

# Relaciones Binarias

## EST-1132 / Estructuras Discretas

Juan Zamora O.

Otoño 2023



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE  
VALPARAÍSO

# Introducción

# Introducción

## Estudiaremos

- ▶ relaciones entre **pares** de individuos de un conjunto
- ▶ Propiedades de estas relaciones
  - ▶ Ejemplos: *Orden Parcial* y *Equivalencia*
- ▶ Lo aprendido en esta unidad tiene aplicaciones en la optimización de procesos y bases de datos por mencionar dos áreas.

# Relaciones binarias

# Relaciones binarias

- ▶ Recordemos la idea de pares de elementos de un conjunto
- ▶ **Por ejemplo:** Dado  $S = \{1, 2, 3\}$ ,

$$S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

- ▶ Podemos definir ciertas condiciones entre elementos de  $S$ 
  - ▶ Ej. Elementos iguales, un número menor que el otro, un número divide al otro ...
- ▶ Podemos simbolizar uno de estos criterios mediante la letra  $\rho$

- ▶ Este criterio o relación puede ser definida en palabras o como una ecuación
- ▶ Luego,  $x\rho y$  indica que el par ordenado  $(x, y)$  satisface la condición impuesta por la relación
- ▶ Aún podemos formalizar de mejor manera esta definición.

# Relación Binaria sobre un conjunto S

- ▶ Es un subconjunto de  $S \times S$
- ▶ Entonces

$$x\rho y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

- ▶ Por ejemplo, dado  $S = \{1, 2, 4\}$ , y la relación  $x\rho y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ 
  - ▶ Entonces,  $(1, 2)$  y  $(2, 4)$  satisfacen  $\rho$ .

## Ejemplo

1. Dado  $S = \{1, 2\}$  y sea  $\rho$  definida sobre  $S$  como  $x\rho y \Leftrightarrow x + y$  es impar. ¿Cuales pares ordenados satisfacen la relación?

► Consideremos primero  $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \}$

►  $1\rho 1 = 2 \Rightarrow$  **No** cumple

►  $1\rho 2 = 3 \Rightarrow$  **Sí** cumple

►  $2\rho 1 = 3 \Rightarrow$  **Sí** cumple

►  $2\rho 2 = 4 \Rightarrow$  **No** cumple

Entonces  $\rho = \{(1, 2), (2, 1)\}$



# Relaciones binarias sobre conjuntos distintos

- ▶ Las relaciones binarias no son exclusivas de conjuntos  $S \times S$
- ▶ También es posible definir las, por ejemplo sobre  $S = \{1, 2, 3\}$  y  $T = \{2, 4, 7\}$ 
  - ▶ En este caso, una relación binaria de  $S$  a  $T$  es un subconjunto de  $S \times T$

**Generalización** Una relación  $n$ -aria se define de igual manera sobre  $n$  conjuntos. Es decir  $S_1 \times S_2 \times \dots S_n$

# Ejercicios

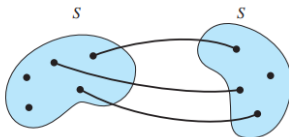
Para cada una de las relaciones binarias  $\rho$  sobre  $\mathbb{N}$ , indique cuales pares ordenados pertenecen.

1.  $x\rho y \Leftrightarrow x = y + 1$ ;  $(2, 2)(2, 3)(3, 3)(3, 2)$
2.  $x\rho y \Leftrightarrow x$  divide  $y$ ;  $(2, 4)(2, 5)(2, 6)$
3.  $x\rho y \Leftrightarrow x$  es impar ;  $(2, 3)(3, 4)(4, 5), (5, 6)$
4.  $x\rho y \Leftrightarrow x > y^2$ ;  $(1, 2)(2, 1)(5, 2), (6, 4), (4, 3)$

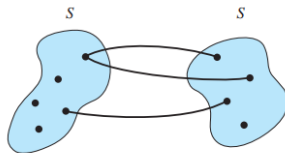
## Tipos de relaciones

# Tipos de relaciones

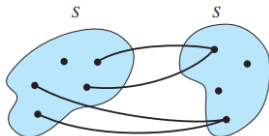
- ▶ Una relación  $\rho$  sobre  $S$  consistirá de un conjunto de pares ordenados de la forma  $(s_1, s_2)$ .
- ▶ Existen varias maneras de parear los elementos de  $S$  en la relación
- ▶ Si cada  $s_1$  y cada  $s_2$  aparecen solo una vez en la relación: **Uno a Uno**
- ▶ Si algun(os)  $s_1$  aparece con más de un  $s_2$  distinto: **Uno a Muchos**
- ▶ Si algun(os)  $s_2$  aparece con más de un  $s_1$  distinto: **Muchos a Uno**
- ▶ Si al menos un  $s_1$  es pareado con más de un  $s_2$  distinto y viceversa: **Muchos a Muchos**



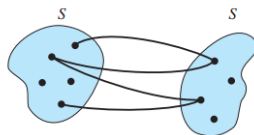
One-to-one



One-to-many



Many-to-one



Many-to-many

# Ejercicios

Identifique el tipo de relación sobre  $S = \{2, 5, 7, 9\}$  como uno a uno, uno a muchos ...

1.  $\{(5, 2), (7, 5), (9, 2)\}$
2.  $\{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$
3.  $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$

# Operaciones sobre relaciones

# Operaciones sobre relaciones

- ▶ Considerar todas las relaciones binarias sobre  $S$
- ▶ Si  $\rho$  y  $\sigma$  pertenecen a este conjunto de relaciones entonces son subconjuntos de  $S \times S$
- ▶ Luego, es posible aplicar operaciones de conjuntos (unión, intersección y complemento) entre estas relaciones y obtener nuevas

$$x(\rho \cup \sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \vee x\sigma y$$

$$x(\rho \cap \sigma)y \Leftrightarrow x\rho y \wedge x\sigma y$$

$$x(\rho')y \Leftrightarrow \neg x\rho y$$



## Ejercicios

Sean  $\rho$  y  $\sigma$  dos relaciones binarias sobre  $\mathbb{N}$  definidas como

- ▶  $x \rho y \Leftrightarrow x = y$
- ▶  $x \sigma y \Leftrightarrow x < y$

Entregue una descripción verbal para

1.  $\rho \cup \sigma$
2.  $\rho'$
3.  $\sigma'$

## Propiedades de las relaciones

# Propiedades de las relaciones

Una relación binaria  $\rho$  sobre un conjunto  $S$  puede tener ciertas propiedades

- ▶ **Reflexibilidad**  $(\forall x)(x \in S \Rightarrow (x, x) \in \rho)$
- ▶ **Simetría**  $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$
- ▶ **Transitividad**  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho)$
- ▶ **Antisimetría**  
 $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y)$

# Ejemplos

- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $=$  sobre  $\mathbb{N}$
- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $\leq$  sobre  $\mathbb{N}$
- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $\subseteq$  sobre  $\wp(\mathbb{N})$

## Ejemplos (respuestas)

- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $=$  sobre  $\mathbb{N}$ 
  - ▶  $x \rho y \Leftrightarrow x = y$  es reflexiva, transitiva y simétrica
- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $\leq$  sobre  $\mathbb{N}$ 
  - ▶  $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$  es reflexiva, transitiva y antisimétrica
- ▶ Identifique qué propiedades cumple  $\subseteq$  sobre  $\wp(\mathbb{N})$ 
  - ▶  $A \rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$  es reflexiva, transitiva y antisimétrica

# Ejercicios

Sea  $S = \{1, 2, 3\}$  una relación  $\rho$  sobre  $S$ .

1. Si  $\rho$  es reflexiva, ¿Qué pares ordenados componen  $\rho$ ?
2. Si  $\rho$  es simétrica, ¿Qué pares ordenados componen  $\rho$ ?
3. Si  $\rho$  es simétrica y  $(a, b) \in \rho$ , ¿Qué otros pares deben estar en  $\rho$ ?
4. Si  $\rho$  es antisimétrica,  $(a, b) \in \rho$  y  $(b, a) \in \rho$ , ¿Qué debe ser cierto?

# Ejercicios

Compruebe qué propiedades cumple cada relación sobre el conjunto indicado

1.  $x \rho y \Leftrightarrow x + y$  es par sobre  $\mathbb{N}$
2.  $x \rho y \Leftrightarrow x$  divide  $y$  sobre  $\mathbb{Z}^+$
3.  $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$  sobre  $\mathbb{N}$
4.  $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$  sobre  $\{0, 1\}$

## Clausuras de relaciones



# Clausuras de relaciones

- ▶ Dado un conjunto  $S$ , una relación  $\rho$  y una propiedad  $P$  (simetría, transiti. . . )
- ▶ Si  $\rho$  sobre  $S$  carece de una propiedad  $P$  es posible **extender**  $\rho$  a una  $\rho^*$  sobre  $S$  que sí la tenga
- ▶ Luego,  $\rho^*$  tendrá los pares  $(x, y)$  en  $\rho$  más otros adicionales para que se cumpla  $P$
- ▶ Si  $\rho^*$  es el conjunto más pequeño entonces se denomina la clausura de  $\rho$  con respecto a  $P$

# Definición

- ▶ Una relación  $\rho^*$  sobre un conjunto  $S$  es la clausura de la relación  $\rho$  con respecto a la propiedad  $P$  si
  - ▶  $\rho^*$  sí tiene  $P$
  - ▶  $\rho \subseteq \rho^*$
  - ▶  $\rho^*$  es subconjunto de cualquier otra relación sobre  $S$  que incluya  $\rho$  y tenga la propiedad  $P$

## Ejemplo

- ▶ Sea  $S = \{1, 2, 3\}$  y  $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- ▶  $\rho$  es no reflexiva, no simétrica y no transitiva

La clausura de  $\rho$  respecto de la reflexividad es

$$\rho^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

## Ejercicio

Encuentre la clausura reflexiva, simetrica y transitiva de la relación

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$$

sobre el conjunto  $S = \{a, b, c, d\}$

## Ejercicio (resuelto)

- ▶ Clausura reflexiva:  
 $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d)\}$
- ▶ Clausura simétrica:  
 $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, b)\}$
- ▶ Clausura transitiva:  $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d), (d, c), (b, a), (b, c), (c, d)\}$

## Dos relaciones binarias de interés

# Dos relaciones binarias de interés

1. Ordenamientos parciales
2. Relaciones de equivalencia

# Ordenamientos parciales

- ▶ Relación binaria sobre un conjunto  $S$  que es
  - ▶ reflexiva
  - ▶ antisimétrica
  - ▶ transitiva



# POSETS

- ▶ Si  $\preceq$  es un orden parcial sobre  $S$ , el par  $(S, \preceq)$  se denomina conjunto parcialmente ordenado (*POSET*)
- ▶ Ejemplos de posets:
  1.  $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$
  2.  $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$  sobre  $\wp(\mathbb{N})$
  3.  $x \preceq y \Leftrightarrow x$  divide  $y$  sobre  $\mathbb{Z}^+$
  4.  $x \preceq y \Leftrightarrow x = y^2$  sobre  $\{0, 1\}$
- ▶ Importante distinguir que  $x \prec y$  si  $x \preceq y$  y  $x \neq y$

## Restricción en subconjuntos

- ▶ Sea  $(S, \preceq)$  un poset y sea  $A \subseteq S$ .
- ▶ Entonces, algunos pares de elementos en  $\preceq$  pueden también ser pares de elementos de  $A$
- ▶ Si escogemos a partir de  $\preceq$  solamente pares con elementos de  $A$ , este nuevo conjunto se denomina **restricción** de  $\preceq$  en  $A$  y también es un poset en  $A$
- ▶ Ejemplo:  $x \preceq y \Leftrightarrow x$  divide  $y$  sobre  $\mathbb{Z}^+$ .
  - ▶ Siguiendo def. sabemos que  $x \preceq y \Leftrightarrow x$  divide  $y$  es un orden parcial sobre  $\{1, 2, 3, 6, 88\}$  (o cualquier otro subcjto. de  $\mathbb{Z}^+$ )

## Otros ejemplos familiares de posets

- ▶ Consideremos el poset  $(S, \leq)$
- ▶ Si  $x \leq y$  entonces se cumple que  $x = y$  o que  $x \neq y$ .
- ▶ En este último caso, notamos  $x < y$  y decimos que  $x$  es predecesor de  $y$
- ▶ Un  $y$  cualquiera puede tener muchos predecesores (ser sucesor de muchos  $x$  distintos)...
- ▶ ... pero cuando  $\nexists z | x < z < y$ , entonces  $x$  es el predecesor inmediato de  $y$

## Ejercicio

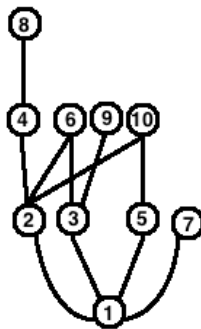
Consideremos la relación  $x|y$  o  $x$  divide a  $y$  sobre  $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$

- Escriba los pares ordenados de esta relación
- Escriba todos los predecesores de 6
- Escriba todos los predecesores inmediatos de 6

## Diagramas de Hasse

- ▶ Cuando  $S$  es finito podemos visualizar un poset  $(S, \preceq)$  usando un diagrama de Hasse
- ▶ Cada elemento en  $S$  es representado por un punto denominado **nodo** o **vertice**
- ▶ Cuando  $x$  es un predecesor inmediato de  $y$ , el nodo de  $y$  se ubica sobre el de  $x$ 
  - ▶ y se conectan ambos nodos por una linea recta

**Ejemplo para  $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, |)$**



## Ejercicio

Considere el conjunto  $\wp(\{1, 2\})$  junto a la relación de inclusión de conjuntos.

- ▶ Es una restricción del poset  $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$  es un poset.
- ▶ Por lo tanto, también es uno.

**Construya el diagrama de Hasse del poset.**

## Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación  $\times$  divide  $y$  sobre  $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ .



## Elemento menor y minimal

- ▶ Sea  $(S, \preceq)$  un poset
- ▶ Si existe un  $y \in S$  con  $y \preceq x$ ,  $\forall x \in S$ , entonces,  $y$  es el **elemento menor** del poset. Además **es único** (demostrable por antisimetría).
- ▶ Un elemento  $y \in S$  es **minimal** si no existe otro  $x \in S$  con  $x \prec y$
- ▶ En el diagrama de Hasse, el menor está debajo de todos los demás, mientras que el minimal simplemente es aquel que no tiene otros debajo.
- ▶ Analogamente, pueden definirse el **elemento mayor** y el **maximal**

## Ejercicio

Para el diagrama del poset de la relación  $\times$  divide y sobre  $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$  identifique el/los elementos maximales y el elemento mayor (en caso que exista).

## Ejercicio

Construya el diagrama de Hasse para la relación  $\leq$  sobre los  $\{1, 2, 3, 4\}$

## Solución

- Un poset en el cual cada elemento está relacionado a todos los demás se denomina **orden total** o **cadena**.



# Relaciones de equivalencia

- ▶ Relación binaria sobre un conjunto  $S$  que es **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**.
- ▶ Algunos ejemplos:
  1. Sobre cualquier conjunto  $S$ ,  $x\rho y \Leftrightarrow x = y$
  2. Sobre  $\mathbb{N}$ ,  $x\rho y \Leftrightarrow x + y$  es par
  3. Sobre  $\{0, 1\}$ ,  $x\rho y \Leftrightarrow x = y^2$
  4. Sobre  $\{x|x \text{ es estudiante en la clase}\}$ ,  $x\rho y \Leftrightarrow x$  se sienta en la misma fila que  $y$

## Partición inducida

- ▶ Una relación de equivalencia induce una partición sobre el conjunto  $S$
- ▶ Una **partición** de un conjunto  $S$  es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de  $S$
- ▶ La unión de estos subconjuntos es igual a  $S$
- ▶ Para una relación  $\rho$  sobre  $S$  y  $x \in S$ , sea  $[x]$  el conjunto de todos los miembros de  $S$  relacionados con  $x$ 
  - ▶ Este conjunto se denomina **clase de equivalencia** de  $x$

$$[x] = \{y | y \in S \wedge x\rho y\} = \{y | y \in S \wedge y\rho x\}$$

## Ejercicio

Considere la relación de equivalencia sobre  $\mathbb{N}$  dada por

$$x\rho y \Leftrightarrow x + y \text{ es par}$$

1. En cuantas clases de equivalencia particiona a  $\mathbb{N}$
2. Entregue 2 nombres de clases de equivalencia

## Ejemplo

- ▶ Considere la relación *congruencia modulo 4* sobre  $\mathbb{Z}$  simbolizada por  $\equiv_4$ .
- ▶ Dos números  $x, y \in \mathbb{Z}$  cumplen  $x \equiv_4 y$  cuando  $(x - y)$  es un multiplo entero de 4. También simbolizado como  $x \equiv y(\text{mod } 4)$
- ▶ Esto equivale a decir que  $x \rho y \Leftrightarrow (x \text{ mod } 4) \equiv (y \text{ mod } 4)$
- ▶ Habrán entonces 4 particiones, una para los números  $x$  tal que  $(x \text{ mod } 4) = 0$ ,  $(x \text{ mod } 4) = 1$ ,  $(x \text{ mod } 4) = 2$  y  $(x \text{ mod } 4) = 3$



## Ejercicio

- ▶ Entregue 3 números enteros de ejemplo para cada una de las 4 clases de equivalencia del ejemplo anterior.

# Ordenamiento Topológico

- ▶ Recordemos que al tener un orden parcial  $\preceq$  sobre un conjunto  $S$ , algunos elementos de  $S$  son predecesores de otros.
- ▶ Consideremos que  $S$  es un conjunto de tareas o actividades que deben realizarse
- ▶ La idea de predecesor puede interpretarse como dependencia

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \text{ es requisito de } y$$

## Ejercicio

- Explique porque la relación de prerequisito es reflexiva, antisimetrica y transitiva.

Continuando con el poset de actividades y sus relaciones de dependencias. . .

- ▶ Puede usarse un diagrama de Hasse para visualizar la malla de actividades
- ▶ Podemos también agregar en cada nodo la información del tiempo necesario en cada tarea

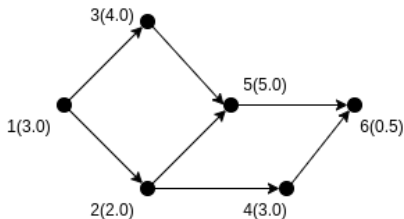
## Ejemplo

- Construya la malla de tareas para la siguiente tabla:

Tarea	Prerequisitos	Semanas duracion
1	Ninguna	3.0
2	1	2.0
3	1	4.0
4	2	3.0
5	3,2	5.0
6	4,5	0.5

El diagrama para la tabla anterior es:

- ▶ El proyecto avanza de izquierda a derecha
- ▶ Tareas 2 y 3 pueden realizarse en paralelo



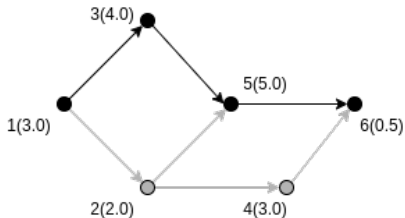
Por lo tanto, para calcular la duración de cada tarea

- ▶ **T1.** 3.0
- ▶ **T2.**  $3.0 + 2.0 = 5.0$
- ▶ **T3.**  $3.0 + 4.0 = 7.0$
- ▶ **T4.**  $5.0 + 3.0 = 8.0$
- ▶ **T5.**  $\max(T2, T3) + 5.0 = \mathbf{T3} + 5.0 = 12.0$
- ▶ **T6.**  $\max(T4, T5) + 0.5 = \mathbf{T5} + 0.5 = 12.5$

Luego el número mínimo de semanas para realizar todo el proceso es de 12.5

La **ruta crítica** de la planificación es:

- Se genera recorriendo del fin al principio seleccionando el prerequisite con mayor valor



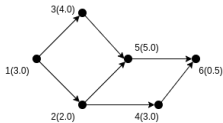


## Ejecución del Ordenamiento Topológico

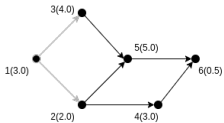
Dado un **orden parcial**  $\rho$  sobre un conjunto finito, **siempre existirá** un **orden total**  $\sigma$  tal que si  $x\rho y$ , entonces también  $x\sigma y$ .

- ▶ El ordenamiento topológico es un proceso iterativo en que se encuentra ese orden total
- ▶ Siempre habrá un elemento minimal
- ▶ Se remueve y anota el elemento minimal hasta que no quedan más elementos

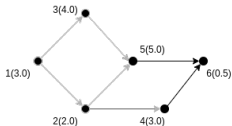
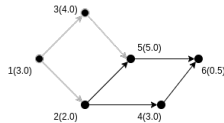
El O.T. de la planificación es (de izquierda a derecha partiendo por la secuencia de más arriba)



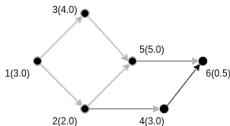
T1



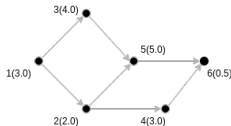
T1 < T3



T1 < T3 < T2



T1 < T3 < T2 < T4



T1 < T3 < T2 < T5 T4 < T6