

Inferencia

Estadística Computacional

Juan Zamora Osorio
juan.zamora@pucv.cl

Instituto de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

9 de noviembre de 2023



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Inferencia

Hemos aprendido sobre...

- ▶ Describir datos.
- ▶ Probabilidades.
- ▶ Variables aleatorias.

Objetivo

- ▶ Contrastar datos reales con modelos basados en probabilidades.

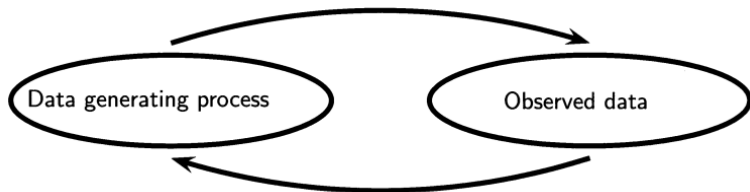
¿Qué necesitamos?

- ▶ Inferencia estadística.
- ▶ Contrastar hipótesis.

Recordar

Probabilidades

- ¿Dado un proceso que genera datos, cuáles son las propiedades que observaremos?



Inferencia estadística

- ¿Dadas las observaciones, qué podemos decir sobre el proceso que genera los datos?

Recuerdo

Media muestral

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

- Busca estimar la *media* de la población, denotada como μ .

Ejemplo: temperaturas máximas durante enero

- 22, 24, 21, 22, 25, 26, 25, 24, 23, 25, 25, 26, 27, 25, 26, 25, 26, 27, 27, 28, 29, 29, 29, 28, 30, 29, 30, 31, 30, 28, 29.
- $\bar{x} = \frac{22+24+21+\cdots+28+29}{31} = 26,48 \text{ }^{\circ}\text{C}.$

Muestra

Resultados obtenidos de experimentos aleatorios

- ▶ Cantidad es finita.
- ▶ Generalmente se supone independencia.
- ▶ Generalmente se supone misma distribución en cada experimento.

Estadístico

- ▶ Función calculada a partir de la muestra.

Ejemplo: 10 lanzamientos de un dado

- ▶ Cantidad de datos: 10.
- ▶ Cada lanzamiento independiente del anterior.
- ▶ Cada lanzamiento posee la misma distribución: multinomial.

Muestra

Ejemplo: 10 tomas de temperatura a medio día en días distintos

- ▶ Cantidad de datos: 10.
- ▶ ¿Cada medición es independiente de la anterior?
- ▶ ¿Cada medición posee misma distribución?

Ejemplo: 10 nombres de estudiantes del curso

- ▶ Cantidad de datos: 10.
 - ▶ ¿Cada nombre es independiente del anterior?
 - ▶ ¿Cada nombre posee la misma distribución?
-
- ▶ Queremos que la muestra sea representativa.

Técnicas de muestreo

Sesgo

- ▶ Una técnica es sesgada si el estadístico calculado con la muestra obtenida es mayor o menor, en promedio, que el parámetro estimado.

Sesgo de selección

- ▶ La manera en que se construye la muestra introduce sesgo.

Sesgo de respuesta

- ▶ La técnica para obtener la respuesta introduce sesgo.

Sesgo de selección

Ejemplo – tamaño

- ▶ Los pacientes que pasan más días en un hospital son más propensos a ser elegidos para una muestra.

Ejemplo – respuesta voluntaria

- ▶ Las opiniones recolectadas por llamados a un programa de televisión sobre representan a quienes les importa el asunto y no representan a quienes no les interesa.

Ejemplo – conveniencia

- ▶ Selecciono a mis amigo/as como muestra para estudiar la opinión de la población.

Sesgo de selección

Ejemplo – juicio experto

- ▶ Se intenta recolectar un grupo de personas con ciertas características: tantos hombres, tantas mujeres, tantos sobre 40, tantos empleados, etc. creyendo que se mejora representatividad, pero se agrega sesgo.

Ejemplo – marco

- ▶ Se selecciona a partir de una lista que debería corresponder a la población.

Sesgo de respuesta

No hay respuesta

- ▶ Alguien que se niega a participar en una encuesta podría ser diferente a los demás.

Respuesta incorrecta o error de medición

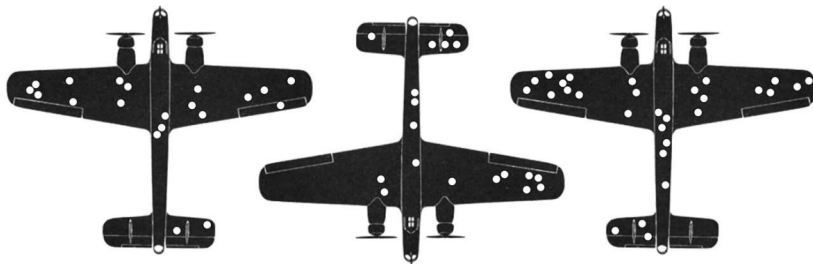
- ▶ Mentira intencional.
- ▶ Memoria imprecisa.
- ▶ Medición imprecisa.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Muchas personas no admiten ver un programa de televisión.
 - ▶ Pacientes que dicen que siguen indicaciones médicas.
 - ▶ ¿Cuánto tiempo pasan en el celular al día?

Sesgo de respuesta

Cuestionario

- ▶ La respuesta depende de la pregunta, del tono de voz del entrevistador, el orden de las preguntas, etc.

Ejemplo: muestra de localización de daños en bombarderos



Muestra aleatoria

- ▶ No introduce sesgo.

Aleatoria simple

- ▶ Todas las observaciones son igual de probables.



Aleatoria estratificada

- ▶ Se divide la población en grupos que no se traslapan.



Ejemplo: Plaza Pública CADEM

Metodología

_Técnica

Encuestas Telefónicas aplicadas a través de sistema Cati a celulares de prepago y postpago.

_Universo

Hombres y mujeres de 18 años o más, habitantes en las 16 regiones del país.

_Muestreo

Muestreo probabilístico con selección aleatoria de individuo y estratificado previamente por región.

_Muestra y cobertura semanal

703 casos. Margen de error de $\pm 3,7$ puntos porcentuales al 95% de confianza.

Se alcanzó una cobertura total de 190 comunas. El 90% de la muestra fue aplicada en población urbana y el 10% en población rural.

_Tasa de logro

Para lograr los 703 casos efectivos se realizaron un total de 4.059 llamados, lo que representa una tasa de éxito del 17,3%.

_Ponderación

Los datos fueron ponderados a nivel de sujetos por zona, género y edad, obteniendo una muestra de representación nacional para el universo en estudio.

_Fecha de terreno

Jueves 23 al viernes 24 de septiembre de 2021.

Para mayor información y detalle sobre metodología visita el sitio cadem.cl/plaza-publica/



Muestra aleatoria

Independientes e idénticamente distribuidos (*iid*)

- ▶ Cantidad de datos finita.
- ▶ Cada dato es independiente del anterior.
- ▶ Cada dato posee misma distribución.

Inferencia

- ▶ Como todos tienen misma distribución, podemos inferir sobre ella.
- ▶ Modelos estadísticos que suponen cantidad finita de parámetros se llaman *paramétricos*.
- ▶ Ejemplo: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ tiene solo dos parámetros.
- ▶ Un estadístico que busca estimar un parámetro de la población se llama *estimador*.

Muestra aleatoria

Independientes e idénticamente distribuidos (*iid*)

- ▶ Cada dato puede modelarse como una variable aleatoria $X^{(i)}$.
- ▶ Cada dato podría ser multivariado, $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_J^{(i)})$.
- ▶ Matriz de datos:

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)T} \\ \vdots \\ X^{(i)T} \\ \vdots \\ X^{(n)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & \dots & X_j^{(1)} & \dots & X_J^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{(i)} & \dots & X_j^{(i)} & \dots & X_J^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{(n)} & \dots & X_j^{(n)} & \dots & X_J^{(n)} \end{bmatrix}$$

Media muestral

Estadístico

- ▶ Sea X una muestra iid univariada.
- ▶ Sea $T_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)}$, un estadístico.
- ▶ Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n} T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$, un estadístico.

Propiedades

- ▶ Si cada observación sigue una distribución con media μ y varianza σ^2 :
- ▶ $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X^{(i)}] = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$
- ▶ $\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X^{(i)}] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$
- ▶ ¿Qué significa que \bar{X}_n sea una variable aleatoria con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$?

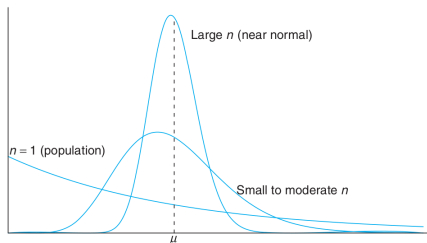
Sobre los estimadores

Funciones de la muestra aleatoria

- ▶ $\hat{\theta}_n = g(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)})$.
- ▶ Son estimadores *puntuales*, nos entregan un valor para una muestra.

¡Son variables aleatorias!

- ▶ Su valor depende del resultado de un experimento aleatorio.



Media muestral

Ejemplo: tragamonedas

- ▶ Cada tirada tiene valor esperado $-\$1000$ y desviación estándar de $\$10000$.
- ▶ ¿Qué se espera en promedio luego de jugar...
 - ▶ 1 vez?
 - ▶ 10 veces?
 - ▶ 100 veces?
 - ▶ 1000 veces?

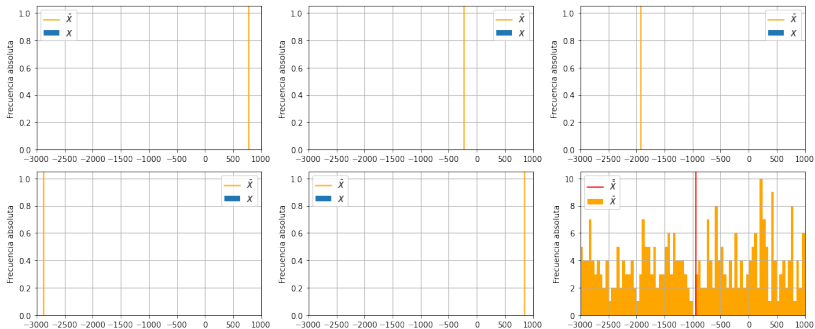
Sabemos que

- ▶ $\mathbb{E}[X^{(i)}] = -1000$.
- ▶ $\mathbb{V}[X^{(i)}] = 10^8$.
- ▶ $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = -1000$.
- ▶ $\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{10^8}{n}$.

Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

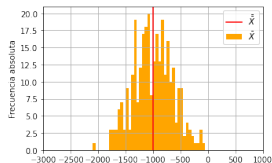
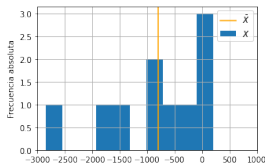
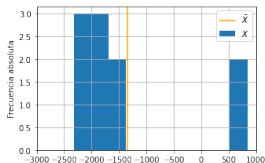
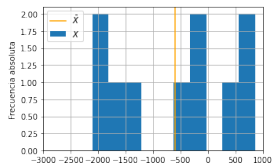
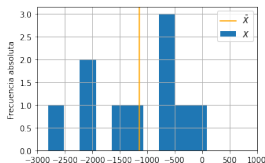
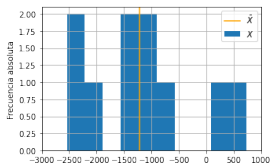
- ▶ Suponiendo $X^{(i)} \sim U(-3000, 1000)$.
- ▶ 1 juego.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

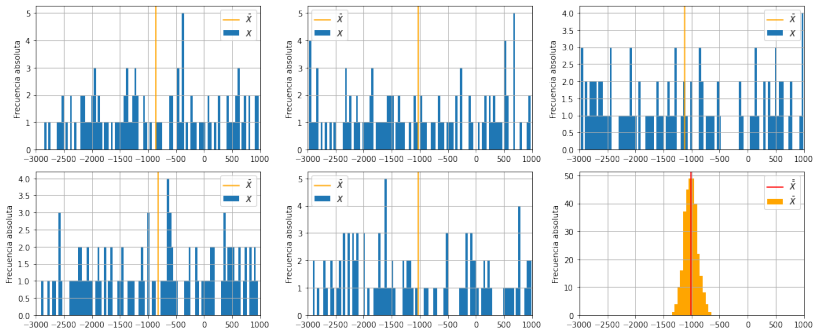
- ▶ Suponiendo $X^{(i)} \sim U(-3000, 1000)$.
- ▶ 10 juegos.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

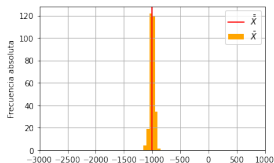
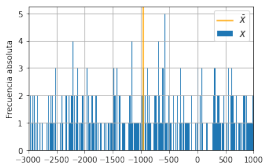
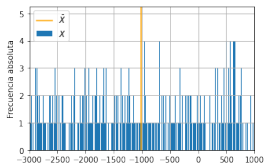
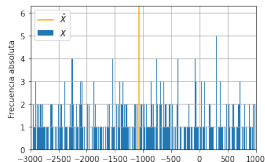
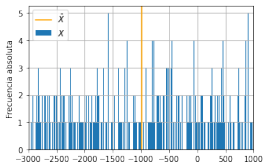
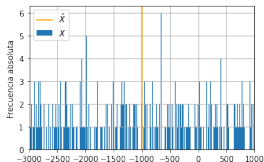
- ▶ Suponiendo $X^{(i)} \sim U(-3000, 1000)$.
- ▶ 100 juegos.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

- ▶ Suponiendo $X^{(i)} \sim U(-3000, 1000)$.
- ▶ 1000 juegos.



Ley de los grandes números

Media muestral

- ▶ Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 .
- ▶ Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$ media de $n \in \mathbb{N}$ observaciones.

Teorema: Ley *débil* de los grandes números

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

- ▶ Para todo $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ elegido se cumple.
- ▶ Para todo $\epsilon, \delta > 0 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) < \delta$.

Nota: Tipos de convergencia

En probabilidad (ley *débil*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

- Para todo $\epsilon, \delta > 0 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) < \delta$.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

Nota: Tipos de convergencia

Casi segura o casi en todas partes (ley *fuerte*)

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1.$$

- Para toda secuencia infinita observada ω , la media \bar{X}_n converge a μ , exceptuando, a lo más, un conjunto de probabilidad 0.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu.$$

Ley débil de los grandes números – demostración

Teorema: Ley *débil* de los grandes números

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

- ▶ Para todo $\epsilon, \delta > 0 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) < \delta$.

Desigualdad de Chebyshev

- ▶ Sea $k > 0 \in \mathbb{R}$ y X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 .
- ▶ Entonces:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Ley débil de los grandes números – demostración

Demostración desigualdad de Chebyshev

$$\begin{aligned}P(|X - \mu| \geq k\sigma) &= P(X \leq \mu - k\sigma) + P(X \geq \mu + k\sigma) \\&= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} p_X(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{+\infty} p_X(x) dx \\&\leq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} \frac{(x - \mu)^2}{k^2 \sigma^2} p_X(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{+\infty} \frac{(x - \mu)^2}{k^2 \sigma^2} p_X(x) dx \\&= \frac{1}{k^2 \sigma^2} \left(\int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 p_X(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_X(x) dx \right) \\&\leq \frac{1}{k^2 \sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p_X(x) dx = \frac{1}{k^2 \sigma^2} \sigma^2 = \frac{1}{k^2} \\&\Rightarrow P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Ley débil de los grandes números – demostración

Teorema: Ley *débil* de los grandes números

- Para todo $\epsilon, \delta > 0 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) < \delta:$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

Ley débil de los grandes números – demostración

Demostración

► Sabemos que $\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$.

► Entonces, para todo $k > 0 \in \mathbb{R}$:

$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

► Basta elegir $k = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ y se tiene:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}.$$

► Finalmente, basta tomar $n > \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \delta}$ y se tiene que $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) < \delta$.

Ley de los grandes números

Ejemplo

- ▶ Sea $X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- ▶ Sabemos que $\mathbb{E}[X] = \mu = \frac{\pi}{4}$ y $\mathbb{V}[X] = \sigma^2 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.
- ▶ Por ley de los grandes números, sabemos que \bar{X}_n converge a $\mu = \frac{\pi}{4}$.

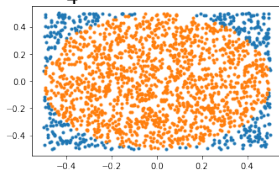
Cálculo de π

- ▶ Obtenemos n observaciones de X y calculamos la media \bar{X}_n .
- ▶ Sabemos que $\bar{X}_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$.
- ▶ Entonces, aproximamos $\pi \approx 4\bar{X}_n$.
- ▶ ¿Y cómo obtenemos observaciones de X ?

Ley de los grandes números

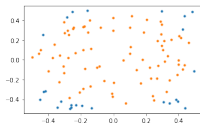
Simulando $X \sim \text{Bernoulli}(\frac{\pi}{4})$

- ▶ Sean $X_1, X_2 \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- ▶ Sea $X = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_1, X_2) \text{ dentro de círculo radio } \frac{1}{2} \text{ y centro } (0, 0) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$.
- ▶ Notar que el espacio muestral $\Omega = X_1 \times X_2$ es un cuadrado de lado 1.
- ▶ El área que corresponde a $X = 1$ es el área del círculo de radio $\frac{1}{2}$.
- ▶ $P(X = 1) = \frac{\pi}{4}$ y $P(X = 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$. Es decir, $X \sim \text{Bernoulli}(\frac{\pi}{4})$.

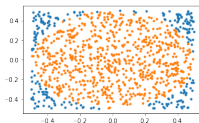


Aproximando π

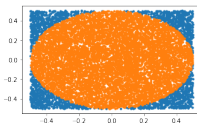
$n = 100$



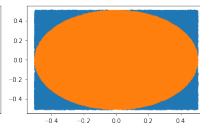
$n = 1000$



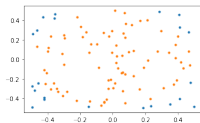
$n = 10000$



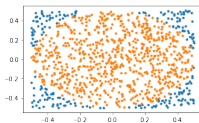
$n = 100000$



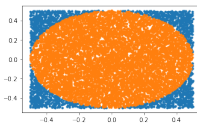
$\pi \approx 3,00$



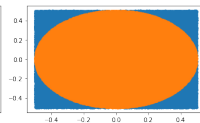
$\pi \approx 3,088$



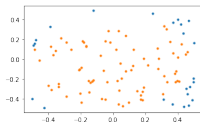
$\pi \approx 3,1616$



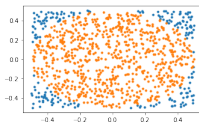
$\pi \approx 3,13976$



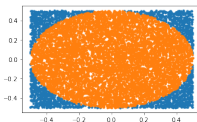
$\pi \approx 3,12$



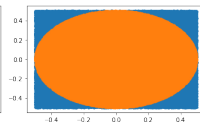
$\pi \approx 3,104$



$\pi \approx 3,1652$



$\pi \approx 3,14968$



$\pi \approx 3,04$



$\pi \approx 3,164$



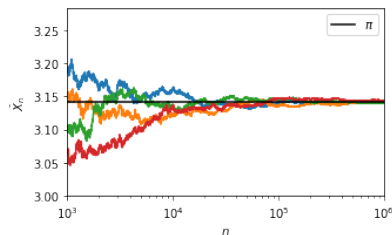
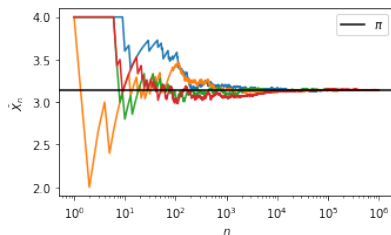
$\pi \approx 3,1496$



$\pi \approx 3,14356$



Aproximando π



- Esta metodología se llama aproximación de Monte Carlo.

Teorema del límite central

Media muestral

- ▶ Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 .
- ▶ Sea $T_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)}$, suma de $n \in \mathbb{N}$ observaciones.
- ▶ Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n} T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$ media de $n \in \mathbb{N}$ observaciones.

Teorema

- ▶ La variable aleatoria Z_n siguiente converge a una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0, 1)$:

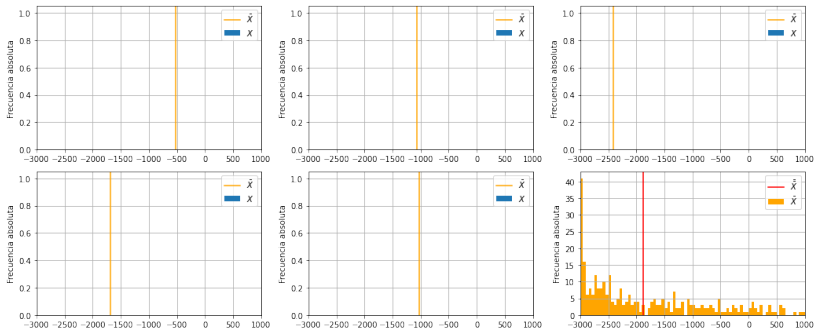
$$Z_n = \frac{T_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- ▶ Equivalentemente, $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

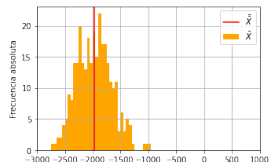
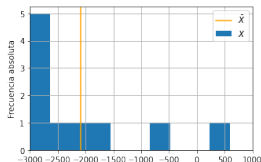
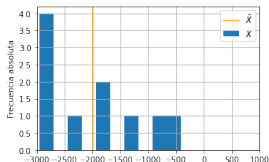
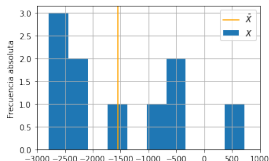
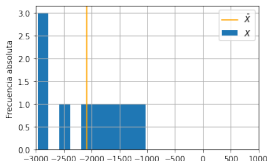
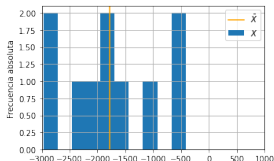
- ▶ Suponiendo $Y^{(i)} \sim \text{Beta}(0,5, 1,5)$ y $X^{(i)} = 4000Y^{(i)} - 3000$.
- ▶ 1 juego.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

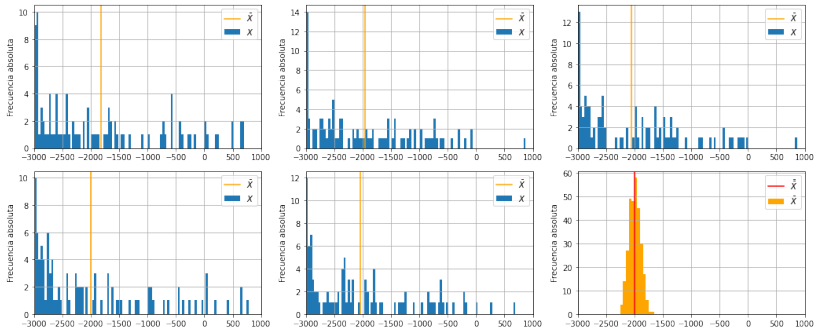
- ▶ Suponiendo $Y^{(i)} \sim \text{Beta}(0,5, 1,5)$ y $X^{(i)} = 4000Y^{(i)} - 3000$.
- ▶ 10 juegos.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

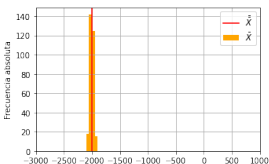
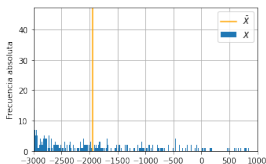
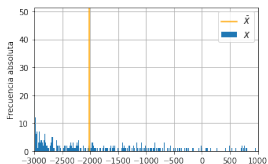
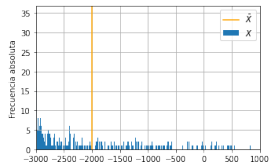
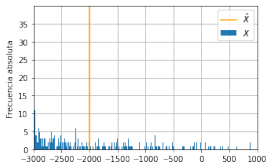
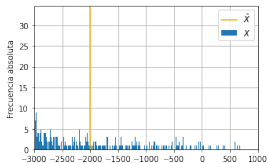
- ▶ Suponiendo $Y^{(i)} \sim \text{Beta}(0,5, 1,5)$ y $X^{(i)} = 4000Y^{(i)} - 3000$.
- ▶ 100 juegos.



Media muestral – simulación

Ejemplo: tragamonedas

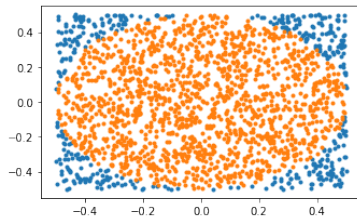
- ▶ Suponiendo $Y^{(i)} \sim \text{Beta}(0,5, 1,5)$ y $X^{(i)} = 4000Y^{(i)} - 3000$.
- ▶ 1000 juegos.



Ejemplo: aproximación de Monte Carlo de π

Supuesto

- ▶ $X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- ▶ $\mathbb{E}[X] = \mu = \frac{\pi}{4}$.
- ▶ $\mathbb{V}[X] = \sigma^2 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.



Teorema del límite central

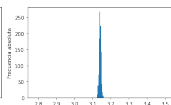
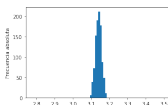
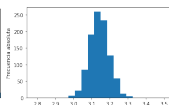
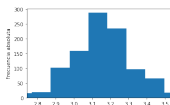
- ▶ $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}{n}\right)$

Ejemplo: aproximación de Monte Carlo de π

Teorema del límite central

- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}{n}\right)$. Si $Y_n = 4\bar{X}_n$, entonces
- $$Y_n \sim \mathcal{N}\left(\pi, \frac{\pi(4-\pi)}{n}\right).$$

n	100	1000	10000	100000
Secuencia 1	3,00	3,088	3,1616	3,13976
Secuencia 2	3,12	3,104	3,1652	3,14968
Secuencia 3	3,04	3,164	3,1496	3,14356
$\mathbb{E}[Y_n]$	3,14	3,142	3,1416	3,14159
$\sqrt{\mathbb{V}[Y_n]}$	0,16	0,052	0,0164	0,00519



Algunas aproximaciones

Media

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)} \rightarrow \mathbb{E}[X].$$

Varianza (con media conocida)

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X^{(i)} - \mathbb{E}[X] \right)^2 \rightarrow \mathbb{V}[X] = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right].$$

Función de distribución acumulada

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ X^{(i)} \text{ tal que } X^{(i)} \leq c \right\} \right| \rightarrow F_X(c) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{(-\infty, c)}(X) \right].$$

Ejemplo

Errores en un programa computacional

- ▶ Sea X variable aleatoria asociada a cantidad de errores por semana.
- ▶ Supongamos X sigue una distribución de Poisson $\text{Pois}(\lambda = 5)$.
- ▶ Hay 125 programas independientes corriendo.
- ▶ ¿Probabilidad de que cantidad de errores promedio sea menor a 5,5?

Ejemplo

Errores en un programa computacional

- ▶ Sea X variable aleatoria asociada a cantidad de errores por semana.
- ▶ Supongamos X sigue una distribución de Poisson $\text{Pois}(\lambda = 5)$.
- ▶ Hay 125 programas independientes corriendo.
- ▶ ¿Probabilidad de que cantidad de errores promedio sea menor a 5,5?

Desarrollo

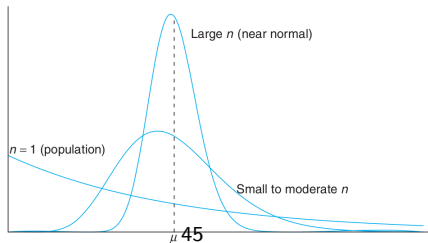
- ▶ $\mathbb{E}[X] = \mu = 5$.
- ▶ $\mathbb{V}[X] = \sigma^2 = 5$.
- ▶ Sabemos que \bar{X}_{125} se parece a $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{125}\right) = \mathcal{N}\left(5, \frac{1}{25}\right)$.

$$P(\bar{X}_{125} < 5,5) = F_{\bar{X}_{125}}(5,5) = \Phi\left(\frac{5,5 - 5}{\sqrt{\frac{1}{25}}}\right) = \Phi(2,5) \approx 0,9938.$$

Intervalos de confianza

Errores en un programa computacional

- ▶ Sea X variable aleatoria asociada a cantidad de errores por semana.
- ▶ Supongamos X sigue una distribución con media desconocida μ y varianza $\sigma^2 = 5$.
- ▶ Hay 125 programas independientes corriendo una semana.
- ▶ Medimos la cantidad de errores promedio, obteniendo $\bar{x}_{125} = 6$.
- ▶ $\bar{x}_{125} = 6$ es una estimación puntual de μ .
- ▶ ¿Entre qué valores está μ , con un 89 % de probabilidad?



Intervalos de confianza

Errores en un programa computacional

- ▶ $\bar{x}_{125} = 6$ es una estimación puntual de μ .
- ▶ ¿Entre qué valores está μ , con un 89 % de probabilidad?

Desarrollo

- ▶ Sabemos que \bar{X}_{125} se parece a $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{125}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{25}\right)$.
- ▶ Podemos escribir $\bar{X}_{125} \approx \frac{1}{5}Z + \mu$, con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ Buscamos el intervalo centrado en 0 para Z :
$$P(-1,598 \leq Z < 1,598) \approx 0,89.$$

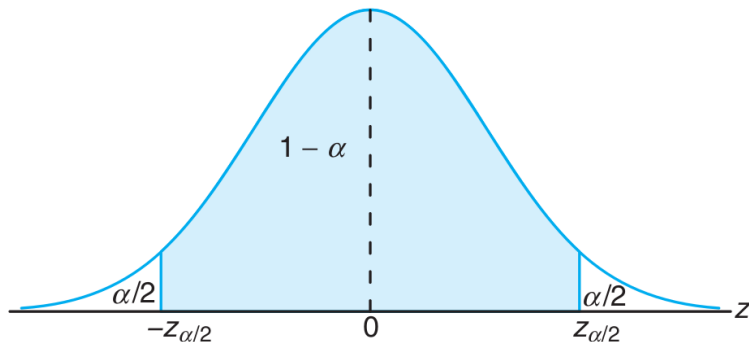
- ▶ Resolvemos para μ :

$$\begin{aligned} P(-1,598 \leq 5(\bar{X}_{125} - \mu) < 1,598) &\approx 0,89 \\ \Rightarrow -6,32 \leq -\mu < -5,68 &\Rightarrow \mu \in (5,68, 6,32]. \end{aligned}$$

Intervalos de confianza

En general

- ▶ Dado un $\alpha \in [0, 1]$.
- ▶ Buscamos un intervalo con un nivel dado de *confianza* $1 - \alpha$.
- ▶ En este curso vamos a suponer intervalos centrados.



Intervalos de confianza

Si conocemos varianza σ^2 y queremos estimar μ

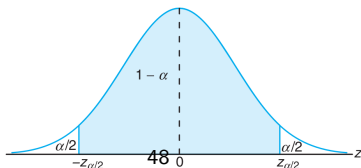
- ▶ Sabemos que \bar{X}_n se parece a $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
- ▶ Podemos escribir $\bar{X}_n \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z + \mu$, con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ Buscamos intervalo centrado para Z :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

- ▶ Resolvemos para μ :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

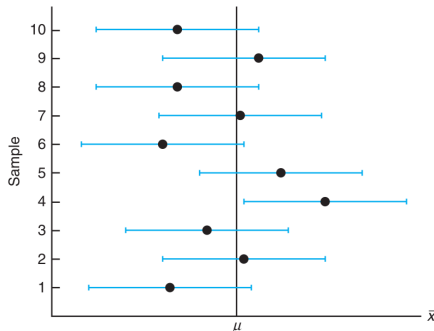
$$\Rightarrow \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}.$$



Intervalos de confianza

Límites del intervalo

- Notar que $\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ son variables aleatorias...



Nota: *Bootstrap*

- Obtener intervalos de confianza usando distintas muestras generadas basadas la muestra original, con repetición.

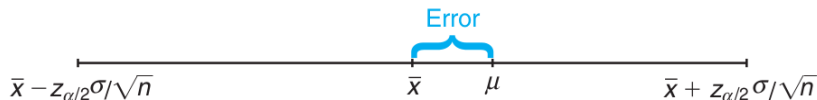
Intervalos de confianza

Frecuentista

- ▶ En este caso μ tiene un valor fijo.
- ▶ La distribución es de \bar{X}_n y los límites del intervalo.

Interpretación

- ▶ Si se usa \bar{X}_n para estimar μ , se tiene confianza de $1 - \alpha$ de que el error no excede $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$.



Interpretación

- ▶ Si se usa \bar{X}_n para estimar μ , se tiene confianza de $1 - \alpha$ de que el error no excede e cuando la muestra es de tamaño $n = \left(\frac{\sigma}{e} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)^2$.

Intervalos de confianza

Si no conocemos varianza σ^2 y queremos estimar μ

- ▶ Supongamos que $X^{(i)}$ tiene distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- ▶ Podemos estimar σ^2 con el estadístico varianza muestral

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - \bar{X}_n)^2.$$

Distribución de la media y varianza muestrales

- ▶ Sabemos que $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
- ▶ Sabemos que $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ es normal estándar, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ $V = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ tiene distribución ji al cuadrado con $n-1$ grados de libertad, $V \sim \chi^2(n-1)$:

$$p_V(v) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} v^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \text{ con } v \in [0, +\infty).$$

Intervalos de confianza

Distribución de la media y varianza muestrales

- ▶ Sabemos que $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
- ▶ Sabemos que $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ es normal estándar, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ $V = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ tiene distribución ji al cuadrado con $n - 1$ grados de libertad, $V \sim \chi^2(n - 1)$:

$$p_V(v) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} v^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \text{ con } v \in [0, +\infty).$$

Teorema

- ▶ La variable aleatoria $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}$ es distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad:

$$p_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Intervalos de confianza

Distribución de la media y varianza muestrales

- ▶ Sabemos que $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ es normal estándar, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ $V = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ tiene distribución ji al cuadrado con $n - 1$ grados de libertad, $V \sim \chi^2(n - 1)$.

Reescribimos T

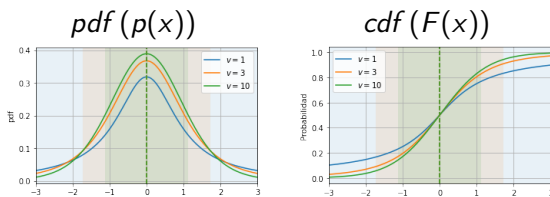
- ▶ La variable aleatoria $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}$ es distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}}.$$

Distribución t de Student con ν grados de libertad $t(\nu)$

Definición

$$p(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$



Propiedades

- ▶ $\mathbb{E}_{X \sim t(\nu)}[X] = \mu_X = 0.$
- ▶ $\mathbb{V}_{X \sim t(\nu)}[X] = \sigma_X^2 = \begin{cases} +\infty & \text{si } \nu \leq 2, \\ \frac{\nu}{\nu-2} & \text{si } \nu > 2 \end{cases}.$

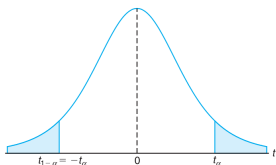
Intervalos de confianza

Si no conocemos varianza σ^2 y queremos estimar μ

- ▶ Supongamos que $X^{(i)}$ tiene distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- ▶ Calculamos media y varianza muestrales \bar{X}_n y S_n^2 .
- ▶ Sabemos que $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}}$ sigue distribución $t(n-1)$.
- ▶ Buscamos intervalo centrado para T :
$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$
- ▶ Resolvemos para μ :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$-\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} < \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}.$$



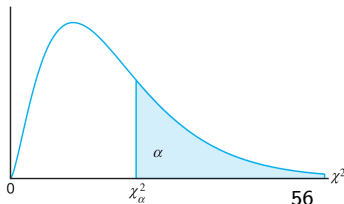
Intervalos de confianza

Si conocemos μ y queremos estimar σ^2

- ▶ Supongamos que $X^{(i)}$ tiene distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- ▶ Sabemos que $V = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ tiene distribución ji al cuadrado con $n - 1$ grados de libertad, $V \sim \chi^2(n - 1)$.
- ▶ Buscamos intervalo centrado para V :
$$P\left(v_{\frac{\alpha}{2}} \leq V < v_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$
- ▶ Resolvemos para σ^2 :

$$P\left(v_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < v_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

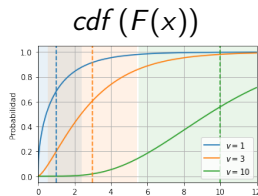
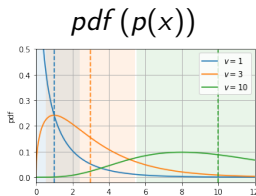
$$\frac{(n-1)S_n^2}{v_{\frac{1-\alpha}{2}}} < \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{v_{\frac{\alpha}{2}}}.$$



Distribución ji al cuadrado ν grados de libertad $\chi^2(\nu)$

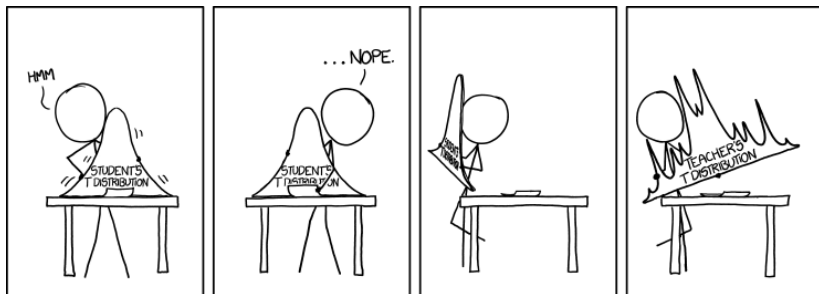
Definición

$$p(x) = \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}.$$



Propiedades

- ▶ $\mathbb{E}_{X \sim \chi^2(\nu)}[X] = \mu_X = \nu.$
- ▶ $\mathbb{V}_{X \sim \chi^2(\nu)}[X] = \sigma_X^2 = 2\nu.$



Estimador insesgado

- ▶ Un estimador $\hat{\theta}$ es *insesgado* si $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ para cualquier valor de θ .
- ▶ En caso contrario, el estimador es sesgado y $\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$ se llama *sesgo*.

Ejemplo: varianza muestral

- ▶ Consideremos el siguiente estimador de la varianza:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X^{(i)} - \bar{X}_n \right)^2.$$

- ▶ ¿Es sesgado?

Ejemplo: varianza muestral

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(X^{(i)} - \bar{X}_n \right)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[X^{(i)2} + \bar{X}_n^2 - 2X^{(i)}\bar{X}_n \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E} \left[X^{(i)2} \right] + \mathbb{E} \left[\bar{X}_n^2 \right] - 2\mathbb{E} \left[X^{(i)}\bar{X}_n \right] \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E} \left[X^{(i)2} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X^{(j)} X^{(k)} \right] - 2\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} X^{(i)} \sum_{j=1}^n X^{(j)} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Ejemplo: varianza muestral

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma^2 + \mu^2}{n} + \frac{(n^2 - n)\mu^2 + n(\sigma^2 + \mu^2)}{n^3} - \frac{2((n-1)\mu^2 + \sigma^2 + \mu^2)}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} (n^2\sigma^2 + n^2\mu^2 + n^2\mu^2 + n\sigma^2 - 2n^2\mu^2 - 2n\sigma^2) \\ &= \frac{(n^2 - n)}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Ejemplo: varianza muestral

- ▶ ¡El estimador $\hat{\sigma}_n^2$ es sesgado!
- ▶ $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

Corrección: varianza muestral con $n - 1$

- ▶ Consideremos el siguiente estimador de la varianza:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X^{(i)} - \bar{X}_n \right)^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n^2.$$

- ▶ Ahora tenemos que:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n-1} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Otros estimadores

¿Cómo podemos obtener estimadores?

- ▶ Minimizar una función de error.
- ▶ Máxima verosimilitud.
- ▶ Máximo a posteriori.

Estimador insesgado de mínima varianza (*MVUE*)

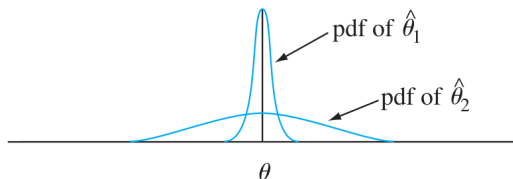
Definición

- ▶ Estimador insesgado de θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta.$$

- ▶ Menor varianza:

$$\hat{\theta} = \underset{\text{e estimador insesgado}}{\arg \min} \mathbb{E}[(e - \theta)^2].$$



Nota

- ▶ Si es que existe, es único. - No siempre existe.

Minimizar una función de error

Error cuadrático medio

- Definición:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E} \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right].$$

- Al igual que antes, se minimiza MSE:

$$\hat{\theta} = \underset{e \text{ estimador}}{\arg \min} \text{MSE}(\hat{\theta}) = \underset{e \text{ estimador}}{\arg \min} \mathbb{E} \left[(e - \theta)^2 \right].$$

Descomposición

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathbb{E} \left[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] + \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E} \left[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2 \right]}_{\text{varianza}} + \underbrace{(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2}_{\text{sesgo}^2} \end{aligned}$$

Minimizar una función de error

Ejemplo

- ▶ Sea $\hat{\theta}_{\text{MVUE}}$ el estimador insesgado de mínima varianza.
- ▶ Sea $\hat{\theta}_{\alpha} = (1 + \alpha)\hat{\theta}_{\text{MVUE}}$ otro estimador.
- ▶ Notar que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{\alpha}] = (1 + \alpha)\theta$. Si $\alpha \neq 0$, es sesgado.

Se tiene que

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_{\alpha}) = (1 + \alpha)^2 \text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MVUE}}) + \alpha^2 \theta^2.$$

El error es menor si

$$-\frac{2\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MVUE}})}{\text{MSE}(\hat{\theta}_{\text{MVUE}}) + \theta^2} < \alpha < 0.$$

Consistencia

Definición

- ▶ Un estimador $\hat{\theta}_n$ es consistente si converge a θ cuando $n \rightarrow \infty$.

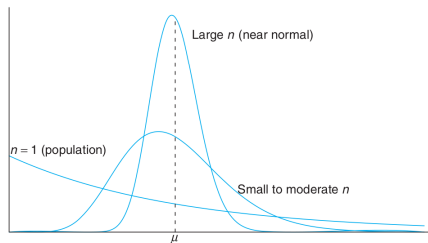
¿Por qué?

- ▶ Todo estimador cuyo sesgo y varianza convergen a 0 si $n \rightarrow \infty$, es consistente.
- ▶ Un estimador insesgado lo es para todo n .
- ▶ Aquí nos interesa que sea bueno cuando n es grande.
- ▶ La media muestral \bar{X}_n es consistente.

Recordar – estimadores

Funciones de la muestra aleatoria

- ▶ $\hat{\theta}_n = g(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)})$.
- ▶ Son variables aleatorias: tienen una distribución de probabilidad.



En realidad no conocemos θ

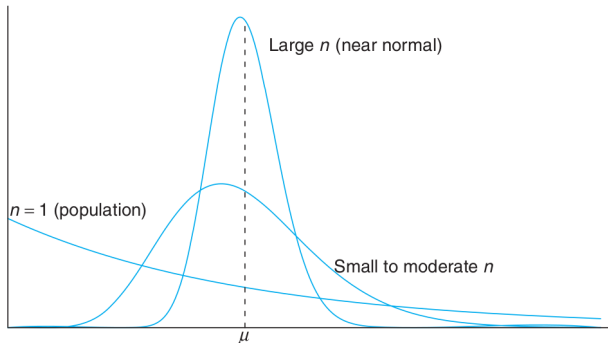
- ▶ Bayes:

$$p(\theta | X_n) = \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)}.$$

Enfoque bayesiano

En realidad no conocemos θ

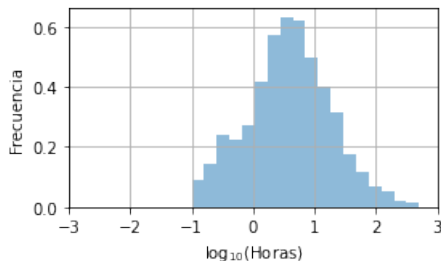
$$p(\theta | X_n) = \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)}.$$



Ejemplo: modelo de distribución normal

Datos

- Logaritmo de cantidad de horas jugadas en promedio de 3000 juegos de plataforma Steam.



Modelo

- Supongamos un modelo como $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Queremos estimar μ y σ^2 .

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Distribución conjunta de μ y σ^2

$$p(\mu, \sigma^2 | X_n) = \frac{\overbrace{p(X_n | \mu, \sigma^2)}^{\text{verosimilitud}} \overbrace{p(\mu, \sigma^2)}^{\text{a priori}}}{\underbrace{p(X_n)}_{\text{evidencia}}}.$$

Componentes

► Verosimilitud:

$$p(X_n | \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n p(x^{(i)} | \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

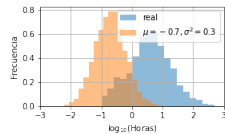
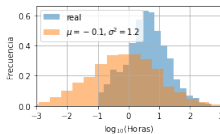
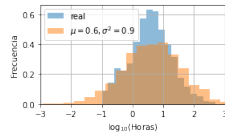
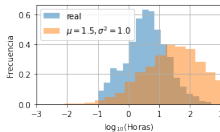
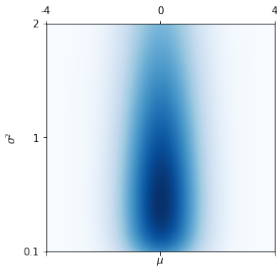
Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Componentes

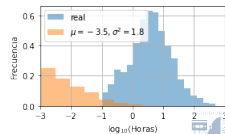
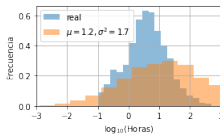
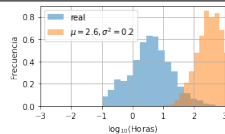
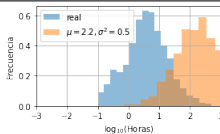
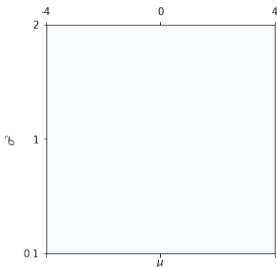
- ▶ A priori: veremos dos casos:
 1. $\mu \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $\sigma^2 \sim \Gamma(1, 5, 0, 01)$.
 2. $\mu \sim U(-4, 4)$ y $\sigma^2 \sim U(0, 1, 2)$.
- ▶ Evidencia: cte. de normalización para $\iint p(\mu, \sigma^2 \mid X_n) d\mu d\sigma^2 = 1$.

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Caso 1

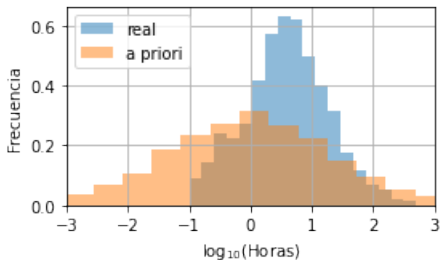
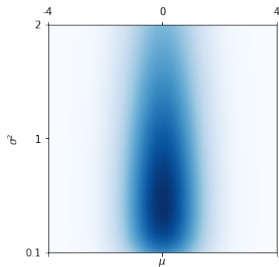


Caso 2

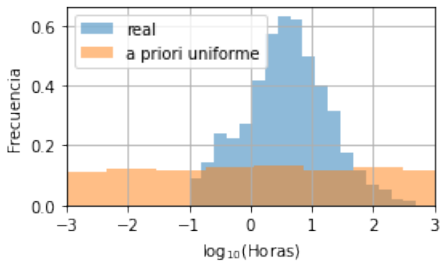
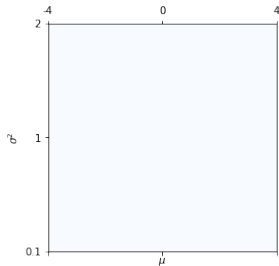


Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

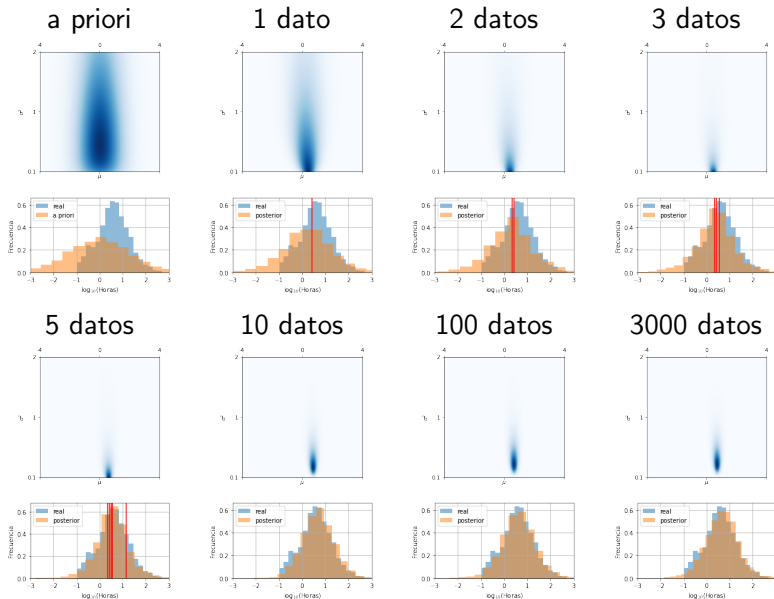
Caso 1



Caso 2

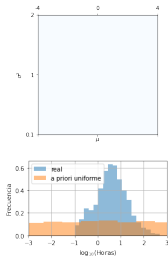


Ejemplo: modelo de distribución normal – caso 1

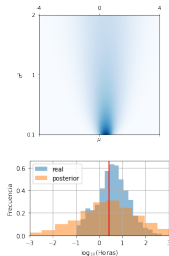


Ejemplo: modelo de distribución normal – caso 2

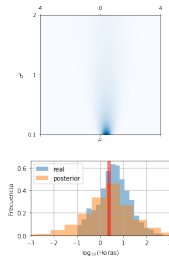
a priori



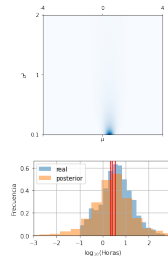
1 dato



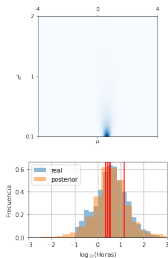
2 datos



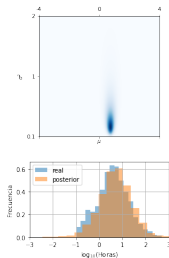
3 datos



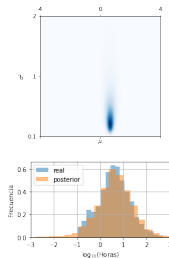
5 datos



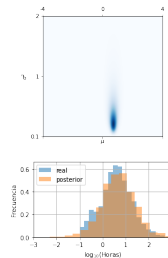
10 datos



100 datos



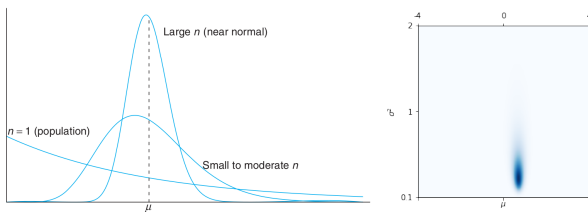
3000 datos



Enfoque bayesiano

Distribución de θ

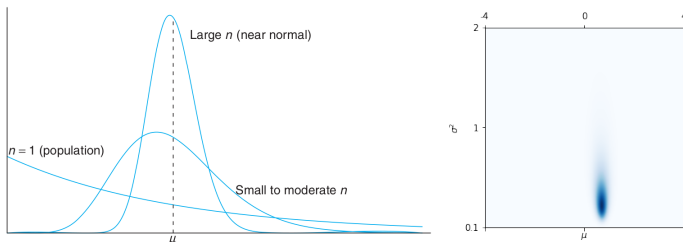
$$p(\theta | X_n) = \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)}.$$



Una posibilidad: buscar el máximo de $p(\theta | X_n)$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &= \arg \max_{\theta} p(\theta | X_n) = \arg \max_{\theta} \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)} \\ &= \arg \max_{\theta} p(X_n | \theta)p(\theta).\end{aligned}$$

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)



Máximo de $p(\theta | X_n)$

- ▶ En este enfoque, se ignora la distribución a priori.
- ▶ En caso de que θ es acotado, sería equivalente a una distribución uniforme a priori.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n | \theta).$$

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

► Verosimilitud:

$$p(X_n \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n p(x^{(i)} \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

► Maximizamos logaritmo con respecto a μ , derivando e igualando a 0:

$$\frac{d[\ln(p(X_n \mid \mu, \sigma^2))]}{d\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (x^{(i)} - \mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}.$$

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$p(X_n \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n p(x^{(i)} \mid \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Maximizamos logaritmo con respecto a σ^2 , derivando e igualando a 0:

$$\begin{aligned} \frac{d[\ln(p(X_n \mid \mu, \sigma^2))]}{d\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\sigma^2} \left[-\frac{1}{2} \left(\ln(\sigma^2) + \frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{\sigma^2} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{(\sigma^2)^2} \right) = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - \mu)^2. \end{aligned}$$

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

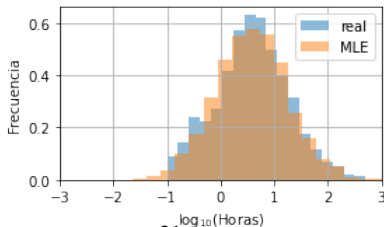
Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Estimadores de máxima verosimilitud (*MLE*):

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)} \text{ y } \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - \mu)^2.$$



Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

- ▶ En este enfoque, se ignora la distribución a priori.
- ▶ En caso de que θ es acotado, sería equivalente a una distribución uniforme a priori.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta).$$

Propiedades

- ▶ Es asintóticamente insesgado: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$.
- ▶ Es asintóticamente consistente: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0$.
- ▶ Es *eficiente* (su varianza es la menor posible para un estimador insesgado. Buscar teorema de Cramér-Rao).
- ▶ Si existe un estadístico suficiente para θ , el estimador de máxima verosimilitud se puede expresar en base a ese estadístico.

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

Ejemplo: distribución de Poisson

- ▶ Muestra $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ de tamaño n .
- ▶ Recordar: $f(x^{(i)}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x^{(i)}}}{x^{(i)}!}$.
- ▶ ¿Estimador $\hat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ de λ ?

Desarrollo

- ▶ Verosimilitud:

$$P(X_n | \lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x^{(i)}}}{x^{(i)}!} = e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}}{\prod_{i=1}^n x^{(i)}!}.$$

- ▶ Maximizamos derivando con respecto a λ e igualando a 0:

$$\left(-n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x^{(i)}\right) e^{-\lambda n + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x^{(i)}} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}.$$

Máxima verosimilitud (*Maximum likelihood estimate MLE*)

Ejemplo: distribución Gamma

- ▶ Muestra $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ de tamaño n .
- ▶ Recordar: $p(x^{(i)}) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(i)\alpha-1} e^{-\beta x^{(i)}}$.
- ▶ ¿Estimador $\hat{\beta}_n^{\text{MLE}}$ de β , si α es conocido?

Desarrollo

- ▶ Verosimilitud:

$$p(X_n | \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(i)\alpha-1} e^{-\beta x^{(i)}} = \frac{\beta^{\alpha n} e^{-\beta \sum_{i=1}^n x^{(i)}}}{\Gamma(\alpha)^n} \prod_{i=1}^n x^{(i)\alpha-1}.$$

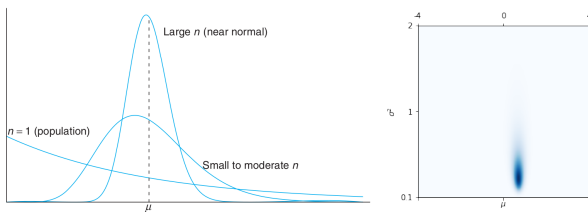
- ▶ Maximizamos derivando con respecto a β e igualando a 0:

$$\left(\frac{\alpha n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x^{(i)} \right) e^{-\beta \sum_{i=1}^n x^{(i)} + \ln(\beta) \alpha n} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_n^{\text{MLE}} = \frac{\alpha n}{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}.$$

Enfoque bayesiano

Distribución de θ

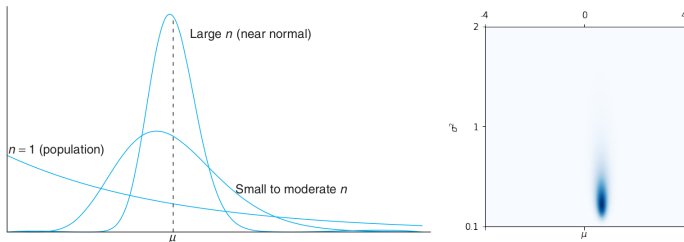
$$p(\theta | X_n) = \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)}.$$



Una posibilidad: buscar el máximo de $p(\theta | X_n)$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n &= \arg \max_{\theta} p(\theta | X_n) = \arg \max_{\theta} \frac{p(X_n | \theta)p(\theta)}{p(X_n)} \\ &= \arg \max_{\theta} p(X_n | \theta)p(\theta).\end{aligned}$$

Máximo a posteriori (*Maximum a posteriori MAP*)



Máximo de $p(\theta | X_n)$

- ▶ En este enfoque, se debe definir un a priori.
- ▶ Como vimos, es más importante cuando n es pequeño.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n | \theta) p(\theta).$$

Máximo a posteriori (*Maximum a posteriori MAP*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta) p(\theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y prior $\mathcal{N}(0, 1)$

$$p(X_n \mid \mu, \sigma^2) p(\mu, \sigma^2) = p(\sigma^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

► Supongamos σ^2 conocido, y estimemos μ :

$$p(X_n \mid \mu) p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Máximo a posteriori (*Maximum a posteriori MAP*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta) p(\theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y prior $\mathcal{N}(0, 1)$

$$p(X_n \mid \mu) p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Maximizamos logaritmo con respecto a μ , derivando e igualando a 0:

$$\frac{d[\ln(p(X_n \mid \mu, \sigma^2) p(\mu, \sigma^2))]}{d\mu} = -\mu + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (x^{(i)} - \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n + \sigma^2} \sum_{i=1}^n x^{(i)}.$$

Máximo a posteriori (*Maximum a posteriori MAP*)

Máximo de $p(\theta \mid X_n)$

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p(X_n \mid \theta)p(\theta).$$

Ejemplo: modelo de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y prior $\mathcal{N}(0, 1)$

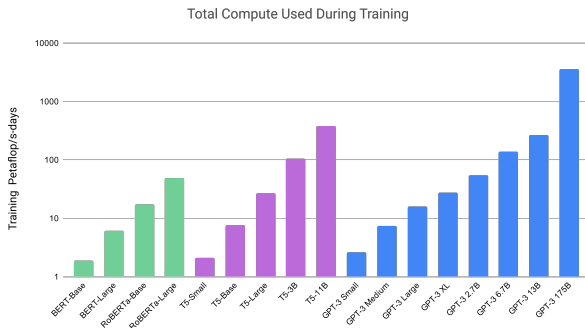
- ▶ Suponiendo:
 - ▶ σ^2 conocido.
 - ▶ A priori $\mu \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- ▶ Entonces el estimador de máximo a posteriori (*MAP*) de μ es:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n + \sigma^2} \sum_{i=1}^n x^{(i)}.$$

Ejemplo: Modelo de lenguaje GPT-3

Model Name	n_{params}	n_{layers}	d_{model}	n_{heads}	d_{head}	Batch Size	Learning Rate
GPT-3 Small	125 M	12	768	12	64	0,5 M	$6,0 \times 10^{-4}$
GPT-3 Med.	350 M	24	1024	16	64	0,5 M	$3,0 \times 10^{-4}$
GPT-3 Large	760 M	24	1536	16	96	0,5 M	$2,5 \times 10^{-4}$
GPT-3 XL	1,3 B	24	2048	24	128	1 M	$2,0 \times 10^{-4}$
GPT-3 2.7B	2,7 B	32	2560	32	80	1 M	$1,6 \times 10^{-4}$
GPT-3 6.7B	6,7 B	32	4096	32	128	2 M	$1,2 \times 10^{-4}$
GPT-3 13B	13,0 B	40	5140	40	128	2 M	$1,0 \times 10^{-4}$
GPT-3 175B	175,0 B	96	12288	96	128	3,2 M	$0,6 \times 10^{-4}$

o "GPT-3"



Aplicación: mezcla de Gaussianas

Ejemplo

- ▶ Se desea modelar una variable aleatoria con un modelo de *mezcla de dos Gaussianas*:

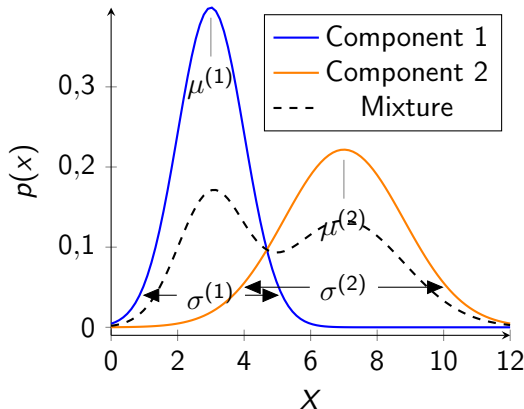
$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \pi_k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

- ▶ $k = 1, 2$ indica la etiqueta de la Gaussiana.
- ▶ Ambas tienen la misma varianza σ^2 , pero distintas medias μ_1 y μ_2 .
- ▶ Se supone una probabilidad a priori para cada clase $\pi_1 = \frac{1}{2}$ y $\pi_2 = \frac{1}{2}$.
- ▶ Se tiene una muestra iid de N datos, donde cada uno proviene de una Gaussiana.

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

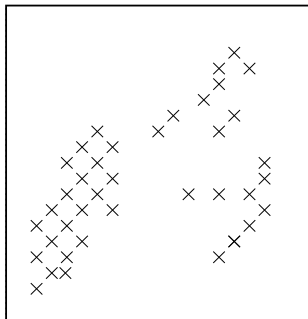
$$p(x | \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \pi_k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$



Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$



Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

Posterior de clases

► Sea k_i la clase asociada al dato i .

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= p(k_i = 1 \mid x^{(i)}, \mu_1, \mu_2, \sigma^2) \\ &= \frac{p(x^{(i)} \mid k_i = 1, \mu_1, \mu_2, \sigma^2) p(k_i = 1)}{p(x^{(i)} \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}} \end{aligned}$$

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

Posterior de clases

$$p_1^{(i)} = \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{2x^{(i)}(\mu_2 - \mu_1) - (\mu_2^2 - \mu_1^2)}{2\sigma^2}}},$$
$$p_2^{(i)} = \frac{1}{1 + e^{\frac{-2x^{(i)}(\mu_2 - \mu_1) + (\mu_2^2 - \mu_1^2)}{2\sigma^2}}}.$$

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Si no conocemos μ_1 y μ_2

► Los buscamos por MLE (máxima verosimilitud):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu_k} \ln \prod_{i=1}^n p(x^{(i)} \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\mu_k} \ln \left[\sum_{k'=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu_{k'})^2}{2\sigma^2}} \right] \\&= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{2} (x^{(i)} - \mu_k) e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu_k)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \sigma^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(i)} - \mu_2)^2}{2\sigma^2}} \right]} \\&= \sum_{i=1}^n p_k^{(i)} \frac{(x^{(i)} - \mu_k)}{\sigma^2} = 0.\end{aligned}$$

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

Si no conocemos μ_1 y μ_2

- ▶ Tenemos que $\hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^n p_k^{(i)} x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n p_k^{(i)}}$, una media muestral “con pesos”.
- ▶ Pero $p_k^{(i)}$ depende de μ_k .
- ▶ Se resuelve con algoritmo que actualiza $p_k^{(i)}$ y $\hat{\mu}_k$ iterativamente.

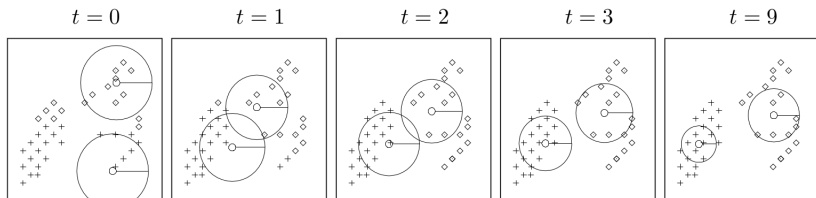
Ejercicio

- ▶ Verifique que la segunda derivada de la verosimilitud es negativa (es un máximo local).

Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

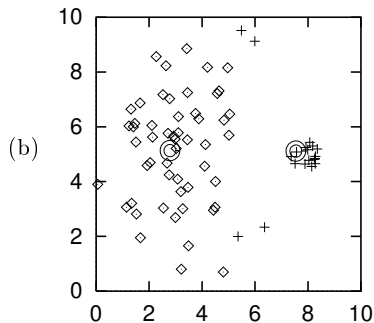
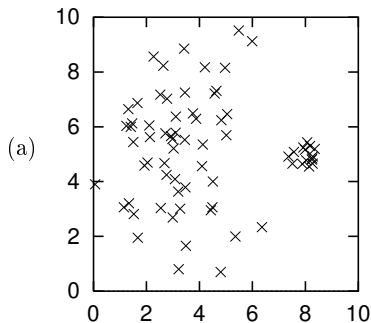
$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$



Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

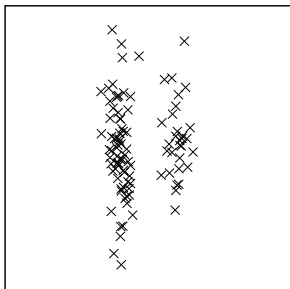


Aplicación: mezcla de Gaussianas

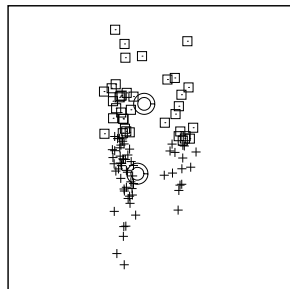
Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

(a)



(b)



Aplicación: mezcla de Gaussianas

Modelo

$$p(x \mid \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}.$$

