Manual de Ejercicios

con Respuestas

# 5.000 Ejercicios de Álgebra y Geometría

*Práctica intensiva para estudiantes de secundaria*

— Jorge Gid Hoffmann —

ISBN 978-980-12-2989-6

gidhoffmann@gmail.com

www.mathhoffmann.com

J&J Socrates LLC

# ÍNDICE

## Parte I — El universo de los números y sus propiedades

*Fundamentos del pensamiento algebraico*



## Parte II — Las ecuaciones y su lenguaje

*De lo lineal a lo cuadrático*

## Parte III — El plano y la forma

*Del álgebra a la geometría*

*“Demostrar que no puedes es muy fácil:*
*basta con que no hagas nada.”*

**¡Demuestra que sí puedes!**

# 1
# $\pi$ NÚMEROS IRRACIONALES

## Donde la razón termina… y los números siguen

### Reseña histórica

La tradición cuenta que el pitagórico Hipaso de Metaponto (s. V a.C.) fue castigado e incluso arrojado al mar por revelar la existencia de los números irracionales (la raíz de 2). Para los pitagóricos, que basaban su filosofía en la armonía de los números enteros y racionales, aceptar irracionales era casi una “herejía matemática”.

### Importancia actual

Los números irracionales amplían el universo numérico y permiten modelar fenómenos naturales, físicos y económicos con precisión. Sin ellos, no tendríamos conceptos tan vitales como el círculo perfecto, la probabilidad continua, ni ecuaciones diferenciales que describen la expansión del universo o el crecimiento de una inversión bancaria.

### ¿Qué vas a aprender?

- Cómo usamos las razones para comparar cantidades
- Distinguir entre números racionales e irracionales
- Conocer el número $\pi$
- Aprender a reconocer números irracionales y cómo interpretarlos.
- Descubrirás otros números irracionales famosos que han marcado la historia de las matemáticas.
- Veremos un esquema de tipos de números que te ayudará a ver cómo se conectan entre sí.

*“Los números irracionales son la prueba de que la naturaleza no siempre cabe en la medida humana.”*
— David Hilbert

*Los irracionales no tienen final… pero sí* ***mucha personalidad.***

## RAZÓN O RELACIÓN

Cuando tenemos dos cantidades del mismo tipo — por ejemplo, dos longitudes, dos áreas o dos volúmenes — podemos compararlas mediante un *cociente* (el resultado de una división). A este cociente lo llamamos **razón o relación**, y se puede escribir de distintas formas:

$$a : b \qquad \frac{a}{b} \qquad \text{ó} \qquad a \div b$$

La razón entre dos cantidades homogéneas es un número sin unidades de medida. ¿Por qué? Porque al dividir dos cantidades del mismo tipo, las unidades se cancelan entre sí. Lo que obtenemos es un número puro, una comparación que nos indica cuántas veces contiene una cantidad a la otra.

Por ejemplo, si en una clase hay 20 chicas y 10 chicos, la razón es $20 : 10 = 2$. Ese número 2 no mide metros ni kilos; solo significa que hay dos chicas por cada chico.

En resumen: para calcular la razón entre dos cantidades, basta con dividir la primera entre la segunda. El resultado será siempre un número sin unidades, que expresa de manera sencilla la relación entre ambas.

Empecemos con nuestras expresiones matemáticas:

Por ejemplo, si Pedro tiene 20 años y María 15, la razón entre sus edades es:

Ejemplos:

- $k = \frac{20\,\text{años}}{15\,\text{años}} = \frac{4}{3}$
- $k' = \frac{15\,\text{años}}{20\,\text{años}} = \frac{3}{4}$

Si llamamos $P$ a la edad de Pedro y $M$ a la de María, podemos escribir la proporción:

$$\frac{P}{M} = \frac{4}{3}$$

## NÚMEROS RACIONALES

Todo número que pueda expresarse como una razón, es decir, como resultado de la división de dos enteros, se denomina **número racional**.

> Número racional es el que puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, donde $a$ y $b$ son números naturales y $b \neq 0$.

Observa que todo número entero $n$, positivo o negativo, puede expresarse en la forma $\frac{n}{1}$. Por tanto, todos los números naturales, positivos o negativos, son números racionales.

Ejemplo:

- $7 = \frac{7}{1}$
- $-11 = \frac{-11}{1}$

Si la razón de dos números naturales no da como resultado un número entero, pueden darse dos casos:

1. Que el resultado sea un número finito de decimales:

Ejemplos:

(a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$

(b) $\frac{7}{16} = 0{,}4375$

(c) $\frac{9}{25} = 0{,}36$

(d) $\frac{47}{64} = 0{,}734375$

2. Que el resultado sea un número con infinitos decimales que, a partir de cierto punto, se repiten en forma periódica:

(a) $\frac{7}{3} = 2,3333\ldots = 2,\overline{3}$

(b) $\frac{253}{333} = 0,759\ 759\ 759\ldots = 0,\overline{759}$

(c) $\frac{6111}{4950} = 1,23\ 45\ 45\ 45\ldots = 1,23\overline{45}$

(d) $\frac{322}{11} = 29,27\ 27\ 27\ldots = 29,\overline{27}$

(e) $\frac{4}{7} = 0,571428\ 571428\ldots = 0,\overline{571428}$

(f) $\frac{1047}{148} = 7,07\ 432\ 432\ 432\ldots = 7,07\overline{432}$

Estas expresiones se llaman **decimales periódicos**. El grupo de decimales que se repite recibe el nombre de **período**.

A veces el período comienza inmediatamente después del signo de la coma, como sucede en los ejemplos (e), (f), (h) e (i). Otras veces el período está precedido por otros decimales, como es el caso de los ejemplos (g) y (j). A esos decimales que preceden al período se les llama **anteperíodo**.

En una expresión como la siguiente:

$$1,23\ 45\ 45\ 45\ldots = 1,23\overline{45}$$

podemos distinguir:

- La parte entera: 1
- El anteperíodo: 23
- El período: 45

Las expresiones decimales periódicas que carecen de anteperíodo reciben en nombre de **expresiones decimales periódicas puras.** En cambio, aquellas que presentan un anteperíodo reciben el nombre de **expresiones decimales periódicas mixtas.**

Como ya se habrá podido advertir en los ejemplos anteriores, una expresión decimal periódica puede escribirse o bien utilizando puntos suspensivos ($1,23\ 45\ 45\ 45\ldots$) o bien, en forma más abreviada, señalando el período con una barra superior o un arco ($1,23\overline{45}$.)

Como se ha visto en cursos anteriores, todo número con una cantidad finita de decimales o con decimales periódicos puede expresarse como una fracción, que recibe el nombre de **fracción generatriz** del número decimal, y por esta razón, todos estos números son racionales.

Los números racionales forman un conjunto que se designa con la letra $\mathbb{Q}$.

# NÚMEROS IRRACIONALES

No todas las expresiones ilimitadas son periódicas. Existen expresiones con infinitos decimales que no se repiten en forma periódica. Un ejemplo de este tipo de números es el número $\pi$, que se presenta desde los estudios más elementales de geometría, y que corresponde a la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{longitud del diámetro}} = \pi$$

En cálculos geométricos se utiliza para la constante $\pi$ el valor numérico $\pi \approx 3{,}1416$. En realidad, $\pi$ es una expresión decimal ilimitada y no periódica. Por tanto, no puede expresarse como fracción de enteros. $\pi$ no es un número racional. *Como simple curiosidad, transcribimos al final de este bloque los primeros mil decimales de $\pi$.*

Los números como π con una cantidad ilimitada de decimales no periódicos reciben el nombre de **números irracionales**. Esto no significa que sean absurdos o poco razonables, sino que no pueden expresarse como una razón.

## Historias del número $\pi$

Cuando dibujas un círculo y lo rodeas con una cuerda (la circunferencia), luego tomas esa medida y la divides entre la línea recta que cruza el centro (el diámetro), siempre aparece la misma relación: ¡el famoso número $\pi$!

El número $\pi$ se conoce desde la más remota antigüedad. No así su valor exacto. Determinar su valor cada vez con más exactitud ha sido hasta nuestros días casi una obsesión en el mundo de las matemáticas.

### Los primeros intentos

Hacia el año 2000 a. C., los egipcios le daban el valor de 3,1605 No era exacto, pero sirvió para construir sus pirámides y templos. Unos siglos después, hacia el 300 a. C., Arquímedes, un genio griego, ideó un método ingenioso: encerró un círculo entre polígonos de muchos lados y con eso calculó $\pi \approx 3{,}14163$ ¡Nada mal para hacerlo sin calculadora!

Una aproximación asombrosa la obtuvo hacia el año 500 d. C. el astrónomo chino Tsu Ch'ung-Chih, quien asignaba la fracción $\frac{355}{113}$ como valor de $\pi$. El valor de esta fracción (3,141592920) difiere del de $\pi$ por apenas ¡3 millonésimas!

En la Edad Media y el Renacimiento, calcular $\pi$ se convirtió en el gran reto de los amantes de los números. Durante siglos, los matemáticos parecían inmersos en una carrera desenfrenada.

Transcurrieron más de mil años antes de que el matemático francés François Viète (1540–1603) lograra una precisión mayor al calcular 10 decimales de $\pi$, una aproximación de milmillonésimas. No tardó en ser superado: en 1615 el alemán Ludolph van Ceulen había ya calculado treinta y cinco decimales; tanto lo apasionó $\pi$ que incluso mandó grabar el número en su tumba.

En 1706, el inglés John Machin, profesor de Astronomía, desenterró las primeras cien cifras decimales de $\pi$. El profesor Machin fue el primero en proponer una fórmula que converge muy rápido, tan efectiva que siguió usándose durante siglos, incluso después de la aparición de las primeras computadoras.

A partir de entonces, el número de decimales de $\pi$ correctamente calculados fue creciendo gradualmente. Para el año de 1855, el matemático alemán Richter había calculado ya los primeros 500 decimales de $\pi$. Pero, un poco antes de eso, en 1853, ocurrió un caso curioso. William Shanks, matemático inglés, tras 20 años de trabajo, obtuvo, con papel y lápiz, 707 decimales.

El final de la historia no es muy feliz, porque Shanks cometió un error en el 528º decimal, y a partir de ese punto todos los restantes estaban mal. Sin embargo, el error no fue descubierto hasta 1945, 92 años después, así que, afortunadamente para él, Shanks se fue a la tumba sin enterarse de que había desperdiciado tanto tiempo de su vida.

### Edad moderna

Podemos decir que $\pi$ despertó un verdadero fervor matemático, ya que, para efectos prácticos, con 20 decimales bastan para medir la Tierra con un error menor a un milímetro. Aun así, la carrera por descubrir más cifras no se detuvo.

En 1949, el matemático y físico húngaro–estadounidense John von Neumann, utilizando la computadora electrónica ENIAC, un ordenador que haría sonreír a los niños de nuestros días, obtuvo 2.037 cifras decimales ¡en tan solo setenta horas de trabajo! (del ordenador, claro). Tiempo después, otra computadora consiguió 3.000 decimales en solo 13 minutos.

Hacia 1959, una computadora británica y otra francesa lograron las primeras 10.000 cifras. En 1986, David H. Bailey extrajo 29.360.000 cifras en un Cray-2 de la NASA. Para 1995 se obtuvieron en una universidad de Tokio 4.294.960.000 decimales.

Hoy, con un ordenador moderno, podemos calcular tantos decimales de $\pi$ como queramos. ¡Solo depende del tiempo que lo dejemos trabajando! Es más… hay tantos números en los decimales de $\pi$ que tu número de teléfono o tu documento de identidad **seguro** aparecen escondidos entre ellos.

## Otras curiosidades asociadas a $\pi$

### Calculistas

Una de las habilidades con las que se lucían los calculistas en sus demostraciones era la capacidad de repetir números con enormes cantidades de cifras. Se cuenta que, cuando George Parker Bidder tenía apenas 10 años, pidió que le escribieran un número de cuarenta dígitos y que se lo leyeran en voz alta: lo repitió de memoria de inmediato. En muchas presentaciones, los calculistas llegaban incluso a recitar sin error todos los números que habían utilizado a lo largo de sus operaciones.

El calculista francés Maurice Dagbert se aprendió nada menos que los 707 decimales que había calculado William Shanks. Otro calculista, Alexander Craig Aitken, afirmó habérselos aprendido también algunos años antes que Dagbert. Pero, años después, cuando los computadores modernos calcularon $\pi$ con miles de cifras decimales, Aitken se enteró de que el pobre Shanks se había equivocado en los 180 últimos dígitos. «De nuevo me entretuve», dijo Aitken, «en aprender el valor correcto hasta el decimal 1000, y tampoco entonces tuve dificultad alguna, excepto que necesitaba 'reparar' la unión donde había ocurrido el error de Shanks».

En cierta oportunidad, dando una conferencia, Aitken recitó $\pi$ hasta el dígito 250. Alguien le pidió comenzar en el decimal 301. Cuando había citado cincuenta dígitos se le rogó que saltase al lugar 551 y dar 150 más. Lo hizo sin error, comprobándose los números en una tabla de $\pi$.

Pero si lo anterior te parece asombroso, no dejes de leer la siguiente noticia, que apareció en la página Web de la BBC de Londres el 02/07/2005:

*"Un terapista mental japonés rompió el récord mundial de recitar de memoria la mayor cantidad de decimales posibles del número π, que representa el radio de la circunferencia de un círculo dividida entre su diámetro.*
*Akira Haraguchi, de 59 años, logró recitar este fin de semana los primeros 83.431 decimales y superó la anterior marca inscrita en el libro Guinness de los récords.*
*La marca anterior la tenía otro japonés, Hiroyuki Goto, quien en 1995 llegó a recitar de memoria 42.195 decimales, en lo que tardó nueve horas y 21 minutos. Pero ahora Haraguchi espera que su nombre quede registrado en el libro ya que practicamente dobló la marca de su antecesor.*
*En su primer intento del día, Haraguchi tuvo que detenerse después de tres horas cuando olvidó la secuencia y se vio obligado a empezar de nuevo. Después, tardó varias horas en recitar de memoria los más de 80 mil decimales del número π y romper el récord.*
*Pero sin duda le fue mejor que la última vez que lo intentó, en septiembre pasado, cuando se vió obligado a suspender el intento porque el recinto que alquiló para hacerlo cerró sus puertas antes de que terminara.*
*Por eso en esta ocasión se aseguró de alquilar una sala sin límites de tiempo."*

## Política

En 1897, en Indiana, EE.UU., se intentó fijar el valor de $\pi$ por ley, como si se tratara de un límite superior de velocidad para automóviles. El protagonista fue un médico llamado Goodwin, quien creyó haber realizado un descubrimiento sobre la relación entre el círculo y la circunferencia, lo que implicaba un impresionante resultado acerca de $\pi$. Llevó el caso al terreno político pidiendo a su representante en la Asamblea General de Indiana que presentara como proposición de Ley local el siguiente texto:

*"La Asamblea General del estado de Indiana decreta que se ha descubierto que el área del círculo es igual al cuadrado que tiene el lado de longitud igual al cuadrante de la circunferencia"*. Es inmediato deducir de ello que $\pi = 4$. Según el proyecto, el valor de $\pi$ debía fijarse, pues, en 4. Así no más.

No deja de ser curioso el trámite que siguió el proyecto. Fue girado directamente al Comité de Tierras anegadas. El Comité, por alguna razón consideró que el valor de $\pi$ no era de su incumbencia, y recomendó que el tema se tratara en la Comisión de Educación que estudió el asunto y lo devolvió a la Cámara de Representantes sugiriendo que se aprobara. La honorable Cámara siguiendo al pie de la letra la recomendación, lo aprobó por unanimidad, por sesenta y siete votos contra ninguno.

Un poquito más, y el valor de $\pi$ quedaba fijado en 4 en todo el estado de Indiana.

Pero hubo dificultades en el Senado.

Créase o no, el proyecto fue girado a la Comisión de Temperancia, que le dio su aprobación, y así, en primera instancia, la ley estuvo a punto de ser sancionada. Pero en el momento de la votación definitiva, los senadores, asesorados tal vez por algún geómetra infiltrado en las deliberaciones, resolvieron rechazar el proyecto, y dejar el valor de $\pi$ librado al arbitrio de los matemáticos, con lo que se evitó caer en un ridículo que habría adquirido el rango de histórico.

## Cine

El ya famoso número $\pi$ ha sido también protagonista en la cultura popular. El siempre brillante Mr. Spock, de la serie futurista "Star Trek", consiguió salvar a la tripulación de una computadora diabólica ordenándole calcular $\pi$. Como $\pi$ es irracional, la computadora quedó atrapada en un proceso sin fin. Mientras ella calculaba… ellos escaparon.

**¿De verdad necesitamos tantos decimales de $\pi$? Quizá no.**

- Para la NASA no hace falta calcular hasta el infinito. Sus sondas espaciales, que recorren millones de kilómetros, se conforman con apenas 15 o 16 decimales de precisión.
- El NIST, que es como el guardián de la exactitud numérica en Estados Unidos, suele trabajar con 32 decimales. No porque los necesite para todo, sino porque le basta y le sobra para comprobar la fidelidad de los cálculos en sus supercomputadoras.
- Para que se hagan una idea, con solo 15 decimales el error acumulado es tan pequeño que resulta *¡diez mil veces menor que el diámetro de un cabello humano!*
- Y si alguien quiere ir al extremo, incluso para medir la circunferencia del universo observable — sí, todo el universo que alcanzamos a ver — bastan entre 40 y 50 decimales. En ese caso, el error sería del tamaño de un átomo de hidrógeno.

La historia de $\pi$ demuestra una vez más lo curioso, persistente y creativo que puede ser el ser humano.

$$\pi = 3,1415926535\ldots$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1415926535 | 8979323846 | 2643383279 | 5028841971 | 6939937510 |
| 5820974944 | 5923078164 | 0628620899 | 8628034825 | 3421170679 |
| 8214808651 | 3282306647 | 0938446095 | 5058223172 | 5359408128 |
| 4811174502 | 8410270193 | 8521105559 | 6446229489 | 5493038196 |
| 4428810975 | 6659334461 | 2847564823 | 3786783165 | 2712019091 |
| 4564856692 | 3460348610 | 4543266482 | 1339360726 | 0249141273 |
| 7245870066 | 0631558817 | 4881520920 | 9628292540 | 9171536436 |
| 7892590360 | 0113305305 | 4882046652 | 1384146951 | 9415116094 |
| 3305727036 | 5759591953 | 0921861173 | 8193261179 | 3105118548 |
| 0744623799 | 6274956735 | 1885752724 | 8912279381 | 8301194912 |
| 9833673362 | 4406566430 | 8602139494 | 6395224737 | 1907021798 |
| 6094370277 | 0539217176 | 2931767523 | 8467481846 | 7669405132 |
| 0005681271 | 4526356082 | 7785771342 | 7577896091 | 7363717872 |
| 1468440901 | 2249534301 | 4654958537 | 1050792279 | 6892589235 |
| 4201995611 | 2129021960 | 8640344181 | 5981362977 | 4771309960 |
| 5187072113 | 4999999837 | 2978049951 | 0597317328 | 1609631859 |
| 5024459455 | 3469083026 | 4252230825 | 3344685035 | 2619311881 |
| 7101000313 | 7838752886 | 5875332083 | 8142061717 | 7669147303 |
| 5982534904 | 2875546873 | 1159562863 | 8823537875 | 9375195778 |
| 1857780532 | 1712268066 | 1300192787 | 6611195909 | 2164201989 |

## Otros casos de números irracionales

Hemos visto que $\pi$ es un número irracional, ya que no puede expresarse como razón de dos números enteros. Sin embargo, $\pi$ no es el único número irracional: en realidad existe infinita cantidad de ellos. Un caso muy importante lo constituyen las raíces. Las raíces de algunos números son también números irracionales.

Recordemos que la **raíz de un número** es aquella cantidad que, al ser elevada al índice de la raíz, reproduce nuevamente el número inicial.

Por ejemplo:

- $\sqrt{9} = 3$ (porque $3^2 = 9$)
- $\sqrt[3]{8} = 2$ (porque $2^3 = 8$)

En estos casos, las raíces resultaron ser enteras. Sin embargo, no siempre ocurre lo mismo: hay muchos números cuyas raíces son irracionales.

Por ejemplo:

- $\sqrt{2} = 1{,}414.213.562.373.095.048.801.6\ldots$

No existe ningún número racional que, elevado al cuadrado, no dé 2. Si tomamos la expresión anterior con los 22 primeros decimales y la elevamos al cuadrado, obtendremos:

- $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016\ldots$
- $\left(1.4142135623730950488016\right)^2 \approx 1.9999999999999997480\ldots$

El resultado es muy cercano a 2, pero nunca exactamente igual. Cuantos más decimales usemos, obtendríamos, elevando al cuadrado, números cada vez más cercanos a 2, pero nunca exactamente 2.

Por eso, las raíces cuadradas de números enteros que no sean cuadrados perfectos son *números irracionales.*

- $\sqrt{3} = 1{,}73205080756887729352\ldots$
- $\sqrt{5} = 2{,}23606797749978969640\ldots$

Así, junto con $\pi$, forman parte de ese vasto conjunto de números que no se pueden expresar como una fracción de enteros y cuyos decimales son infinitos y no periódicos.

Además de las raíces cuadradas, también existen raíces *n-simas* de enteros que no son potencias exactas y que, por tanto, resultan irracionales. Por ejemplo:

- $\sqrt[3]{7}$
- $\sqrt[4]{13}$
- $\sqrt[5]{16}$

Sin embargo, no todos los números irracionales provienen de raíces. Algunos surgen en contextos muy distintos. Un ejemplo fundamental es el número **e** — **número de Euler**, base de los logaritmos naturales, que aparece en fenómenos de crecimiento y en el cálculo diferencial:

- $\mathrm{e} \approx 2{,}71828182845904523536 0287\ldots$

Otro caso notable es la **constante de Euler–Mascheroni**, denotada por $\gamma$, la cual está relacionada con series infinitas y con la teoría de números:

- $\gamma \approx 0{,}577.215.664.901.532.860.606.512\ldots$

En conjunto, todos estos números forman el conjunto de los *números irracionales*, que se representa con la letra **I**.

**¿Quieres saber la diferencia entre el Número de Euler** e **y la Constante de Euler–Mascheroni $\gamma$?**

★ **Número de Euler** e

**¿Cómo se escribe?:** con la letra minúscula e.
**Valor aproximado:**

$$e \approx 2.718$$

**¿Qué significa?:** Imagina que dejas crecer algo poquito a poquito, de manera continua (como intereses en un banco o el crecimiento de una población). El número e aparece como la "velocidad natural de crecer" en matemáticas.
**Ejemplo sencillo:** Si pones un dólar en el banco con 100% de interés anual y el banco te lo va pagando cada vez más seguido (primero una vez al año, luego cada mes, luego cada día…), al final, si lo hace de manera continua, ¡tu dólar se transforma en aproximadamente 2.718 dólares! Ese número mágico es e.

★ **Constante de Euler–Mascheroni** $\gamma$

**¿Cómo se escribe?:** con la letra griega $\gamma$ (gamma).
**Valor aproximado:**

$$\gamma \approx 0.5772$$

**¿Qué significa?:** Aparece cuando comparas dos cosas muy diferentes:

- La suma de fracciones como $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ (serie armónica).
- El logaritmo natural (que usa e).

La diferencia entre ambos, cuando tomas muchos términos, siempre se va acercando a este número misterioso $\gamma$.
**Dónde aparece:** No lo verás mucho en la vida diaria al principio, pero en matemáticas avanzadas es un invitado frecuente, sobre todo en teoría de números.

**Resumiendo en simple**

- e es el número del crecimiento natural, el que aparece cuando algo cambia de forma continua.
- $\gamma$ es un número especial que surge de comparar sumas infinitas con logaritmos.
- Ambos llevan el nombre de Euler, pero no son lo mismo.

# NÚMEROS REALES

El conjunto numérico formado por los números racionales y los números irracionales recibe el nombre de **conjunto de los números reales**, y se representan con la letra $\mathbb{R}$

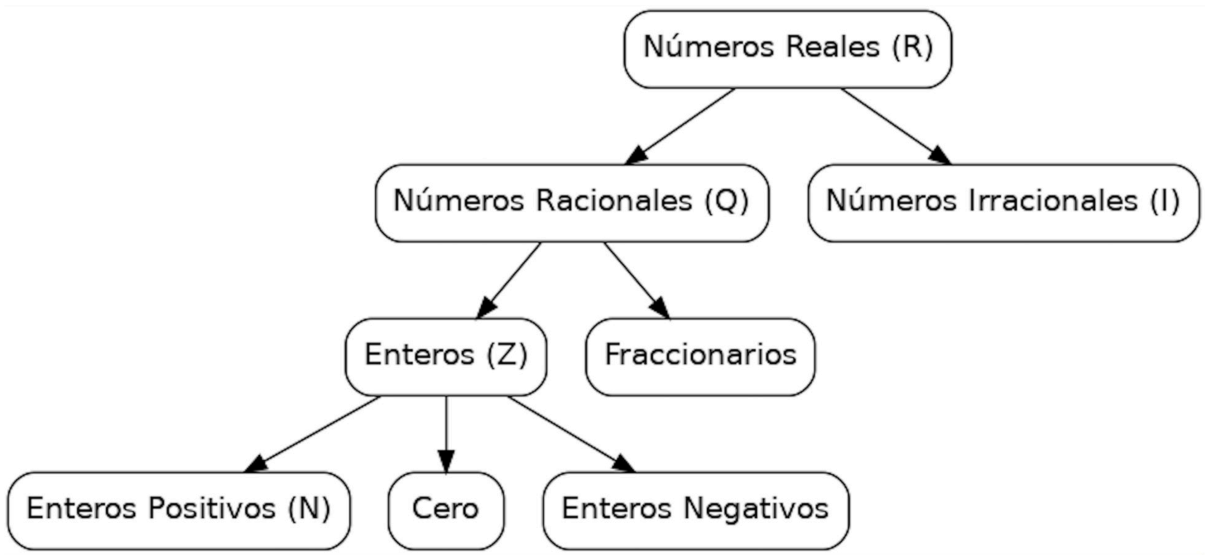
Este conjunto incluye, por tanto, a todos los números que pueden ubicarse en la recta numérica, desde las fracciones y decimales finitos o periódicos, hasta aquellos con infinitos decimales no periódicos.

El conjunto de los números reales constituye una de las bases fundamentales de la matemática, ya que sobre él se construyen gran parte de los conceptos y operaciones que se utilizan en el álgebra, la geometría y el cálculo.

## Dato moderno

Hoy sabemos que el conjunto de los números reales es tan extenso que entre dos números distintos siempre existen infinitos otros. Esta idea es clave en el análisis matemático y en el desarrollo del cálculo, base de la ciencia y la tecnología moderna.

## **ESQUEMA DE CONJUNTOS NUMÉRICOS** *... por ahora*



# 2
# $a^n$ POTENCIACIÓN

## Cada exponente, un salto hacia lo infinito

### Nacimiento: contar sin contar

Mucho antes de que existiera la palabra “potencia”, los seres humanos ya sabían repetir operaciones. Los **babilonios**, hace más de 4000 años, usaban tablillas de arcilla con cuadrados y cubos de los números: eran las primeras *tablas de potencias*. Así podían multiplicar rápidamente sin repetir el mismo cálculo una y otra vez. Aunque no conocían aún la notación moderna, comprendían que elevar un número era una forma de resumir la multiplicación.

Los egipcios también tenían su propio método: la **duplicación**. Para multiplicar, sumaban una cantidad consigo misma tantas veces como fuera necesario, una idea que, siglos después, daría lugar al exponente.

**El nacimiento del exponente** En la Edad Media, los matemáticos árabes y europeos ya usaban potencias sin símbolos. Escribían frases como “cosa al cuadrado” o “cubo de la cosa”, inspiradas en figuras geométricas: “cuadrado” venía de un área, “cubo” de un volumen.

La notación moderna comenzó en el siglo XVII. El francés **René Descartes**, en su obra *La Géométrie* (1637), introdujo los exponentes como los conocemos hoy: $x^2$, $x^3$, etc. Esta idea revolucionó el álgebra, porque permitió escribir operaciones repetidas con claridad y trabajar con ellas como si fueran objetos manipulables.

Más tarde, matemáticos como **Euler** y **Newton** extendieron el concepto a exponentes fraccionarios, negativos e incluso irracionales, mostrando que las potencias podían ir mucho más allá de la simple multiplicación.

## El lenguaje del crecimiento y la energía

Hoy, la potenciación está en todas partes. En física, describe cómo crecen la energía, la presión o la velocidad. En biología, explica el crecimiento exponencial de poblaciones o la propagación de virus. En economía, modela los intereses compuestos, donde el dinero “crece sobre sí mismo”. Y en informática, define la rapidez con la que aumentan las capacidades de procesamiento: cada nueva generación de chips es una potencia de la anterior.

El concepto de potencia nos enseña una verdad simple pero poderosa: *pequeñas repeticiones pueden generar grandes resultados.*

## La era exponencial

En la era digital, la potenciación se ha convertido en un símbolo de progreso. Las computadoras funcionan a velocidades que crecen exponencialmente, las redes neuronales de la inteligencia artificial multiplican parámetros como potencias, y el almacenamiento de datos se mide en teras, petas y exas —cada uno una potencia de diez mayor que el anterior.

Incluso fenómenos sociales, como el crecimiento de redes o la difusión de información, siguen patrones **exponenciales**. Lo que comenzó como una forma de abreviar multiplicaciones hoy explica cómo evoluciona el mundo moderno.

La potenciación es, en esencia, la matemática del cambio acelerado: una idea antigua que nunca ha dejado de crecer.

## ¿Qué vas a aprender?

- Comprender qué significa elevar un número a una potencia y cómo se representa.
- Aplicar las reglas básicas de las potencias para multiplicar, dividir y combinar expresiones con la misma base.
- Analizar qué ocurre cuando una potencia se eleva a otra o cuando se aplica a un producto o una fracción.
- Entender el papel de los exponentes negativos y cómo transforman una potencia en su recíproco.
- Descubrir el significado del exponente cero y por qué toda potencia con ese exponente vale uno.
- Usar las propiedades de las potencias para simplificar expresiones y resolver problemas algebraicos.

*"La potencia de un número es el eco de su multiplicación repetida hasta el infinito."*

*— Hermann Hankel*