

Demostraciones e Inducción

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2024



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Demostraciones

Demostraciones

- ▶ Anteriormente, consideramos argumentos de la forma $P \Rightarrow Q$
- ▶ El objetivo consistía en probar que el argumento era universalmente verdadero para todas las interpretaciones
- ▶ Introduciremos una noción de contexto que delimitará un ámbito para la validez de un argumento (generalmente \mathbb{Z}^+ o \mathbb{N})
- ▶ Así usaremos un mecanismo que nos permita probar que si P es verdadero en un cierto contexto, entonces también lo será Q . Luego, $P \Rightarrow Q$ se transforma en un teorema dentro de ese ámbito.

Tipos de Razonamiento

Tipos de Razonamiento

- ▶ Razonamiento inductivo (Bottom-up)
 - ▶ Premisa particular y generalización repetitiva
 - ▶ Conclusiones se obtienen a partir de observaciones sucesivas
- ▶ Razonamiento deductivo (Top-Down)
 - ▶ Comienzan con premisas que llevan o derivan una conclusión

El método de Inducción

El método de Inducción

Objetivos

1. Reconocer cuando es apropiada una prueba por este método
2. Probar conjeturas
3. Probar matemáticamente la correctitud de programas que usan sentencias repetitivas For

Ejemplo de los escalones

- ▶ Imagine que está subiendo una escalera infinitamente larga.
- ▶ ¿Como saber si será posible alcanzar un escalón arbitrariamente alto?
- ▶ Suponga que realizamos las siguientes afirmaciones:
 1. [A1] Es posible alcanzar el primer escalón (el más bajo).
 2. [A2] Al alcanzar un escalón, siempre podrás alcanzar el que está inmediatamente más arriba.

- ▶ Si ambas afirmaciones son ciertas, entonces será posible alcanzar el primer escalón y por lo tanto (usando A2) también el segundo, (nuevamente A2) el tercero . . .
- ▶ Si sólo A1 es cierto, no existiría garantía de subir más allá
- ▶ Si sólo A2 es cierto, no habría garantía siquiera de poder comenzar a subir

Principio del buen orden

- ▶ Dados dos enteros diferentes x, y , se sabe que $x < y$ o $y < x$
 - ▶ Esto es cierto también para los racionales y los reales
- ▶ ¿Qué hace especial a \mathbb{Z} y su subconjunto \mathbb{Z}^+ ?
 - ▶ $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}$
- ▶ No podemos establecer la misma definición para los racionales y los reales
- ▶ Todo subconjunto no vacío X de \mathbb{Z}^+ contiene un entero $a \in X | a \leq x, \forall x \in X$ denominado mínimo

El principio del buen orden

Cualquier subconjunto no vacío de \mathbb{Z}^+ contiene elemento mínimo.

- Esto es la base de la Inducción matemática

El primer principio de inducción matemática

- ▶ Los escalones del ejemplo anterior se encuentran numerados por enteros positivos $1, 2, 3 \dots$
- ▶ En lugar de “*alcanzar un escalón arbitrariamente alto*” usaremos otra propiedad arbitraria P sobre los números positivos
- ▶ Necesitamos entonces probar que

1. $P(1)$

1 tiene la propiedad P

2. $\forall k \in \mathbb{Z}^+ [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$

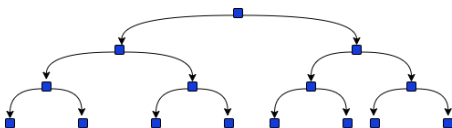
Si un numero cualquiera la cumple, tambien el sgte.

- ▶ **Estrategia:** Mostrar que ambas hipotesis son ciertas
- ▶ La primera es trivial (**paso base**)
- ▶ La segunda es una implicancia que debe cumplirse para cualquier k (**paso inductivo**)
- ▶ Luego usamos G.U.
- ▶ Útil cuando se desea probar que algo se cumple para cada entero positivo

Inducción matemática se usa solamente para confirmar una conjetura que es correcta

Ejemplo Descendencia

- ▶ Ser vivo K tuvo dos hijos. Cada uno de estos (1ra generación) tuvo otros dos. Luego, pasó lo mismo en la 3ra generación. Así sucesivamente . . .
- ▶ Al parecer, la generación n -ésima contiene 2^n individuos.
Probar!



Generación	Descendencia
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$

- 1) *Paso base:* $P(1) = 2^1$
- 2) Ahora supongamos que la conjetura es correcta para un $k \geq 1$ cualquiera. Esto es $P(k) = 2^k$
- 3) Intentemos demostrar que $P(k + 1) = 2^{k+1}$
- 4) Consideremos el **hecho** de que en esta familia, cada descendiente tiene siempre 2 hijos.
 - ▶ Entonces, $P(k + 1) = 2 \times P(k)$
- 5) Luego, usando el supuesto inductivo $P(k) = 2^k$, entonces $P(k + 1) = 2 \times P(k) = 2 \times (2^k) = 2^{k+1}$
- 6) Por lo tanto, logramos demostrar el punto (3) para cualquier valor de k .

Síntesis del primer principio de inducción

- ▶ **Paso 1** Demostrar el caso base.
- ▶ **Paso 2** Suponer $P(k)$.
- ▶ **Paso 3** Demostrar $P(k + 1)$.

El segundo principio de inducción matemática

1. $P(1)$ es verdadero
2. $\forall k \in \mathbb{Z}^+ [\forall 1 \leq r \leq k, P(r) \Rightarrow P(k+1)]$ Se usa $P(1), P(2) \dots P(k)$

Luego que se demuestra $P(k+1)$ usando la base inductiva y la hipótesis inductiva, se generaliza para cualquier valor n .

- ▶ Es posible demostrar que ambos principios de inducción son equivalentes.
- ▶ En ocasiones es más conveniente usar uno o el otro.

Ejemplo Factorización de números primos

Demostrar que para cada número entero $n \geq 2$ es primo o bien se compone del producto de números primos.

1. $P(2)$ claramente es verdadero
 2. $P(2), P(3), \dots, P(n)$ **hipotesis** inductiva
 3. $P(n+1)$ Paso inductivo (demostrar usando 1y 2)
- ▶ ¿Porque no usar el primer principio de inducción?
 - ▶ Difícil relacionar $P(k)$ con $P(k+1)$

¿Como realizar el Paso Inductivo?

- ▶ Considerar $(k + 1)$ y el caso en que sea primo ... estamos ok!
- ▶ El caso que nos interesa es cuando $(k + 1)$ **no** es primo.
 - ▶ Entonces $(k + 1)$ es compuesto y puede ser escrito como $(k + 1) = a \cdot b$ con $1 < a, b < (k + 1)$
 - ▶ Según Hipotesis inductiva, contamos entonces con $P(a)$ y $P(b)$
 - ▶ Luego, a y b son primos o bien están compuestos por primos.
 - ▶ Entonces, para cualquier caso $(k + 1)$ es un producto de primos.
 - ▶ Se demuestra $P(k + 1)$

Teorema Fundamental de la Aritmética

- La afirmación recién demostrada constituye el **teorema fundamental de la aritmética**

Para cada entero $n \geq 2$, n es un primo o bien puede ser escrito de manera única (ignorando orden) como producto de números primos.

Síntesis del segundo principio de inducción

- ▶ La demostración del Ejemplo anterior es de **existencia**
- ▶ En general, no es sencillo encontrar la factorización de números primos para un número compuesto