# Construcción Formal de Programas en Teoría de Tipos

**Gustavo Betarte**

**Carlos Luna**

**Grupo de Métodos Formales**

www.fing.edu.uy/~mf/

**Instituto de Computación (InCo)**

**2015**

# Objetivos

- Generales:

  **Iniciación al uso de métodos formales para la producción de software correcto por construcción**

- Particulares:
  - **presentación de laTeoría de Tipos como lógica de programación**
  - **familiarización con ambientes de desarrollo de programas basados en ese formalismo**

# Certificación de Calidad de Software

- **Normas internacionales de calidad**
  **(ISO9001, CC (ITSEC, TCSEC), etc.)**
- **Diferentes niveles/criterios de calidad que involucran evaluación de**
  - **el proceso de producción**
  - **el producto**
- **Niveles altos de garantía exigen la aplicación de métodos formales en:**
  - **la especificación**
  - **la verificación del código fuente**
  - **la verificación del código objeto**

# Métodos Formales y Desarrollo Industrial de Software

## Métodos formales

- **Verificación de modelos**
- **Lenguajes para sistemas comunicantes**
- **Lógicas de programación**

  **- Lógica de Hoare**

  **- Lógicas de orden superior**

  **- Teorías de tipos**

  **...**

## Aplicaciones Industriales Críticas

- **Transporte**
- **Aeronáutica**
- **Centrales nucleares**
- **Software embebido**
- **Comercio electrónico**

  **...**

# Aplicación de métodos formales en el desarrollo de software

- **Tiene (hoy) un costo elevado**

- **Es rentable a largo plazo**
  - **desarrollo incremental y descubrimiento temprano de incoherencias entre los requerimientos**
  - **calidad del diseño**
  - **mantenimiento**
  - **documentación fiable**
  - **comunicación no ambigua (posibilita la terciarización de servicios y la verificación de la funcionalidad)**
  - **evaluación de los planes de calidad (en particular, de los protocolos de test)**

# Costrucción Formal de Programas en Teoría de Tipos

## Métodos formales:

- Lógicas de Programación
  - Teorías de Tipos
    - Asistentes de Pruebas
      - Coq
- Lenguaje formal para la especificación de programas (Teoría de Tipos)
- Razonamiento sobre la especificación y demostración propiedades
- Asistentes mecánicos

# Programa

- **Asistentes de pruebas para lógicos y matemáticos**
  - **Una presentación formal de la lógica proposicional y de primer orden**
- **Asistentes de pruebas para programadores**
  - **Cálculo lambda con definiciones inductivas como lenguaje de programación funcional**
- **Pruebas y programas. Especificaciones y Tipos**
  - **Isomorfismo de Curry-Howard**
  - **Extracción de programas a partir de pruebas**
  - **Caso de estudio: Modelado y verificación de políticas de seguridad en VirtualCert**

# Capítulo 1: Asistentes de Pruebas para Lógicos y Matemáticos

## 1. Lógica Proposicional

# 0.Motivación

## Ejemplo: División

**Sean *a* y *b*** $\in$ N**, b$\neq$0.**

**Calculamos *a*** div ***b* y a** mod ***b***
***simultáneamente* haciendo recursión en *a*:**

- **0** divmod ***b* = <0,0>**
- **(n+1)** divmod ***b* = let <q,r> = n** divmod ***b***

  **in if r < b-1**

  **then <q,r+1>**

  **else <q+1,0>**

# División: especificación y prueba

- **Especificación: Para todos *a,b* ∈ N tq. b≠0 existen *q* y *r* tq. *a=b.q+r* y *r < b.***
- **Prueba de que el programa es correcto: por inducción en *a:***

- 0 divmod *b* = <0,0> ➔ **0 = *b*.0 + 0 y 0 < *b***
- (n+1) divmod *b* =

  let <q,r> = n divmod *b*

  in if r < b-1

  then <q,r+1>

  else <q+1,0> ➔

supongamos ***n=b.q+r* y *r < b.***

luego, si ***r < b - 1***

entonces ***n+1 = b.q+(r+1) y***

***r+1<b***

sino ***n+1 = b.(q+1)+0* y *0<b***

# 1. Cálculo proposicional

**Lógica como herramienta para especificar y probar corrección de programas.**

**<u>Cálculo proposicional</u>**

**Sintaxis**

- **variables de proposición: A,B,C,....**
- **conectivos: $\perp$, $\wedge$, $\vee$ , $\rightarrow$, ~, $\leftrightarrow$**

**Semántica**

- **noción de verdad: existencia de prueba (lógica constructivista)**

# Cálculo proposicional en Coq

- **Prop es la familia de proposiciones**
- **Declaración de variables de proposición:**

  `Variable A B C: Prop`
- **Conectivos:**
  - $\wedge$, $\vee$ , $\rightarrow$, $\perp$ **son *primitivos*** (/\, \/,->, False)
  - ~ **y** $\leftrightarrow$ **son *definidos***:

    $\sim\alpha := (\alpha \rightarrow \perp)$

    $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

# Construcción de pruebas en Coq

**Para comenzar:**

- **Queremos probar cierta *fórmula objetivo* (*goal*)**
- **Para ello, utilizaremos diferentes *tácticas* que transforman al objetivo original e introducen hipótesis adicionales**

# Desarrollo de pruebas lógicas

**Situación general:**

- **existen varios objetivos a probar, cada uno a partir de ciertas hipótesis:**

$$\underbrace{\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \quad \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \quad \ldots \quad \frac{\Gamma_n}{\alpha_n}}_{\textit{secuentes}}$$

**donde:**

- **cada $\Gamma_i$ es un conjunto de fórmulas (hipótesis) de la forma:**

  **H0: $\gamma_0$, H1: $\gamma_1$,... Hk: $\gamma_k$.**

- **$\alpha_i$ es una fórmula**
- **cada $\alpha_i$ debe ser probada a partir de $\Gamma_i$**

# Tácticas = Reglas de inferencia

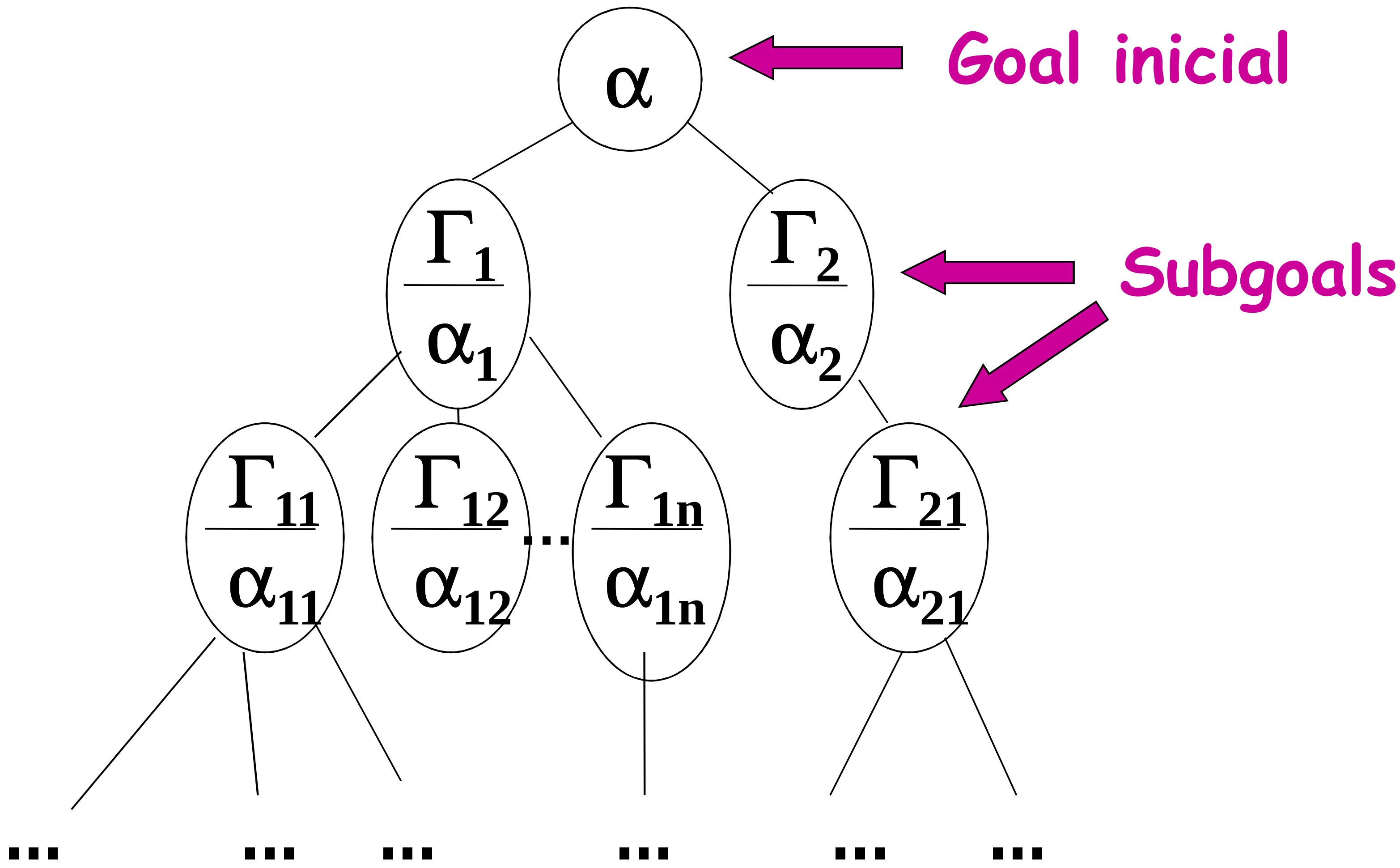
**Una** *táctica* **transforma un secuente de la forma:**

$$\frac{\Gamma_i}{\alpha_i}$$

**en *cero o más* secuentes:** $\dfrac{\Gamma_{i1}}{\alpha_{i1}} \quad \dfrac{\Gamma_{i2}}{\alpha_{i2}} \quad \ldots \quad \dfrac{\Gamma_{in}}{\alpha_{in}}$

**tales que probar los últimos es *suficiente* para construir una prueba del secuente original**

# Prueba completa = Árbol



# Tácticas

caso trivial

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ \mathbf{H:}\ \alpha\end{array}}{\alpha}$$

assumption

Probado!

# Tácticas (II)
## Reglas de introducción

**introducción →**

$$\frac{\Gamma}{\alpha \to \beta}$$

**intro H**

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \mathbf{H}: \alpha\end{array}}{\beta}$$

- **el identificador H es opcional**
- **variantes:** **intros**, **intros $H_1 \ldots H_n$**

# Tácticas (III)
## Reglas de introducción (cont.)

**introducción $\vee$ (Izq.)**

$$\frac{\Gamma}{\alpha \vee \beta} \qquad \textbf{left} \qquad \frac{\Gamma}{\alpha}$$

**introducción $\vee$ (Der.)**

$$\frac{\Gamma}{\alpha \vee \beta} \qquad \textbf{right} \qquad \frac{\Gamma}{\beta}$$

# Tácticas (IV)

## Reglas de introducción (cont.)

**introducción** $\wedge$

$$\frac{\Gamma}{\alpha \wedge \beta} \qquad \textbf{split} \qquad \frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \frac{\Gamma}{\beta}$$

**“introducción”** $\perp$

$$\frac{\Gamma}{\textbf{False}} \qquad \textbf{absurd } \alpha \qquad \frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \frac{\Gamma}{\sim\alpha}$$

# Tácticas (V)
## Reglas de eliminación

**eliminación →**

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ H:\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta} \qquad \textsf{apply } H \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ H:\ \alpha \to \beta\end{array}}{\alpha}$$

**en general:**

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ H:\ \alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \beta\end{array}}{\beta} \qquad \textsf{apply } H \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ H:\ \ldots\end{array}}{\alpha_1} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ H:\ \ldots\end{array}}{\alpha_2} \qquad \ldots$$

# Tácticas (VI)

## Reglas de eliminación (cont.)

**eliminación** $\vee$

$$\frac{\Gamma \quad \mathbf{H}: \alpha\vee\beta}{\sigma} \qquad \text{elim } H \qquad \frac{\Gamma \quad \mathbf{H}: \alpha\vee\beta}{\alpha\to\sigma} \qquad \frac{\Gamma \quad \mathbf{H}: \alpha\vee\beta}{\beta\to\sigma}$$

**eliminación** $\wedge$

$$\frac{\Gamma \quad \mathbf{H}: \alpha\wedge\beta}{\sigma} \qquad \text{elim } H \qquad \frac{\Gamma \quad \mathbf{H}: \alpha\wedge\beta}{\alpha\to\beta\to\sigma}$$

# Tácticas (VII)
## Reglas de eliminación (cont.)

**eliminación ⊥**

$$\frac{\Gamma \quad \textbf{H: False}}{\sigma}$$

elim H

**Probado!**

# Tácticas (VIII)
## Otras tácticas

**Utilización de lema intermediario**

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \texttt{cut } \beta \qquad \frac{\Gamma}{\beta \to \alpha} \qquad \frac{\Gamma}{\beta}$$

**Explicitación de la prueba:**

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \texttt{exact t} \qquad \textbf{Probado!}$$

donde: **t debe ser una prueba de $\alpha$ (figura en las hipótesis de $\Gamma$ o es el nombre de un lema ya probado)**

# Tácticas (IX)
## Eliminación de definiciones

### Eliminación de definición

$$\frac{\Gamma}{\sim\alpha} \qquad \textbf{unfold not} \qquad \frac{\Gamma}{\alpha \rightarrow \text{False}}$$

### Eliminación de definición

$$\frac{\Gamma}{\alpha \leftrightarrow \beta} \qquad \textbf{unfold iff} \qquad \frac{\Gamma}{(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)}$$

**unfold las hipótesis**: **unfold *nom* in *h***

# Observaciones

- **En general:**
  - **si *term* es una prueba de una proposición $\alpha$ (que figura en las hipótesis o es el nombre de un lema ya probado), entonces** elim *term*, **aplica la regla de eliminación del conectivo principal de $\alpha$.**
  - apply **y** elim **no se aplican solamente a hipótesis sino también a lemas previamente demostrados.**

# Esquemas de proposición

**Si demostramos**

Variable $A$:Prop.

Lemma L1 : $A \to A$.

Proof. … Qed.

**La prueba es análoga para** *cualquier* **proposición $A$.**

**Un *esquema de proposición* se expresa como:**

Para toda proposición $A$, se cumple $A \to A$.

**En Coq este esquema se expresa:**

forall $A$:Prop, $A \to A$

# Esquemas de proposición
## Instanciación

**Ejemplo:**

**Si ya demostramos en Coq**

```
Lemma Lid : forall A:Prop, A→ A
Proof.
…
Qed.
```

**Para demostrar** ~False → ~False

**podemos utilizar** exact (Lid ~False).

# 2. Cálculo proposicional clásico

**Principio del tercero excluído:**

Para toda proposición P, se cumple P ∨ ~P

**En lógica constructiva, una proposición es verdadera *si y sólo si* podemos exhibir una prueba.**

- **Sabemos probar instancias de este axioma, pero no sabemos probar el esquema pues para cada proposición deberíamos exhibir una prueba de ella o de su negación ¿como haríamos con las conjeturas y resultados indecidibles?**

**Ejemplo: sabemos probar 1=0 ∨ ~1=0**

**no sabemos (hoy) probar P=NP ∨ ~P=NP**

# Cálculo proposicional clásico

El principio del tercero excluído no se puede demostrar en la lógica constructiva

→ puede agregarse como un AXIOMA

En Coq este axioma está declarado en el módulo Classical y se llama classic.

```
Require Import Classical.
     ...
check (classic A).
     (classic A) : (A \/ ~A)
```

# 3. Razonamiento automatizado

## Tautologías constructivas

$$\frac{\Gamma}{\alpha}$$ **tauto** **Probado!**

**tauto implementa una estrategia de construcción de pruebas de tautologías constructivas.**

**Esta estrategia tiene éxito cuando $\alpha$ es una *tautología* cuya prueba *no usa el tercero excluído*.**

**Construye una prueba.**

# Táctica (Semi)Automática

## Aplicación (hacia atrás) de lemas e hipótesis

$$\frac{\Gamma}{\alpha}$$ **auto** **Probado!**

**O bien**

$$\frac{\Gamma}{\alpha}$$ **auto** $$\frac{\Gamma}{\alpha}$$

**auto implementa una estrategia de construcción de pruebas similar a la de Prolog (razonamiento hacia atrás) aplicando lemas e hipótesis. Considera únicamente aquellos lemas declarados como Hint. Construye una prueba.**