Introducción a la Lógica

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023

Introducción

- La lógica formal nos permite razonar acerca de frases declarativas o proposiciones
- Corresponde a la base del razonamiento matemático: Teoremas y pruebas.
- Tiene aplicaciones en el diseño de circuitos electrónicos, verificación de la correctitud de programas computacionales, programación de computadores, inteligencia artificial y muchos otros.

Declaraciones

- Una declaración o proposición es una frase cuyo resultado puede ser **V**erdadero o **F**also
- A este resultado de la proposición lo denominamos *Valor de verdad*
- Por ejemplo:
  - 10 es menor que 7
  - Valparaíso está en cuarentena
  - Juan es muy buen profesor

Conectores y valores de verdad

- Los conectores son palabras que permiten unir proposiciones
  - Ejemplos: "y" (tambien conocido como *and*)
- Lo qué resulta de esa unión se denomina proposición compuesta

¿Cómo determinamos el valor de verdad de una proposición compuesta?

- Depende del valor de verdad de cada proposición simple y del conector usado . . . existen algunas reglas para determinar esto

Ejemplos

Por ejemplo, analicemos las siguientes proposiciones:

1. El día de hoy es jueves
2. Esta clase corresponde al curso de estructuras discretas

¿Que les parece cada declaración?

Ejemplos

Por ejemplo, analicemos las siguientes proposiciones:

1. El día de hoy es jueves –> V
2. Esta clase corresponde al curso de estructuras discretas –> V

~~¿Que les parece cada declaración?~~ Por lo tanto, ¿Que valor de verdad tendría esta proposición compuesta?

- "El día de hoy es jueves y esta clase corresponde al curso de estructuras discretas"

Representaciones simbólicas

Necesitamos una manera de poder tratar proposiciones y conectores que:

1. Sirva para todas las proposiciones (Generalidad)
2. Facilite la explicación de reglas (Economía en la escritura)

- Letras mayúsculas del principio del alfabeto representaran proposiciones (simples y también compuestas)

Conjunciones y Disyunciones

- Los símbolos $\vee$ y $\wedge$ representan conectores (iremos agregando otros cuando se haga necesario)
- Decimos entonces que la proposición compuesta $A \wedge B$ dependerá de los valores de ambas proposiciones A y B.

Siga su intuición

1. Si A es **V** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
2. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
3. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $B \wedge A$?
4. Si A es **F** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?

Ahora considere la Tabla

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Analice nuevamente y compare con su respuesta anterior. . .

1. Si A es **V** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
2. Si A es **F** y B es **V**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?
3. Si A es **F** y B es **F**, ¿Que valor tiene la proposición $A \wedge B$?

Conjunciones y Disyunciones

- A la expresión $A \wedge B$ se le denomina **conjunción**.
- Otro conector muy usado es el de la **disyunción** ($\vee$), cuya Tabla de verdad es:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Ejercicio** Siguiendo los ejemplos anteriores de conjunciones, construya una proposición compuesta para cada fila de la tabla de este conector.

Implicancias

- Las proposiciones también pueden ser combinadas de la forma "Si A, entonces B" (antecedente y consecuente)
- Esta proposición compuesta se representa como $A \Rightarrow B$ y se lee como A implica B
- Indica que el valor de verdad de A implica o conduce al valor de verdad de B
- Recuerda que lo que nos interesa es obtener el valor de verdad de la proposición compuesta a partir de los valores de sus componentes A y B.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Consideremos la siguiente proposición:

"Si llueve, entonces me mojo"

Examinemos varios casos. Entonces, cuando sabemos que

- llovió y que además me encuentro mojado, la declaración es **V**
- llovió y que no me encuentro mojado, la declaración es **F**
- **no** llovió, entonces independientemente de si me encuentro o no mojado, no podemos decir que la declaración es **F**. Por convención, en este caso la declaración es **V**

Equivalencias

- Conector simbolizado por $\Leftrightarrow$
- Es en realidad un "atajo" para la expresión

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- *Ejercicio*: Construya la tabla de verdad para la Equivalencia.
- *Ejercicio*: Estructure como implicancia la frase: "*El fuego es una condición necesaria para el humo*".

La Negación

- Es un conector **unario**, ya que actua sobre una declaración
- Es simbolizado por $\neg$
- Invierte el valor de verdad de la proposición
- Por ejemplo, $\neg A$ tiene valor **V** cuando A es **F**
- Ejercicio: Usando los conectores $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, construya una expresión equivalente a $A \Rightarrow B$ para todos los valores posibles de A y B

Ejercicios

- Aplique la negación a cada una de las proposiciones y determine la proposición resultante:

1. Saldrá el sol mañana.
2. Mi perro es blanco y grande.
3. El cielo es oscuro o está contaminado.
4. A María le gusta el chocolate pero odia las almendras

Orden de precedencia de operadores

- ¿Cómo resolvería la siguiente proposición $A \wedge B \Rightarrow C$?
- Es posible indicar qué operaciones se calculan primero usando paréntesis
  - $(A \wedge B) \Rightarrow C$
- Sin embargo, el exceso de paréntesis puede resultar abrumador

El orden en el cual los conectores son aplicados se denomina orden de precedencia:

1. Operaciones entre paréntesis, desde la más interna hacia afuera
2. Negación
3. $\wedge$, $\vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$

Ejemplo

- $\neg A \vee B$ es distinto de $\neg(A \vee B)$
- $A \wedge \neg(B \Rightarrow C)$ lo último que se calcula es $\wedge$
  - Primero se calcula $(B \Rightarrow C)$,
  - luego la negación de esta proposición
  - finalmente, la disyunción
- ¿Cómo resolvería la siguiente proposición?

$$((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow (B \vee \neg C)$$

Acerca de la notación

- También usaremos letras del final del alfabeto (P, Q, R) para representar proposiciones arbitrariamente simples y compuestas
- Por ejemplo, la expresión $((A \vee B) \wedge C) \Rightarrow (B \vee \neg C)$ puede ser también representada por $P \Rightarrow Q$

Ejercicio

Construya la tabla de verdad para la siguiente proposición

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$$

Tautologías

- Es una expresión cuyos valores de verdad son siempre verdaderos.
- Por ejemplo la proposición $A \vee \neg A$ (¡Asociela con una frase del mundo real!)
- Analicemos por ejemplo $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Busque porqué una expresión como $A \wedge \neg A$ se denomina **contradicción**.
- ¡Asociela con una frase del mundo real!

Algunas equivalencias tautológicas

Disyunciones

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (conmutatividad)
2. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asociatividad)
3. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributividad)
4. $A \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow A$ (identidad)
5. $A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathbf{V}$ (complemento)

Conjunciones

1. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (conmutatividad)
2. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (asociatividad)
3. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (distributividad)
4. $A \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow A$ (identidad)
5. $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \mathbf{F}$ (complemento)

- Escoja dos de las tautologías y demuestre construyendo su tabla de verdad.

Leyes de De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- Hint: Estas leyes ayudan a expresar la negación de una proposición compuesta.