Variables Aleatorias

Estadística Computacional

Juan Zamora Osorio

juan.zamora@pucv.cl

Instituto de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

24 de septiembre de 2024

Variables Aleatorias – cantidad de cartas negras

Sacando una carta – posibilidades

$\clubsuit$	1
$\diamondsuit$	0
$\heartsuit$	0
$\spadesuit$	1

Sacando una carta – probabilidades

Cantidad negras	0	1
Probabilidad	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Variables Aleatorias – cantidad de cartas negras

Sacando dos cartas – posibilidades

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	2	1	1	2
$\diamondsuit$	1	0	0	1
$\heartsuit$	1	0	0	1
$\spadesuit$	2	1	1	2

Sacando dos cartas – probabilidades

Cantidad negras	0	1	2
Probabilidad	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Variables Aleatorias – cantidad de cartas negras

Sacando tres cartas – posibilidades

$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	3	2	2	3
$\diamondsuit$	2	1	1	2
$\heartsuit$	2	1	1	2
$\spadesuit$	3	2	2	3

$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	2	1	1	2
$\diamondsuit$	1	0	0	1
$\heartsuit$	1	0	0	1
$\spadesuit$	2	1	1	2

$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	2	1	1	2
$\diamondsuit$	1	0	0	1
$\heartsuit$	1	0	0	1
$\spadesuit$	2	1	1	2

$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	3	2	2	3
$\diamondsuit$	2	1	1	2
$\heartsuit$	2	1	1	2
$\spadesuit$	3	2	2	3

Sacando tres cartas – probabilidades

Cantidad negras	0	1	2	3
Probabilidad	$\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	$\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$	$\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$	$\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Variables Aleatorias – definición

Formalmente

- Función *medible* entre un espacio muestral Ω y otro Ω':
$$X : \Omega \rightarrow \Omega'.$$
- La preimagen de todo conjunto en el espacio de eventos asociado a Ω' es un conjunto en el espacio de eventos de Ω.

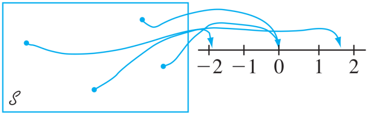
Ejemplo

- X cantidad de cartas negras al sacar 3 cartas independientes.
- $\Omega' = \{0, 1, 2, 3\}$.
- $\Omega = \{(\clubsuit, \clubsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \clubsuit, \diamondsuit), (\clubsuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \diamondsuit, \clubsuit), \ldots, \}$.
- $X((\clubsuit, \diamondsuit, \clubsuit)) = 2$.

En este curso

$X : \Omega \to E$

- Si E es finito o numerable: variable aleatoria discreta.
- Si $E \subseteq \mathbb{R}$ no numerable: variable aleatoria continua.



Ejemplo – variable aleatoria discreta

- X cantidad de cartas negras al sacar 3 cartas independientes.

Cantidad negras	Probabilidad
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125

Notación

$X : \Omega \to E$

- Sea $S \subseteq E$, $P_X(S) = P(X \in S) = P\big(X^{-1}(S)\big) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\})$.
- P_X:
  - Distribución de probabilidad.
  - Ley de probabilidad.

Ejemplo – variable aleatoria discreta

- $P_X(\{0,1\}) = P(\{\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit, \diamondsuit\heartsuit\clubsuit, \spadesuit\diamondsuit\heartsuit, \spadesuit\heartsuit\heartsuit, \diamondsuit\clubsuit\heartsuit, \diamondsuit\diamondsuit\heartsuit, \ldots\})$.

X	P_X
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125

Variables aleatorias discretas

Función de masa de probabilidad (*pmf*)

$$f(x) = P(X = x) = P_X(\{x\}).$$

Recordar de probabilidades (Ω finito)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n_x}{n} = \frac{\left|X^{-1}(\{x\})\right|}{|\Omega|}.$$

- n_x cantidad de resultados ω que cumplen $X(\omega) = x$.
- n cantidad de resultados en Ω.

Ejemplo: moneda lanzada 3 veces

Ejemplo 1

- X cantidad de caras.
- Posibles valores: $\{0, 1, 2, 3\}$.

x	$X^{-1}(\{x\})$	$P(X = x)$
0	$\{sss\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
1	$\{css, scs, ssc\}$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$
2	$\{ccs, csc, scc\}$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$
3	$\{ccc\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$

Ejemplo: moneda lanzada 3 veces

Ejemplo 2

- X string de bits 0/1 según cara/sello obtenido.
- Posibles valores: $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

x	$X^{-1}(\{x\})$	$P(X = x)$
000	$\{ccc\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
001	$\{ccs\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
010	$\{csc\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
011	$\{css\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
100	$\{scc\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
101	$\{scs\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
110	$\{ssc\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
111	$\{sss\}$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$

Ejemplo: moneda lanzada 3 veces

Ejemplo 3

- X cantidad de caras par o impar.
- Posibles valores: $\{P, I\} \equiv \{0, 1\}$.

x	$X^{-1}(\{x\})$	$P(X = x)$
$P \equiv 0$	$\{ccs, csc, scc, sss\}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$I \equiv 1$	$\{ccc, css, scs, ssc\}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

Función de distribución acumulada (*cdf*)

Definición

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] \text{ tal que } F(x) = P(X \leq x).$$

Variables aleatorias discretas

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

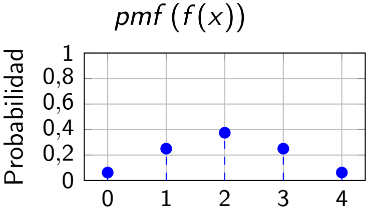
Propiedades

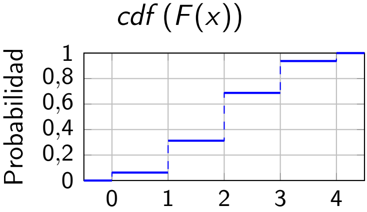
- F es no decreciente ($x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$).
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- $\forall x, 0 \leq F(x) \leq 1$.
- Está definida para todo $\mathbb{R}$.

Función de distribución acumulada (*cdf*)

Ejemplo: Cantidad de caras al lanzar 4 monedas

x	$f(x) = P(X = x)$	$F(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$
0	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$
1	$\frac{4}{16} = 0{,}25$	$\frac{5}{16} = 0{,}3125$
2	$\frac{6}{16} = 0{,}375$	$\frac{11}{16} = 0{,}6875$
3	$\frac{4}{16} = 0{,}25$	$\frac{15}{16} = 0{,}9375$
4	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{16}{16} = 1$





Esperanza – valor esperado – media

Definición

$$\mathbb{E}_{X\sim f}[X] = \mu_X = \sum_{x\in E} x f(x).$$

Ejemplo: Cantidad de caras al lanzar 4 monedas

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{16}0 + \frac{4}{16}1 + \frac{6}{16}2 + \frac{4}{16}3 + \frac{1}{16}4 = 2.$$

Esperanza – valor esperado – media

Definición

- Sea $g : E \to \mathbb{R}$ una función:
$$\mathbb{E}_{X\sim f}[g(X)] = \sum_{x\in E} g(x)f(x).$$

Propiedades: linealidad

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b.$$
- Sean $g_1, g_2 : E \to \mathbb{R}$ funciones:
$$\mathbb{E}[g_1(X) + g_2(X)] = \mathbb{E}[g_1(X)] + \mathbb{E}[g_2(X)].$$

Varianza

Definición

$$\mathbb{V}_{X\sim f}[X] = \sigma_X^2 = \mathbb{E}_{X\sim f}\left[(X-\mu_X)^2\right] = \sum_{x\in E}(x-\mu_X)^2 f(x).$$

Desviación estándar

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\mathbb{V}_{X\sim f}[X]}.$$

Propiedad

$$\mathbb{V}_{X\sim f}[X] = \sigma_X^2 = \mathbb{E}_{X\sim f}\left[X^2\right] - \mathbb{E}_{X\sim f}[X]^2 = \left[\sum_{x\in E} x^2 f(x)\right] - \mu_X^2.$$

Varianza

Definición

- Sea $g : E \to \mathbb{R}$ una función:
$$\mathbb{V}_{X\sim f}[g(X)] = \sum_{x\in E}(g(x) - \mathbb{E}_{X\sim f}[g(X)])^2 f(x).$$

Propiedad: no linealidad

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X].$$

Distribución $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Definición

$$f(x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1, \\ 1 - p \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Ejemplos

- Lanzar una moneda.
- Ser fiscalizado en carretera.

Propiedades

- $\mathbb{E}_{X \sim \text{Bernoulli}(p)}[X] = \mu_X = p$.
- $\mathbb{V}_{X \sim \text{Bernoulli}(p)}[X] = \sigma_X^2 = p(1 - p)$.

Ejemplo: Reunión de personas sin COVID-19

Supuestos

- Reunión de personas, van llegando de a una.
- Cada persona que llega tiene probabilidad p de tener COVID-19.
- Probabilidad p es independiente entre personas.
- $X - 1$ cantidad de personas sanas cuando llega primera con COVID-19 (Igual cantidad total de personas menos 1)

x	Evento	$f(x) = P(X = x)$	$F(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$
1	$\{c \dots\}$	p	p
2	$\{nc \dots\}$	$(1-p)p$	$(2-p)p$
3	$\{nnc \dots\}$	$(1-p)^2 p$	$\left(3 - 3p + p^2\right) p$
4	$\{nnnc \dots\}$	$(1-p)^3 p$	$\left(4 - 6p + 4p^2 - p^3\right) p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ejemplo: Reunión de personas sin COVID-19

x	Evento	$f(x) = P(X = x)$	$F(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$
1	$\{c\ldots\}$	p	p
2	$\{nc\ldots\}$	$(1-p)p$	$(2-p)p$
3	$\{nnc\ldots\}$	$(1-p)^2 p$	$\left(3-3p+p^2\right)p$
4	$\{nnnc\ldots\}$	$(1-p)^3 p$	$\left(4-6p+4p^2-p^3\right)p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

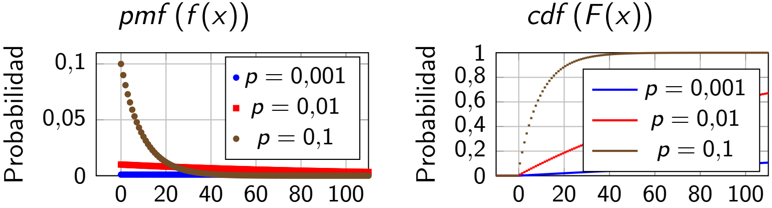
En general

- $f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p.$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x.$

Ejemplo: Reunión de personas sin COVID-19

En general

- $f(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p.$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^{x}.$



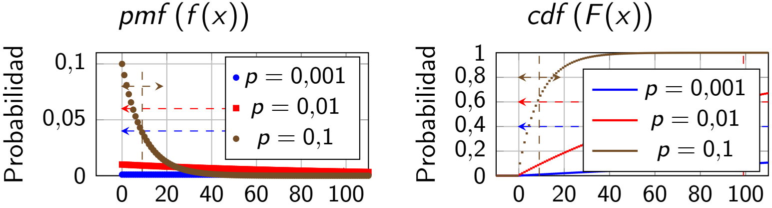
¿Qué pasó?

- X ahora está expresada como una función *pmf* en vez de una tabla.

Distribución $X \sim$ Geométrica(p)

Definición

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \text{ con } x \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$



Propiedades

- $\mathbb{E}_{X\sim\text{Geométrica}(p)}[X] = \mu_X = \frac{1}{p}$.
- $\mathbb{V}_{X\sim\text{Geométrica}(p)}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

Ejemplo: Reunión de personas sin COVID-19

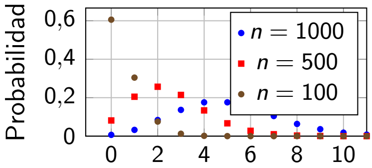
Supuestos

- Cada persona que llega tiene prob. p de tener COVID-19.
- Probabilidad p es independiente entre personas.
- X personas con COVID-19 en reunión de n personas.

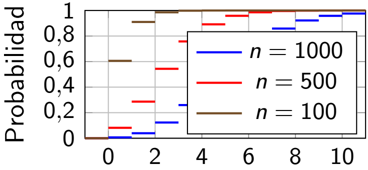
X como función *pmf*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

pmf $(f(x))$ con $p = 0{,}005$



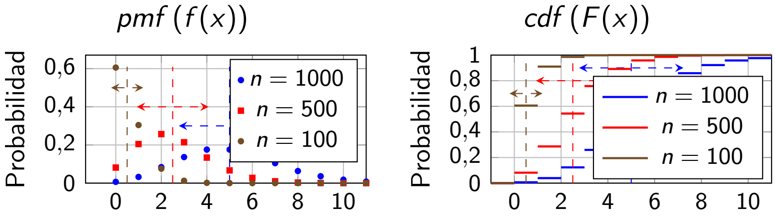
cdf $(F(x))$ con $p = 0{,}005$



Distribución $X \sim \text{Binomial}(n, p) = B(n, p)$

Definición

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{ con } x \in \{0, 1, \dots n\}.$$



Propiedades

- $\mathbb{E}_{X\sim B(n,p)}[X] = \mu_X = np.$
- $\mathbb{V}_{X\sim B(n,p)}[X] = \sigma_X^2 = np(1-p).$

Distribución $X \sim \text{Poisson}(\lambda) = \text{Pois}(\lambda)$

Definición

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \text{ con } x \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Ejemplos

- Cantidad de autos que pasan frente a la casa cada una hora.
- Cantidad de fotones que llegan a un pixel durante fotografía.

Propiedades

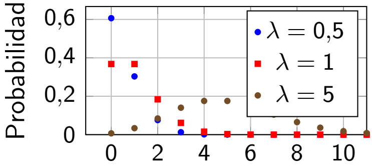
- $\mathbb{E}_{X\sim\text{Pois}(\lambda)}[X] = \mu_X = \lambda.$
- $\mathbb{V}_{X\sim\text{Pois}(\lambda)}[X] = \sigma_X^2 = \lambda.$

¿De dónde viene?

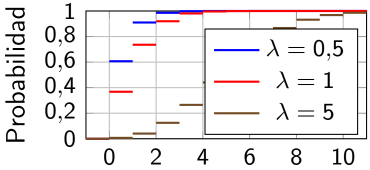
- Si $X \sim B(n, p)$, el valor esperado es np.
- Fijando el valor esperado, se deja crecer $n \to +\infty$.

Distribución $X \sim \text{Poisson}(\lambda) = \text{Pois}(\lambda)$

pmf $(f(x))$



cdf $(F(x))$

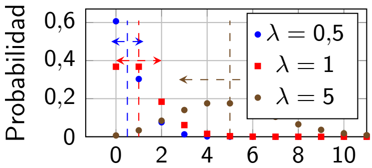


Propiedades

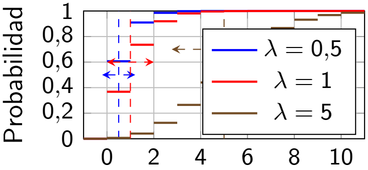
- $\mathbb{E}_{X \sim \text{Pois}(\lambda)}[X] = \mu_X = \lambda$.
- $\mathbb{V}_{X \sim \text{Pois}(\lambda)}[X] = \sigma_X^2 = \lambda$.

Distribución $X \sim \text{Poisson}(\lambda) = \text{Pois}(\lambda)$

pmf $(f(x))$

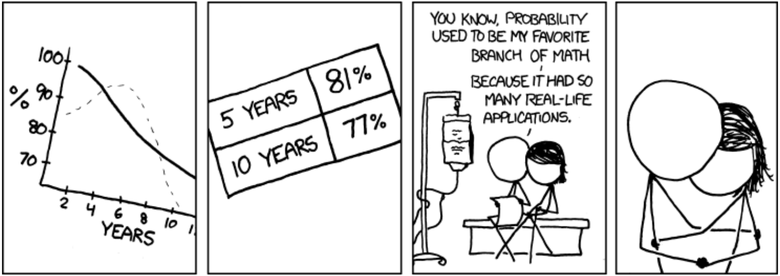


cdf $(F(x))$



Propiedades

- $\mathbb{E}_{X \sim \text{Pois}(\lambda)}[X] = \mu_X = \lambda.$
- $\mathbb{V}_{X \sim \text{Pois}(\lambda)}[X] = \sigma_X^2 = \lambda.$


100
90
80
70
%
2
4
6
8
10
YEARS
5 YEARS
81%
10 YEARS
77%
YOU KNOW, PROBABILITY USED TO BE MY FAVORITE BRANCH OF MATH
BECAUSE IT HAD SO MANY REAL-LIFE APPLICATIONS.

Variables aleatorias continuas

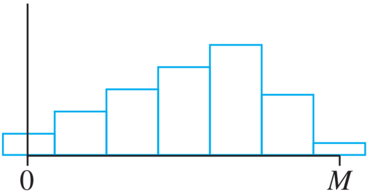
Ejemplo

- ¿Cómo se distribuyen los tiempos de espera en la fila para almorzar?

Solución 1: discretizar en clases intervalos de ancho $a = 1$

- $\text{Clases}_{a=1} = \{[0,1], (1,2], (2,3], \ldots\}$.
- Se cumple que:

$$P(X \in [0,1]) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(X \in (i, i+1]) = 1.$$

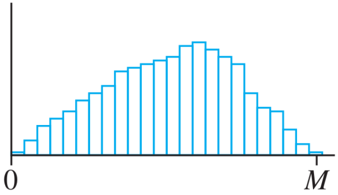


Variables aleatorias continuas

Solución $\frac{1}{2}$: discretizar en clases intervalos de ancho $a = \frac{1}{2}$

- $\text{Clases}_{a=\frac{1}{2}} = \left\{\left[0, \frac{1}{2}\right], \left(\frac{1}{2}, 1\right], \left(1, \frac{3}{2}\right], \ldots\right\}$.
- Se cumple que:

$$P\left(X \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) + \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X \in \left(\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\right]\right) = 1.$$



Variables aleatorias continuas

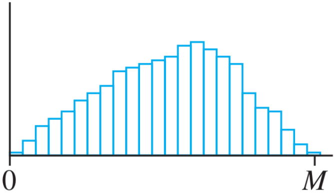
Solución a

- $\text{Clases}_a = \{[0, a], (a, 2a], (2a, 3a], \ldots\}$.
- Se cumple que:

$$P(X \in [0, a]) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(X \in (ia, (i+1)a]) = 1.$$

- Recordando que $P(X \leq x) = F(x)$, se puede reescribir como:

$$F(a) + \sum_{i=1}^{+\infty} F((i+1)a) - F(ia) = 1.$$



Variables aleatorias continuas

Solución a

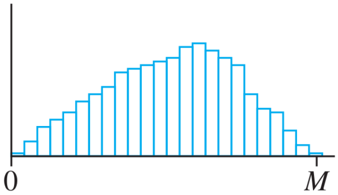
- Se tiene que:

$$F(a) + \sum_{i=1}^{+\infty} F((i+1)a) - F(ia) = F(a) + \sum_{i=1}^{+\infty} \text{Área}(i) = 1,$$

con $\text{Área}(i) = h_i a = P(X \in (ia, (i+1)a]) = F((i+1)a) - F(ia)$.

- Notar que la altura cumple:

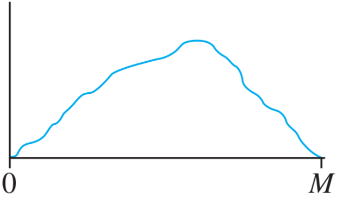
$$h_i = \frac{F(ia + a) - F(ia)}{a}.$$



Variables aleatorias continuas

Solución $a \to 0$

$$h_x = \lim_{a \to 0} \frac{F(x+a) - F(x)}{a}, \ \text{y} \ \int_{x \in E} h_x dx = 1.$$



Función de densidad de probabilidad (*pdf*)

- $p(x) \equiv h_x$.
- Debe cumplir:
  - $\forall x \in E, p(x) \geq 0$. $\int_{x \in E} p(x) dx = 1$.

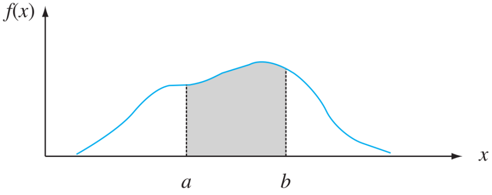
Variables aleatorias continuas – definiciones

Función de densidad de probabilidad (*pdf*)

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx.$$

Función de distribución acumulada (*cdf*)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$



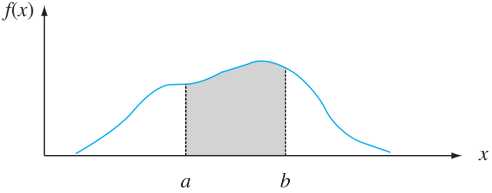
Variables aleatorias continuas – definiciones

Valor esperado / esperanza

$$\mathbb{E}_{X\sim p}[X] = \mu_X = \int_{x\in E} xp(x)dx.$$

Varianza

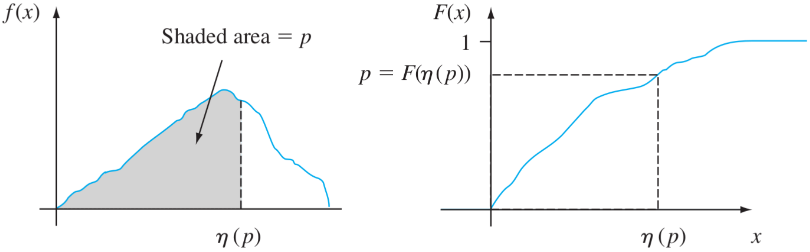
$$\mathbb{V}_{X\sim p}[X] = \sigma_X^2 = \int_{x\in E} (x - \mathbb{E}[X])^2 p(x)dx.$$



Variables aleatorias continuas – definiciones

Cuantil / percentil

- q_u tal que
$$P(X \leq q_u) = F(q_u) = \int_{-\infty}^{q_u} p(x)dx = u.$$



- En esta figura, $f(x) = p(x)$, $p = u$, $\eta(p) = q_u$.

Distribución $X \sim \text{Uniforme}(a, b) = U(a, b)$

Ángulos

- Ángulo luego de girar ruleta.
- Ángulo desde el centro al lanzar un dardo.

Otros

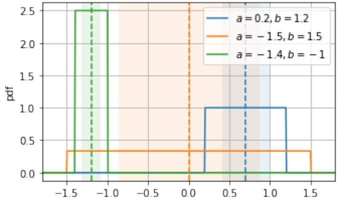
- Valor del parámetro p en una distribución Bernoulli(p).

Distribución $X \sim \text{Uniforme}(a, b) = U(a, b)$

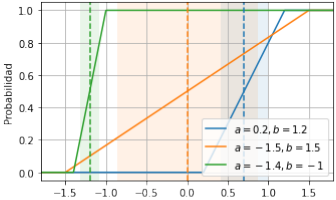
Definición

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ con } x \in [a, b].$$

$pdf\ (p(x))$



$cdf\ (F(x))$



Distribución $X \sim \text{Uniforme}(a, b) = U(a, b)$

Propiedades

- $\mathbb{E}_{X \sim U(a,b)}[X] = \mu_X = \frac{a+b}{2}$.
- $\mathbb{V}_{X \sim U(a,b)}[X] = \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Ejemplo – tiempo entre vacunados

Supuesto

- Número de personas que llegan a vacunatorio sigue distribución Poisson con media 12 personas por hora.
- Luego de llegar al vacunatorio, ¿cuál es la probabilidad de que la próxima persona llegue
  - en más de 1 hora?
  - en más de 15 minutos?
  - en más de 5 minutos?
  - en menos de 5 minutos?

Recordar

$$X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Ejemplo – tiempo entre vacunados

Supuesto

- Número de personas que llegan a vacunatorio sigue distribución Poisson con media 12 personas por hora.
- Luego de llegar al vacunatorio, ¿cuál es la probabilidad de que la próxima persona llegue...

en más de 1 hora?

$$X \sim \text{Pois}(12) \Rightarrow P(X = x) = e^{-12}\frac{12^x}{x!} \Rightarrow P(X = 0) = e^{-12}.$$

en más de 15 minutos?

- 12 personas por hora es equivalente a 3 persona cada 15 minutos.

  $$X \sim \text{Pois}(3) \Rightarrow P(X = x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!} \Rightarrow P(X = 0) = e^{-3}.$$

Ejemplo – tiempo entre vacunados

Supuesto

- Número de personas que llegan a vacunatorio sigue distribución Poisson con media 12 personas por hora.
- Luego de llegar al vacunatorio, ¿cuál es la probabilidad de que la próxima persona llegue...

en más de 5 minutos?

- 12 personas por hora es equivalente a 1 persona cada 5 minutos.

$$X \sim \text{Pois}(1) \Rightarrow P(X = x) = e^{-1}\frac{1}{x!} \Rightarrow P(X = 0) = e^{-1}.$$

en menos de 5 minutos?

- 12 personas por hora es equivalente a 1 persona cada 5 minutos.

$$P(X = x) = e^{-1}\frac{1}{x!} \Rightarrow P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1}.$$

Ejemplo – tiempo entre vacunados

En general

- Probabilidad de que la próxima persona llegue en más de t horas.
  $X \sim \text{Pois}(\lambda t) \Rightarrow P(X = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!} \Rightarrow P(X = 0) = e^{-\lambda t}$.
- Probabilidad de que la próxima persona llegue en menos de t horas.
  $X \sim \text{Pois}(\lambda t) \Rightarrow P(X = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!} \Rightarrow P(X > 0) = 1 - e^{-\lambda t}$.

¿Qué pasó?

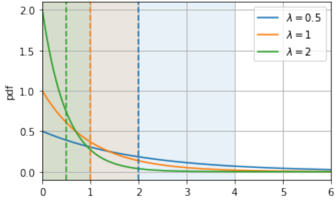
- Estas probabilidades son funciones continuas de t.
- $e^{-\lambda 0} = 1$ y $\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$.
- Supongamos que existe una distribución continua de probabilidad del tiempo T de llegada de siguiente persona:
$$P(T \leq t) = F(t) = \int_{u=0}^{t} p(u) du = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Distribución Exponencial(λ)

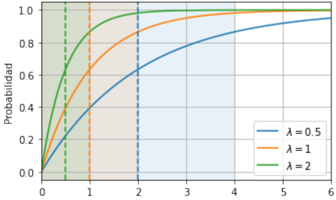
Solución

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

pdf $(p(x))$



cdf $(F(x))$



Propiedades

- $\mathbb{E}_{X\sim\text{Exponencial}(\lambda)}[X] = \mu_X = \frac{1}{\lambda}$.
- $\mathbb{V}_{X\sim\text{Exponencial}(\lambda)}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Distribución Normal$(0, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propiedades

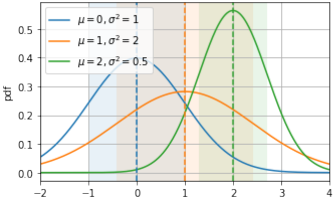
- $\mathbb{E}_{X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)}[X] = \mu_X = 0.$
- $\mathbb{V}_{X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)}[X] = \sigma_X^2 = \sigma^2.$

Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

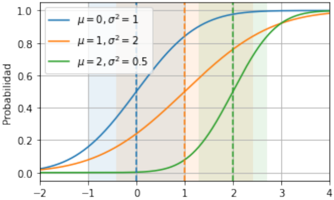
Definición

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

pdf $(p(x))$



cdf $(F(x))$

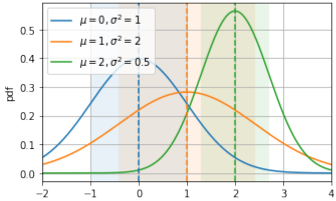


Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

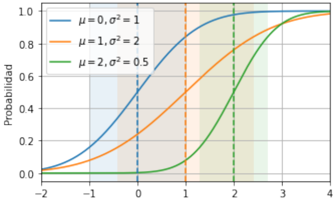
Definición

$$p(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{\text{constante de normalizacion}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

pdf $(p(x))$



cdf $(F(x))$



Función de distribución acumulada (*cdf*)

- No se puede escribir la *cdf* directamente.

Distribución Normal$(0, 1) = \mathcal{N}(0, 1)$ estándar

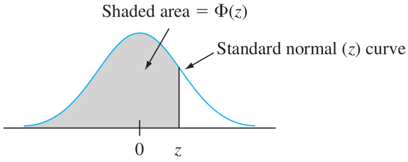
Estandarizando

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

- $\mu_Z = 0$ y $\sigma_Z^2 = 1$.

Función de distribución acumulada (*cdf*) $\mathcal{N}(0, 1)$ – definición

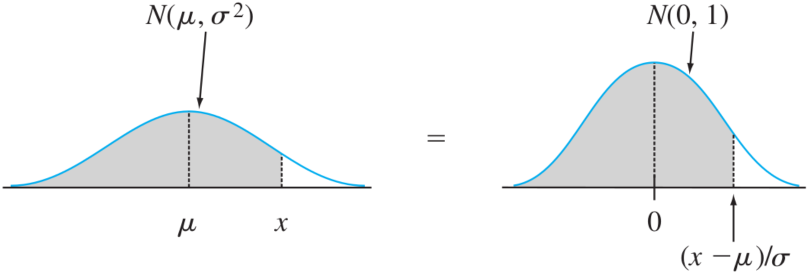
$$F(z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Volviendo a X: función de distribución acumulada (*cdf*) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

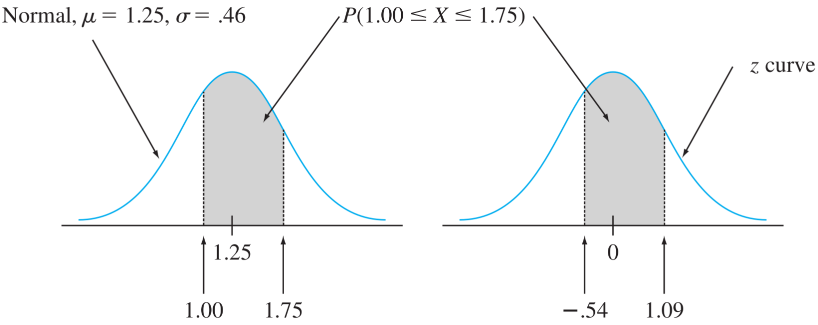
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$



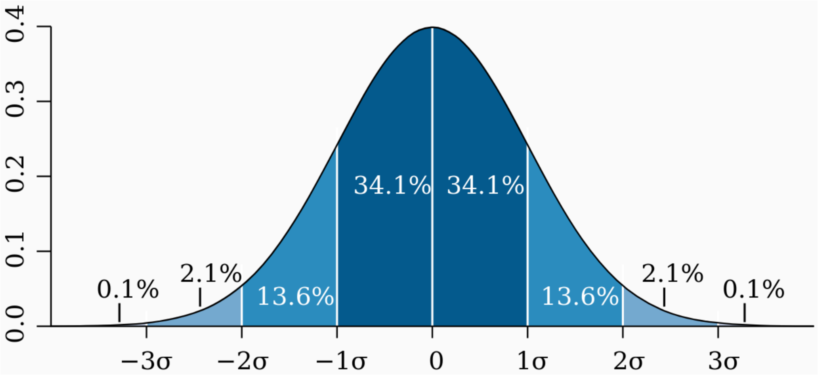
Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Probabilidad en intervalo $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$



Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



Distribución normal

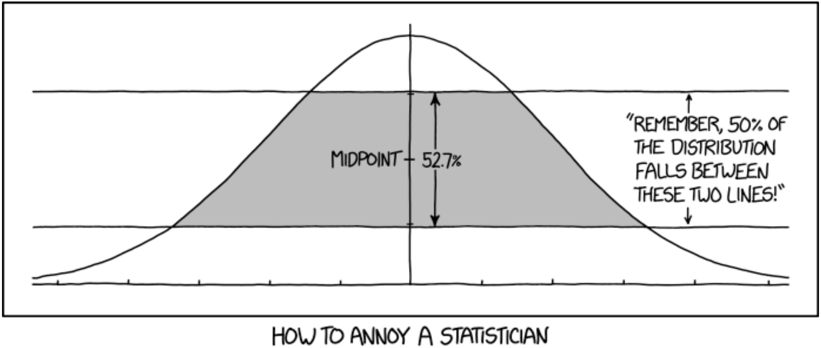
Ejemplo: altura personas en Chile

- Se ha determinado que la altura media de las mujeres es de 159,4 cm.
- Se ha determinado que la altura media de los hombres es de 171,8 cm.
- Suponiendo que la altura se distribuye como una normal:
  - ¿Es un hombre que mide 165 cm. bajo?
  - ¿Es una mujer que mide 165 cm. alta?

Respuesta

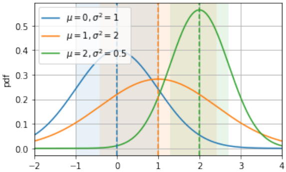
- ¡Depende de la desviación estándar / varianza!

Distribución normal

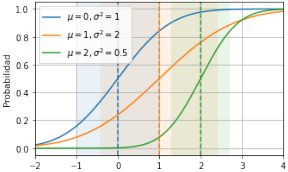


Distribución Normal$(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

pdf $(p(x))$

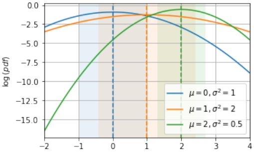


cdf $(F(x))$



Tal vez ayuda para recordar

$$\ln(p(x)) = -\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$



¿Por qué usar distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?

- Termodinámica: distribución tiene la mayor entropía, sujeto a μ y σ^2.
- Igualmente, distribución con menos información además de μ y σ^2.
- La suma de distribuciones converge a una distribución normal.
- Logaritmo de producto de distribuciones converge a una normal.

Sobre constante de normalización

Recordar

$$p(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{\text{constante de normalizacion}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Sobre constante de normalización

En general

- Muchas veces se define la "forma" de una distribución.
- Ejemplos:
  - $p(x) \propto 1$.
  - $p(x) \propto e^{-x^2}$.
  - $p(x) \propto e^{-x}$, con $x \geq 0$.
  - $p(x) \propto e^{-|x|}$.
- Luego se calcula la constante de normalización para que sea una distribución de probabilidad:
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Sobre constante de normalización

Ejemplo

$$p(x) \propto e^{-\lambda x}, \text{ con } x \geq 0, \lambda > 0.$$

Desarrollo

$$\int_0^\infty p(x)dx = \int_0^\infty ce^{-\lambda x}dx = -c\,\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg|_{x=0}^{\infty} = \frac{c}{\lambda} = 1 \Rightarrow c = \lambda.$$

Entonces

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ con } x \geq 0, \lambda > 0.$$

Sobre constante de normalización

Ejemplo

$$p(x) \propto e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \text{ con } b > 0.$$

Desarrollo

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\mu} ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\mu} ce^{\frac{x-\mu}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} ce^{-\frac{x-\mu}{b}} dx = c\, be^{\frac{x-\mu}{b}} \Big|_{x=-\infty}^{\mu} - c\, be^{-\frac{x-\mu}{b}} \Big|_{x=\mu}^{\infty}$$
$$= 2bc = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2b}.$$

Entonces

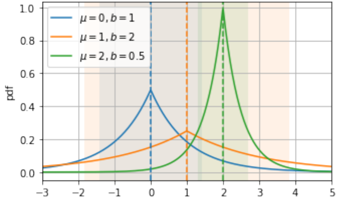
$$p(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \text{ con } b > 0.$$

Distribución Laplace(μ, b)

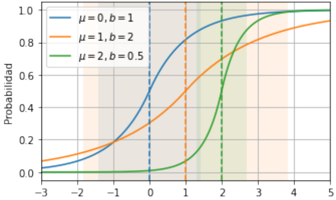
Definición

$$p(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \text{ con } b > 0.$$

pdf ($p(x)$)



cdf ($F(x)$)



Propiedades

- $\mathbb{E}_{X\sim\text{Laplace}(\mu,b)}[X] = \mu_X = \mu.$
- $\mathbb{V}_{X\sim\text{Laplace}(\mu,b)}[X] = \sigma_X^2 = 2b^2.$

¿Por qué usar distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?

No acotada

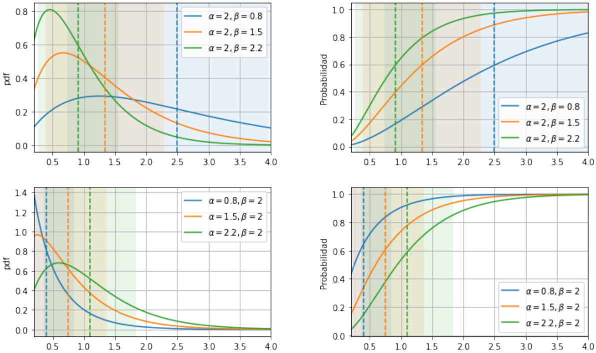
- ¿Y si los datos son solo positivos?
- ¿Y si los datos están acotados entre dos valores?

Distribución Gamma$(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha,\beta)$

Definición

$$p(x) = \underbrace{\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}}_{\text{normalizacion}} x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\ \text{con } x \in (0,+\infty).$$

$pdf\,(p(x))$ $\qquad$ $cdf\,(F(x))$



Distribución Gamma$(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha, \beta)$

Definición

$$p(x) = \underbrace{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}}_{\text{normalizacion}} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ con } x \in (0, +\infty).$$

Nota

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Propiedades

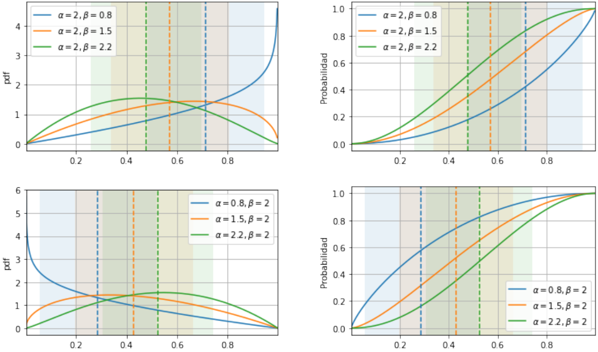
- $\mathbb{E}_{X \sim \Gamma(\alpha,\beta)}[X] = \mu_X = \frac{\alpha}{\beta}$.
- $\mathbb{V}_{X \sim \Gamma(\alpha,\beta)}[X] = \sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Distribución Beta(α, β)

Definición

$$p(x) = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}_{\text{normalizacion}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ con } x \in [0,1].$$

pdf $(p(x))$ *cdf* $(F(x))$



Distribución Beta(α, β)

Definición

$$p(x) = \underbrace{\frac{1}{B(\alpha, \beta)}}_{\text{normalizacion}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ con } x \in [0, 1].$$

Definición

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

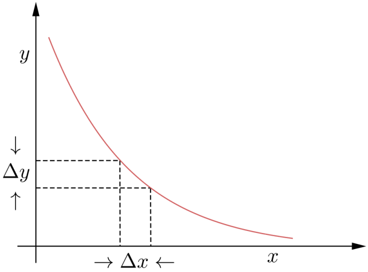
Propiedades

- $\mathbb{E}_{X \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)}[X] = \mu_X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
- $\mathbb{V}_{X \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)}[X] = \sigma_X^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

¿Cómo construir distribuciones?

Supuestos

- X variable aleatoria continua.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función invertible y monótona.
- $Y = f(X)$ nueva variable aleatoria.



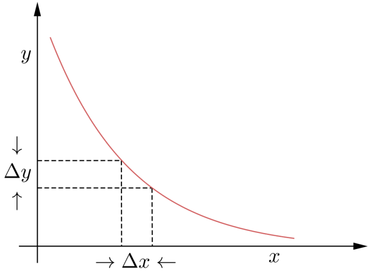
¿Cómo construir distribuciones?

Se tiene que

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(X \geq f^{-1}(y)\big) = 1 - F_X\big(f^{-1}(y)\big).$$

- Derivando con respecto a y:

$$p_Y(y) = -p_X\big(f^{-1}(y)\big)\big[f^{-1}\big]'(y) = -\frac{p_X\big(f^{-1}(y)\big)}{f'(f^{-1}(y))}.$$

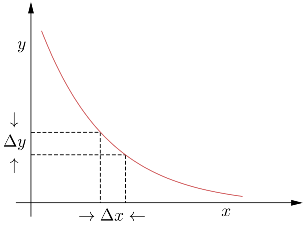


¿Cómo construir distribuciones?

Dos casos

- Caso y monótona decreciente:
$$p_Y(y) = -\frac{p_X\big(f^{-1}(y)\big)}{f'(f^{-1}(y))}.$$

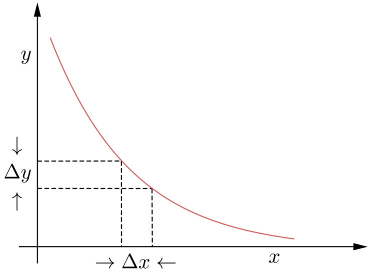
- Caso y monótona creciente:
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(X \leq f^{-1}(y)\big) = F_X\big(f^{-1}(y)\big)$$
$$\Rightarrow p_Y(y) = \frac{p_X\big(f^{-1}(y)\big)}{f'(f^{-1}(y))}.$$



¿Cómo construir distribuciones?

En general

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left(f^{-1}(y)\right)}{\left|f'(f^{-1}(y))\right|}.$$



Transformaciones

Ejemplo

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, ¿cómo se distribuye $Y = \mu + \sigma X$?

Desarrollo

- $f(x) = \mu + \sigma x$.
- $f'(x) = \sigma$.
- $f^{-1}(y) = \frac{y-\mu}{\sigma}$.
- Luego,
$$p_Y(y) = \frac{p_X\left(f^{-1}(y)\right)}{|f'(f^{-1}(y))|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Conclusión

- $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Transformaciones

Ejemplo

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, ¿cómo se distribuye $Y = e^X$?

Desarrollo

- $f(x) = e^x$.
- $f'(x) = e^x$.
- $f^{-1}(y) = \ln(y)$.
- Luego,

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left(f^{-1}(y)\right)}{|f'(f^{-1}(y))|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{e^{\ln(y)}}$$

$$\Rightarrow p_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ con } y \in (0, +\infty).$$

Transformaciones

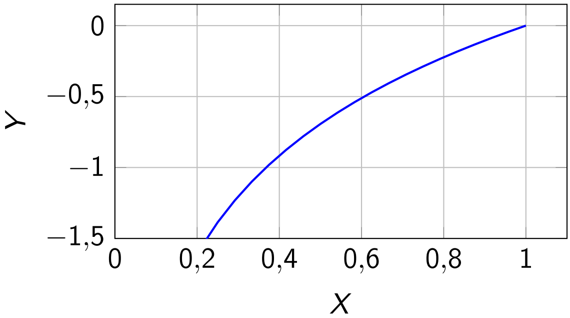
Conclusión

- Y sigue distribución llamada Log-normal ($Y \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$).

Transformaciones

Ejemplo

- Si $X \sim U(0,1)$, ¿cómo se distribuye $Y = \ln(X)$?



Transformaciones

Ejemplo

- Si $X \sim U(0,1)$, ¿cómo se distribuye $Y = \ln(X)$?

Desarrollo

- $f(x) = \ln(x)$.
- $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f^{-1}(y) = e^y$.
- Luego,

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left(f^{-1}(y)\right)}{|f'(f^{-1}(y))|} = 1\frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y, \text{ con } y \in (-\infty, 0]\,.$$

Transformaciones – ¿y si f no es monótona?

Por ejemplo

- $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $Y = X^2$.

Separar parte negativa y positiva

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\
\Rightarrow p_Y(y) &= \frac{p_X\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} - \frac{p_X\left(-\sqrt{y}\right)}{-2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}(p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})) \\
&\Rightarrow p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \text{ con } y \in [0, +\infty)\,.
\end{aligned}
$$

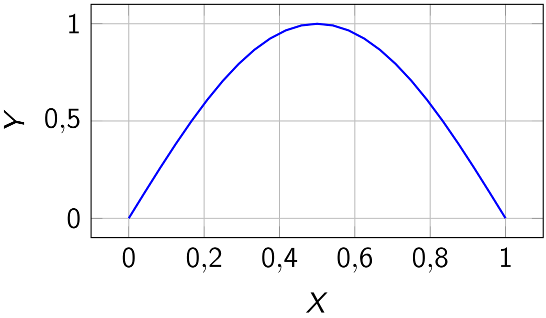
Conclusión

- Y sigue distribución llamada ji al cuadrado ($Y \sim \chi^2(1)$).

Transformaciones – ¿y si f no es monótona?

Ejemplo

- Si $X \sim U(0,1)$, ¿cómo se distribuye $Y = \sin(\pi X)$?

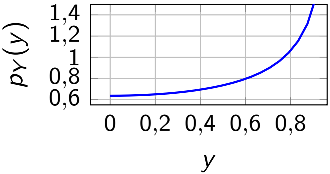


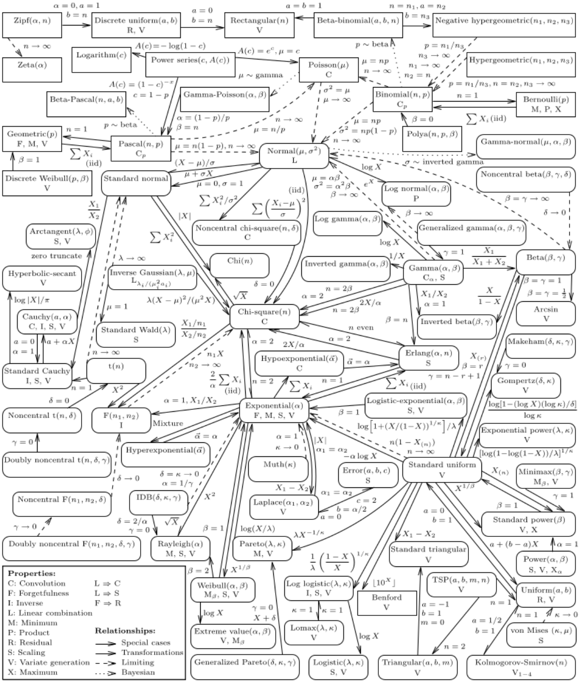
Transformaciones – ¿y si f no es monótona?

Desarrollo

- Si $X \sim U(0,1)$, ¿cómo se distribuye $Y = \sin(\pi X)$?

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P(\sin(\pi X) \leq y) \\
&= P(\pi X \leq \arcsin(y)) + P(\pi X > \pi - \arcsin(y)) \\
&= P(\pi X \leq \arcsin(y)) + 1 - P(\pi X \leq \pi - \arcsin(y)) \\
&= \frac{1}{\pi}\arcsin(y) + 1 - \frac{1}{\pi}(\pi - \arcsin(y)) = \frac{2}{\pi}\arcsin(y) \\
&\Rightarrow p_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \text{ con } y \in (0,1)
\end{aligned}
$$




Zipf(α, n)
Discrete uniform(a, b) R, V
Rectangular(n) V
Beta-binomial(a, b, n)
Negative hypergeometric(n1, n2, n3)
Zeta(α)
Logarithm(c)
Power series(c, A(c))
Poisson(μ) C
Hypergeometric(n1, n2, n3)
Beta-Pascal(n, a, b)
Gamma-Poisson(α, β)
Binomial(n, p) Cp
Bernoulli(p) M, P, X
Geometric(p) F, M, V
Pascal(n, p) Cp
Polya(n, p, β)
Normal(μ, σ²) L
Gamma-normal(μ, α, β)
Discrete Weibull(p, β) V
Standard normal
Log normal(α, β) P
Noncentral beta(β, γ, δ)
Log gamma(α, β)
Generalized gamma(α, β, γ)
Arctangent(λ, φ) S, V
Noncentral chi-square(n, δ) C
Chi(n)
Inverted gamma(α, β)
Gamma(α, β) Cα, S
Beta(β, γ)
Hyperbolic-secant V
Inverse Gaussian(λ, μ)
Arcsin V
Cauchy(a, α) C, I, S, V
Standard Wald(λ) S
Chi-square(n) C
Inverted beta(β, γ)
Makeham(δ, κ, γ)
Erlang(α, n) S
Hypoexponential(α) C
Standard Cauchy I, S, V
t(n)
Gompertz(δ, κ) V
Logistic-exponential(α, β) S, V
Noncentral t(n, δ)
F(n1, n2) I
Exponential(α) F, M, S, V
Exponential power(λ, κ) V
Mixture
Hyperexponential(α)
Doubly noncentral t(n, δ, γ)
Muth(κ)
Error(a, b, c) S
Standard uniform V
Minimax(β, γ) Mβ, V
Noncentral F(n1, n2, δ)
IDB(δ, κ, γ)
Laplace(α1, α2) V
Standard power(β) V, X
Doubly noncentral F(n1, n2, δ, γ)
Rayleigh(α) M, S, V
Pareto(λ, κ) M, V
Standard triangular V
Power(α, β) S, V, Xα
Weibull(α, β) Mβ, S, V
Log logistic(λ, κ) I, S, V
Benford V
TSP(a, b, m, n) V
Uniform(a, b) R, V
Extreme value(α, β) V, Mβ
Lomax(λ, κ) V
von Mises (κ, μ) S
Generalized Pareto(δ, κ, γ)
Logistic(λ, κ) S, V
Triangular(a, b, m) V
Kolmogorov-Smirnov(n) V1−4
Properties:
C: Convolution
F: Forgetfulness
I: Inverse
L: Linear combination
M: Minimum
P: Product
R: Residual
S: Scaling
V: Variate generation
X: Maximum
L ⇒ C
L ⇒ S
F ⇒ R
Relationships:
Special cases
Transformations
Limiting
Bayesian

Extensión a varias variables aleatorias discretas

Probabilidad conjunta

$$P(X = x, Y = y) = f_{X,Y}(x, y).$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x'=-\infty}^{x} \sum_{y'=-\infty}^{y} f_{X,Y}(x', y').$$

		X				
	$f_{X,Y}(x,y)$	1	2	3	4	$f_Y(y)$
Y	1	0.1	0.33	0.15	0.04	0.62
	2	0	0.03	0.2	0.02	0.25
	3	0	0	0.05	0.08	0.13
	$f_X(x)$	0.1	0.36	0.4	0.14	

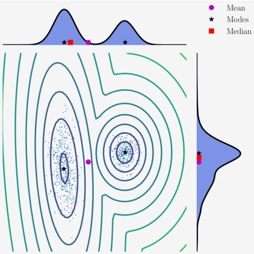
Probabilidad marginal

$$P(X = x) = f_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P(X = x, Y = y).$$

Extensión a varias variables aleatorias continuas

Probabilidad conjunta

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x',y')\,dy'\,dx'.$$



Función de densidad de probabilidad (*pdf*) marginal

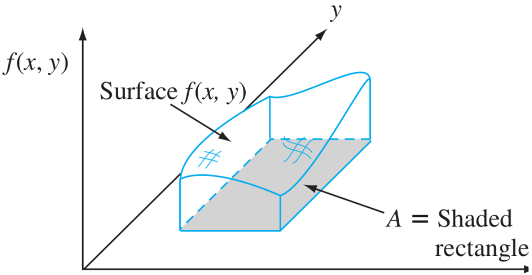
$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)\,dy.$$

Probabilidades y variables aleatorias

Eventos

- Caso discreto:
$$P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y).$$

- Caso continuo:
$$P((X,Y)\in A)=\iint_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y)dxdy.$$



Recuerdo de definiciones

- Probabilidad condicional:
$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}.$$

- Independencia:
$$P(A, B) = P(A)P(B).$$

		X				
	$f_{X,Y}(x, y)$	1	2	3	4	$f_Y(y)$
Y	1	0.1	0.33	0.15	0.04	0.62
	2	0	0.03	0.2	0.02	0.25
	3	0	0	0.05	0.08	0.13
	$f_X(x)$	0.1	0.36	0.4	0.14	

Y	$f_{Y\mid X=3}(y)$
1	0.375
2	0.5
3	0.125

Extensión a varias variables aleatorias discretas

Probabilidad condicional

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Independencia

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Regla del producto

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y).$$

Teorema de Bayes

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)}{f_X(x)}.$$

Extensión a varias variables aleatorias continuas

Probabilidad condicional

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Independencia

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Regla del producto

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x \mid y)p_Y(y).$$

Teorema de Bayes

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{X|Y}(x \mid y)p_Y(y)}{p_X(x)}.$$

Extensión a varias variables aleatorias

		X				
	$f_{X,Y}(x,y)$	1	2	3	4	$f_Y(y)$
	1	0.1	0.33	0.15	0.04	0.62
Y	2	0	0.03	0.2	0.02	0.25
	3	0	0	0.05	0.08	0.13
	$f_X(x)$	0.1	0.36	0.4	0.14	

Probabilidad marginal

$$P(X = x) = f_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y).$$

Función de densidad de probabilidad (*pdf*) marginal

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(x \mid y) p_Y(y)dy.$$

Extensión a varias variables aleatorias

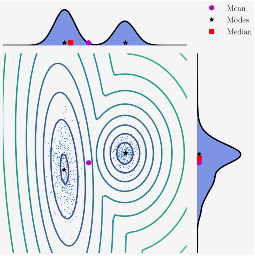
Valor esperado / esperanza

- Caso discreto:

$$\mathbb{E}_{X,Y}[X,Y] = \mathbb{E}_{X,Y}[(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} (x,y) f_{X,Y}(x,y).$$

- Caso continuo:

$$\mathbb{E}_{X,Y}[X,Y] = \mathbb{E}_{X,Y}[(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x,y) p_{X,Y}(x,y) dydx.$$



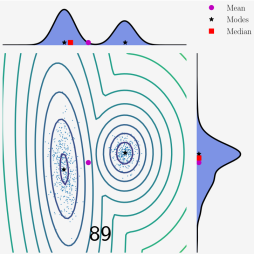
Probabilidad marginal... ¡De nuevo!

Probabilidad marginal

$$P(X = x) = f_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y) = \mathbb{E}_Y\left[f_{X|Y}(x \mid y)\right].$$

Función de densidad de probabilidad (*pdf*) marginal

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(x \mid y) p_Y(y) dy = \mathbb{E}_Y\left[p_{X|Y}(x \mid y)\right].$$

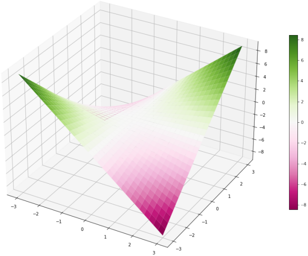


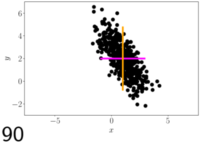
Extensión a varias variables aleatorias

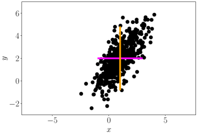
Covarianza y varianza

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}_{X,Y}[(X-\mathbb{E}_X[X])(Y-\mathbb{E}_Y[Y])] \\ &= \mathbb{E}_{X,Y}[XY]-\mathbb{E}_X[X]\mathbb{E}_Y[Y].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X] = \mathrm{Cov}(X,X) &= \mathbb{E}_X[(X-\mathbb{E}_X[X])(X-\mathbb{E}_X[X])] \\ &= \mathbb{E}_X\left[X^2\right]-\mathbb{E}_X[X]^2.\end{aligned}$$



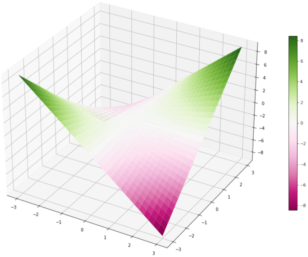


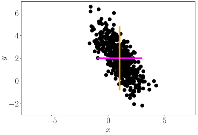


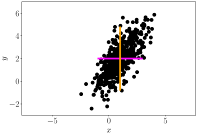
Extensión a varias variables aleatorias

Correlación

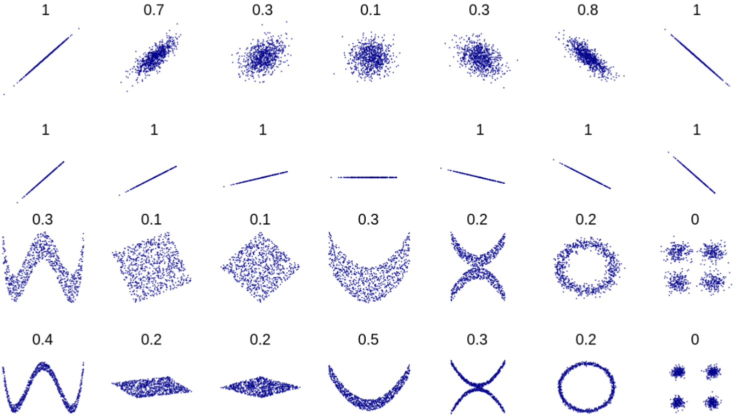
$$\operatorname{corr}[X, Y] = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}} \in [-1, 1].$$







Correlación



Correlación

Ejemplo

- X variable aleatoria con media 0 ($\mathbb{E}_X[X] = 0$) y $\mathbb{E}_X\left[X^3\right] = 0$.
- Sea $Y = X^2$.
- ¿$\mathrm{Cov}(X, Y)$?

Correlación

Ejemplo

- X variable aleatoria con media 0 ($\mathbb{E}_X[X] = 0$) y $\mathbb{E}_X\left[X^3\right] = 0$.
- Sea $Y = X^2$.
- ¿$\text{Cov}(X, Y)$?

Resultado

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 - 0 = 0.$$

Extensión a varias variables aleatorias

Propiedades

- $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.
- $\mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$.
- $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}(X,Y)$.
- $\mathbb{V}[X-Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{Cov}(X,Y)$.

Demostración varianza de $X+Y$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{E}\Big[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2\Big] \\ = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X]+Y-\mathbb{E}[Y])^2\Big]\end{aligned}$$

Extensión a varias variables aleatorias

Demostración varianza de $X + Y$

$$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y]$$

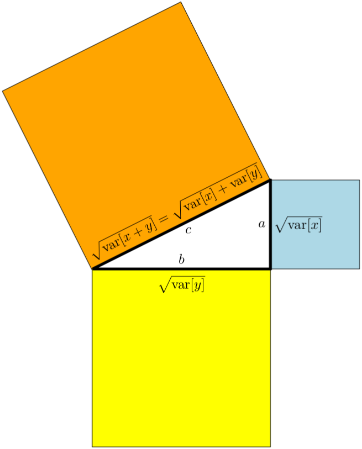
$$= \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])^2\Big] + \mathbb{E}\Big[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\Big] + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$

$$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Nota: producto interno de variables aleatorias

Dos variables no correlacionadas

$$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y].$$



Distribuciones normales independientes

Supuesto

- Sean $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ e $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$.
- Independientes: $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$.

Suma

- La variable aleatoria $X + Y$ es normal $\mathcal{N}\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$.

En general

- La variable aleatoria $aX + bY$ sigue $\mathcal{N}\left(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2\right)$.

Distribuciones normales independientes

Ejemplo

- El precio de un litro de bencina en Santiago se determina según:
  $$P = (1 + \mathrm{IVA})P_{\text{enap}} + P_{\text{transporte}} + P_{\text{distribuición}} + I_{\text{específico}},$$
- Donde:
  - P_{enap} es el precio al que se vende en la refinería de Concón.
  - $P_{\text{transporte}}$ es el precio de transportar hasta Maipú por el gasoducto.
  - $P_{\text{distribución}}$ es un margen de venta para la distribuidora.
  - IVA es el impuesto al valor agregado, actualmente 19 %.
  - $I_{\text{específico}}$ es el impuesto específico, correspondiente a 6 UTM por m^3.

Supuestos

- $P_{\text{enap}} \sim \mathcal{N}(500, 10000)$.
- $P_{\text{transporte}} \sim \mathcal{N}(10, 4)$.
- $P_{\text{distribución}} \sim \mathcal{N}(75, 400)$.

Distribuciones normales independientes

Ejemplo

$$P = (1 + \mathrm{IVA})P_{\mathrm{enap}} + P_{\mathrm{transporte}} + P_{\mathrm{distribuición}} + I_{\mathrm{específico}}.$$

- P es normal $\mathcal{N}\left(\mu_P, \sigma_P^2\right)$, con:
  - $\mu_P = (1 + 0{,}19)\mu_{P_{\mathbf{enap}}} + \mu_{P_{\mathbf{transporte}}} + \mu_{P_{\mathbf{distribución}}} + 6 \cdot 52631 \frac{1}{1000}$.
  - $\sigma_P^2 = (1 + 0{,}19)^2\sigma_{P_{\mathbf{enap}}}^2 + \sigma_{P_{\mathbf{transporte}}}^2 + \sigma_{P_{\mathbf{distribución}}}^2$.
- P es normal $\mathcal{N}\left(\mu_P, \sigma_P^2\right) = \mathcal{N}(995{,}786, 14565)$.