Instituto de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Computación Estadística II

Operaciones matriciales

Daira Velandia[1] M. & Juan Zamora O.[2]
[1]daira.velandia , [2]juan.zamora *@pucv.cl*

4 de septiembre de 2018

Combinación lineal

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la expresión:

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

se puede generalizar a un número finito de escalares y vectores, de la siguiente forma:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectores, entonces, el vector $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n$, es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Vectores linealmente independientes

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si la combinación lineal de vectores no nulos, es igual al vector nulo únicamente cuando todos los escalares son cero, es decir,

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

(Geométricamente, dos vectores son independientes si no tienen la misma dirección.)
En caso contrario los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo 1

Sean los vectores:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Determine:

1. $2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} - 3\mathbf{z}$
2. ¿Son $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}$ linealmente independientes?
3. ¿Son $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ linealmente independientes?

Rango de matrices

Sea A una matriz $(n \times p)$, entonces el máximo número de vectores linealmente independientes (los que se forman las filas o las columnas) se llama el rango de A ($\mathbf{Rank}(A)$).

Ejemplo 2 (método de Gauss)

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Determine

1. $\mathbf{Rank}(A)$.
2. $\mathbf{Rank}(5A)$.
3. $\mathbf{Rank}(B)$.
4. $\mathbf{Rank}(B)^T$.
5. $\mathbf{Rank}(A+B)$.
6. $\mathbf{Rank}(A) + \mathbf{Rank}(B)$.

Teorema

Sea A una matriz $(n \times p)$:

- El rango fila de A es igual al rango columna A.
- si $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{Rank}(\alpha A) = \mathbf{Rank}(A)$.
- $0 \leqslant \mathbf{Rank}(A) \leqslant \min\{n, p\}$.
- $\mathbf{Rank}(A^T) = \mathbf{Rank}(A)$.
- $\mathbf{Rank}(A + B) \leqslant \mathbf{Rank}(A) + \mathbf{Rank}(B)$.
- si $n \neq p$ y $\mathbf{Rank}(A) = \min\{n, p\}$, decimos que A es de rango completo.
- Si $p = n$
    - y $\mathbf{Rank}(A) = n$, entonces A es no singular.
    - y $\mathbf{Rank}(A) < n$, entonces A es singular (no invertible).

Ejemplo 3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

¿Es A de rango completo?

Ejemplo 4

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Determine

1. $|\mathbf{Rank}(A) - \mathbf{Rank}(B)|$.
2. $\mathbf{Rank}(AB)$.
3. $\min\{\mathbf{Rank}(A), \mathbf{Rank}(B)\}$.
4. $\mathbf{Rank}(A^T A)$.
5. $\mathbf{Rank}(A A^T)$.

Otras propiedades

- $\mathbf{Rank}(A+B) \geqslant |\mathbf{Rank}(A) - \mathbf{Rank}(B)|$.
- $\mathbf{Rank}(AB) \leqslant \min\{\mathbf{Rank}(A), \mathbf{Rank}(B)\}$.
- Si A es cuadrada y de rango completo (es decir, no singular) Y B y C son matrices conformables para los productos AB y CA respectivamente
  1. $\mathbf{Rank}(AB) = \mathbf{Rank}(B)$.
  2. $\mathbf{Rank}(CA) = \mathbf{Rank}(C)$
- $\mathbf{Rank}(A^TA) = \mathbf{Rank}(AA^T)$.
- Si A es $(n \times n)$ y B es una matríz con n filas, entonces

$$\mathbf{Rank}(AB) \geqslant \mathbf{Rank}(A) + \mathbf{Rank}(B) - n$$

Matriz invertible

Se dice que una matriz cuadrada A es invertible, regular o no singular, si existe una matriz cuadradada B tal que

$$AB = BA = I$$

La matriz B se denomina inversa de A, y se denota por A^{-1}.

Ejemplo 5

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determine

1. A^{-1}.
2. B^{-1}.
3. $(AB)^{-1}$.
4. $B^{-1}A^{-1}$.
5. $(A^T)^{-1}$.
6. $(A^{-1})^T$.
7. $(A \otimes B)^{-1}$.
8. $A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Teorema

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ para la cual se cumple que $|A| \neq 0$, entonces A es invertible y además: $A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.
- Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única.
- Si A y B son matrices no singulares del mismo orden, entonces AB es no singular y además: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces A^T también lo es, y además: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Si A $(n \times n)$ es singular, entonces $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$.
- Si A y B son matrices cuadradas de rango completo, entonces

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Rango de matrices particionadas y submatrices

Sea A la matriz particionada

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

(cualquier par de columnas o filas puede ser nula).
Entonces

1. $\mathbf{Rank}(A_{ij}) \leqslant \mathbf{Rank}(A)$.
2. $\mathbf{Rank}(A) \leqslant \mathbf{Rank}([A_{11}|A_{12}]) + \mathbf{Rank}([A_{21}|A_{22}])$.

Ejemplo 6

Particione adecuadamente la matriz A y verifique (1) y (2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} W_{r\times r} & X_{r\times m-r} \\ Y_{n-r\times r} & Z_{n-r\times m-r} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{Rank}(A) = r$, entonces tenemos una partición de rango completo de A.

Solución de ecuaciones lineales

Sea

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

o

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es la matriz de coeficientes y un $\mathbf{x}$ que satisface este sistema de ecuaciones es llamado solución del sistema.

Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. El sistema es consistente.
2. El sistema es inconsistente.

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$$

El complemento Schur

Sea A la matriz particionada como

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} es no singular, entonces se puede escribir

$$Z = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

el cual es llamado el complemento Schur de A_{11} en A.

Inversas de matrices particionadas

Suponga que A es no singular y puede ser particionada como antes, con A_{11} y A_{22} no singular, entonces la inversa de A, está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Z^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Z^{-1} \\ -Z^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

Determinante de matrices particionadas

Sea A ($n \times n$) la matriz particionada como

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} cuadrada no singular, entonces se puede escribir

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$