulated with different two-dimensional atomic crystals”. En: *Nano Letters* 14.6 (2014). ISSN: 15306992. DOI: 10.1021/nl5006542.
- [4] Antonio Castro Neto, Francisco Guinea y Nuno Miguel Peres. “Drawing conclusions from graphene”. En: *Physics World* 19.11 (2006). ISSN: 09538585. DOI: 10.1088/2058-7058/19/11/34.
- [5] R. Krishna Kumar y col. “High-temperature quantum oscillations caused by recurring Bloch states in graphene superlattices”. En: *Science* 357.6347 (2017), págs. 181-184. ISSN: 10959203. DOI: 10.1126/science.aal3357. arXiv: 1705.11170.
- [6] Shigeji Fujita y Akira Suzuki. “Theory of Shubnikov-De Haas and Quantum Hall Oscillations in Graphene under Bias and Gate Voltages”. En: *Global Journal of Science Frontier Research: A Physics and Space Science* 14.6 (2014).
- [7] Xi Chen y col. “Dirac edges of fractal magnetic minibands in graphene with hexagonal moiré superlattices”. En: *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 89.7 (2014). ISSN: 10980121. DOI: 10.1103/PhysRevB.89.075401.

- [8] Keita Kishigi y Yasumasa Hasegawa. “Quantum oscillations of magnetization in tight-binding electrons on a honeycomb lattice”. En: *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 90.8 (2014). ISSN: 1550235X. DOI: 10.1103/PhysRevB.90.085427.
- [9] K. S. Novoselov y col. “Room-temperature quantum hall effect in graphene”. En: *Science* 315.5817 (2007). ISSN: 00368075. DOI: 10.1126/science.1137201.
- [10] Wei Yang y col. “Hofstadter Butterfly and Many-Body Effects in Epitaxial Graphene Superlattice”. En: *Nano Letters* 16.4 (2016). ISSN: 15306992. DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b05161.
- [11] G. L. Yu y col. “Hierarchy of Hofstadter states and replica quantum Hall ferromagnetism in graphene superlattices”. En: *Nature Physics* 10.7 (2014). ISSN: 17452481. DOI: 10.1038/nphys2979.
- [12] Matthew Yankowitz y col. “Emergence of superlattice Dirac points in graphene on hexagonal boron nitride”. En: *Nature Physics* 8.5 (2012). ISSN: 17452473. DOI: 10.1038/nphys2272.
- [13] M. Ben Shalom y col. “Quantum oscillations of the critical current and high-field superconducting proximity in ballistic graphene”. En: *Nature Physics* 12.4 (2016). ISSN: 17452481. DOI: 10.1038/nphys3592.
- [14] A.A. Abrikosov. *Fundamentals of the theory of metals*. Elsevier science publishing company, inc, 1988.
- [15] J. W. McClure. “Diamagnetism of Graphite”. En: *Phys. Rev.* 104 (1956), pág. 666.
- [16] Aoki A. Hideo y Mildred S. Dresselhaus. *Physics of graphene*. 2014.

- [17] X. F. Wang, P. Vasilopoulos y F. M. Peeters. “Inverse flux quantum periodicity of magnetoresistance oscillations in two-dimensional short-period surface superlattices”. En: *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 69.3 (2004). ISSN: 1550235X. DOI: 10.1103/PhysRevB.69.035331.
- [18] S. Illera y col. “A transfer Hamiltonian model for devices based on quantum dot arrays”. En: *Scientific World Journal* 2015 (2015). ISSN: 1537744X. DOI: 10.1155/2015/426541.
- [19] J. J. Sakurai y Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2017. DOI: 10.1017/9781108499996.
- [20] Eleftherios N. Economou. *Green's Functions in Quantum Physics*. Vol. 7. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-28838-1. DOI: 10.1007/3-540-28841-4. URL: <http://link.springer.com/10.1007/3-540-28841-4>.
- [21] G. Salazar-Cohen y R. Vega-Monroy. “Propiedades ópticas en monocapas de grafeno mediados por la interacción electrón de Dirac-radiación electromagnética circularmente polarizada”. 2016.
- [22] R. Vega Monroy y G. Salazar Cohen. “Photon-Induced Quantum Oscillations of the Terahertz Conductivity in Graphene”. En: *Nano Letters* 16.11 (2016). PMID: 27779888, págs. 6797-6801. DOI: 10.1021/acs.nanolett.6b02488. eprint: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.6b02488>. URL: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.6b02488>.
- [23] Tsuneya Ando y Yasutada Uemura. “Theory of Quantum Transport in a Two-Dimensional Electron System Under Magnetic Fields. I. Characteristics of Level Broadening and Transport Under Strong Fields”. En: *Journal of the Physical*

*Society of Japan* 36.4 (1974), págs. 959-967. ISSN: 13474073. DOI: 10.1143/JPSJ.36.959. URL: <http://journals.jps.jp/doi/10.1143/JPSJ.36.959>.