Recursión

EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023

Introducción

Introducción

- En ocasiones es dificil definir una función u objeto de manera explícita
- Alternativa: Definición en función de sí mismo
- Siempre tiene dos partes: Base y parte recursiva
  - La base está compuesta por casos simples explícitamente definidos
  - La parte recursiva generaliza sobre nuevos casos definidos en función de otros anteriores

Secuencias definidas recursivamente

Secuencias definidas recursivamente

- Es una lista inifinita de objetos enumerados en algún orden
- Denominemos al k-ésimo objeto como $S(k)$

$$S(1), S(2), \ldots S(k), \ldots$$

- Una secuencia definida recursivamente cuando $S(k)$ se define en función de alguno(s) de lo(s) $k-1$ previos objetos

Ejemplo

Considere la siguiente secuencia definida recursivamente

$$
\begin{array}{lrl}
1. & S(1) = & 1 \\
2. & S(n) = & 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2
\end{array}
$$

- Podemos verificar que $S(2) = 2$, $S(3) = 4$ y luego $8, 16, 32 \ldots$

Actividad

$$
\begin{aligned}
1. \quad T(1) &= \quad 1 \\
2. \quad T(n) &= \quad T(n-1) + 3, \text{ para } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Escriba los primeros 5 valores de la secuencia T

Actividad: Fibonacci

Sugerencia: Revise el siguiente video

1. $F(1) = 1$
2. $F(2) = 1$
3. $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$, para $n > 2$

- Escriba los primeros 8 valores de la secuencia F
- Calcule el cuociente entre varios valores sucesivos de F y averigue acerca de la razón dorada

Conjuntos definidos recursivamente

Conjuntos definidos recursivamente

- Previamente, los objetos tenían un orden
- Los conjuntos **no** tienen este ordenamiento
- Se especifican algunos elementos iniciales
- Se provee de una regla para construir nuevos elementos a partir de los ya existentes

Ejemplo

Considere el subconjunto S de los enteros, que se define como

1. Paso base: $4 \in S$
2. Paso recursivo: Si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $x + y \in S$

- Así entonces el conjunto S estará conformado por $4 + 4 = 8; 4 + 8 = 12; 8 + 8 = 16 \ldots$
- Será el de los múltiplos de 4

Actividad

Considere el conjunto A^* de todas las palabras de largo finito sobre un alfabeto A. Luego, se define recursivamente siguiendo las reglas:

1. La palabra sin símbolos (vacía) λ pertenece a A^*
2. Cualquier símbolo de A pertenece a A^*
3. Si x e y son palabras en A^*, entonces también lo será xy, es decir la concatenación de las palabras x e y

- Sea $A = \{0, 1, \lambda\}$. Si $x = 1101$ e $y = 001$, **escriba** las palabras xy, yx y $yx\lambda x$.

Actividad

Entregue una definición recursiva para el conjunto de todas las palabras binarias que se leen de igual manera de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1001 y 11011.

Solución.

Sea $\mathsf{A} = \{0, 1, \lambda\}$.

1. $\lambda,\ 0,\ 1 \in \mathsf{A}^*$
2. Si $x \in \mathsf{A}^*$, entonces también $0x0$ y $1x1$

Operaciones definidas recursivamente

- Ciertas operaciones sobre objetos pueden ser definidas recursivamente
- Por ejemplo, la exponenciación sobre un número real distinto de 0

$$
\begin{aligned}
1.\quad p^0 &= \; 1 \\
2.\quad p^n &= \; (p^{n-1}) \cdot p, \; \forall n \geq 1
\end{aligned}
$$

- O la multiplicación de dos enteros m y n

$$\begin{array}{lll} 1. & m(1) & = m \\ 2. & m(n) & = m(n-1) + m, \ \forall n \geq 1 \end{array}$$

- **Ejemplo**

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

Ejemplo (solución)

Sea x una palabra en un alfabeto (no es relevante qué alfabeto específico se use para este problema). Entregue una definición recursiva para la operación x^n que representa la concatenación de x con sí misma n veces para $n \geq 1$.

$$\begin{array}{lll} 1. & x^0 = & x \\ 2. & x^n = & x^{n-1}x, \ \forall n \geq 1 \end{array}$$

Algoritmos definidos recursivamente

- En palabras simples, es un programa que en su cuerpo tiene llamadas a sí mismo
- Recordemos la secuencia

$$\begin{array}{lll} 1. & S(1) = & 2 \\ 2. & S(n) = & 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{array}$$

- Calcule $S(2), S(3), S(4)$ y $S(5)$.

- Considere un programa que evalua $S(n)$

```
Procedimiento S(n un nro entero)$
  Si n = 1 entonces
    retornar 2
  Sino
    i = 2
    val = 2
    mientras i <= n hacer
      val = 2 * val
      i = i + 1
    fin de bloque mientras

    retornar val
  fin de bloque Si
fin de procedimiento
```

- Otro enfoque consiste en una definición mucho más corta (**Observe**)

```
Procedimiento S(n un nro entero)$
  Si n = 1 entonces
    retornar 2
  Sino
    retornar 2 * S(n-1)
  fin de bloque Si
fin de procedimiento
```

- Analice como se calcula $S(3)$ con este código.

Ventajas relativas en algoritmos recursivos e iterativos

- Recursividad ofrece (en ocasiones) una manera más natural para muchos problemas
- Recursividad genera procedimientos más cortos
- Operación de alg. recursivo es más compleja
- Ejecución de Alg. recursivo consume más memoria

Actividad

Recuerde la secuencia antes vista y escriba una función recursiva para calcular $T(n)$

$$
\begin{array}{lll}
1. & T(1) = & 1 \\
2. & T(n) = & T(n-1) + 3, \text{ para } n \geq 2
\end{array}
$$

Actividad

Recuerde la operación recursiva par multiplicar dos números y construya un pseudocódigo para ella.

Conclusiones

- Muchos problemas pueden ser analizados más naturalmente bajo una perspectiva recursiva
- El "secreto" de una recursividad efectiva está en entregarle a cada llamada una versión más pequeña o simple del problema
- Nunca olvidar la definición del caso base... todo depende de ello!

Relaciones de Recurrencia

Imagine que una persona deposita \$10.000 en una cuenta de ahorro de un banco con un %11 de interés anual compuesto. ¿Cuanto se habrá reunido en la cuenta después de 30 años?

- Anteriormente, construímos procedimientos para calcular

$$
\begin{array}{lll}
1. & S(1) = & 2 \\
2. & S(n) = & 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2
\end{array}
$$

- Luego, al calcular otros valores de la función

$$\begin{array}{rll} 1. & S(1) = & 2^1 \\ 2. & S(2) = & 2^2 \\ 3. & S(3) = & 2^3 \\ 4. & S(4) = & 2^4 \\ & \dots & \\ n. & S(n) = & 2^n \end{array}$$

- Ahora vemos que basta con calcular $S(n)$ para cualquier número **sin** necesidad de tener que obtener los $n-1$ pasos previos.

Soluciones cerradas

- Soluciones como la del ejemplo permiten obtener directamente cualquier valor
- Se denominan **soluciones cerradas** de una relación de recurrencia
- Entonces, para nuestro ejemplo, **la solución** $S(n) = 2^n$ **resuelve** la **relación de recurrencia** $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$

Relaciones lineales de 1er orden

Una relación $S(n)$ es lineal si sus valores tienen la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \ldots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

- Las fs y g son expresiones que involucran solamente a n más otras constantes

Caracterizando las relaciones lineales de 1er orden

- Revisaremos ahora qué condiciones considerar para
  - Las fs
  - La dependencia de $S(n)$ de sus valores anteriores (*orden*)
  - g
- Dependiendo de estas condiciones estudiaremos ciertos tipos de soluciones para cada tipo de relación

Relaciones de 1er orden con coefs. constantes

- La relación tendrá coeficientes constantes si todas las fs lo son
- Será de 1er orden si $S(n)$ solo depende de $S(n-1)$
- Entonces, podemos *continuar* caracterizando de manera general una relación lineal de 1er orden con coeficientes constantes como

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

- Por último, la relación será **homogenea** si $g(n) = 0$ para cualquier valor de n.

- Primer orden $\Rightarrow$ Se requiere de un valor inicial para la base $S(1)$ u otro.
- Entonces, de manera general para este tipo de relaciones

$$
\begin{aligned}
S(n) = \quad & cS(n-1) + g(n) \\
= \quad & c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n) \\
= \quad & c^2S(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
= \quad & c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n) \\
= \quad & c^3S(n-3) + c^2g(n-2) + cg(n-1) + g(n) \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

Luego de k expansiones queda

$$S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \ldots + cg(n-1) + g(n)$$

- Si esta secuencia tiene un valor base en 1, entonces la expansión terminará cuando $n-k=1$ o $k=n-1$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \ldots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$$

$$S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)$$

- Estamos muy cerca de una solución, pero deberemos **siempre** encontrar una expresión para la sumatoria

- Por ejemplo, cuando $g(n) = 0$ queda solamente la primera parte de la solución (caso más simple denominado **homogeneo**)
- Ejemplo, volvamos a

$$\begin{aligned} S(1) &= \ 2 \\ S(n) &= \ 2 \cdot S(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

- Es lineal, de primer orden y con coefs. ctes.
- Entonces,

$$S(n) = 2^{n-1}(2) + \sum_{i=2}^{n} 0 = 2^{n}$$

En síntesis

1. Caracterizar la relación y verificar calce con expresión general
2. Encontrar el valor para c usando el valor inicial $S(1)$
3. Encontrar (si fuera necesario) un valor sintetizado para la sumatoria y obtener la expresión final de la solución

Ejercicio:

Encuentre una solución para la relación

$$S(n) = 2S(n-1) + 3, \ \forall n \geq 2$$

sujeta al paso base $S(1) = 4$.

Relaciones lineales de 2do orden

- En una relación de 2do orden el término n-ésimo depende de los dos términos anteriores.
- Por lo tanto, este tipo de relaciones tiene la forma

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + g(n)$$

- Consideraremos aquellas relaciones lineales homogeneas y con coeficientes constantes.

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$$

Soluciones

- Buscamos soluciones de la forma

$$S(n) = r^n \text{ , con } r \text{ constante}$$

- Por lo tanto $S(n) = r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
- Esta solución estará dada por $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = 0$ y luego de dividir ambos lados por r^{n-2} queda

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

- A esta expresión se le denomina **Ecuación característica** de la relación

- Esta ecuación tendrá 2 raices: r_1 y r_2
- A las raices de esta ecuación se le denominan raíces características

Estrategia propuesta:

- Lograremos caracterizar **La solución cerrada** de la relación mediante r_1 y r_2

¿Que sabemos hasta hora entonces?

1. $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$
2. $S(n) = r^n$
3. Luego, $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$
4. Finalmente, hay que resolver $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
5. Podemos agregar que $r_1^2 = (c_1 r_1 + c_2)$ **y** $r_2^2 = (c_1 r_2 + c_2)$

Luego, la solución tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

(probaremos informalmente esto a continuación...)

Acabamos de afirmar que $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{array}{rcl}
c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) & = & c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \\
& & \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
\ldots & = & c_1(\alpha_1 r_1^{n-2} r_1 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \\
& & \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
\ldots & = & \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
\ldots & = & \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) & = & \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n
\end{array}$$

Por lo tanto

$$S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Ojo Hemos supuesto hasta ahora que $r_1 \neq r_2$

Ahora solamente nos queda establecer un mecanismo para encontrar α_1 y α_2.

1. Se identifican c_1 y c_2 a partir de la relación entregada.
2. Se obtienen las soluciones para $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
3. Se obtienen α_1 y α_2 usando las dos casos iniciales... $S(0)$ y $S(1)$

¿Como?

Reemplazando $n = 0$ y $n = 1$ en $S(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ S(1) &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{S(1) - S(0) r_2}{r_1 - r_2}$$

y

$$\alpha_2 = S(0) - \frac{S(1) - S(0) r_2}{r_1 - r_2}$$

Mutiplicidad de raíces

- Considere la ecuación característica

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

  con raíces $r = r_1 = r_2$.
- La solución para $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$ tendrá la forma

$$S(n) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r^n$$

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad.

- Los coeficientes se calculan siguiendo el esquema para el caso sin multiplicidad. Es decir:

$$\begin{aligned} S(0) &= \alpha_1 r^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha_1 \\ S(1) &= \alpha_1 r^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha_1 r + \alpha_2 r \end{aligned}$$

Finalmente (verifique el desarrollo):

$$\alpha_1 = S(0) \; ; \; \alpha_2 = \frac{S(1) - S(0) r}{r}$$