

# Recursión

## EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2024



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE  
VALPARAÍSO

# Introducción

# Introducción

- ▶ En ocasiones es difícil definir una función u objeto de manera explícita
- ▶ Alternativa: Definición en función de sí mismo
- ▶ Siempre tiene dos partes: Base y parte recursiva
  - ▶ La base está compuesta por casos simples explícitamente definidos
  - ▶ La parte recursiva generaliza sobre nuevos casos definidos en función de otros anteriores

## Secuencias definidas recursivamente

# Secuencias definidas recursivamente

- ▶ Es una lista infinita de objetos enumerados en algún orden
- ▶ Denominemos al  $k$ -ésimo objeto como  $S(k)$

$$S(1), S(2), \dots S(k), \dots$$

- ▶ Una secuencia definida recursivamente cuando  $S(k)$  se define en función de alguno(s) de los  $k - 1$  previos objetos

# Ejemplo

Considere la siguiente secuencia definida recursivamente

1.  $S(1) = 1$
2.  $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$ , para  $n \geq 2$

► Podemos verificar que  $S(2) = 2$ ,  $S(3) = 4$  y luego 8, 16, 32...

# Actividad

1.  $T(1) = 1$
2.  $T(n) = T(n - 1) + 3$ , para  $n \geq 2$

**Escriba los primeros 5 valores de la secuencia  $T$**

# Actividad: Fibonacci

Sugerencia: Revise el siguiente video

1.  $F(1) = 1$
2.  $F(2) = 1$
3.  $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ , para  $n > 2$

- ▶ Escriba los primeros 8 valores de la secuencia  $F$
- ▶ Calcule el cociente entre varios valores sucesivos de  $F$  y averigüe acerca de la razón dorada



## Conjuntos definidos recursivamente

# Conjuntos definidos recursivamente

- ▶ Previamente, los objetos tenían un orden
- ▶ Los conjuntos **no** tienen este ordenamiento
- ▶ Se especifican algunos elementos iniciales
- ▶ Se provee de una regla para construir nuevos elementos a partir de los ya existentes

# Ejemplo

Considere el subconjunto  $S$  de los enteros, que se define como

1. Paso base:  $4 \in S$
  2. Paso recursivo: Si  $x \in S$  e  $y \in S$ , entonces  $x + y \in S$
- ▶ Así entonces el conjunto  $S$  estará conformado por  
 $4 + 4 = 8; 4 + 8 = 12; 8 + 8 = 16 \dots$
  - ▶ Será el de los múltiplos de 4

# Actividad

Considere el conjunto  $A^*$  de todas las palabras de largo finito sobre un alfabeto  $A$ . Luego, se define recursivamente siguiendo las reglas:

1. La palabra sin símbolos (vacía)  $\lambda$  pertenece a  $A^*$
  2. Cualquier símbolo de  $A$  pertenece a  $A^*$
  3. Si  $x$  e  $y$  son palabras en  $A^*$ , entonces también lo será  $xy$ , es decir la concatenación de las palabras  $x$  e  $y$
- Sea  $A = \{0, 1, \lambda\}$ . Si  $x = 1101$  e  $y = 001$ , **escriba** las palabras  $xy$ ,  $yx$  y  $yx\lambda x$ .

# Actividad

Entregue una definición recursiva para el conjunto de todas las palabras binarias que se leen de igual manera de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1001 y 11011.

### Solución.

Sea  $A = \{0, 1, \lambda\}$ .

1.  $\lambda, 0, 1 \in A^*$
2. Si  $x \in A^*$ , entonces también  $0x0$  y  $1x1$

# Operaciones definidas recursivamente

- ▶ Ciertas operaciones sobre objetos pueden ser definidas recursivamente
- ▶ Por ejemplo, la exponenciación sobre un número real distinto de 0

1.  $p^0 = 1$
2.  $p^n = (p^{n-1}) \cdot p, \forall n \geq 1$

- O la multiplicación de dos enteros  $m$  y  $n$

1.  $m(1) = m$
2.  $m(n) = m(n - 1) + m, \forall n \geq 1$

### ► Ejemplo

Sea  $x$  una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación  $x^n$  que representa la concatenación de  $x$  con sí misma  $n$  veces para  $n \geq 1$ .



## Ejemplo (solución)

Sea  $x$  una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación  $x^n$  que representa la concatenación de  $x$  con sí misma  $n$  veces para  $n \geq 1$ .

1.  $x^0 = x$
2.  $x^n = x^{n-1}x, \forall n \geq 1$

# Algoritmos definidos recursivamente

- ▶ En palabras simples, es un programa que en su cuerpo tiene llamadas a sí mismo
- ▶ Recordemos la secuencia
  1.  $S(1) = 2$
  2.  $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$ , para  $n \geq 2$
- ▶ Calcule  $S(2)$ ,  $S(3)$ ,  $S(4)$  y  $S(5)$ .

- Considere un programa que evalúa  $S(n)$

Procedimiento  $S(n$  un nro entero)

Si  $n = 1$  entonces

retornar 2

Sino

$i = 2$

$val = 2$

mientras  $i \leq n$  hacer

$val = 2 * val$

$i = i + 1$

fin de bloque mientras

retornar  $val$

fin de bloque Si

fin de procedimiento

- ▶ Otro enfoque consiste en una definición mucho más corta (**Observe**)

Procedimiento  $S(n \text{ un nro entero})\$$

Si  $n = 1$  entonces

retornar 2

Sino

retornar  $2 * S(n-1)$

fin de bloque Si

fin de procedimiento

- ▶ Analice como se calcula  $S(3)$  con este código.

## Ventajas relativas en algoritmos recursivos e iterativos

- ▶ Recursividad ofrece (en ocasiones) una manera más natural para muchos problemas
- ▶ Recursividad genera procedimientos más cortos
- ▶ Operación de alg. recursivo es más compleja
- ▶ Ejecución de Alg. recursivo consume más memoria

## Actividad

Recuerde la secuencia antes vista y escriba una función recursiva para calcular  $T(n)$

1.  $T(1) = 1$
2.  $T(n) = T(n - 1) + 3$ , para  $n \geq 2$

## Actividad

Recuerde la operación recursiva par multiplicar dos números y construya un pseudocódigo para ella.

# Conclusiones

- ▶ Muchos problemas pueden ser analizados más naturalmente bajo una perspectiva recursiva
- ▶ El “secreto” de una recursividad efectiva está en entregarle a cada llamada una versión más pequeña o simple del problema
- ▶ Nunca olvidar la definición del caso base... todo depende de ello!



# Relaciones de Recurrencia

Imagine que una persona deposita \$10.000 en una cuenta de ahorro de un banco con un %11 de interés anual compuesto. ¿Cuanto se habrá reunido en la cuenta después de 30 años?

► Anteriormente, construimos procedimientos para calcular

1.  $S(1) = 2$
2.  $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$ , para  $n \geq 2$

- Luego, al calcular otros valores de la función

$$1. \quad S(1) = 2^1$$

$$2. \quad S(2) = 2^2$$

$$3. \quad S(3) = 2^3$$

$$4. \quad S(4) = 2^4$$

...

$$n. \quad S(n) = 2^n$$

- Ahora vemos que basta con calcular  $S(n)$  para cualquier número **sin** necesidad de tener que obtener los  $n - 1$  pasos previos.

## Soluciones cerradas

- ▶ Soluciones como la del ejemplo permiten obtener directamente cualquier valor
- ▶ Se denominan **soluciones cerradas** de una relación de recurrencia
- ▶ Entonces, para nuestro ejemplo, **la solución**  $S(n) = 2^n$  **resuelve la relación de recurrencia**  $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$

## Relaciones lineales de 1er orden

Una relación  $S(n)$  es lineal si sus valores tienen la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \dots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

- Las  $f$ s y  $g$  son expresiones que involucran solamente a  $n$  más otras constantes

## Caracterizando las relaciones lineales de 1er orden

- ▶ Revisaremos ahora qué condiciones considerar para
  - ▶ Las  $f$ s
  - ▶ La dependencia de  $S(n)$  de sus valores anteriores (*orden*)
  - ▶  $g$
- ▶ Dependiendo de estas condiciones estudiaremos ciertos tipos de soluciones para cada tipo de relación

## Relaciones de 1er orden con coefs. constantes

- ▶ La relación tendrá coeficientes constantes si todas las  $f$ s lo son
- ▶ Será de 1er orden si  $S(n)$  solo depende de  $S(n - 1)$
- ▶ Entonces, podemos *continuar* caracterizando de manera general una relación lineal de 1er orden con coeficientes constantes como

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

- ▶ Por último, la relación será **homogenea** si  $g(n) = 0$  para cualquier valor de  $n$ .

- ▶ Primer orden  $\Rightarrow$  Se requiere de un valor inicial para la base  $S(1)$  u otro.
- ▶ Entonces, de manera general para este tipo de relaciones

$$\begin{aligned} S(n) &= cS(n-1) + g(n) \\ &= c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n) \\ &= c^2S(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\ &= c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n) \\ &= c^3S(n-3) + c^2g(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\ &\vdots \end{aligned}$$



Luego de  $k$  expansiones queda

$$S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \dots + c g(n-1) + g(n)$$

- ▶ Si esta secuencia tiene un valor base en 1, entonces la expansión terminará cuando  $n-k=1$  o  $k=n-1$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \dots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^n c^{n-i} g(i)$$

- ▶ Estamos muy cerca de una solución, pero deberemos **siempre** encontrar una expresión para la sumatoria

- ▶ Por ejemplo, cuando  $g(n) = 0$  queda solamente la primera parte de la solución (caso más simple denominado **homogeneo**)
- ▶ Ejemplo, volvamos a

$$\begin{aligned}S(1) &= 2 \\S(n) &= 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2\end{aligned}$$

- ▶ Es lineal, de primer orden y con coefs. ctes.
- ▶ Entonces,

$$S(n) = 2^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^n 0 = 2^n$$

## En síntesis

1. Caracterizar la relación y verificar calce con expresión general
2. Encontrar el valor para  $c$  usando el valor inicial  $S(1)$
3. Encontrar (si fuera necesario) un valor sintetizado para la sumatoria y obtener la expresión final de la solución

## Ejercicio:

Encuentre una solución para la relación

$$S(n) = 2S(n - 1) + 3, \forall n \geq 2$$

sujeta al paso base  $S(1) = 4$ .

# Relaciones lineales de 2do orden

- ▶ En una relación de 2do orden el término  $n$ -ésimo depende de los dos términos anteriores.
- ▶ Por lo tanto, este tipo de relaciones tiene la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + g(n)$$

- ▶ Consideraremos aquellas relaciones lineales homogéneas y con coeficientes constantes.

$$S(n) = c_1S(n-1) + c_2S(n-2)$$

## Soluciones

- Buscamos soluciones de la forma

$$S(n) = r^n, \text{ con } r \text{ constante}$$

- Por lo tanto  $S(n) = r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
- Esta solución estará dada por  $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = 0$  y luego de dividir ambos lados por  $r^{n-2}$  queda

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- A esta expresión se le denomina **Ecuación característica** de la relación

- ▶ Esta ecuación tendrá 2 raíces:  $r_1$  y  $r_2$
- ▶ A las raíces de esta ecuación se le denominan raíces características

### Estrategia propuesta:

- ▶ Lograremos caracterizar **La solución cerrada** de la relación mediante  $r_1$  y  $r_2$

¿Que sabemos hasta hora entonces?

1.  $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$
2.  $S(n) = r^n$
3. Luego,  $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
4. Finalmente, hay que resolver  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
5. Podemos agregar que  $r_1^2 = (c_1 r_1 + c_2)$  y  $r_2^2 = (c_1 r_2 + c_2)$

**Luego, la solución tendrá la forma**

$$S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

(probaremos informalmente esto a continuación...)



Acabamos de afirmar que  $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned}c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\&\dots = c_1(\alpha_1 r_1^{n-2} r_1 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\&\dots = \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\&\dots = \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

**Ojo** Hemos supuesto hasta ahora que  $r_1 \neq r_2$

Ahora solamente nos queda establecer un mecanismo para encontrar  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

1. Se identifican  $c_1$  y  $c_2$  a partir de la relación entregada.
2. Se obtienen las soluciones para  $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
3. Se obtienen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  usando las dos casos iniciales...  $S(0)$  y  $S(1)$

¿Como?

Reemplazando  $n = 0$  y  $n = 1$  en  $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S(1) &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

y

$$\alpha_2 = S(0) - \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

## Multiplicidad de raíces

- Considere la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

con raíces  $r = r_1 = r_2$  .

- La solución para  $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$  tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad.

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad. Es decir:

$$\begin{aligned}S(0) &= \alpha_1 r^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha_1 \\S(1) &= \alpha_1 r^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha_1 r + \alpha_2 r\end{aligned}$$

Finalmente (verifique el desarrollo):

$$\alpha_1 = S(0) ; \alpha_2 = \frac{S(1) - S(0)r}{r}$$