Ecole Centrale de Nantes

Projet methodes bayésiennes et modèles hiérarchiques

Seeds: Random effect logistic regression

Auteurs:
Paul Trincklin
Jiacheng Fu
Enzo Mori
Grégory Perret

Encadrant:
Mathieu Ribatet

March 22, 2022

1 Problématique

2 Modélisation mathématique

$r_i \sim Bin(p_i, n_i)$

$logit(p_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \alpha_{12} x_{1i} x_{2i} + bi$

on pose $bi \sim N(0, \sigma^2)$.

Les lois a priori de nos différents paramètres sont données: $\alpha_0 \sim N(0, 10^6), \alpha_1 \sim N(0, 10^6), \alpha_2 \sim N(0, 10^6), \alpha_{12} \sim N(0, 10^6), \sigma^2 \sim InverseGamma(10^{-3}, 10^{-3})$

On calcule les lois conditionnelles pleines des différents paramètres pour notre algorithme MCMC,

$$\pi(b_i \mid ...) \propto \pi(b_i \mid \sigma^2) \times \pi(r_i \mid ...)$$
$$\propto e^{-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}} \times (p_i)^{r_i} \times (1 - p_i)^{n_i - r_i}$$

$$\pi(\alpha_0 \mid ...) \propto \pi(\alpha_0) \times \prod_{i=1}^{120} \pi(r_i \mid ...)$$
$$\propto e^{-\frac{\alpha_0^2}{2\times 10^6}} \times \prod_{i=1}^{120} [(p_i)^{r_i} \times (1 - p_i)^{n_i - r_i}]$$

$$\pi(\alpha_1 \mid ...) \propto \pi(\alpha_1) \times \prod_{i=1}^{120} \pi(r_i \mid ...)$$
$$\propto e^{-\frac{\alpha_1^2}{2\times 10^6}} \times \prod_{i=1}^{120} [(p_i)^{r_i} \times (1 - p_i)^{n_i - r_i}]$$

$$\pi(\alpha_2 \mid ...) \propto \pi(\alpha_2) \times \prod_{i=1}^{120} \pi(r_i \mid ...)$$
$$\propto e^{-\frac{\alpha_2^2}{2\times 10^6}} \times \prod_{i=1}^{120} [(p_i)^{r_i} \times (1 - p_i)^{n_i - r_i}]$$

$$\pi(\alpha_{12} \mid ...) \propto \pi(\alpha_{12}) \times \prod_{i=1}^{120} \pi(r_i \mid ...)$$
$$\propto e^{-\frac{\alpha_{12}^2}{2\times 10^6}} \times \prod_{i=1}^{120} [(p_i)^{r_i} \times (1 - p_i)^{n_i - r_i}]$$

$$\pi(\sigma^2 \mid ...) \propto \pi(\sigma^2) \times \prod_{i=1}^{120} \pi(b_i \mid \sigma^2)$$
$$\propto (\sigma^2)^{(-0.001-1)} e^{-\frac{0.001}{\sigma^2}} \times e^{-\frac{\sum_{i=1}^{120} b_i^2}{2\sigma^2}}$$
$$\propto InverseGamma(0.001, 0.001 + \frac{\sum_{i=1}^{120} b_i^2}{2})$$

où $p_i = sigmod(\alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \alpha_{12} x_{1i} x_{2i} + bi)$

3 Résultat obtenus et analyse

Le code qu'on a fait est dans