Recursión

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023

INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
IES PUCV

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Introducción

Introducción

- En ocasiones es dificil definir una función u objeto de manera explícita
- Alternativa: Definición en función de sí mismo
- Siempre tiene dos partes: Base y parte recursiva
  - La base está compuesta por casos simples explícitamente definidos
  - La parte recursiva generaliza sobre nuevos casos definidos en función de otros anteriores

Secuencias definidas recursivamente

Secuencias definidas recursivamente

- Es una lista inifinita de objetos enumerados en algún orden
- Denominemos al k-ésimo objeto como $S(k)$

$$S(1), S(2), \ldots S(k), \ldots$$

- Una secuencia definida recursivamente cuando $S(k)$ se define en función de alguno(s) de lo(s) $k-1$ previos objetos

Ejemplo

Considere la siguiente secuencia definida recursivamente

$$\begin{aligned} 1. \quad S(1) &= \; 1 \\ 2. \quad S(n) &= \; 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- Podemos verificar que $S(2) = 2$, $S(3) = 4$ y luego $8, 16, 32 \ldots$

Actividad

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$

Escriba los primeros 5 valores de la secuencia T

Actividad: Fibonacci

Sugerencia: Revise el siguiente video

$$\begin{aligned} 1.\quad F(1) &= 1 \\ 2.\quad F(2) &= 1 \\ 3.\quad F(n) &= F(n-2) + F(n-1), \text{ para } n > 2 \end{aligned}$$

- Escriba los primeros 8 valores de la secuencia F
- Calcule el cuociente entre varios valores sucesivos de F y averigue acerca de la razón dorada

Conjuntos definidos recursivamente

Conjuntos definidos recursivamente

- Previamente, los objetos tenían un orden
- Los conjuntos **no** tienen este ordenamiento
- Se especifican algunos elementos iniciales
- Se provee de una regla para construir nuevos elementos a partir de los ya existentes

Ejemplo

Considere el subconjunto S de los enteros, que se define como

1. Paso base: $4 \in S$
2. Paso recursivo: Si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $x + y \in S$

- Así entonces el conjunto S estará conformado por $4 + 4 = 8; 4 + 8 = 12; 8 + 8 = 16 \dots$
- Será el de los múltiplos de 4

Actividad

Considere el conjunto A^* de todas las palabras de largo finito sobre un alfabeto A. Luego, se define recursivamente siguiendo las reglas:

1. La palabra sin símbolos (vacía) λ pertenece a A^*
2. Cualquier símbolo de A pertenece a A^*
3. Si x e y son palabras en A^*, entonces también lo será xy, es decir la concatenación de las palabras x e y

- Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$. Si $x = 1101$ e $y = 001$, **escriba** las palabras xy, yx y $yx\lambda x$.

Actividad

Entregue una definición recursiva para el conjunto de todas las palabras binarias que se leen de igual manera de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1001 y 11011.

Solución.

Sea $\mathsf{A} = \{0, 1, \lambda\}$.

1. λ, 0, 1 $\in \mathsf{A}^*$
2. Si $x \in \mathsf{A}^*$, entonces también $0x0$ y $1x1$

Operaciones definidas recursivamente

- Ciertas operaciones sobre objetos pueden ser definidas recursivamente
- Por ejemplo, la exponenciación sobre un número real distinto de 0

$$
\begin{aligned}
1. \quad p^0 &= 1 \\
2. \quad p^n &= (p^{n-1}) \cdot p, \ \forall n \geq 1
\end{aligned}
$$

- O la multiplicación de dos enteros m y n

$$\begin{array}{lll} 1. & m(1) & = m \\ 2. & m(n) & = m(n-1) + m, \ \forall n \geq 1 \end{array}$$

- **Ejemplo**

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

Ejemplo (solución)

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

$$\begin{array}{lll} 1. & x^0 = & x \\ 2. & x^n = & x^{n-1}x, \ \forall n \geq 1 \end{array}$$

Algoritmos definidos recursivamente

- En palabras simples, es un programa que en su cuerpo tiene llamadas a sí mismo
- Recordemos la secuencia

$$
\begin{aligned}
1.\quad S(1) &= 2\\
2.\quad S(n) &= 2\cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2
\end{aligned}
$$

- Calcule $S(2), S(3), S(4)$ y $S(5)$.

- Considere un programa que evalua $S(n)$

```
Procedimiento S(n un nro entero)$
  Si n = 1 entonces
    retornar 2
  Sino
    i = 2
    val = 2
    mientras i <= n hacer
      val = 2 * val
      i = i + 1
    fin de bloque mientras

    retornar val
  fin de bloque Si
fin de procedimiento
```

- Otro enfoque consiste en una definición mucho más corta (**Observe**)

```
Procedimiento S(n un nro entero)$
  Si n = 1 entonces
    retornar 2
  Sino
    retornar 2 * S(n-1)
  fin de bloque Si
fin de procedimiento
```

- Analice como se calcula $S(3)$ con este código.

Ventajas relativas en algoritmos recursivos e iterativos

- Recursividad ofrece (en ocasiones) una manera más natural para muchos problemas
- Recursividad genera procedimientos más cortos
- Operación de alg. recursivo es más compleja
- Ejecución de Alg. recursivo consume más memoria

Actividad

Recuerde la secuencia antes vista y escriba una función recursiva para calcular $T(n)$

$$\begin{array}{ll} 1. & T(1) = \quad 1 \\ 2. & T(n) = \quad T(n-1) + 3, \text{ para } n \geq 2 \end{array}$$

Actividad

Recuerde la operación recursiva par multiplicar dos números y construya un pseudocódigo para ella.

Conclusiones

- Muchos problemas pueden ser analizados más naturalmente bajo una perspectiva recursiva
- El "secreto" de una recursividad efectiva está en entregarle a cada llamada una versión más pequeña o simple del problema
- Nunca olvidar la definición del caso base... todo depende de ello!

Imagine que una persona deposita \$10.000 en una cuenta de ahorro de un banco con un %11 de interés anual compuesto. ¿Cuanto se habrá reunido en la cuenta después de 30 años?

- Anteriormente, construímos procedimientos para calcular

$$\begin{aligned} 1.\quad S(1) &= \; 2 \\ 2.\quad S(n) &= \; 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- Luego, al calcular otros valores de la función

$$
\begin{array}{rll}
1. & S(1) = & 2^1 \\
2. & S(2) = & 2^2 \\
3. & S(3) = & 2^3 \\
4. & S(4) = & 2^4 \\
 & \dots & \\
n. & S(n) = & 2^n
\end{array}
$$

- Ahora vemos que basta con calcular $S(n)$ para cualquier número **sin** necesidad de tener que obtener los $n-1$ pasos previos.

Caso base: $S(1) = 2$

Suponemos: $S(k) = 2^k$

Luego probar que $S(k+1) = 2^{k+1}$

si: $S(k+1) = 2 \cdot S(k)$ usando definición

$= 2 \cdot 2^k$ usando hip. Ind.

finalmente $S(k+1) = 2^{k+1}$ //

Soluciones cerradas

- Soluciones como la del ejemplo permiten obtener directamente cualquier valor
- Se denominan **soluciones cerradas** de una relación de recurrencia
- Entonces, para nuestro ejemplo, **la solución** $S(n) = 2^n$ **resuelve** la **relación de recurrencia** $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$

Relaciones lineales de 1er orden

Una relación $S(n)$ es lineal si sus valores tienen la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \ldots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

- Las fs y g son expresiones que involucran solamente a n más otras constantes

Caracterizando las relaciones lineales de 1er orden

- Revisaremos ahora qué condiciones considerar para
  - Las fs
  - La dependencia de $S(n)$ de sus valores anteriores (*orden*)
  - g
- Dependiendo de estas condiciones estudiaremos ciertos tipos de soluciones para cada tipo de relación

Relaciones de 1er orden con coefs. constantes

- La relación tendrá coeficientes constantes si todas las fs lo son
- Será de 1er orden si $S(n)$ solo depende de $S(n-1)$
- Entonces, podemos *continuar* caracterizando de manera general una relación lineal de 1er orden con coeficientes constantes como

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

- Por último, la relación será **homogenea** si $g(n) = 0$ para cualquier valor de n.

- Primer orden $\Rightarrow$ Se requiere de un valor inicial para la base $S(1)$ u otro.
- Entonces, de manera general para este tipo de relaciones

$$\begin{aligned}
S(n) = \quad & cS(n-1) + g(n) \\
= \quad & c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n) \\
= \quad & c^2 S(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
= \quad & c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n) \\
= \quad & c^3 S(n-3) + c^2 g(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Luego de k expansiones queda

$$S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \ldots + cg(n-1) + g(n)$$

- Si esta secuencia tiene un valor base en 1, entonces la expansión terminará cuando $n - k = 1$ o $k = n - 1$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \ldots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$

- Estamos muy cerca de una solución, pero deberemos **siempre** encontrar una expresión para la sumatoria

- Por ejemplo, cuando $g(n) = 0$ queda solamente la primera parte de la solución (caso más simple denominado **homogeneo**)
- Ejemplo, volvamos a

$$\begin{aligned} S(1) = & \; 2 \\ S(n) = & \; 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- Es lineal, de primer orden y con coefs. ctes.
- Entonces,

$$S(n) = 2^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^{n} 0 = 2^n$$

En síntesis

1. Caracterizar la relación y verificar calce con expresión general
2. Encontrar el valor para c usando el valor inicial $S(1)$
3. Encontrar (si fuera necesario) un valor sintetizado para la sumatoria y obtener la expresión final de la solución

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$

$\Leftarrow \quad c \cdot S(n-1) + g(n)$

Encontrar c y $g(n)$

Ejercicio:

Encuentre una solución para la relación

$$S(n) = \overset{c}{2}S(n-1) + \overset{g(n)}{3}, \ \forall n \geq 2$$

sujeta al paso base $S(1) = 4$.

Con la forma general vemos que $c = 2$ y $g(n) = 3$

luego sustituyendo en forma general: $S(n) = \underbrace{2^{n-1} \cdot 4} + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i} \cdot 3$

Recordar identidad vista en Inducción:

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

$\therefore \quad = 2^{n+1} + 3\underbrace{\left[2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^{\overset{1}{0}}\right]}_{2^{n-1}-1}$

$\Rightarrow \boxed{S(n) = 2^{n+1} + 3(2^{n-1} - 1)}$

Aplicando... $S(5) = 2^6 + 3(2^4 - 1)$

$= 64 + 45 = 109$

Encontrar solución cerrada para

- $T(n) = T(n-1) + (n+1)$, para $n \geq 2$ con $T(1) = 2$

$$c = 1 \quad y \quad g(n) = n+1$$

$$= 2 + \sum_{i=2}^{n} (i+1) = 2 + (3 + 4 + \ldots + (n+1))$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \quad //$$

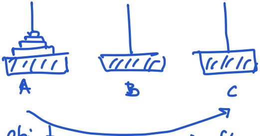
- $A(n) = 2 \cdot A(n-1) + 1$, $n > 1$ con $A(1) = 1$

$$c = 2,\ g(n) = 1. \longrightarrow A(n) = 2^{n-1} \cdot A(1) + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i} \cdot \overset{1}{g(n)}$$

$$= 2^{n-1} + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1)$$

$$A(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 \quad //$$

Torres de Hanoi



obj. transferir desde A a C los discos.

→ No puede haber un disco más grande encima de otro más pequeño.

Para 'n' discos ¿nº mínimo de movimientos para transferir los discos?

De A a B se mueven $(n-1)$ discos en $A(n-1)$ movs.
luego se mueve el último directamente a C (una movida)
Finalmente, se llevan los $(n-1)$ discos de B a C en $A(n-1)$ movidas. Entonces, se tienen $[A(n-1) + A(n-1) + 1]$

Suponga que un país con 100 M de habs. tiene una tasa de crecimiento de 1% anual. Además, recibe 100 k inmigrantes por año (se supone que este grupo adopta la misma tasa).
Encuentre la población en 10 años. Puede suponer que los inmigrantes llegan en un lote al final de cada año.

Si: $A(n)$ es la población en $\underline{n}$ años:

$$A(n) = 1{,}01\,A(n-1) + 100.000 \quad , \; n>0 \;\; y \;\; A(0) = 100.000.000$$

$c = 1{,}01 \qquad g(n) = 100.000$

$$A(n) = 1{,}01^{n \to ojo} * A(0) + \sum_{i=1}^{n} 1{,}01^{n-i} * 100.000 \qquad g(n) * \frac{c^n - 1}{c-1}$$

$$= 1{,}01^n * A(0) + 100.000 * \sum_{i=1}^{n} 1{,}01^{n-i}$$

$$= 1{,}01^n * 1000.000.000 + 100.000 * \left(\frac{1 - 1{,}01^n}{\underbrace{1 - 1{,}01}_{-0{,}01}} \right)$$

$$A(n) = 1{,}01^n * 100.000.000 + 1000 * -(1 - 1{,}01^n)$$

$$\Rightarrow A(10) = 1{,}01^{10} * 100.000000 + 1000 * -(1 - 1{,}01^{10}) = 110462212{,}5 + 105$$

$$= 110\,462\,317$$

Relaciones lineales de 2do orden

- En una relación de 2do orden el término n-ésimo depende de los dos términos anteriores.
- Por lo tanto, este tipo de relaciones tiene la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + g(n)$$

- Consideraremos aquellas relaciones lineales homogeneas y con coeficientes constantes.

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$$

Soluciones

- Buscamos soluciones de la forma

$$S(n) = r^n \text{ , con } r \text{ constante}$$

Esto es una conjetura, pero también es consistente con la Rel. de 1er orden.

!

- Por lo tanto $S(n) = r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
- Esta solución estará dada por $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = 0$ y luego de dividir ambos lados por r^{n-2} queda

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- A esta expresión se le denomina **Ecuación característica** de la relación

- Esta ecuación tendrá 2 raices: r_1 y r_2
- A las raices de esta ecuación se le denominan raíces características

Estrategia propuesta:

- Lograremos caracterizar **La solución cerrada** de la relación mediante r_1 y r_2

$c_0 S_n - c_1 S_{n-1} - c_2 S_{n-2} = 0$

¿Que sabemos hasta hora entonces?

1. $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$
2. $S(n) = r^n$
3. Luego, $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
4. Finalmente, hay que resolver $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
5. Podemos agregar que $r_1^2 = (\underline{c_1 r_1 + c_2})$ **y** $r_2^2 = (\underline{c_1 r_2 + c_2})$

c_1 y c_2 identificados a partir de ec. característica.

Solo cambia la raíz.

Luego, la solución tendrá la forma

$$S(n) = \overbrace{\alpha_1 r_1^{n-1}}^{c_1 \cdot S(n-1)} + \overbrace{\alpha_2 r_2^{n-2}}^{c_2 \cdot S(n-2)}$$

(probaremos informalmente esto a continuación...)

Acabamos de afirmar que $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$
\begin{aligned}
c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2 \\
\dots &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-2} r_1 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \\
\dots &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
\dots &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Ojo Hemos supuesto hasta ahora que $r_1 \neq r_2$

La descomposición anterior también puede hacerse si se considera la solución

$s(n) = \alpha \cdot r^{n-1}$ que sí se parece a la relación homo. de 1er orden : $s(n) = c^{n-1} \cdot s(1)$

donde $\alpha \sim r$ y $c_1 \sim s(1)$

$s(n-1) = c\, r^{n-2}$

$s(n-2) = c\, r^{n-3}$ ...

de esta forma $s(n) = c_1 \left(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}\right) + c_2 \left(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}\right)$

$$= \underline{\alpha_1 c_1 r_1^{n-1}} + \alpha_2 c_1 r_2^{n-1} + \underline{\alpha_1 c_2 r_1^{n-2}} + \alpha_2 c_2 r_2^{n-2}$$

$$= \alpha_1 \left(c_1 \underbrace{r_1^{n-1}}_{(r_1^{n-2} \cdot r_1)} + c_2 r_1^{n-2}\right) + \alpha_2 \left(c_1 \underbrace{r_2^{n-1}}_{(r_2^{n-2} \cdot r_2)} + c_2 r_2^{n-2}\right)$$

$$= \alpha_1 r_1^{n-2} \underbrace{\left(c_1 r_1 + c_2\right)}_{r_1^2} + \alpha_2 r_2^{n-2} \underbrace{\left(c_1 r_2 + c_2\right)}_{r_2^2}$$

$$s(n) = \alpha_1 r_1^{n} + \alpha_2 r_2^{n} \, //$$

Lo relevante es la dependencia del exponente respecto del n.

$s(n) = c\, r^{n}$ ó $s(n) = c\, r^{n-1}$

da igual.

Ahora solamente nos queda establecer un mecanismo para encontrar α_1 y α_2.

1. Se identifican c_1 y c_2 a partir de la relación entregada.
2. Se obtienen las soluciones para $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
3. Se obtienen α_1 y α_2 usando las dos casos iniciales... $S(0)$ y $S(1)$

¿Como?

Reemplazando $n = 0$ y $n = 1$ en $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S(1) &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{S(1) - S(0) r_2}{r_1 - r_2}$$

y

$$\alpha_2 = S(0) - \frac{S(1) - S(0) r_2}{r_1 - r_2}$$

Mutiplicidad de raíces

- Considere la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

  con raíces $r = r_1 = r_2$.
- La solución para $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$ tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad.

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad. Es decir:

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 r^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha_1 \\ S(1) &= \alpha_1 r^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha_1 r + \alpha_2 r \end{aligned}$$

Finalmente (verifique el desarrollo):

$$\alpha_1 = S(0) \; ; \; \alpha_2 = \frac{S(1) - S(0)r}{r}$$

Resolver la ec. de rec. lineal, homogenea y con coef. constantes

(1) $S(n) = 2 \cdot S(n-1) + 3 \cdot S(n-2)$, $\forall n \geq 3$ sujeto a que $S(1) = 3$ y $S(2) = 1$

a) Identificar ctes. $c_1 = 2$, $c_2 = 3$

b) Escribir ec. de 2° grado: $r^2 - 2r - 3 = 0$ y resolver

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1 \cdot {-3}) = 4 + 12 = \underline{\underline{16}} > 0$$

$\Rightarrow$ Soluciones distintas y $\mathbb{R}$.

Solución gral: $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\therefore$ $r_1 = \dfrac{6}{2} = 3$, $r_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$

Solución tendrá forma: $\underset{=}{*}$ $S(n) = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$

c) Usar casos iniciales en $\underset{=}{*}$ para determinar α_1 y α_2

$$\left.\begin{array}{l} S(1) = 3 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ S(2) = 9 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array}\right\} \alpha_2 = 3\alpha_1 - 3 \Rightarrow 9\alpha_1 + 3\alpha_1 - 3 = 1$$

$$12\alpha_1 = 4$$

$$\boxed{\alpha_2 = -2} \Leftarrow \boxed{\alpha_1 = 1/3}$$

Solución: $S(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n - 2 \cdot (-1)^n = 3^{n-1} - 2(-1)^n$