

Recursión

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Introducción

Introducción

- ▶ En ocasiones es difícil definir una función u objeto de manera explícita
- ▶ Alternativa: Definición en función de sí mismo
- ▶ Siempre tiene dos partes: Base y parte recursiva
 - ▶ La base está compuesta por casos simples explícitamente definidos
 - ▶ La parte recursiva generaliza sobre nuevos casos definidos en función de otros anteriores

Secuencias definidas recursivamente

Secuencias definidas recursivamente

- ▶ Es una lista infinita de objetos enumerados en algún orden
- ▶ Denominemos al k -ésimo objeto como $S(k)$

$$S(1), S(2), \dots S(k), \dots$$

- ▶ Una secuencia definida recursivamente cuando $S(k)$ se define en función de alguno(s) de los $k - 1$ previos objetos

Ejemplo

Considere la siguiente secuencia definida recursivamente

1. $S(1) = 1$
2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$

► Podemos verificar que $S(2) = 2$, $S(3) = 4$ y luego 8, 16, 32...

Actividad

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$, para $n \geq 2$

Escriba los primeros 5 valores de la secuencia T

Actividad: Fibonacci

Sugerencia: Revise el siguiente video

$$1. \quad F(1) = 1$$

$$1. \quad F(2) = 1$$

$$2. \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1), \text{ para } n > 2$$

- ▶ Escriba los primeros 8 valores de la secuencia F
- ▶ Calcule el cociente entre varios valores sucesivos de F y averigüe acerca de la razón dorada

Conjuntos definidos recursivamente

Conjuntos definidos recursivamente

- ▶ Previamente, los objetos tenían un orden
- ▶ Los conjuntos **no** tienen este ordenamiento
- ▶ Se especifican algunos elementos iniciales
- ▶ Se provee de una regla para construir nuevos elementos a partir de los ya existentes

Ejemplo

Considere el subconjunto S de los enteros, que se define como 1. Paso base: $4 \in S$ 1. Paso recursivo: Si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $x + y \in S$

- ▶ Así entonces el conjunto S estará conformado por
 $4 + 4 = 8; 4 + 8 = 12; 8 + 8 = 16 \dots$
- ▶ Será el de los múltiplos de 4

Actividad

Considere el conjunto A^* de todas las palabras de largo finito sobre un alfabeto A . Luego, se define recursivamente siguiendo las reglas:

1. La palabra sin símbolos (vacía) λ pertenece a A^*
 2. Cualquier símbolo de A pertenece a A^*
 3. Si x e y son palabras en A^* , entonces también lo será xy , es decir la concatenación de las palabras x e y
- Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$. Si $x = 1101$ e $y = 001$, **escriba** las palabras xy , yx y $yx\lambda x$.

Actividad

Entregue una definición recursiva para el conjunto de todas las palabras binarias que se leen de igual manera de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1001 y 11011.

Solución.

Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$.

1. $\lambda, 0, 1 \in A^*$
2. Si $x \in A^*$, entonces también $0x0$ y $1x1$

Operaciones definidas recursivamente

- ▶ Ciertas operaciones sobre objetos pueden ser definidas recursivamente
- ▶ Por ejemplo, la exponenciación sobre un número real distinto de 0

1. $p^0 = 1$
2. $p^n = (p^{n-1}) \cdot p, \forall n \geq 1$

- O la multiplicación de dos enteros m y n

1. $m(1) = m$
2. $m(n) = m(n - 1) + m, \forall n \geq 1$

- **Ejemplo**

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

Ejemplo (solución)

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

1. $x^0 = x$
2. $x^n = x^{n-1}x, \forall n \geq 1$

Algoritmos definidos recursivamente

- ▶ En palabras simples, es un programa que en su cuerpo tiene llamadas a sí mismo
- ▶ Recordemos la secuencia
 1. $S(1) = 2$
 2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$
- ▶ Calcule $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ y $S(5)$.

- Considere un programa que evalúa $S(n)$

Procedimiento $S(n$ un nro entero)

Si $n = 1$ entonces

retornar 2

Sino

$i = 2$

$val = 2$

mientras $i \leq n$ hacer

$val = 2 * val$

$i = i + 1$

fin de bloque mientras

retornar val

fin de bloque Si

fin de procedimiento

- ▶ Otro enfoque consiste en una definición mucho más corta (**Observe**)

```
Procedimiento S(n un nro entero)$  
  Si n = 1 entonces  
    retornar 2  
  Sino  
    retornar 2 * S(n-1)  
  fin de bloque Si  
fin de procedimiento
```

- ▶ Analice como se calcula $S(3)$ con este código.

Ventajas relativas en algoritmos recursivos e iterativos

- ▶ Recursividad ofrece (en ocasiones) una manera más natural para muchos problemas
- ▶ Recursividad genera procedimientos más cortos
- ▶ Operación de alg. recursivo es más compleja
- ▶ Ejecución de Alg. recursivo consume más memoria

Actividad

Recuerde la secuencia antes vista y escriba una función recursiva para calcular $T(n)$

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$, para $n \geq 2$

Actividad

Recuerde la operación recursiva par multiplicar dos números y construya un pseudocódigo para ella.

Conclusiones

- ▶ Muchos problemas pueden ser analizados más naturalmente bajo una perspectiva recursiva
- ▶ El “secreto” de una recursividad efectiva está en entregarle a cada llamada una versión más pequeña o simple del problema
- ▶ Nunca olvidar la definición del caso base... todo depende de ello!

Relaciones de Recurrencia

Imagine que una persona deposita \$10.000 en una cuenta de ahorro de un banco con un %11 de interés anual compuesto. ¿Cuanto se habrá reunido en la cuenta después de 30 años?

► Anteriormente, construimos procedimientos para calcular

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$, para $n \geq 2$

- Luego, al calcular otros valores de la función

$$1. \quad S(1) = 2^1$$

$$2. \quad S(2) = 2^2$$

$$3. \quad S(3) = 2^3$$

$$4. \quad S(4) = 2^4$$

...

$$n. \quad S(n) = 2^n$$

- Ahora vemos que basta con calcular $S(n)$ para cualquier número **sin** necesidad de tener que obtener los $n - 1$ pasos previos.

Soluciones cerradas

- ▶ Soluciones como la del ejemplo permiten obtener directamente cualquier valor
- ▶ Se denominan **soluciones cerradas** de una relación de recurrencia
- ▶ Entonces, para nuestro ejemplo, **la solución** $S(n) = 2^n$ **resuelve la relación de recurrencia** $S(n) = 2 \cdot S(n - 1)$

Relaciones lineales de 1er orden

Una relación $S(n)$ es lineal si sus valores tienen la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \dots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

- ▶ Las f s y g son expresiones que involucran solamente a n más otras constantes

Caracterizando las relaciones lineales de 1er orden

- ▶ Nos fijaremos ahora en qué condiciones considerar para
 - ▶ Las f s
 - ▶ La dependencia de $S(n)$ de sus valores anteriores (*orden*)
 - ▶ g
- ▶ Dependiendo de estas condiciones estudiaremos ciertos tipos de soluciones para cada tipo de relación

Relaciones de 1er orden con coefs. constantes

- ▶ La relación tendrá coeficientes constantes si todas las f s lo son
- ▶ Será de 1er orden si $S(n)$ solo depende de $S(n - 1)$
- ▶ Entonces, podemos *continuar* caracterizando de manera general una relación lineal de 1er orden con coeficientes constantes como

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n)$$

- ▶ Por último, la relación será **homogenea** si $g(n) = 0$ para cualquier valor de n .

- ▶ Primer orden \Rightarrow Se requiere de un valor inicial para la base $S(1)$ u otro.
- ▶ Entonces, de manera general para este tipo de relaciones

$$\begin{aligned}
 S(n) &= cS(n-1) + g(n) \\
 &= c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n) \\
 &= c^2S(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
 &= c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n) \\
 &= c^3S(n-3) + c^2g(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Luego de k expansiones queda

$$S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \dots + c g(n-1) + g(n)$$

- ▶ Si esta secuencia tiene un valor base en 1, entonces la expansión terminará cuando $n-k=1$ o $k=n-1$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \dots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^n c^{n-i} g(i)$$

- ▶ Estamos muy cerca de una solución, pero deberemos **siempre** encontrar una expresión para la sumatoria

- ▶ Por ejemplo, cuando $g(n) = 0$ queda solamente la primera parte de la solución (caso más simple denominado **homogeneo**)
- ▶ Ejemplo, volvamos a

$$\begin{aligned} S(1) &= 2 \\ S(n) &= 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- ▶ Es lineal, de primer orden y con coefs. ctes.
- ▶ Entonces,

$$S(n) = 2^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^n 0 = 2^n$$

En síntesis

1. Caracterizar la relación y verificar calce con expresión general
2. Encontrar el valor para c usando el valor inicial $S(1)$
3. Encontrar (si fuera necesario) un valor sintetizado para la sumatoria y obtener la expresión final de la solución

Ejercicio:

Encuentre una solución para la relación

$$S(n) = 2S(n - 1) + 3, \forall n \geq 2$$

sujeta al paso base $S(1) = 4$.

Relaciones lineales de 2do orden

- ▶ En una relación de 2do orden el término n -ésimo depende de los dos términos anteriores.
- ▶ Por lo tanto, este tipo de relaciones tiene la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + g(n)$$

- ▶ Consideraremos aquellas relaciones lineales homogéneas y con coeficientes constantes.

$$S(n) = c_1S(n-1) + c_2S(n-2)$$

Soluciones

- ▶ Buscamos soluciones de la forma

$$S(n) = r^n, \text{ con } r \text{ constante}$$

- ▶ Por lo tanto $S(n) = r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
- ▶ Esta solución estará dada por $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = 0$ y luego de dividir ambos lados por r^{n-2} queda

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- ▶ A esta expresión se le denomina **Ecuación característica** de la relación

- ▶ Esta ecuación tendrá 2 raíces: r_1 y r_2
- ▶ A las raíces de esta ecuación se le denominan raíces características

Estrategia propuesta:

- ▶ Lograremos caracterizar **La solución cerrada** de la relación mediante r_1 y r_2

¿Que sabemos hasta hora entonces?

1. $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$
2. $S(n) = r^n$
3. Luego, $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
4. Finalmente, hay que resolver $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
5. Podemos agregar que $r_1^2 = (c_1 r_1 + c_2)$ y $r_2^2 = (c_1 r_2 + c_2)$

Luego, la solución tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

(probaremos informalmente esto a continuación...)

Acabamos de afirmar que $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &\dots = c_1(\alpha_1 r_1^{n-2} r_1 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &\dots = \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\ &\dots = \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Ojo Hemos supuesto hasta ahora que $r_1 \neq r_2$

Ahora solamente nos queda establecer un mecanismo para encontrar α_1 y α_2 .

1. Se identifican c_1 y c_2 a partir de la relación entregada.
2. Se obtienen las soluciones para $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
3. Se obtienen α_1 y α_2 usando las dos casos iniciales... $S(0)$ y $S(1)$

¿Como?

Reemplazando $n = 0$ y $n = 1$ en $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S(1) &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

y

$$\alpha_2 = S(0) - \frac{S(1) - S(0)r_2}{r_1 - r_2}$$

Multiplicidad de raíces

- Considere la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

con raíces $r = r_1 = r_2$.

- La solución para $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$ tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad.

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad. Es decir:

$$\begin{aligned}S(0) &= \alpha_1 r^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha_1 \\S(1) &= \alpha_1 r^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha_1 r + \alpha_2 r\end{aligned}$$

Finalmente (verifique el desarrollo):

$$\alpha_1 = S(0) ; \alpha_2 = \frac{S(1) - S(0)r}{r}$$