

Introducción a la Lógica

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Introducción

- ▶ La lógica formal nos permite razonar acerca de frases declarativas o proposiciones
- ▶ Corresponde a la base del razonamiento matemático: Teoremas y pruebas.
- ▶ Tiene aplicaciones en el diseño de circuitos electrónicos, verificación de la correctitud de programas computacionales, programación de computadores, inteligencia artificial y muchos otros.

Declaraciones

- ▶ Una declaración o proposición es una frase cuyo resultado puede ser **Verdadero** o **Falso**
- ▶ A este resultado de la proposición lo denominamos *Valor de verdad*
- ▶ Por ejemplo:
 - ▶ 10 es menor que 7
 - ▶ Valparaíso está en cuarentena
 - ▶ Juan es muy buen profesor

Conectores y valores de verdad

- ▶ Los conectores son palabras que permiten unir proposiciones
 - ▶ Ejemplos: “y” (también conocido como *and*)
- ▶ Lo que resulta de esa unión se denomina proposición compuesta

¿Cómo determinamos el valor de verdad de una proposición compuesta?

- ▶ Depende del valor de verdad de cada proposición simple y del conector usado . . . existen algunas reglas para determinar esto

Ejemplos

Por ejemplo, analicemos las siguientes proposiciones:

1. El día de hoy es jueves
2. Esta clase corresponde al curso de estructuras discretas

¿Que les parece cada declaración?

Ejemplos

Por ejemplo, analicemos las siguientes proposiciones:

1. El día de hoy es jueves $\rightarrow V$
2. Esta clase corresponde al curso de estructuras discretas $\rightarrow V$

~~¿Que les parece cada declaración?~~ Por lo tanto, ¿Que valor de verdad tendría esta proposición compuesta?

- “El día de hoy es jueves y esta clase corresponde al curso de estructuras discretas”

Representaciones simbólicas

Necesitamos una manera de poder tratar proposiciones y conectores que:

1. Sirva para todas las proposiciones (Generalidad)
 2. Facilite la explicación de reglas (Economía en la escritura)
- Letras mayúsculas del principio del alfabeto representaran proposiciones (simples y también compuestas)

Conjunciones y Disyunciones

- ▶ Los símbolos \vee y \wedge representan conectores (iremos agregando otros cuando se haga necesario)
- ▶ Decimos entonces que la proposición compuesta $A \wedge B$ dependerá de los valores de ambas proposiciones A y B .

Siga su intuición

1. Si A es **V** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
2. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
3. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $B \wedge A$?
4. Si A es **F** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?

Ahora considere la Tabla

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Analice nuevamente y compare con su respuesta anterior. . .

1. Si A es **V** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
2. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
3. Si A es **F** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?

Conjunciones y Disyunciones

- ▶ A la expresión $A \wedge B$ se le denomina **conjunción**.
- ▶ Otro conector muy usado es el de la **disyunción** (\vee), cuya Tabla de verdad es:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- ▶ **Ejercicio** Siguiendo los ejemplos anteriores de conjunciones, construya una proposición compuesta para cada fila de la tabla de este conector.

Implicancias

- ▶ Las proposiciones también pueden ser combinadas de la forma “Si A , entonces B ” (antecedente y consecuente)
- ▶ Esta proposición compuesta se representa como $A \Rightarrow B$ y se lee como A implica B
- ▶ Indica que el valor de verdad de A implica o conduce al valor de verdad de B
- ▶ Recuerda que lo que nos interesa es obtener el valor de verdad de la proposición compuesta a partir de los valores de sus componentes A y B .

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Consideremos la siguiente proposición:

“Si llueve, entonces me mojo”

Examinemos varios casos. Entonces, cuando sabemos que

- ▶ llovió y que además me encuentro mojado, la declaración es **V**
- ▶ llovió y que no me encuentro mojado, la declaración es **F**
- ▶ **no** llovió, entonces independientemente de si me encuentro o no mojado, no podemos decir que la declaración es **F**. Por convención, en este caso la declaración es **V**

Equivalencias

- ▶ Conector simbolizado por \Leftrightarrow
- ▶ Es en realidad un “atajo” para la expresión

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- ▶ *Ejercicio:* Construya la tabla de verdad para la Equivalencia.
- ▶ *Ejercicio:* Estructure como implicancia la frase: “*El fuego es una condición necesaria para el humo*”.

La Negación

- ▶ Es un conector **unario**, ya que actúa sobre una declaración
- ▶ Es simbolizado por \neg
- ▶ Invierte el valor de verdad de la proposición
- ▶ Por ejemplo, $\neg A$ tiene valor **V** cuando A es **F**
- ▶ Ejercicio: Usando los conectores \neg , \wedge y \vee , construya una expresión equivalente a $A \Rightarrow B$ para todos los valores posibles de A y B

Ejercicios

- ▶ Aplique la negación a cada una de las proposiciones y determine la proposición resultante:
 1. Saldrá el sol mañana.
 2. Mi perro es blanco y grande.
 3. El cielo es oscuro o está contaminado.
 4. A María le gusta el chocolate pero odia las almendras

Orden de precedencia de operadores

- ▶ ¿Cómo resolvería la siguiente proposición $A \wedge B \Rightarrow C$?
- ▶ Es posible indicar qué operaciones se calculan primero usando paréntesis
 - ▶ $(A \wedge B) \Rightarrow C$
- ▶ Sin embargo, el exceso de paréntesis puede resultar abrumador

El orden en el cual los conectores son aplicados se denomina orden de precedencia:

1. Operaciones entre paréntesis, desde la más interna hacia afuera
2. Negación
3. \wedge , \vee
4. \Rightarrow
5. \Leftrightarrow

Ejemplo

- ▶ $\neg A \vee B$ es distinto de $\neg(A \vee B)$
- ▶ $A \wedge \neg(B \Rightarrow C)$ lo último que se calcula es \wedge
 - ▶ Primero se calcula $(B \Rightarrow C)$,
 - ▶ luego la negación de esta proposición
 - ▶ finalmente, la disyunción
- ▶ ¿Cómo resolvería la siguiente proposición?

$$((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow (B \vee \neg C)$$

Acerca de la notación

- ▶ También usaremos letras del final del alfabeto (P, Q, R) para representar proposiciones arbitrariamente simples y compuestas
- ▶ Por ejemplo, la expresión $((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow (B \vee \neg C)$ puede ser también representada por $P \Rightarrow Q$

Ejercicio

Construya la tabla de verdad para la siguiente proposición

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$$

Tautologías

- ▶ Es una expresión cuyos valores de verdad son siempre verdaderos.
- ▶ Por ejemplo la proposición $A \vee \neg A$ (¡Asociela con una frase del mundo real!)
- ▶ Analicemos por ejemplo $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- ▶ Busque porqué una expresión como $A \wedge \neg A$ se denomina **contradicción**.
- ▶ ¡Asociela con una frase del mundo real!

Algunas equivalencias tautológicas

Disyunciones

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (conmutatividad)
2. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asociatividad)
3. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributividad)
4. $A \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow A$ (identidad)
5. $A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathbf{V}$ (complemento)

Conjunciones

1. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (conmutatividad)
 2. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (asociatividad)
 3. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (distributividad)
 4. $A \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow A$ (identidad)
 5. $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \mathbf{F}$ (complemento)
- Escoja dos de las tautologías y demuestre construyendo su tabla de verdad.

Leyes de De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- Hint: Estas leyes ayudan a expresar la negación de una proposición compuesta.