Instituto de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Computación Estadística II

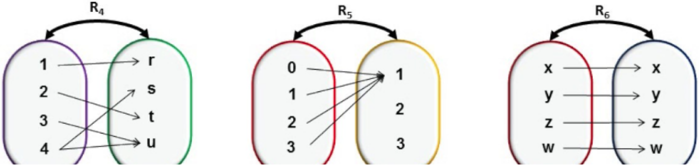
Sesión Inicial

Daira Velandia[1] M. & Juan Zamora O.[2]
[1]daira.velandia , [2]juan.zamora *@pucv.cl*

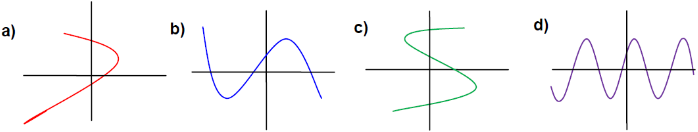
4 de septiembre de 2018

Funciones

1 Identificar cuáles de las siguientes relaciones son funciones, e indicar el dominio y el rango.



2 ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



Función

Sean X e Y dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El conjunto X se llama dominio de f. El número y se denomina la imagen de x por f y se denota por $f(x)$.

El recorrido de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X

3 Graficar las siguientes funciones y especificar los intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente:

a $f(x) = -x^2$

b $f(x) = -x^3$

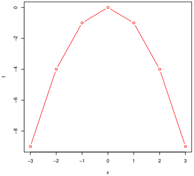
c $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

d $f(x) = -\frac{1}{x}$

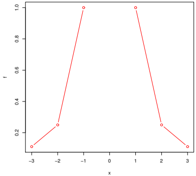
e $f(x) = -\frac{1}{|x|}$

Diremos que una función f en un intervalo $[a, b]$ es:

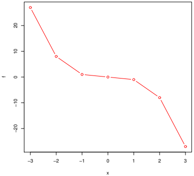
- Creciente si y solo si $f(x) \leq f(y)$ para todo $a \leq x \leq y \leq b$.
- Decreciente si y solo si $f(x) \geq f(y)$ para todo $a \geq x \geq y \geq b$.
- Monótona cuando es creciente o decreciente.



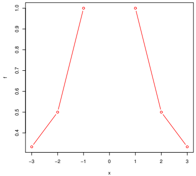
$$f(x) = -x^2$$



$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$



$$f(x) = -x^3$$

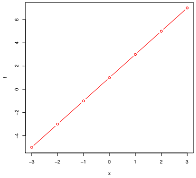


$$f(x) = -\frac{1}{|x|}$$

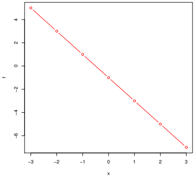
Diremos que una función f en un intervalo $[a, b]$ es:

- Estrictamente creciente si y solo si $f(x) < f(y)$ para todo $a \leq x < y \leq b$.
- Estrictamente decreciente si y solo si $f(x) > f(y)$ para todo $a \geq x > y \geq b$.
- Estrictamente monótona cuando es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

$f(x) = 2x + 1$

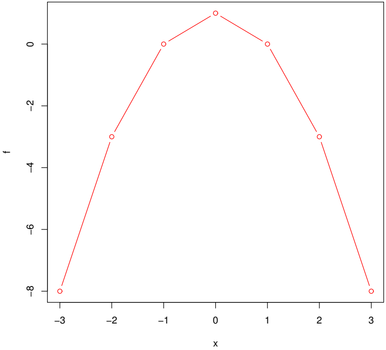


$f(x) = -2x - 1$

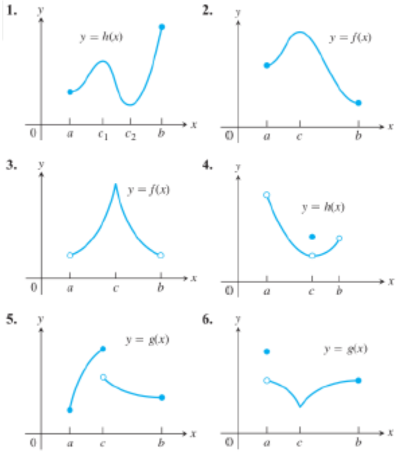


Una función f es (estrictamente) unimodal con moda (máximo) en x si y solo si f es estrictamente creciente para $y < x$ y estrictamente decreciente para $x < y$.

$$f(x) = x^2 + 1$$

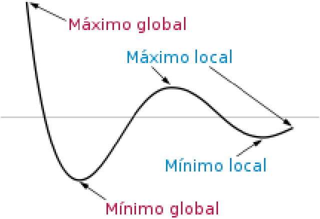


4 En los ejercicios del 1 al 6 determinar viendo la gráfica cuando la función definida en $[a, b]$ tiene máximos locales y absoluto, o mínimos locales y absolutos y en donde.



Extremos de una función

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ y sea $P = (x_0, f(x_0))$ un punto perteneciente a la gráfica de la función.
Se dice que P es un máximo local de f si existe un entorno reducido de centro x_0, $B(x_0)$, donde para todo elemento x de $B(x_0) \subset A$ se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$
Se dice que P es un máximo absoluto de f si, para todo x distinto de x_0 pertenenciente al subconjunto A, su imagen es menor o igual que la de x_0. Esto es:
$P(x_0, f(x_0))$ máximo absoluto de $f \iff \forall x \neq x_0, x \in A, f(x_0) \geq f(x)$.



5 En los siguientes ejercicios encontrar los máximos y mínimos de cada función en el intervalo dado. Despues, graficar la función e identicar los puntos de la gráfica donde se encuentren los extremos (indicar las coordenadas).

1. $f(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in [\frac{1}{2}, 2]$
2. $f(t) = |t - 5|, t \in [4, 7]$

Dada una función suficientemente diferenciable $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, el procedimiento para hallar los extremos de esta función es el siguiente:

1. Se halla la primera derivada de f, $f'(x)$.
2. Se halla la segunda derivada de f, $f''(x)$.
3. Se iguala la primera derivada a 0, $f'(x) = 0$.
4. Se despeja la variable independiente y se obtienen todos los valores posibles de la misma:

$$X = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n | f'(x_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

5. Se halla la imagen de cada x_i sustituyendo la variable independiente en la función.
6. Ahora, en la segunda derivada, se sustituye cada x_i:
   - 6.1 Si $f''(x_i) < 0$, se tiene un máximo en el punto $M(x_i, f(x_i))$.
   - 6.2 Si $f''(x_i) > 0$, se tiene un mínimo en el punto $m(x_i, f(x_i))$.
   - 6.3 Si $f''(x_i) = 0$, debemos sustituir x_i en las sucesivas derivadas hasta sea distinto de cero. Cuando se halle la derivada para la que x_i no sea nulo, hay que ver qué derivada es:

     - Si el orden de la derivada es par, se trata de un extremo local; un máximo si $f^n(x_i) < 0$ y un mínimo si $f^n(x_i) > 0$,
     - Si el orden de la derivada es impar, se trata de un punto de inflexión, pero no de un extremo.

6 Dada la siguiente función definida a trozos :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x < -1, \\ x^2, & \text{si} \quad -1 \leq x < 1, \\ -1, & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

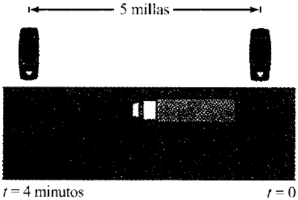
- Calcular la imagen de los puntos $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 5$.
- Expresar la misma función con intervalos, es decir, utilizando intervalos en lugar de los signos de desigualdad.
- Representar la gráfica (con puntos sólidos o vacíos en los extremos de los intervalos).
- Observando la gráfica, ¿f es una función continua?

Continuidad

Intuitivamente, decimos que una función es continua en un intervalo si su gráfica no se quiebra; es decir, se puede hacer la gráfica de la función desde un punto al otro de manera ininterrumpida.

Una función $f(x)$ se dice continua en $x = a$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Además decimos que $f(x)$ es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

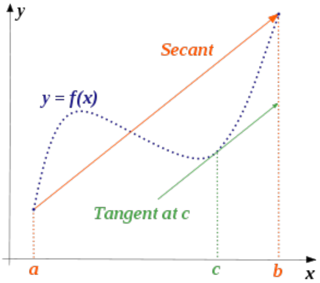
7 Dos coches patrullas, equipados con radar, distan 5 millas en una autopista (como se ve en la figura). Un camión pasa ante el primero de ellos a 55 millas/h y cuatro minutos después pasa ante el segundo a 50 millas/h. Probar que el camión ha sobrepasado el límite de velocidad (=55 millas/h) en algún lugar de esos controles.



Teorema del valor medio

Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c)$$



8 Determinar los valores extremos de la función:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$$

Enfoque multivariado

Ahora $\mathbf{x}$ representa un vector en la dimensión p mientras que la función f sigue siendo de valor real, tal que $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
El vector (columna) de las derivadas parciales de f evaluado en $\mathbf{x}$, se denomina el gradiente, denotado por $\bigtriangledown f(\mathbf{x})$.
La matriz de las segundas derivadas parciales evaluadas en $\mathbf{x}$, denotada por $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \bigtriangledown^2 f(\mathbf{x})$, se denomina la matríz Hessiana.

Una función f tiene un máximo local (mínimo) en $\mathbf{x}$ si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{y}$ tal que $||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| \leq \delta$.

Teorema

Si f es continua y $\bigtriangledown f$ existe para todo $\mathbf{x}$ en una región S y tiene un máximo local (mínimo) en $\mathbf{x}$ en el interior de S, entonces $\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema

Si $\bigtriangledown f(\mathbf{x}) = 0$ y $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es continua y definida positiva (resp. negativa) para un punto $\mathbf{x}$ en un conjunto convexo abierto, entonces $\mathbf{x}$ es un mínimo local (resp. máximo).

Sea f una función en un abierto del plano que es entorno del punto a, siendo a un punto crtítico.
Llamamos a las derivadas parciales de f en a del siguiente modo:
$D_{11} = D_{11}f(a)$
$D_{12} = D_{12}f(a)$
$D_{22} = D_{22}f(a)$
Y definimos el Hessiano de f en a como:

$$H = D_{11}D_{22} - [D_{12}]^2$$

Entonces se cumple:

- Si $H > 0$ Y $A < 0$ entonces f tiene un máximo local en a.
- Si $H > 0$ Y $A > 0$ entonces f tiene un mínimo local en a.
- Si $H < 0$ Y $A < 0$ entonces f tiene un punto de silla (punto donde el gradiente de la función es nulo.