

# Probabilidades

## Estadística Computacional

Juan Zamora Osorio  
juan.zamora@pucv.cl

Instituto de Estadística  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

2024



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE  
VALPARAÍSO

# Probabilidades

## Pierre-Simon Laplace

La teoría de la probabilidades en el fondo nada más que sentido común reducido a cálculo; nos permite apreciar con exactitud aquello que las mentes rigurosas pueden sentir con una especie de instinto que a veces no pueden explicar; nos enseña a evitar las ilusiones que con frecuencia nos engañan, ... No hay ciencia más digna de nuestra contemplación, ni más útil para ser incluida en nuestro sistema de enseñanza pública.

# Probabilidades

- ▶ Mecanismo con que podemos estudiar las ocurrencias aleatorias de un fenómeno.
- ▶ Necesitamos poder tomar decisiones basados en la información contenida en una muestra aleatoria.

# Probabilidades

## Típico ejemplo

- ▶ Moneda lanzada al aire.



# Interpretación

## Frecuentista

- ▶ Frecuencia relativa de un evento repetido infinitas veces.
- ▶ Esperamos que la moneda caiga la mitad de las veces cara.

## Bayesiana / subjetiva

- ▶ Incertidumbre sobre un evento.
- ▶ Relacionada con la información.
- ▶ Creemos podría caer tanto cara como cruz.

# Interpretación

## Ejemplos: probabilidad de que...

- ▶ Un paciente tenga COVID-19.
- ▶ Alguien de 68 años muera de cáncer fumando dos cajetillas diarias por 50 años.
- ▶ Un acusado de ser el asesino de su esposa, dada la evidencia.
- ▶ Los poemas escritos por Pablo Neruda hayan sido escritos por otro/a.
- ▶ Un mensaje en aula haya sido enviado por el/la estudiante.

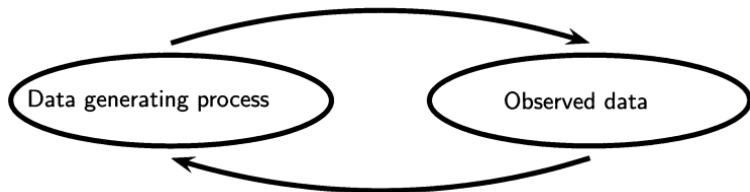
## Bayesiana / subjetiva

- ▶ No se puede hacer inferencia sin supuestos.
- ▶ ¿Bondad o debilidad?

# Recordar

## Probabilidades

- ¿Dado un proceso que genera datos, cuáles son las propiedades que observaremos?

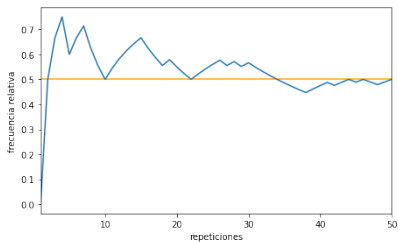


## Inferencia estadística

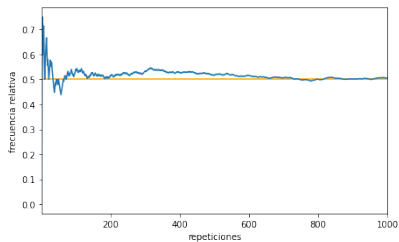
- ¿Dadas las observaciones, qué podemos decir sobre el proceso que genera los datos?

# Ejemplo: moneda

50 repeticiones



1000 repeticiones





# Espacio muestral

## Espacio muestral ( $\Omega$ )

- Conjunto de todos los posibles resultados de un *experimento* aleatorio.

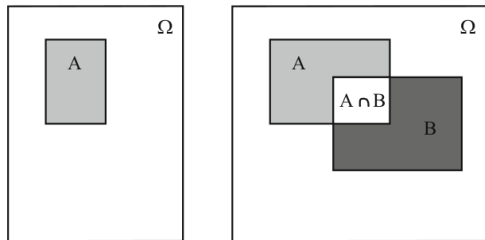
## Ejemplos

- Un dado:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Una moneda:  $\{\text{cara}, \text{sello}\}$ .
- Dos lanzamientos de una moneda:  $\{cc, cs, sc, ss\}$ .
- En una carrera entre tres personas, posiciones de llegada:  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ .
- Ángulo en el que termina una ruleta  $[0, 2\pi]$ .

# Eventos

## Evento

- ▶ Un subconjunto  $A \subseteq \Omega$  del espacio muestral donde al final de un experimento podemos observar si el resultado  $\omega \in \Omega$  está en  $A$ .
- ▶  $\{\omega\} \in \Omega$  evento simple o elemental.
- ▶ Más de un elemento: evento compuesto.
- ▶  $\Omega$  evento seguro.
- ▶  $\emptyset$  evento imposible o nulo.



# Eventos

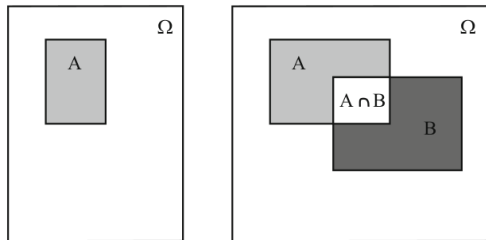
## Ejemplo

- Observar un número par al lanzar un dado:

$$A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Tiempo de vida de un componente electrónico sea menor que 5 años:

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 5\} \subseteq \Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$$



## Ejercicio

- ▶ Construya el espacio muestral para un experimento que consiste en lanzar un solo dado.
- ▶ Encuentre los eventos que corresponden a las frases 'Se obtiene un numero par' y 'Se obtiene un numero mayor a 2'.

## Ejercicio

Un experimento aleatorio consiste en lanzar dos monedas al aire.

- ▶ Construya el espacio muestral para la situación en que las monedas son indistinguibles entre sí.
- ▶ Construya el espacio muestral para la situación en que las monedas sí son distinguibles, por ejemplo de dos denominaciones distintas.

## Ejercicio

Construya el espacio muestral que describa las posibles familias de 3 hijos en terminos de los generos de estos individuos.

# Espacio de eventos ( $\mathcal{A}$ )

- ▶ Conjunto de todos los eventos  $A$ .
- ▶ Si  $\Omega$  es finito, generalmente  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ .

## $\sigma$ -álgebra

- ▶ Colección de subconjuntos de  $\Omega$
- ▶ Si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{A}$ .
- ▶  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
- ▶ Si  $\{A_i\}_{i \in I} = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$  es una colección finita o numerable de eventos, entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ .

# Probabilidad ( $P$ )

- ▶ Función  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que asocia un número a  $A \in \mathcal{A}$ .
- ▶ Indica la probabilidad de obtener un resultado  $\omega \in A$ .
- ▶ Axiomas (Kolmogorov):
  - ▶  $\forall A \subseteq \mathcal{A}, P(A) \geq 0$
  - ▶  $P(\Omega) = 1$ .
  - ▶ Si  $\{A_i\}_{i \in I} = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$  es una colección finita o numerable de eventos *disjuntos*  
( $\forall A_j, A_k \in \{A_i\}_{i \in I}, A_j \cap A_k = \emptyset$ ), entonces  
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$



# Ejemplos

## Proposición

- ▶  $P(\emptyset) = 0$ .

## Demostración

- ▶ Axiomas 2 y 3:

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset).$$

## Proposición

- ▶  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

## Demostración

- ▶ Axiomas 2 y 3:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

# Ejemplos

## Proposición

- ▶  $P(A) \leq 1$ .

## Demostración

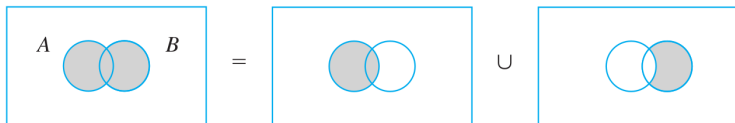
- ▶ Axiomas 1, 2 y 3:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \geq P(A) + 0 = P(A).$$

# Ejemplos

## Proposición

►  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$



## Demostración

► Axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c),$$

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (B \cap A^c)) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

## Ejercicio

Un sistema compuesto por dos componentes A y B, se encuentra cableado de tal manera que pueda funcionar si cualquiera de los dos componentes también lo hace. Se sabe por experimentos anteriores que  $P(A)$  es 0.9,  $P(B)$  es 0.8 y  $P(A \text{ y } B)$  es 0.72.

Determine la probabilidad de que el sistema falle (i.e. No funcione).

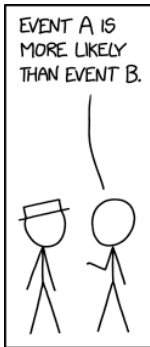
# Relación teoría de conjuntos y teoría de probabilidades

	Conjuntos	Eventos
$\Omega$	Universo	Espacio Muestral
$\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$	Conjunto potencia	Espacio de eventos (*finito)
$A \subseteq \Omega$	$A$ subconjunto de $\Omega$	Evento $A$
$\omega \in A$	Elemento $\omega$	Resultado $\omega$
$\emptyset$	Conjunto vacío	Evento imposible
$\Omega$	Universo	Evento seguro
$A \cup B$	$A$ unión $B$	Evento $A$ o $B$
$A \cap B$	$A$ intersección $B$	Evento $A$ y $B$
$A^c$	Complemento de $A$	Evento no $A$ , opuesto de $A$
$A \subseteq B$	$A$ subconjunto de $B$	$A$ implica $B$
$A \cap B = \emptyset$	$A$ y $B$ disjuntos	$A$ y $B$ mutuamente excluyentes

## Propiedades básicas

Sean  $A$  y  $B$  eventos tales que  $P(A) = \alpha$  y  $P(B) = \beta$ .

1. Acote  $P(A \cap B)$  y  $P(A \cup B)$  inferior y superiormente.
2. Si  $P(A \cap B) = \gamma$ , escriba las siguientes expresiones en función de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ :
  - 2.1  $P(A^c \cup B^c)$ .
  - 2.2  $P(A^c \cap B)$ .
  - 2.3  $P(A^c \cup B)$ .
  - 2.4  $P(A^c \cap B^c)$ .



# ¿Cómo se define el valor?

## Eventos equiprobables (Laplace)

- Si  $\Omega$  es finito y cada evento es igual de probable:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_1\}) = np$$
$$\Rightarrow p = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

- De la misma manera:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n_A} P(\{\omega_i\}) = n_A p = \frac{n_A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$



## Composición de una Escuela

El cuerpo de estudiantes de una escuela se compone según raza y etnia de la siguiente manera: 51 % blanca, 27 % negra, 11 % hispana, 6 % asiática y 5 % de otras. Se selecciona un estudiante al azar de esta escuela. Encuentre las probabilidades de los siguientes eventos:

- ▶ B : El/la estudiante es de raza negra.
- ▶ M: El/estudiante no es blanca (i.e. Es una minoría).
- ▶ N: El/la estudiante no es de raza negra.

## Composición de una otra Escuela

El cuerpo de estudiantes de otra escuela está compuesto por 10 grupos según raza y etnia: 25 % de hombres de raza blanca, 26 % de mujeres de la misma raza, 12 % de hombres de raza negra, 15 % de mujeres de raza negra, 6 % de hombres hispanos, 5 % de mujeres hispanas, 3 % de hombres asiaticos, 3 % de mujeres asiaticas, 1 % de hombres de otras razas minoritarias, y 4 % de mujeres de estas mismas razas combinadas. Se selecciona un estudiante al azar de esta escuela. Encuentre las probabilidades de los siguientes eventos:

- ▶ B : La/el estudiante es de raza negra.
- ▶ MF: La estudiante es una mujer de una minoría.
- ▶ FN: La estudiante es una mujer y no es de raza negra.

# Técnicas de conteo

## Teorema fundamental del Conteo

Si una tarea consiste de  $k$  sub-tareas individuales, de las cuales la  $i$ -ésima puede ser realizada de  $n_i$  maneras ( $i = 1, \dots, k$ ), entonces la tarea completa puede ser realizada de  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  maneras distintas.

# Técnicas de conteo

## Ejemplo - Teorema fundamental del Conteo

En un concurso de lotería se dispone de 44 números ( $1 \dots 44$ ), de los cuales cada participante deberá escoger 6 (sin repetición). El billete ganador será generado finalmente escogiendo al azar 6 números.

Para poder calcular la probabilidad de tener el billete ganador, primero tendremos que calcular cuantos grupos de 6 números pueden ser escogidos.

# Técnicas de conteo

## Ejemplo - Teorema fundamental del Conteo

En un concurso de lotería se dispone de 44 números ( $1 \dots 44$ ), de los cuales cada participante deberá escoger 6 (sin repetición). El billete ganador será generado finalmente escogiendo al azar 6 números.

Para poder calcular la probabilidad de tener el billete ganador, primero tendremos que calcular cuantos grupos de 6 números pueden ser escogidos.

**¿Como cambia el cálculo anterior si ahora escoger el mismo número varias veces?**

# Técnicas de conteo

En ocasiones al contar, debemos contar objetos en un orden particular y en otras este orden no es relevante.

- ▶ Existen 5 candidatos en una elección. Suponiendo que no hay empates, ¿de cuantas formas pueden ocuparse los primeros 3 lugares?
  - ▶ Es importante quien ocupa cada lugar.
- ▶ Un periodista visita un curso de 25 estudiantes para entrevistar a 4 ¿De cuantas maneras se pueden escoger los 4 estudiantes?
  - ▶ A quien se entrevista primero no es relevante.

## Técnicas de conteo

A los arreglos ordenados se les llama **permutaciones** y a los sin orden, **combinaciones**.

	Sin reemplazo	Con reemplazo
C/Orden	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$n^k$
S/Orden	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Estos mecanismos de conteo son útiles cuando el espacio muestral es finito y todos sus resultados equiprobables.

# Técnicas de conteo

- ▶ Por lo tanto, para un espacio  $S$  con  $N$  resultados implica que  $P(\{s_i\}) = \frac{1}{N}$



$$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(\{s_i\}) = \sum_{s_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{\# \text{ elementos en } A}{\# \text{ elementos en } S}$$

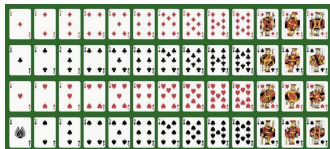
- ▶ Las estrategias de conteo pueden ser usadas para calcular tanto las expresiones del numerador como del denominador.



# Problemas de conteo

Considere una mano de poker de 5 cartas tomadas desde un deck standard de 52 cartas.

- ▶ No hay reemplazo y el orden no es relevante
- ▶ ¿Cual es el espacio muestral?
- ▶ ¿Cual es el total de manos de 5 cartas?
- ▶ ¿Cual es la probabilidad de tener una mano con 4 aces?



# Problemas de conteo

Considere una mano de poker de 5 cartas tomadas desde un deck standard de 52 cartas.

- ▶ ¿Cual es la probabilidad de obtener 4 cartas del mismo tipo?
- ▶ ¿...de tener exactamente un par?



# Probabilidad condicional

## Ejemplo: género de recién nacido/a

- ▶ Juan tiene dos hijos o hijas. La mayor es una chica, ¿Probabilidad de que ambas sean chicas?
- ▶ María tiene dos hijas o hijos. Una de ellas es chica. ¿Probabilidad de que ambas sean chicas?

# Probabilidad condicional

## Ejemplo: examen

- Probabilidad de examen positivo, si tiene enfermedad.
- Probabilidad de examen positivo, si no tiene enfermedad.

	Enfermedad	No Enfermedad
Examen Positivo	290	10000
Examen Negativo	10	200000

# Probabilidad condicional

## Ejemplo: examen

- ▶ Probabilidad de tener enfermedad, si examen es positivo.
- ▶ Probabilidad de tener enfermedad, si examen es negativo.

	Enfermedad	No Enfermedad
Examen Positivo	290	10000
Examen Negativo	10	200000

## Probabilidad condicional



REMINDER: A 50% INCREASE  
IN A TINY RISK IS *STILL TINY*.

# Independencia

## Definición

- ▶ Sean  $A$  y  $B$  dos eventos. Son independientes si y solo si:

$$P(A \mid B) = P(A).$$

- ▶ Equivale a:

$$P(A, B) = P(A)P(B).$$

## Interpretación

- ▶ Conocer parte de un resultado no nos dice nada del otro.
- ▶ Conocer  $B$  no tiene efecto en la probabilidad de  $A$ .

# Independencia

## Ejemplo: lanzamiento de dados

- Probabilidad de que el segundo dado sea par, si el primero es 3.
- Probabilidad de que el segundo dado sea par, si el primero es impar.

$\Omega$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



# Independencia

Ejemplo: Obtener al menos un seis en 4 lanzamientos de un dado.

- ▶ Cada lanzamiento es independiente de los demás
- ▶ En cada lanzamiento la probabilidad de obtener un 6 es de  $\frac{1}{6}$  y de no obtenerlo es  $\frac{5}{6}$

$$P(A \mid B)$$

# Regla del producto

## Otra manera de escribir probabilidad condicional

- Sean  $A$  y  $B$  dos eventos:

$$P(A, B) = P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A).$$

- Sea  $\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\}$  familia de eventos:

$$\begin{aligned} P(A_1, \dots, A_n) &= P(A_1 \mid A_2, \dots, A_n)P(A_2, \dots, A_n) \\ &= P(A_1 \mid A_2, \dots, A_n)P(A_2 \mid A_3, \dots, A_n)P(A_3, \dots, A_n) \\ &\quad \vdots \\ &= P(A_n) \prod_{i=1}^{n-1} P(A_i \mid A_{i+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

# Ley de probabilidad total

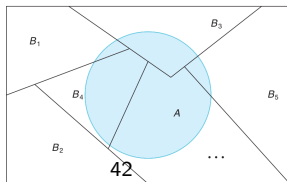
## Eventos disjuntos / partición

- ▶  $\{B_1, \dots, B_n\}$  familia de eventos.
- ▶ Eventos disjuntos o mutuamente excluyentes:  
 $\forall i, j, B_i \cap B_j = \emptyset$ .
- ▶ Partición: disjuntos y  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ .

## Ley de probabilidad total

- ▶ Sea  $\{B_1, \dots, B_n\}$  partición de  $\Omega$ :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \mid B_i)P(B_i).$$



# Regla / Teorema de Bayes

## Dos eventos

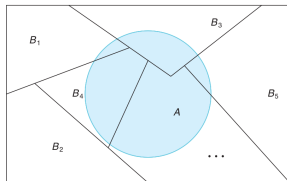
- Sean  $A$  y  $B$  dos eventos:

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}.$$

## Eventos disjuntos

- Sea  $A$  un evento y  $\{B_1, \dots, B_n\}$  partición de  $\Omega$ :

$$\forall i, P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j)P(B_j)}.$$



# Regla / Teorema de Bayes

## Actualización de estado de creencia

$$\underbrace{P(B | A)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(A | B)}^{\text{verosimilitud}} \overbrace{P(B)}^{\text{prior}}}{\underbrace{P(A)}_{\text{evidencia}}}.$$

- ▶  $P(B)$  probabilidad a priori (*prior*).
- ▶  $P(A | B)$  verosimilitud de  $B$  (*likelihood*).
- ▶  $P(A)$  evidencia.
- ▶  $P(B | A)$  probabilidad a posteriori (*posterior*).

# Regla / Teorema de Bayes

## Ejemplo mensajes Morse

Considere la transmisión de mensajes codificados mediante secuencias de '.' y '\_'. La ocurrencia de estos símbolos sucede en proporción de 3:4, por lo tanto:

$$P(\{.env\}) = \frac{3}{7} \text{ y } P(\{\_env\}) = \frac{4}{7}$$

Existen *Interferencia*. Un '.' es erróneamente recibido como '\_' (y **viceversa**) con probabilidad  $\frac{1}{8}$

¿? Al recibir un '.', ¿qué tan seguros podemos estar de que fue un '.' lo que se envió?



# Regla / Teorema de Bayes

## Eventos disjuntos

- ▶  $\{B_1, \dots, B_n\}$  partición de  $\Omega$ :

$$\forall i, P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j)P(B_j)}.$$



# Regla / Teorema de Bayes

## Ejemplo: examen

- ▶  $P(\text{examen positivo} \mid \text{enfermedad}) = \frac{290}{10+290} = \frac{29}{30} \approx 0,97.$
- ▶  $P(\text{examen negativo} \mid \text{enfermedad}) = \frac{10}{10+290} = \frac{1}{30} \approx 0,03.$
- ▶  $P(\text{examen positivo} \mid \text{no enfermedad}) = \frac{10000}{10000+200000} = \frac{1}{21} \approx 0,05.$
- ▶  $P(\text{examen negativo} \mid \text{no enfermedad}) = \frac{200000}{10000+200000} = \frac{20}{21} \approx 0,95.$

	Enfermedad	No Enfermedad
Examen Positivo	290	10000
Examen Negativo	10	200000

## Pregunta

- ▶ ¿ $P(\text{enfermedad} \mid \text{examen positivo})$ ?

# Regla / Teorema de Bayes

## Ejemplo: examen

- ▶  $P(\text{examen positivo} \mid \text{enfermedad}) = 0,97.$
- ▶  $P(\text{examen negativo} \mid \text{enfermedad}) = 0,03.$
- ▶  $P(\text{examen positivo} \mid \text{no enfermedad}) = 0,05.$
- ▶  $P(\text{examen negativo} \mid \text{no enfermedad}) = 0,95.$

## Pregunta

- ▶ ¿ $P(\text{enfermedad} \mid \text{examen positivo})$ ?

# Regla / Teorema de Bayes

## Ejemplo: alarma, parte 1

- ▶ Cristián maneja desde Valparaíso a San Felipe por trabajo.
- ▶ Mientras trabaja, recibe una llamada de sus vecinos que le dicen que está sonando la alarma de su casa.
- ▶ ¿Probabilidad de que haya entrado un ladrón en su casa?

## Ejemplo: alarma, parte 2

- ▶ Mientras maneja de vuelta a su casa para ver qué sucedió, escucha en la radio que hubo un pequeño temblor cerca de su casa en Valparaíso.
- ▶ Se siente aliviado: “probablemente fue el temblor el que activó la alarma”.
- ▶ ¿Probabilidad de que haya entrado un ladrón en su casa?

# Regla / Teorema de Bayes – alarma

## Supuestos

- ▶ Ladrón cada tres años:  $P(L) = 0,001$ .
- ▶ Terremoto cada tres años:  $P(T) = 0,001$ .
- ▶ Ladrón independiente de terremoto:  $P(L, T) = P(L)P(T)$ .
- ▶ Alarma suena:
  - ▶ 99 % de las veces que hay un ladrón.
  - ▶ 1 % de las veces que hay un terremoto.
  - ▶ Otros eventos disparan la alarma con frecuencia 0,001.
- ▶ Vecinos nunca llaman si la alarma no suena:  $P(V | A^c) = 0$ .
- ▶ Radio no anuncia terremotos que no ocurrieron:  
 $P(R | T^c) = 0$ .

### Supuestos de alarma

- ▶  $P(A^c \mid L, T) = (1 - 0,001)(1 - 0,99)(1 - 0,01) = 0,0098901.$
- ▶  $P(A^c \mid L^c, T) = (1 - 0,001)(1 - 0,01) = 0,98901.$
- ▶  $P(A^c \mid L, T^c) = (1 - 0,001)(1 - 0,99) = 0,00999.$
- ▶  $P(A^c \mid L^c, T^c) = 1 - 0,001 = 0,999.$
- ▶  $P(A \mid L, T) = 1 - (1 - 0,001)(1 - 0,99)(1 - 0,01) = 0,9901099.$
- ▶  $P(A \mid L^c, T) = 1 - (1 - 0,001)(1 - 0,01) = 0,01099.$
- ▶  $P(A \mid L, T^c) = 1 - (1 - 0,001)(1 - 0,99) = 0,99001.$
- ▶  $P(A \mid L^c, T^c) = 0,001.$

# Regla / Teorema de Bayes – alarma

## Posterior

- ▶  $P(L, T | A) = \frac{1}{P(A)} P(A | L, T) P(L) P(T).$
- ▶  $P(L^c, T | A) = \frac{1}{P(A)} P(A | L^c, T) P(L^c) P(T).$
- ▶  $P(L, T^c | A) = \frac{1}{P(A)} P(A | L, T^c) P(L) P(T^c).$
- ▶  $P(L^c, T^c | A) = \frac{1}{P(A)} P(A | L^c, T^c) P(L^c) P(T^c).$

## Posterior – caso 1

- ▶  $P(L, T | A) = 0,9901099 \times 0,001 \times 0,001 \frac{1}{P(A)} = 9,9 \times 10^{-7} \frac{1}{P(A)}.$
- ▶  $P(L^c, T | A) = 0,01099 \times 0,999 \times 0,001 \frac{1}{P(A)} = 0,000010979 \frac{1}{P(A)}.$
- ▶  $P(L, T^c | A) = 0,99001 \times 0,001 \times 0,999 \frac{1}{P(A)} = 0,000989 \frac{1}{P(A)}.$
- ▶  $P(L^c, T^c | A) = 0,001 \times 0,999 \times 0,999 \frac{1}{P(A)} = 0,000998 \frac{1}{P(A)}.$
- ▶  $P(A) = \text{Suma} = 0,002.$

# Regla / Teorema de Bayes – alarma

## Ejemplo: alarma, parte 1

- ▶ Cristián maneja desde Valparaíso a San Felipe por trabajo.
- ▶ Mientras trabaja, recibe una llamada de sus vecinos que le dicen que está sonando la alarma de su casa.
- ▶ ¿Probabilidad de que haya entrado un ladrón en su casa?

## Posterior – caso 1

- ▶  $P(L, T \mid A) = 0,0005$ .
- ▶  $P(L^c, T \mid A) = 0,0055$ .
- ▶  $P(L, T^c \mid A) = 0,4947$ .
- ▶  $P(L^c, T^c \mid A) = 0,4993$ .
- ▶ Respuesta:  $P(L \mid A) = P(L, T \mid A) + P(L, T^c \mid A) \approx 0,495$ .

# Regla / Teorema de Bayes – alarma

## Ejemplo: alarma, parte 2

- ▶ Mientras maneja de vuelta a su casa para ver qué sucedió, escucha en la radio que hubo un pequeño temblor cerca de su casa en Valparaíso.
- ▶ Se siente aliviado: “probablemente fue el temblor el que activó la alarma”.
- ▶ ¿Probabilidad de que haya entrado un ladrón en su casa?

## Posterior – caso 2

- ▶  $P(L, T | A) = 0,0005$ .
- ▶  $P(L^c, T | A) = 0,0055$ .
- ▶  $P(L, T^c | A) = 0,4947$ .
- ▶  $P(L^c, T^c | A) = 0,4993$ .
- ▶ Respuesta: 
$$P(L | A, T) = \frac{P(L, T | A)}{P(T | A)} = \frac{P(L, T | A)}{P(L, T | A) + P(L^c, T | A)} = \frac{0,0005}{0,0005 + 0,0055} \approx 0,08.$$



# Regla / Teorema de Bayes – videos recomendados

## Probabilidades y teorema de Bayes

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=HZGCoVF3YvM>.
- ▶ [https://www.youtube.com/watch?v=U\\_85TaXbeIo](https://www.youtube.com/watch?v=U_85TaXbeIo).

## Paradoja del examen médico

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=lG4VkPoG3ko>.

# Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

## Canal ruidoso

- ▶ Probabilidad de cambiar un bit:  $f$ .

## Código de repetición

- ▶ Si se quiere comunicar 1, se envía 111.
- ▶ Si se quiere comunicar 0, se envía 000.

## Ejemplo

- ▶ Se recibe mensaje 000 001 111 000 010 111 000.
- ▶ ¿Cuál es el mensaje original?

# Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

## Ejemplo

- ▶ Se recibe mensaje 000 001 111 000 010 111 000.
- ▶ ¿Cuál es el mensaje original?

## Bayes

$$P(\text{bit} \mid r_1 r_2 r_3) = \frac{P(r_1 r_2 r_3 \mid \text{bit}) P(\text{bit})}{P(r_1 r_2 r_3)}.$$

# Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

## Ruido al comunicar un bit por el canal

- ▶  $P(0 | 0) = 1 - f.$
- ▶  $P(1 | 0) = f.$
- ▶  $P(0 | 1) = f.$
- ▶  $P(1 | 1) = 1 - f.$

## Tres bits recibidos

- ▶  $P(000 | 0) = (1 - f)^3.$
- ▶  $P(001 | 0) = (1 - f)^2 f.$
- ▶  $P(011 | 0) = (1 - f) f^2.$
- ▶  $P(111 | 0) = f^3.$

## Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

Recibido	Enviado	Original	
000	000	0	$P(000   0) = (1 - f)^3$
000	111	1	$P(000   1) = f^3$
001	000	0	$P(001   0) = (1 - f)^2 f$
001	111	1	$P(001   1) = (1 - f) f^2$
010	000	0	$P(010   0) = (1 - f)^2 f$
010	111	1	$P(010   1) = (1 - f) f^2$
100	000	0	$P(100   0) = (1 - f)^2 f$
100	111	1	$P(100   1) = (1 - f) f^2$
011	000	0	$P(011   0) = (1 - f) f^2$
011	111	1	$P(011   1) = (1 - f)^2 f$
101	000	0	$P(101   0) = (1 - f) f^2$
101	111	1	$P(101   1) = (1 - f)^2 f$
110	000	0	$P(110   0) = (1 - f) f^2$
110	111	1	$P(110   1) = (1 - f)^2 f$
111	000	0	$P(111   0) = f^3$
111	111	1	$P(111   1) = (1 - f)^3$

# Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

## Ejemplo

- ▶ Se recibe mensaje 000 001 111 000 010 111 000.
- ▶ ¿Cuál es el mensaje original?

## Posterior

- ▶ Elegimos el bit con mayor posterior.
- ▶ Calculamos la razón entre bit 0 y 1:

$$\text{razón}(r_1 r_2 r_3) = \frac{P(0 | r_1 r_2 r_3)}{P(1 | r_1 r_2 r_3)} = \frac{\frac{P(r_1 r_2 r_3 | 0)P(0)}{P(r_1 r_2 r_3)}}{\frac{P(r_1 r_2 r_3 | 1)P(1)}{P(r_1 r_2 r_3)}} = \frac{P(r_1 r_2 r_3 | 0)P(0)}{P(r_1 r_2 r_3 | 1)P(1)}.$$

- ▶  $P(0)$  y  $P(1)$  no dependen del mensaje.
- ▶ Necesitamos solo la razón de la verosimilitud  $\frac{P(r_1 r_2 r_3 | 0)}{P(r_1 r_2 r_3 | 1)}.$

## Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

► Ejemplo:

$$\text{razón}(000) = \frac{P(000 | 0) P(0)}{P(000 | 1) P(1)} = \frac{(1 - f)^3 P(0)}{f^3 P(1)} = \gamma^3 \frac{P(0)}{P(1)}.$$

## Ejemplo: mensaje por canal ruidoso

### Ejemplo

- ▶ Se recibe mensaje 000 001 111 000 010 111 000.
- ▶ ¿Cuál es el mensaje original?

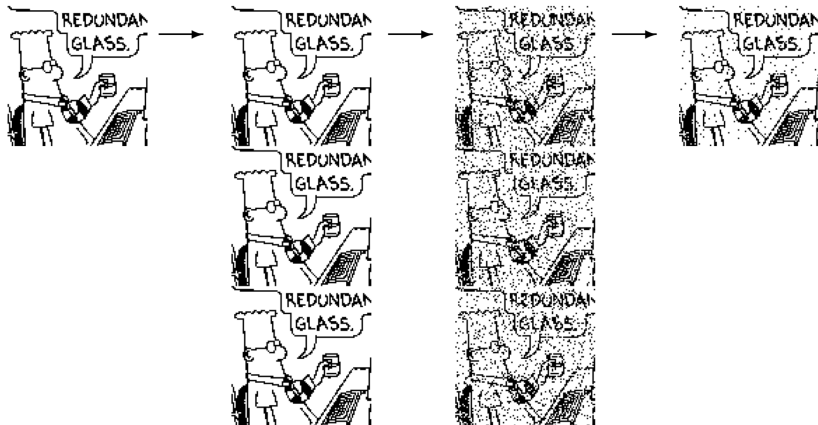
Bits recibidos	Razón de verosimilitud	Respuesta
000	$\gamma^3$	0
001	$\gamma$	0
010	$\gamma$	0
100	$\gamma$	0
011	$\gamma^{-1}$	1
101	$\gamma^{-1}$	1
110	$\gamma^{-1}$	1
111	$\gamma^{-3}$	1

### Respuesta

- ▶ Si  $P(0) = P(1)$ , el mensaje recuperado es 0010010.



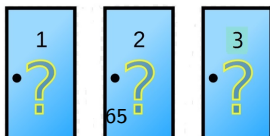
## Ejemplo: mensaje por canal ruidoso



# Problema de Monty Hall

## Funcionamiento del juego

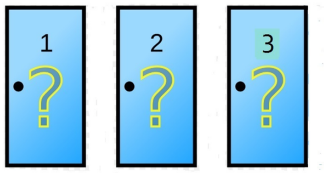
- ▶ Hay tres puertas, etiquetadas como 1, 2 y 3.
- ▶ Hay un premio, atrás de una sola de las puertas.
- ▶ Se selecciona una puerta donde se cree que se encuentra el premio.
- ▶ En vez de abrir esa puerta, el presentador abre una de las otras dos puertas, de manera de abrir una puerta que no tiene el premio.
- ▶ Se ofrece la alternativa de quedarse con la puerta seleccionada, o cambiarse a la otra que quedó cerrada.
- ▶ Finalmente, se abren todas las puertas y se recibe lo que haya detrás de la puerta seleccionada.



# Monty Hall – Tres puertas, reglas normales

## Pregunta de ejemplo

- ▶ Participante elige puerta 1 primero.
- ▶ Presentador abre puerta 3, mostrando que no hay nada en esa puerta.
- ▶ El participante debería:
  - ▶ Quedarse con la puerta 1.
  - ▶ Cambiar a la puerta 2.
  - ▶ No hay diferencia si elige puerta 1 o 2.



# Monty Hall – Tres puertas, escenario temblor

## Cambio en el juego

- ▶ Cuando el presentador se dispone a abrir una de las puertas, hay un temblor y se abre la misma puerta 3, que no tiene el premio.
- ▶ El presentador dice “ah, bueno, ahora que se abrió una puerta, sigamos adelante”.
- ▶ Se ofrece la alternativa de quedarse con la puerta seleccionada, o cambiarse a la otra que quedó cerrada.
- ▶ Finalmente, se abren todas las puertas y se recibe lo que haya detrás de la puerta seleccionada.

## El participante debería

- ▶ Quedarse con la puerta 1.
- ▶ Cambiar a la puerta 2.
- ▶ No hay diferencia si elige puerta 1 o 2.

# Monty Hall – Ejercicio

## Muchas puertas

- ▶ En vez de 3 puertas, hay un millón de ellas.
- ▶ Luego de seleccionar la primera puerta, el presentador abre 999998 puertas que no tienen el premio atrás, dejando solo dos puertas cerradas.
- ▶ Por ejemplo, participante eligió puerta 1 y luego quedan cerradas solo las puertas 1 y 234598.
- ▶ ¿Dónde cree que está el premio?

## Regla general (Steve Gull)

- ▶ *Siempre escribir la probabilidad de todo.*

## Interpretación probabilidades – UK Met Office

- ▶ Supongamos que la oficina dice que la probabilidad de llover mañana en tu región es de 80 %. No están diciendo que lloverá en un 80 % del área de terreno de tu región, y no lloverá en el restante 20 %. Tampoco están diciendo que lloverá un 80 % del tiempo. Lo que están diciendo es que hay una posibilidad de un 80 % de que llueva en cualquier lugar de la región, como tu jardín.
- ▶ Un pronóstico de 80 % de posibilidad de lluvia en tu región debería significar más o menos que, en alrededor de un 80 % de los días en que las condiciones climáticas son como las de mañana, se experimentará lluvia donde estás.
- ▶ Si no llueve en tu jardín mañana, entonces el pronóstico de 80 % no está equivocado, porque no dijo que la lluvia era segura. Pero si miras a lo largo de los días, en que la oficina dijo que la probabilidad de lluvia era un 80 %, deberías esperar que haya llovido en alrededor de un 80 % de ellos.