

Relaciones Binarias

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2024



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Introducción

Introducción

Estudiaremos

- ▶ relaciones entre **pares** de individuos de un conjunto
- ▶ Propiedades de estas relaciones
 - ▶ Ejemplos: *Orden Parcial* y *Equivalencia*
- ▶ Lo aprendido en esta unidad tiene aplicaciones en la optimización de procesos y bases de datos por mencionar dos áreas.

Relaciones binarias

Relaciones binarias

- ▶ Recordemos la idea de pares de elementos de un conjunto
- ▶ **Por ejemplo:** Dado $S = \{1, 2, 3\}$,

$$S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

- ▶ Podemos definir ciertas condiciones entre elementos de S
 - ▶ Ej. Elementos iguales, un número menor que el otro, un número divide al otro ...
- ▶ Podemos simbolizar uno de estos criterios mediante la letra ρ

- ▶ Este criterio o relación puede ser definida en palabras o como una ecuación
- ▶ Luego, $x\rho y$ indica que el par ordenado (x, y) satisface la condición impuesta por la relación
- ▶ Aún podemos formalizar de mejor manera esta definición.

Relación Binaria sobre un conjunto S

- ▶ Es un subconjunto de $S \times S$
- ▶ Entonces

$$x\rho y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

- ▶ Por ejemplo, dado $S = \{1, 2, 4\}$, y la relación $x\rho y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$
 - ▶ Entonces, $(1, 2)$ y $(2, 4)$ satisfacen ρ .

Ejemplo

1. Dado $S = \{1, 2\}$ y sea ρ definida sobre S como $x\rho y \Leftrightarrow x + y$ es impar. ¿Cuales pares ordenados satisfacen la relación?

► Consideremos primero $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \}$

► $1\rho 1 = 2 \Rightarrow$ **No** cumple

► $1\rho 2 = 3 \Rightarrow$ **Sí** cumple

► $2\rho 1 = 3 \Rightarrow$ **Sí** cumple

► $2\rho 2 = 4 \Rightarrow$ **No** cumple

Entonces $\rho = \{(1, 2), (2, 1)\}$

Relaciones binarias sobre conjuntos distintos

- ▶ Las relaciones binarias no son exclusivas de conjuntos $S \times S$
- ▶ También es posible definir las, por ejemplo sobre $S = \{1, 2, 3\}$ y $T = \{2, 4, 7\}$
 - ▶ En este caso, una relación binaria de S a T es un subconjunto de $S \times T$

Generalización Una relación n -aria se define de igual manera sobre n conjuntos. Es decir $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$

Ejercicios

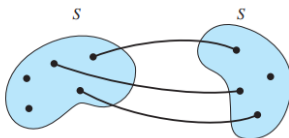
Para cada una de las relaciones binarias ρ sobre \mathbb{N} , indique cuales pares ordenados pertenecen.

1. $x\rho y \Leftrightarrow x = y + 1$; $(2, 2)(2, 3)(3, 3)(3, 2)$
2. $x\rho y \Leftrightarrow x$ divide y ; $(2, 4)(2, 5)(2, 6)$
3. $x\rho y \Leftrightarrow x$ es impar ; $(2, 3)(3, 4)(4, 5), (5, 6)$
4. $x\rho y \Leftrightarrow x > y^2$; $(1, 2)(2, 1)(5, 2), (6, 4), (4, 3)$

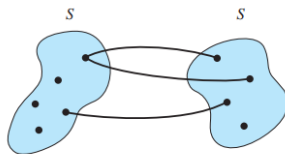
Tipos de relaciones

Tipos de relaciones

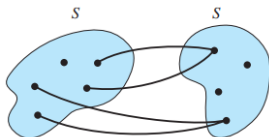
- ▶ Una relación ρ sobre S consistirá de un conjunto de pares ordenados de la forma (s_1, s_2) .
- ▶ Existen varias maneras de parear los elementos de S en la relación
- ▶ Si cada s_1 y cada s_2 aparecen solo una vez en la relación: **Uno a Uno**
- ▶ Si algun(os) s_1 aparece con más de un s_2 distinto: **Uno a Muchos**
- ▶ Si algun(os) s_2 aparece con más de un s_1 distinto: **Muchos a Uno**
- ▶ Si al menos un s_1 es pareado con más de un s_2 distinto y viceversa: **Muchos a Muchos**



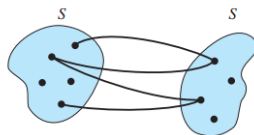
One-to-one



One-to-many



Many-to-one



Many-to-many

Ejercicios

Identifique el tipo de relación sobre $S = \{2, 5, 7, 9\}$ como uno a uno, uno a muchos ...

1. $\{(5, 2), (7, 5), (9, 2)\}$
2. $\{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$
3. $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$

Operaciones sobre relaciones

Operaciones sobre relaciones

- ▶ Considerar todas las relaciones binarias sobre S
- ▶ Si ρ y σ pertenecen a este conjunto de relaciones entonces son subconjuntos de $S \times S$
- ▶ Luego, es posible aplicar operaciones de conjuntos (unión, intersección y complemento) entre estas relaciones y obtener nuevas

$$x(\rho \cup \sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \vee x\sigma y$$

$$x(\rho \cap \sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \wedge x\sigma y$$

$$x(\rho')y \Leftrightarrow \neg x\rho y$$

Ejercicios

Sean ρ y σ dos relaciones binarias sobre \mathbb{N} definidas como

► $x \rho y \Leftrightarrow x = y$

► $x \sigma y \Leftrightarrow x < y$

Entregue una descripción verbal para

1. $\rho \cup \sigma$
2. ρ'
3. σ'

Propiedades de las relaciones

Propiedades de las relaciones

Una relación binaria ρ sobre un conjunto S puede tener ciertas propiedades

- ▶ **Reflexividad** $(\forall x)(x \in S \Rightarrow (x, x) \in \rho)$
- ▶ **Simetría** $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$
- ▶ **Transitividad** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho)$
- ▶ **Antisimetría**
 $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y)$

Comentarios

- ▶ Antisimetría **no** es lo opuesto de simetría
 - ▶ Relación **No simétrica** implica que si algún $(x, y) \in \rho$, pero no (y, x)
- ▶ Ejemplo: $S = \{0, 1\}$, $x\rho y \Rightarrow x = y^2$
 - ▶ Es reflexiva, transitiva, simétrica y antisimétrica

Ejemplos

- ▶ Identifique qué propiedades cumple $=$ sobre \mathbb{N}
- ▶ Identifique qué propiedades cumple \leq sobre \mathbb{N}
- ▶ Identifique qué propiedades cumple \subseteq sobre $\wp(\mathbb{N})$

Ejemplos (respuestas)

- ▶ Identifique qué propiedades cumple $=$ sobre \mathbb{N}
 - ▶ $x\rho y \Leftrightarrow x = y$ es reflexiva, transitiva, simétrica y antisimétrica
- ▶ Identifique qué propiedades cumple \leq sobre \mathbb{N}
 - ▶ $x\rho y \Leftrightarrow x \leq y$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica
- ▶ Identifique qué propiedades cumple \subseteq sobre $\wp(\mathbb{N})$
 - ▶ $A\rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica

Ejercicios

Sea $S = \{1, 2, 3\}$ una relación ρ sobre S .

1. Si ρ es reflexiva, ¿Qué pares ordenados componen ρ ?
2. Si ρ es simétrica, ¿Qué pares ordenados componen ρ ?
3. Si ρ es simétrica y $(a, b) \in \rho$, ¿Qué otros pares deben estar en ρ ?
4. Si ρ es antisimétrica, $(a, b) \in \rho$ y $(b, a) \in \rho$, ¿Qué debe ser cierto?

Ejercicios

Compruebe qué propiedades cumple cada relación sobre el conjunto indicado

1. $x \rho y \Leftrightarrow x + y$ es par sobre \mathbb{N}
2. $x \rho y \Leftrightarrow x$ divide y sobre \mathbb{Z}^+
3. $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre \mathbb{N}
4. $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre $\{0, 1\}$

Clausuras de relaciones

Clausuras de relaciones

- ▶ Dado un conjunto S , una relación ρ y una propiedad P (simetría, transiti. . .)
- ▶ Si ρ sobre S carece de una propiedad P es posible **extender** ρ a una ρ^* sobre S que sí la tenga
- ▶ Luego, ρ^* tendrá los pares (x, y) en ρ más otros adicionales para que se cumpla P
- ▶ Si ρ^* es el conjunto más pequeño entonces se denomina la clausura de ρ con respecto a P

Definición

- ▶ Una relación ρ^* sobre un conjunto S es la clausura de la relación ρ con respecto a la propiedad P si
 - ▶ ρ^* sí tiene P
 - ▶ $\rho \subseteq \rho^*$
 - ▶ ρ^* es subconjunto de cualquier otra relación sobre S que incluya ρ y tenga la propiedad P

Ejemplo

- ▶ Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- ▶ ρ es no reflexiva, no simétrica y no transitiva

La clausura de ρ respecto de la reflexividad es

$$\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Ejercicio

Encuentre la clausura reflexiva, simétrica y transitiva de la relación

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$$

sobre el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$

Ejercicio (resuelto)

- ▶ Clausura reflexiva:
 $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d)\}$
- ▶ Clausura simétrica:
 $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, b)\}$
- ▶ Clausura transitiva: $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d), (d, c), (b, a), (b, c), (c, d)\}$

Dos relaciones binarias de interés

Dos relaciones binarias de interés

1. Ordenamientos parciales
2. Relaciones de equivalencia

Ordenamientos parciales

- ▶ Relación binaria sobre un conjunto S que es
 - ▶ reflexiva
 - ▶ antisimétrica
 - ▶ transitiva

POSETS

- ▶ Si \preceq es un orden parcial sobre S , el par (S, \preceq) se denomina conjunto parcialmente ordenado (*POSET*)
- ▶ Ejemplos de posets:
 1. $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$ sobre \mathbb{N}
 2. $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ sobre $\wp(\mathbb{N})$
 3. $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide y sobre \mathbb{Z}^+
 4. $x \preceq y \Leftrightarrow x = y^2$ sobre $\{0, 1\}$
- ▶ Importante distinguir que $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$

Restricción en subconjuntos

- ▶ Sea (S, \preceq) un poset y sea $A \subseteq S$.
- ▶ Entonces, algunos pares de elementos en \preceq pueden también ser pares de elementos de A
- ▶ Si escogemos a partir de \preceq solamente pares con elementos de A , este nuevo conjunto se denomina **restricción** de \preceq en A y también es un poset en A
- ▶ Ejemplo: $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide y sobre \mathbb{Z}^+ .
 - ▶ Siguiendo def. sabemos que $x \preceq y \Leftrightarrow x$ divide y es un orden parcial sobre $\{1, 2, 3, 6, 88\}$ (o cualquier otro subcjto. de \mathbb{Z}^+)

Otros ejemplos familiares de posets

- ▶ Consideremos el poset (S, \leq)
- ▶ Si $x \leq y$ entonces se cumple que $x = y$ o que $x \neq y$.
- ▶ En este último caso, notamos $x < y$ y decimos que x es predecesor de y
- ▶ Un y cualquiera puede tener muchos predecesores (ser sucesor de muchos x distintos)...
- ▶ ... pero cuando $\nexists z | x < z < y$, entonces x es el predecesor inmediato de y

Ejercicio

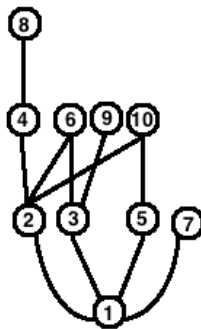
Consideremos la relación $x|y$ o x divide a y sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$

- Escriba los pares ordenados de esta relación
- Escriba todos los predecesores de 6
- Escriba todos los predecesores inmediatos de 6

Diagramas de Hasse

- ▶ Cuando S es finito podemos visualizar un poset (S, \preceq) usando un diagrama de Hasse
- ▶ Cada elemento en S es representado por un punto denominado **nodo** o **vertice**
- ▶ Cuando x es un predecesor inmediato de y , el nodo de y se ubica sobre el de x
 - ▶ y se conectan ambos nodos por una linea recta

Ejemplo para $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, |)$



Ejercicio

Considere el conjunto $\wp(\{1, 2\})$ junto a la relación de inclusión de conjuntos.

- ▶ Es una restricción del poset $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ es un poset.
- ▶ Por lo tanto, también es uno.

Construya el diagrama de Hasse del poset.

Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación \times divide y sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

Elemento menor y minimal

- ▶ Sea (S, \preceq) un poset
- ▶ Si existe un $y \in S$ con $y \preceq x$, $\forall x \in S$, entonces, y es el **elemento menor** del poset. Además **es único** (demostrable por antisimetría).
- ▶ Un elemento $y \in S$ es **minimal** si no existe otro $x \in S$ con $x \prec y$
- ▶ En el diagrama de Hasse, el menor está debajo de todos los demás, mientras que el minimal simplemente es aquel que no tiene otros debajo.
- ▶ Análogamente, pueden definirse el **elemento mayor** y el **maximal**

Ejercicio

Para el diagrama del poset de la relación \times divide y sobre $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ identifique el/los elementos maximales y el elemento mayor (en caso que exista).

Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación \leq sobre los $\{1, 2, 3, 4\}$

Solución

- Un poset en el cual cada elemento está relacionado a todos los demás se denomina **orden total** o **cadena**.



Relaciones de equivalencia

- ▶ Relación binaria sobre un conjunto S que es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.
- ▶ Algunos ejemplos:
 1. Sobre cualquier conjunto S , $x\rho y \Leftrightarrow x = y$
 2. Sobre \mathbb{N} , $x\rho y \Leftrightarrow x + y$ es par
 3. Sobre $\{0, 1\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x = y^2$
 4. Sobre $\{x|x \text{ es estudiante en la clase}\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x$ se sienta en la misma fila que y

Partición inducida

- ▶ Una relación de equivalencia induce una partición sobre el conjunto S
- ▶ Una **partición** de un conjunto S es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de S
- ▶ La unión de estos subconjuntos es igual a S
- ▶ Para una relación ρ sobre S y $x \in S$, sea $[x]$ el conjunto de todos los miembros de S relacionados con x
 - ▶ Este conjunto se denomina **clase de equivalencia** de x

$$[x] = \{y | y \in S \wedge x\rho y\} = \{y | y \in S \wedge y\rho x\}$$

Ejercicio

Considere la relación de equivalencia sobre \mathbb{N} dada por

$$x \rho y \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

1. En cuantas clases de equivalencia particiona a \mathbb{N}
2. Entregue 2 nombres de clases de equivalencia

Ejemplo

- ▶ Considere la relación *congruencia modulo 4* sobre \mathbb{Z} simbolizada por \equiv_4 .
- ▶ Dos números $x, y \in \mathbb{Z}$ cumplen $x \equiv_4 y$ cuando $(x - y)$ es un multiplo entero de 4. También simbolizado como $x \equiv y(\text{mod } 4)$
- ▶ Esto equivale a decir que $x \rho y \Leftrightarrow (x \text{ mod } 4) \equiv (y \text{ mod } 4)$
- ▶ Habrán entonces 4 particiones, una para los números x tal que $(x \text{ mod } 4) = 0$, $(x \text{ mod } 4) = 1$, $(x \text{ mod } 4) = 2$ y $(x \text{ mod } 4) = 3$

Ejercicio

- ▶ Entregue 3 números enteros de ejemplo para cada una de las 4 clases de equivalencia del ejemplo anterior.

Ordenamiento Topológico

- ▶ Recordemos que al tener un orden parcial \preceq sobre un conjunto S , algunos elementos de S son predecesores de otros.
- ▶ Consideremos que S es un conjunto de tareas o actividades que deben realizarse
- ▶ La idea de predecesor puede interpretarse como dependencia

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \text{ es requisito de } y$$

Ejercicio

- Explique porque la relación de prerequisite es reflexiva, antisimetrica y transitiva.

Continuando con el poset de actividades y sus relaciones de dependencias. . .

- ▶ Puede usarse un diagrama de Hasse para visualizar la malla de actividades
- ▶ Podemos también agregar en cada nodo la información del tiempo necesario en cada tarea

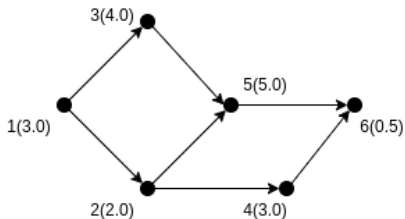
Ejemplo

- Construya la malla de tareas para la siguiente tabla:

Tarea	Prerequisitos	Semanas duracion
1	Ninguna	3.0
2	1	2.0
3	1	4.0
4	2	3.0
5	3,2	5.0
6	4,5	0.5

El diagrama para la tabla anterior es:

- ▶ El proyecto avanza de izquierda a derecha
- ▶ Tareas 2 y 3 pueden realizarse en paralelo



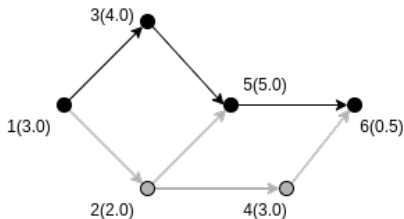
Por lo tanto, para calcular la duración de cada tarea

- ▶ **T1.** 3.0
- ▶ **T2.** $3.0 + 2.0 = 5.0$
- ▶ **T3.** $3.0 + 4.0 = 7.0$
- ▶ **T4.** $5.0 + 3.0 = 8.0$
- ▶ **T5.** $\max(T2, T3) + 5.0 = \mathbf{T3} + 5.0 = 12.0$
- ▶ **T6.** $\max(T4, T5) + 0.5 = \mathbf{T5} + 0.5 = 12.5$

Luego el número mínimo de semanas para realizar todo el proceso es de 12.5

La **ruta crítica** de la planificación es:

- Se genera recorriendo del fin al principio seleccionando el prerequisite con mayor valor

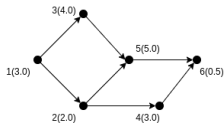


Ejecución del Ordenamiento Topológico

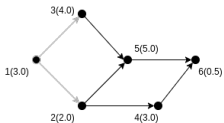
Dado un **orden parcial** ρ sobre un conjunto finito, **siempre existirá** un **orden total** σ tal que si $x\rho y$, entonces también $x\sigma y$.

- ▶ El ordenamiento topológico es un proceso iterativo en que se encuentra ese orden total
- ▶ Siempre habrá un elemento minimal
- ▶ Se remueve y anota el elemento minimal hasta que no quedan más elementos

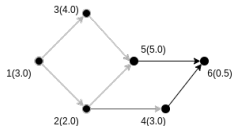
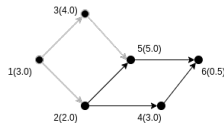
El O.T. de la planificación es (de izquierda a derecha partiendo por la secuencia de más arriba)



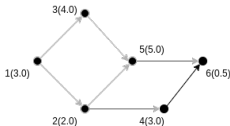
T1



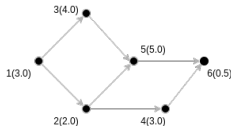
T1 < T3



T1 < T3 < T2



T1 < T3 < T2 < T5



T1 < T3 < T2 < T5 < T4 < T6