

Recursión

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Introducción

Introducción

- ▶ En ocasiones es difícil definir una función u objeto de manera explícita
- ▶ Alternativa: Definición en función de sí mismo
- ▶ Siempre tiene dos partes: Base y parte recursiva
 - ▶ La base está compuesta por casos simples explícitamente definidos
 - ▶ La parte recursiva generaliza sobre nuevos casos definidos en función de otros anteriores

Secuencias definidas recursivamente

Secuencias definidas recursivamente

- ▶ Es una lista infinita de objetos enumerados en algún orden
- ▶ Denominemos al k -ésimo objeto como $S(k)$

$$S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$$

- ▶ Una secuencia definida recursivamente cuando $S(k)$ se define en función de alguno(s) de los $k - 1$ previos objetos

Ejemplo

Considere la siguiente secuencia definida recursivamente

1. $S(1) = 1$
2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$

- ▶ Podemos verificar que $S(2) = 2$, $S(3) = 4$ y luego $8, 16, 32 \dots$

Actividad

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$, para $n \geq 2$

Escriba los primeros 5 valores de la secuencia T

Actividad: Fibonacci

Sugerencia: Revise el siguiente video

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(n) = F(n - 2) + F(n - 1)$, para $n > 2$

- ▶ Escriba los primeros 8 valores de la secuencia F
- ▶ Calcule el cuociente entre varios valores sucesivos de F y averigüe acerca de la razón dorada

Conjuntos definidos recursivamente

Conjuntos definidos recursivamente

- ▶ Previamente, los objetos tenían un orden
- ▶ Los conjuntos **no** tienen este ordenamiento
- ▶ Se especifican algunos elementos iniciales
- ▶ Se provee de una regla para construir nuevos elementos a partir de los ya existentes

Ejemplo

Considere el subconjunto S de los enteros, que se define como

1. Paso base: $4 \in S$
 2. Paso recursivo: Si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $x + y \in S$
- ▶ Así entonces el conjunto S estará conformado por
 $4 + 4 = 8; 4 + 8 = 12; 8 + 8 = 16 \dots$
 - ▶ Será el de los múltiplos de 4

Actividad

Considere el conjunto A^* de todas las palabras de largo finito sobre un alfabeto A . Luego, se define recursivamente siguiendo las reglas:

1. La palabra sin símbolos (vacía) λ pertenece a A^*
 2. Cualquier símbolo de A pertenece a A^*
 3. Si x e y son palabras en A^* , entonces también lo será xy , es decir la concatenación de las palabras x e y
- Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$. Si $x = 1101$ e $y = 001$, **escriba** las palabras xy , yx y $yx\lambda x$.

Actividad

Entregue una definición recursiva para el conjunto de todas las palabras binarias que se leen de igual manera de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1001 y 11011.

Solución.

Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$.

1. $\lambda, 0, 1 \in A^*$
2. Si $x \in A^*$, entonces también $0x0$ y $1x1$

Operaciones definidas recursivamente

- ▶ Ciertas operaciones sobre objetos pueden ser definidas recursivamente
- ▶ Por ejemplo, la exponentiación sobre un número real distinto de 0

$$1. \quad p^0 = 1$$

$$2. \quad p^n = (p^{n-1}) \cdot p, \quad \forall n \geq 1$$

- ▶ O la multiplicación de dos enteros m y n

1. $m(1) = m$
2. $m(n) = m(n - 1) + m, \forall n \geq 1$

- ▶ **Ejemplo**

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

Ejemplo (solución)

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

1. $x^0 = x$
2. $x^n = x^{n-1}x, \forall n \geq 1$

Algoritmos definidos recursivamente

- ▶ En palabras simples, es un programa que en su cuerpo tiene llamadas a sí mismo
- ▶ Recordemos la secuencia
 1. $S(1) = 2$
 2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$
- ▶ Calcule $S(2), S(3), S(4)$ y $S(5)$.

- ▶ Considere un programa que evalua $S(n)$

Procedimiento S(*n* un nro entero)\$

Si *n* = 1 entonces

 retornar 2

Sino

i = 2

val = 2

 mientras *i* <= *n* hacer

val = 2 * *val*

i = *i* + 1

 fin de bloque mientras

 retornar *val*

fin de bloque Si

fin de procedimiento

- ▶ Otro enfoque consiste en una definición mucho más corta
(Observe)

Procedimiento $S(n)$ un nro entero \$

Si $n = 1$ entonces

 retornar 2

Sino

 retornar $2 * S(n-1)$

 fin de bloque Si

fin de procedimiento

- ▶ Analice como se calcula $S(3)$ con este código.

Ventajas relativas en algoritmos recursivos e iterativos

- ▶ Recursividad ofrece (en ocasiones) una manera más natural para muchos problemas
- ▶ Recursividad genera procedimientos más cortos
- ▶ Operación de alg. recursivo es más compleja
- ▶ Ejecución de Alg. recursivo consume más memoria

Actividad

Recuerde la secuencia antes vista y escriba una función recursiva para calcular $T(n)$

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$, para $n \geq 2$

Actividad

Recuerde la operación recursiva para multiplicar dos números y construya un pseudocódigo para ella.

Conclusiones

- ▶ Muchos problemas pueden ser analizados más naturalmente bajo una perspectiva recursiva
- ▶ El “secreto” de una recursividad efectiva está en entregarle a cada llamada una versión más pequeña o simple del problema
- ▶ Nunca olvidar la definición del caso base... todo depende de ello!

Relaciones de Recurrencia

Imagine que una persona deposita \$10.000 en una cuenta de ahorro de un banco con un %11 de interés anual compuesto. ¿Cuanto se habrá reunido en la cuenta después de 30 años?

Inicialmente : £ 50.000

I.C. % 11 anual.

Inicialmente 10.000

$$\text{fin Año 1 : } 10.000 \times 1,11 = 11.100$$

$$\text{fin Año 2 : } 11.100 \times 1,11 = 12.321$$

$$\text{fin Año 3 : } 12.321 \times 1,11 = \underline{13.676} \quad (,31)$$

⋮

$$C(n) = 1,11 \times C(n-1) \quad \text{con} \quad C(0) = 50000$$

Avengos podremos verifizar que la relación a esto es:

$$C(n) = 10000 \times 1,11^n$$

- ▶ Anteriormente, construimos procedimientos para calcular
 1. $S(1) = 2$
 2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$

- ▶ Luego, al calcular otros valores de la función

$$1. \quad S(1) = 2^1$$

$$2. \quad S(2) = 2^2$$

$$3. \quad S(3) = 2^3$$

$$4. \quad S(4) = 2^4$$

...

$$n. \quad S(n) = 2^n$$

- ▶ Ahora vemos que basta con calcular $S(n)$ para cualquier número **sin** necesidad de tener que obtener los $n - 1$ pasos previos.

Caso base: $S(1) = 2$

Suponemos: $S(k) = 2^k$

Luego probar que $S(k+1) = 2^{k+1}$

$$\begin{aligned} \text{si } S(k+1) &= 2 \cdot S(k) && \text{usando definición} \\ &= 2 \cdot 2^k && \text{usando hip. Ind.} \end{aligned}$$

$$\text{finalmente } S(k+1) = 2^{k+1} \quad //$$

Soluciones cerradas

- ▶ Soluciones como la del ejemplo permiten obtener directamente cualquier valor
- ▶ Se denominan **soluciones cerradas** de una relación de recurrencia
- ▶ Entonces, para nuestro ejemplo, la **solución** $S(n) = 2^n$ resuelve la **relación de recurrencia** $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$

Relaciones lineales de 1er orden

Una relación $S(n)$ es lineal si sus valores tienen la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n - 1) + f_2(n)S(n - 2) + \dots + f_k(n)S(n - k) + g(n)$$

- ▶ Las f_s y g son expresiones que involucran solamente a n más otras constantes

Caracterizando las relaciones lineales de 1er orden

- ▶ Revisaremos ahora qué condiciones considerar para
 - ▶ Las f_s
 - ▶ La dependencia de $S(n)$ de sus valores anteriores (*orden*)
 - ▶ g
- ▶ Dependiendo de estas condiciones estudiaremos ciertos tipos de soluciones para cada tipo de relación

Relaciones de 1er orden con coefs. constantes

- ▶ La relación tendrá coeficientes constantes si todas las f_s lo son
- ▶ Será de 1er orden si $S(n)$ solo depende de $S(n - 1)$
- ▶ Entonces, podemos *continuar* caracterizando de manera general una relación lineal de 1er orden con coeficientes constantes como

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

- ▶ Por último, la relación será **homogénea** si $g(n) = 0$ para cualquier valor de n .

- ▶ Primer orden \Rightarrow Se requiere de un valor inicial para la base $S(1)$ u otro.
- ▶ Entonces, de manera general para este tipo de relaciones

$$\begin{aligned}
 S(n) &= cS(n-1) + g(n) \\
 &= c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n) \\
 &= c^2S(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
 &= c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n) \\
 &= c^3S(n-3) + c^2g(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Luego de k expansiones queda

$$S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \dots + c g(n-1) + g(n)$$

- ▶ Si esta secuencia tiene un valor base en 1, entonces la expansión terminará cuando $n - k = 1$ o $k = n - 1$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \dots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$$

$$S(n) = \underbrace{c^{n-1} S(1) + \dots + c^1 g(n-1)}_{\text{red}} + c^0 g(n)$$

- ▶ Estamos muy cerca de una solución, pero deberemos **siempre** encontrar una expresión para la sumatoria

- ▶ Por ejemplo, cuando $g(n) = 0$ queda solamente la primera parte de la solución (caso más simple denominado **homogéneo**)
- ▶ Ejemplo, volvamos a

$$\begin{aligned} S(1) &= 2 \\ S(n) &= 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- ▶ Es lineal, de primer orden y con coefs. ctes.
- ▶ Entonces,

$$S(n) = 2^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^n 0 = 2^n$$

En síntesis

1. Caracterizar la relación y verificar calce con expresión general
2. Encontrar el valor para c usando el valor inicial $S(1)$
3. Encontrar (si fuera necesario) un valor sintetizado para la sumatoria y obtener la expresión final de la solución

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^n c^{n-i} g(i)$$

$$\Leftrightarrow c \cdot s(n-1) + g(n)$$

Encontrar c y $g(n)$

Ejercicio:

Encuentre una solución para la relación

$$S(n) = 2S(n-1) + 3, \quad \forall n \geq 2$$

sujeta al paso base $S(1) = 4$.

Con la forma general vemos que $c = 2$ y $g(n) = 3$

Luego sustituyendo en forma general: $S(n) = \underbrace{2^{n-1} \cdot 4}_{\text{Recordar identidad vista en Inducción:}} + \sum_{i=2}^n 2^{n-i} \cdot 3$

Recordar identidad vista en Inducción:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\therefore = 2^{n+2} + 3 \left[\underbrace{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0}_{2^{n-2} - 1} \right]$$

Aplicando ... $S(5) = 2^6 + 3(2^4 - 1)$

$$\Rightarrow \boxed{S(n) = 2^{n+2} + 3(2^{n-2} - 1)}$$

Encontrar solución cerrada para

$$\bullet \quad T(n) = T(n-1) + (n+1) \text{ , para } n \geq 2 \text{ con } T(1) = 2$$

$$c=2 \quad y \quad g(n) = n+1$$

$$= 2 + \sum_{i=2}^n (i+1) = 2 + (3+4+\dots+(n+1)) \\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 //$$

$$\bullet \quad A(n) = 2 \cdot A(n-1) + 1 \text{ , } n > 1 \text{ con } A(1) = 1$$

$$c=2, g(n)=1. \rightarrow A(n) = 2^{n-1} \cdot A(1) + \sum_{i=2}^n 2^{n-i} \cdot g(n)^{i-1} \\ = 2^{n-1} + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1)$$

Torres de Hanoi



Obj.: transferir desde A a C los discos.

> No puede haber un disco más grande encima de otro más pequeño.

$$A(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 //$$

Para n discos ¿ n º mínimo de movimientos para transferir los discos?

De **A** a **B** se mueven $(n-1)$ discos en $A(n-1)$ movs.

Luego se move el último directamente a **C** (una movida)

Finalmente, se llevan los $(n-1)$ discos de **B** a **C** en $A(n-1)$ movidas. Entonces, se tienen $[A(n-1) + A(n-1) + 1]$

Suponga que un país con 100 M de hab. tiene una tasa de crecimiento de 1% anual. Además, recibe 100 K inmigrantes por año (se supone que este grupo adhiere la misma tasa).

Encuentre la población en 30 años. Puede suponer que los inmigrantes llegan en un lote al final de cada año.

Si: $A(n)$ es la población en n años:

$$A(n) = 1,01 A(n-1) + 100.000 \quad , \quad n > 0 \quad y \quad A(0) = 100.000.000$$

$$c = 1,01 \quad g(n) = 100.000$$

$$A(n) = 1,01^n \cdot A(0) + \sum_{i=1}^n 1,01^{n-i} \cdot 100.000 \quad g(n) \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}$$

$$= 1,01^n \cdot A(0) + 100.000 \cdot \sum_{i=1}^n 1,01^{n-i}$$

$$= 1,01^n \cdot 100.000.000 + 100.000 \cdot \left(\underbrace{\frac{1 - 1,01^n}{1 - 1,01}}_{-0,01} \right)$$

$$A(n) = 1,01^n \cdot 100.000.000 + 1000 \cdot (1 - 1,01^n)$$

$$\Rightarrow A(30) = 1,01^{30} \cdot 100.000.000 + 1000 \cdot (1 - 1,01^{30}) = \underline{\underline{150462212,5}} + \underline{\underline{105}} \\ = 110.462.317 //$$

Relaciones lineales de 2do orden

- ▶ En una relación de 2do orden el término n -ésimo depende de los dos términos anteriores.
- ▶ Por lo tanto, este tipo de relaciones tiene la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n - 1) + f_2(n)S(n - 2) + g(n)$$

- ▶ Consideraremos aquellas relaciones lineales homogéneas y con coeficientes constantes.

$$S(n) = c_1 S(n - 1) + c_2 S(n - 2)$$

Soluciones

- ▶ Buscamos soluciones de la forma

$$S(n) = r^n, \text{ con } r \text{ constante}$$

- ▶ Por lo tanto $S(n) = r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
- ▶ Esta solución estará dada por $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = 0$ y luego de dividir ambos lados por r^{n-2} queda

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- ▶ A esta expresión se le denomina **Ecuación característica** de la relación

Esto es una conjetura, pero
también es consistente con
la sol. de 1er orden.

- ▶ Esta ecuación tendrá 2 raíces: r_1 y r_2
- ▶ A las raíces de esta ecuación se le denominan raíces características

Estrategia propuesta:

- ▶ Lograremos caracterizar **La solución cerrada** de la relación mediante r_1 y r_2

$$c_0 S_n - c_1 S_{n-1} - c_2 S_{n-2} = 0$$

¿Que sabemos hasta hora entonces?

1. $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$

2. $S(n) = r^n$

3. Luego, $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$

4. Finalmente, hay que resolver $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

5. Podemos agregar que $r_1^2 = (c_1 r_1 + c_2)$ y $r_2^2 = (c_1 r_2 + c_2)$

c₁ y c₂ identificables a partir de ec. característica.

Luego, la solución tendrá la forma

$$S(n) = \underbrace{c_1 \cdot S(n-1)}_{\text{Solo cambia la raíz.}} + \underbrace{c_2 \cdot S(n-2)}_{}$$

(probaremos informalmente esto a continuación...)

Acabamos de afirmar que $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ \dots &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-2} \cancel{r_1} + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \cancel{\alpha_2 r_2^{n-2}}) \\ \dots &= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \cancel{\alpha_2 r_2^{n-2}} (c_1 r_2 + c_2) \\ \dots &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Ojo Hemos supuesto hasta ahora que $r_1 \neq r_2$

La descomposición anterior también puede hacerse si se considera la solución

$$s(n) = \alpha \cdot r^{n-1} \quad \text{que si se parece a la relación fórmula}$$

$$s(n-1) = c \cdot r^{n-2}$$

$$s(n-2) = c \cdot r^{n-3} \dots$$

$$\text{de 1er orden: } s(n) = C^{n-2} \cdot s(1)$$

$$\text{donde } \alpha \sim r \text{ y } c_1 \sim s(1)$$

de esta forma $s(n) = c_1 (d_1 r_1^{n-1} + d_2 r_2^{n-1}) + c_2 (d_1 r_1^{n-2} + d_2 r_2^{n-2})$

$$= \underline{d_1 c_1 r_1^{n-1}} + \underline{d_2 c_1 r_2^{n-1}} + \underline{d_1 c_2 r_1^{n-2}} + \underline{d_2 c_2 r_2^{n-2}}$$

$$= d_1 (\underbrace{c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}}_{(r_1^{n-2} \cdot r_1)}) + d_2 (\underbrace{c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}}_{(r_2^{n-2} \cdot r_2)})$$

$$= d_1 r_1^{n-2} (\underbrace{c_1 r_1 + c_2}_{r_1^2}) + d_2 r_2^{n-2} (\underbrace{c_1 r_2 + c_2}_{r_2^2})$$

$$s(n) = d_1 r_1^n + d_2 r_2^n //$$

Lo relevante es la dependencia del exponente respecto del n .

$$s(n) = c r^n \text{ o } s(n) = C r^{n-1}$$

da igual.

Ahora solamente nos queda establecer un mecanismo para encontrar α_1 y α_2 .

1. Se identifican c_1 y c_2 a partir de la relación entregada.
2. Se obtienen las soluciones para $r^2 - c_1r - c_2 = 0$
3. Se obtienen α_1 y α_2 usando las dos casos iniciales... $S(0)$ y $S(1)$

¿Como?

Reemplazando $n = 0$ y $n = 1$ en $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S(1) &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

y

$$\alpha_2 = S(0) - \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

Mutiplicidad de raíces

- ▶ Considere la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

con raíces $r = r_1 = r_2$.

- ▶ La solución para $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$ tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

- ▶ Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad.

- ▶ Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad. Es decir:

$$\begin{aligned}S(0) &= \alpha_1 r^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha_1 \\S(1) &= \alpha_1 r^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha_1 r + \alpha_2 r\end{aligned}$$

Finalmente (verifique el desarrollo):

$$\alpha_1 = S(0) ; \alpha_2 = \frac{S(1) - S(0)r}{r}$$

Resolver la ec. de rec. lineal, homogénea y con coef. constantes

① $s(n) = 2 \cdot s(n-1) + 3 \cdot s(n-2)$, $\forall n \geq 3$ sujeto a que $s(1) = 3$ y $s(2) = 1$

a) Identificar ctes. $c_1 = 2$, $c_2 = 3$

b) Escribir ec. de 2º grado: $r^2 - 2r - 3 = 0$ y resolver

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1 \cdot -3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

\Rightarrow Soluciones distintas y \mathbb{R} .

Solución general: $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$$\therefore r_1 = \frac{6}{2} = 3, \quad r_2 = \frac{-2}{2} = -1,$$

Solución tendrá forma: $s(n) = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$

c) Usar casos iniciales en $*$ para determinar α_1 y α_2

$$\left. \begin{array}{l} s(1) = 3\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ s(2) = 9\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha_2 = 3\alpha_1 - 3 \Rightarrow 9\alpha_1 + 3\alpha_1 - 3 = 1 \\ 12\alpha_1 = 4 \end{array}$$

Solución: $s(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n - 2 \cdot (-1)^n = 3^{n-1} - 2(-1)^n //$

$$\boxed{\alpha_2 = -2} \Leftarrow \boxed{\alpha_1 = 1/3}$$