# Relaciones Binarias

## EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2024

# Introducción

# Introducción

Estudiaremos

- relaciones entre **pares** de individuos de un conjunto
- Propiedades de estas relaciones
  - Ejemplos: *Orden Parcial* y *Equivalencia*
- Lo aprendido en esta unidad tiene aplicaciones en la optimización de procesos y bases de datos por mencionar dos áreas.

# Relaciones binarias

# Relaciones binarias

- Recordemos la idea de pares de elementos de un conjunto
- **Por ejemplo:** Dado $S = \{1, 2, 3\}$,

$$S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

- Podemos definir ciertas condiciones entre elementos de $S$
  - Ej. Elementos iguales, un número menor que el otro, un número divide al otro ...
- Podemos simbolizar uno de estos criterios mediante la letra $\rho$

- Este criterio o relación puede ser definida en palabras o como una ecuación
- Luego, $x\rho y$ indica que el par ordenado $(x, y)$ satisface la condición impuesta por la relación
- Aún podemos formalizar de mejor manera esta definición.

# Relación Binaria sobre un conjunto S

- Es un subconjunto de $S \times S$
- Entonces
$$x \rho y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$$
- Por ejemplo, dado $S = \{1, 2, 4\}$, y la relación $x \rho y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$
  - Entonces, $(1, 2)$ y $(2, 4)$ satisfacen $\rho$.

## Ejemplo

1. Dado $S = \{1, 2\}$ y sea $\rho$ definida sobre $S$ como $x\rho y \Leftrightarrow x + y$ es impar. ¿Cuales pares ordenados satisfacen la relación?

- Consideremos primero $S \times S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), \}$
- $1\rho 1 = 2 \Rightarrow$ **No** cumple
- $1\rho 2 = 3 \Rightarrow$ **Sí** cumple
- $2\rho 1 = 3 \Rightarrow$ **Sí** cumple
- $2\rho 2 = 4 \Rightarrow$ **No** cumple

Entonces $\rho = \{(1,2), (2,1)\}$

# Relaciones binarias sobre conjuntos distintos

- Las relaciones binarias no son exclusivas de conjuntos $S \times S$
- También es posible definirlas, por ejemplo sobre $S = \{1, 2, 3\}$ y $T = \{2, 4, 7\}$
  - En este caso, una relación binaria de $S$ a $T$ es un subconjunto de $S \times T$

**Generalización** Una relación $n$-aria se define de igual manera sobre $n$ conjuntos. Es decir $S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$

# Ejercicios

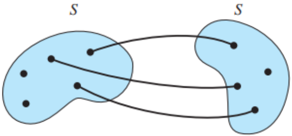
Para cada una de las relaciones binarias $\rho$ sobre $\mathbb{N}$, indique cuales pares ordenados pertenecen.

1. $x \rho y \Leftrightarrow x = y + 1; (2,2)(2,3)(3,3)(3,2)$
2. $x \rho y \Leftrightarrow x$ divide $y; (2,4)(2,5)(2,6)$
3. $x \rho y \Leftrightarrow x$ es impar $; (2,3)(3,4)(4,5),(5,6)$
4. $x \rho y \Leftrightarrow x > y^2; (1,2)(2,1)(5,2),(6,4),(4,3)$

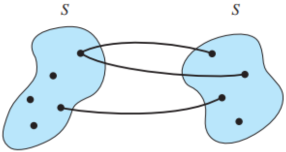
# Tipos de relaciones

# Tipos de relaciones

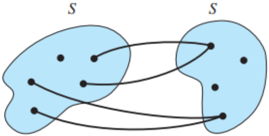
- Una relación $\rho$ sobre $S$ consistirá de un conjunto de pares ordenados de la forma $(s_1, s_2)$.
- Existen varias maneras de parear los elementos de $S$ en la relación
- Si cada $s_1$ y cada $s_2$ aparecen solo una vez en la relación: **Uno a Uno**
- Si algun(os) $s_1$ aparece con más de un $s_2$ distinto: **Uno a Muchos**
- Si algun(os) $s_2$ aparece con más de un $s_1$ distinto: **Muchos a Uno**
- Si al menos un $s_1$ es pareado con más de un $s_2$ distinto y viceversa: **Muchos a Muchos**



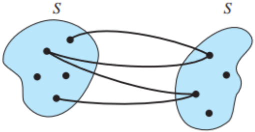

One-to-one




One-to-many




Many-to-one




Many-to-many

# Ejercicios

Identifique el tipo de relación sobre $S = \{2, 5, 7, 9\}$ como uno a uno, uno a muchos ...

1. $\{(5, 2), (7, 5), (9, 2)\}$
2. $\{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$
3. $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$

# Operaciones sobre relaciones

# Operaciones sobre relaciones

- Considerar todas las relaciones binarias sobre $S$
- Si $\rho$ y $\sigma$ pertenecen a este conjunto de relaciones entonces son subconjuntos de $S \times S$
- Luego, es posible aplicar operaciones de conjuntos (unión, intersección y complemento) entre estas relaciones y obtener nuevas

$$\begin{aligned} x(\rho \cup \sigma)y &\Leftrightarrow x\rho y \ \vee \ x\sigma y \\ x(\rho \cap \sigma)y &\Leftrightarrow x\rho y \ \wedge \ x\sigma y \\ x(\rho')y &\Leftrightarrow \neg \ x\rho y \end{aligned}$$

## Ejercicios

Sean $\rho$ y $\sigma$ dos relaciones binarias sobre $\mathbb{N}$ definidas como

- $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x = y$
- $x \ \sigma \ y \Leftrightarrow x < y$

Entregue una descripción verbal para

1. $\rho \cup \sigma$
2. $\rho'$
3. $\sigma'$

# Propiedades de las relaciones

# Propiedades de las relaciones

Una relación binaria $\rho$ sobre un conjunto $S$ puede tener ciertas propiedades

- **Reflexibidad** $(\forall x)(x \in S \Rightarrow (x,x) \in \rho)$
- **Simetría** $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho)$
- **Transitividad** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho)$
- **Antisimetría** $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho \Rightarrow x = y)$

# Ejemplos

- Identifique qué propiedades cumple $=$ sobre $\mathbb{N}$
- Identifique qué propiedades cumple $\leq$ sobre $\mathbb{N}$
- Identifique qué propiedades cumple $\subseteq$ sobre $\wp(\mathbb{N})$

# Ejemplos (respuestas)

- Identifique qué propiedades cumple $=$ sobre $\mathbb{N}$
  - $x \rho y \Leftrightarrow x = y$ es reflexiva, transitiva y simetrica
- Identifique qué propiedades cumple $\leq$ sobre $\mathbb{N}$
  - $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$ es reflexiva, transitiva y antisimetrica
- Identifique qué propiedades cumple $\subseteq$ sobre $\wp(\mathbb{N})$
  - $A \rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$ es reflexiva, transitiva y antisimetrica

# Ejercicios

Sea $S = \{1, 2, 3\}$ una relación $\rho$ sobre $S$.

1. Si $\rho$ es reflexiva, ¿Qué pares ordenados componen $\rho$?
2. Si $\rho$ es simétrica, ¿Qué pares ordenados componen $\rho$?
3. Si $\rho$ es simétrica y $(a, b) \in \rho$, ¿Qué otros pares deben estar en $\rho$?
4. Si $\rho$ es antisimétrica, $(a, b) \in \rho$ y $(b, a) \in \rho$, ¿Qué debe ser cierto?

# Ejercicios

Compruebe qué propiedades cumple cada relación sobre el conjunto indicado

1. $x \; \rho \; y \Leftrightarrow x + y$ es par sobre $\mathbb{N}$
2. $x \; \rho \; y \Leftrightarrow x$ divide $y$ sobre $\mathbb{Z}^+$
3. $x \; \rho \; y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre $\mathbb{N}$
4. $x \; \rho \; y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre $\{0, 1\}$

# Clausuras de relaciones

# Clausuras de relaciones

- Dado un conjunto $S$, una relación $\rho$ y una propiedad $P$ (simetría, transiti...)
- Si $\rho$ sobre $S$ carece de una propiedad $P$ es posible **extender** $\rho$ a una $\rho^*$ sobre $S$ que sí la tenga
- Luego, $\rho^*$ tendrá los pares $(x, y)$ en $\rho$ más otros adicionales para que se cumpla $P$
- Si $\rho^*$ es el conjunto más pequeño entonces se denomina la clausura de $\rho$ con respecto a $P$

# Definición

- Una relación $\rho^*$ sobre un conjunto $S$ es la clausura de la relación $\rho$ con respecto a la propiedad $P$ si
  - $\rho^*$ sí tiene $P$
  - $\rho \subseteq \rho^*$
  - $\rho^*$ es subconjunto de cualquier otra relación sobre $S$ que incluya $\rho$ y tenga la propiedad $P$

# Ejemplo

- Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- $\rho$ es no reflexiva, no simétrica y no transitiva

La clausura de $\rho$ respecto de la reflexividad es

$$\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

# Ejercicio

Encuentre la clausura reflexiva, simetrica y transitiva de la relación

$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,a)\}$$

sobre el conjunto $S = \{a,b,c,d\}$

# Ejercicio (resuelto)

- Clausura reflexiva: $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,a),(d,d)\}$
- Clausura simétrica: $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,a),(d,b)\}$
- Clausura transitiva: $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,a),(d,d),(d,c),(b,a),(b,c),(c,d)\}$

# Dos relaciones binarias de interés

# Dos relaciones binarias de interés

1. Ordenamientos parciales
2. Relaciones de equivalencia

# Ordenamientos parciales

- Relación binaria sobre un conjunto $S$ que es
  - reflexiva
  - antisimétrica
  - transitiva

# POSETS

- Si $\preceq$ es un orden parcial sobre $S$, el par $(S, \preceq)$ se denomina conjunto parcialmente ordenado (*POSET*)
- Ejemplos de posets:
  1. $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$
  2. $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ sobre $\wp(\mathbb{N})$
  3. $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide $y$ sobre $\mathbb{Z}^+$
  4. $x \preceq y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre $\{0, 1\}$
- Importante distinguir que $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$

## Restricción en subconjuntos

- Sea $(S, \preceq)$ un poset y sea $A \subseteq S$.
- Entonces, algunos pares de elementos en $\preceq$ pueden también ser pares de elementos de $A$
- Si escogemos a partir de $\preceq$ solamente pares con elementos de $A$, este nuevo conjunto se denomina **restricción** de $\preceq$ en $A$ y también es un poset en $A$
- Ejemplo: $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide $y$ sobre $\mathbb{Z}^+$.
  - Siguiendo def. sabemos que $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide $y$ es un orden parcial sobre $\{1, 2, 3, 6, 88\}$ (o cualquier otro subcjto. de $\mathbb{Z}^+$)

## Otros ejemplos familiares de posets

- Consideremos el poset $(S, \leq)$
- Si $x \leq y$ entonces se cumple que $x = y$ o que $x \neq y$.
- En este último caso, notamos $x < y$ y decimos que $x$ es predecesor de $y$
- Un $y$ cualquiera puede tener muchos predecesores (ser sucesor de muchos $x$ distintos)...
- ... pero cuando $\nexists z | x < z < y$, entonces $x$ es el predecesor inmediato de $y$

## Ejercicio

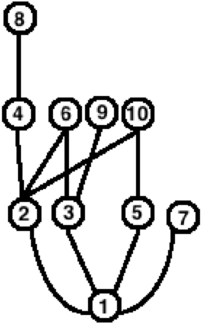
Consideremos la relación $x|y$ o $x$ divide a $y$ sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$

a. Escriba los pares ordenados de esta relación
b. Escriba todos los predecesores de 6
c. Escriba todos los predecesores inmediatos de 6

## Diagramas de Hasse

- Cuando $S$ es finito podemos visualizar un poset $(S, \preceq)$ usando un diagrama de Hasse
- Cada elemento en $S$ es representado por un punto denominado **nodo** o **vertice**
- Cuando $x$ es un predecesor inmediato de $y$, el nodo de $y$ se ubica sobre el de $x$
  - y se conectan ambos nodos por una linea recta

**Ejemplo para** $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, |)$



## Ejercicio

Considere el conjunto $\wp(\{1, 2\})$ junto a la relación de inclusión de conjuntos.

- Es una restricción del poset $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ es un poset.
- Por lo tanto, también es uno.

**Construya el diagrama de Hasse del poset.**

## Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación $x$ divide $y$ sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

## Elemento menor y minimal

- Sea $(S, \preceq)$ un poset
- Si existe un $y \in S$ con $y \preceq x$, $\forall x \in S$, entonces, $y$ es el **elemento menor** del poset. Además **es único** (demostrable por antisimetría).
- Un elemento $y \in S$ es **minimal** si no existe otro $x \in S$ con $x \prec y$
- En el diagrama de Hasse, el menor está debajo de todos los demás, mientras que el minimal simplemente es aquel que no tiene otros debajo.
- Analogamente, pueden definirse el **elemento mayor** y el **maximal**

### Ejercicio

Para el diagrama del poset de la relación $x$ divide $y$ sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ identifique el/los elementos maximales y el elemento mayor (en caso que exista).

## Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación $\leq$ sobre los $\{1, 2, 3, 4\}$

## Solución

- Un poset en el cual cada elemento está relacionado a todos los demás se denomina **orden total** o **cadena**.

# Relaciones de equivalencia

- Relación binaria sobre un conjunto $S$ que es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.
- Algunos ejemplos:
  1. Sobre cualquier conjunto $S$, $x \rho y \Leftrightarrow x = y$
  2. Sobre $\mathbb{N}$, $x \rho y \Leftrightarrow x + y$ es par
  3. Sobre $\{0, 1\}$, $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$
  4. Sobre $\{x | x \text{ es estudiante en la clase}\}$, $x \rho y \Leftrightarrow x$ se sienta en la misma fila que $y$

## Partición inducida

- Una relación de equivalencia induce una partición sobre el conjunto $S$
- Una **partición** de un conjunto $S$ es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de $S$
- La unión de estos subconjuntos es igual a $S$
- Para una relación $\rho$ sobre $S$ y $x \in S$, sea $[x]$ el conjunto de todos los miembros de $S$ relacionados con $x$
  - Este conjunto se denomina **clase de equivalencia** de $x$

$$[x] = \{y | y \in S \wedge x \rho y\} = \{y | y \in S \wedge y \rho x\}$$

## Ejercicio

Considere la relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$ dada por

$$x \rho y \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

1. En cuantas clases de equivalencia particiona a $\mathbb{N}$
2. Entregue 2 nombres de clases de equivalencia

## Ejemplo

- Considere la relación *congruencia modulo 4* sobre $\mathbb{Z}$ simbolizada por $\equiv_4$.
- Dos números $x, y \in \mathbb{Z}$ cumplen $x \equiv_4 y$ cuando $(x - y)$ es un multiplo entero de 4. También simbolizado como $x \equiv y (\mod 4)$
- Esto equivale a decir que $x \rho y \Leftrightarrow (x \mod 4) \equiv (y \mod 4)$
- Habrán entonces 4 particiones, una para los números $x$ tal que $(x \mod 4) = 0$, $(x \mod 4) = 1$, $(x \mod 4) = 2$ y $(x \mod 4) = 3$

## Ejercicio

- Entregue 3 números enteros de ejemplo para cada una de las 4 clases de equivalencia del ejemplo anterior.

# Ordenamiento Topológico

- Recordemos que al tener un orden parcial $\preceq$ sobre un conjunto $S$, algunos elementos de $S$ son predecesores de otros.
- Consideremos que $S$ es un conjunto de tareas o actividades que deben realizarse
- La idea de predecesor puede interpretarse como dependencia

$$x \preceq y \Leftrightarrow \ x \text{ es prerequisito de } y$$

## Ejercicio

- Explique porque la relación de prerequisito es reflexiva, antisimetrica y transitiva.

Continuando con el poset de actividades y sus relaciones de dependencias. . .

- Puede usarse un diagrama de Hasse para visualizar la malla de actividades
- Podemos también agregar en cada nodo la información del tiempo necesario en cada tarea

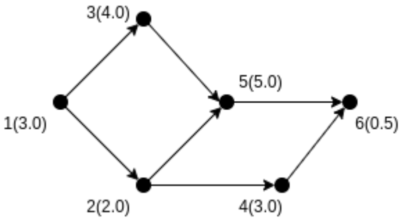
## Ejemplo

- Construya la malla de tareas para la siguiente tabla:

| Tarea | Prerequisitos | Semanas duracion |
|---|---|---|
| 1 | Ninguna | 3.0 |
| 2 | 1 | 2.0 |
| 3 | 1 | 4.0 |
| 4 | 2 | 3.0 |
| 5 | 3,2 | 5.0 |
| 6 | 4,5 | 0.5 |

El diagrama para la tabla anterior es:

- El proyecto avanza de izquierda a derecha
- Tareas 2 y 3 pueden realizarse en paralelo



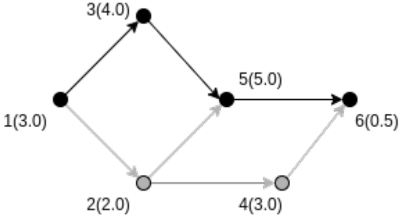
Por lo tanto, para calcular la duración de cada tarea

- **T1**. 3.0
- **T2**. $3.0 + 2.0 = 5.0$
- **T3**. $3.0 + 4.0 = 7.0$
- **T4**. $5.0 + 3.0 = 8.0$
- **T5**. $\max(T2, T3) + 5.0 = \mathbf{T3} + 5.0 = 12.0$
- **T6**. $\max(T4, T5) + 0.5 = \mathbf{T5} + 0.5 = 12.5$

Luego el número mínimo de semanas para realizar todo el proceso es de 12.5

La **ruta crítica** de la planificación es:

- Se genera recorriendo del fin al principio seleccionando el prerequisito con mayor valor



## Ejecución del Ordenamiento Topológico

Dado un **orden parcial** $\rho$ sobre un conjunto finito, **siempre existirá** un **orden total** $\sigma$ tal que si $x\rho y$, entonces también $x\sigma y$.

- El ordenamiento topológico es un proceso iterativo en que se encuentra ese orden total
- Siempre habrá un elemento minimal
- Se remueve y anota el elemento minimal hasta que no quedan más elementos

El O.T. de la planificación es (de izquiera a derecha partiendo por la secuencia de más arriba)