Capítulo 2: Asistentes de Pruebas para Programadores

3. Cálculo de Construcciones

1. Cálculo λ simplemente tipado
Sintaxis

Términos

$e ::= x \mid \lambda x.e \mid (e_1\ e_2) \mid c$

$x \in Var$

$c \in Const$

Tipos

$\alpha ::= t \mid \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$

$t \in TConst$

Contextos

$\Gamma ::= [\,] \mid \Gamma, x:\alpha$

(o directamente $\Gamma ::= x_1:\alpha_1 \ldots x_n:\alpha_n \quad (n \geq 0)$)

Sistema de tipos

Juicios de la forma: $\Gamma \vdash e : \alpha$

"la expresión e tiene tipo α bajo el contexto Γ"

Reglas:

$$\frac{x:\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:\alpha}\ \textbf{ctx}$$

$$\frac{\Gamma, x:\alpha \vdash e : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \alpha \to \beta}\ \textbf{abs}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash e_2 : \alpha}{\Gamma \vdash (e_1\ e_2) : \beta}\ \textbf{app}$$

Sistema de tipos
Ejemplos de términos tipados

- $\lambda x.x$: ?
- $\lambda x.\lambda y.\ x$: ?
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((x\ y)\ z)$: ?
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.((x\ z)\ (z\ y))$: ?

- ? : $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
- ? : $(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \delta) \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \delta$

Reducciones

- **Reducción β**

  $(\lambda x.e_1\ e_2) \rightarrow_\beta\ e_1[x := e_2]$ — *β-redex*

- **Reducción η**

  $\lambda x.(f\ x) \rightarrow_\eta\ f$ — *η-redex*

- **Reducción δ**

  Si c:= *d entonces* $c \rightarrow_\delta d$ — *δ-redex (unfold)*

Reducciones - Ejemplos

- $((\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ \lambda z.z)\ w)$

  $((\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ \lambda z.z)\ w) \rightarrow_\beta (\lambda y.(\lambda z.z\ y)\ w)$

  $(\lambda y.(\lambda z.z\ y)\ w) \rightarrow_\beta (\lambda z.z\ w)$

  $(\lambda z.z\ w) \rightarrow_\beta w$

- $(\lambda x.(\lambda z.z\ x)\ y)$

  $(\lambda x.(\lambda z.z\ x)\ y) \rightarrow_\eta (\lambda z.z\ y)$

  $(\lambda z.z\ y) \rightarrow_\beta y$

Reducciones infinitas

No siempre una cadena de reducciones β y η tiene fin. Ejemplos:

- Definimos $\Delta = \lambda x.(x\ x)$
  - Entonces $(\Delta\ \Delta) \rightarrow_\beta (\Delta\ \Delta) \rightarrow_\beta (\Delta\ \Delta) \rightarrow_\beta$ .....
- Definimos $\Delta_3 = \lambda x.(x\ x\ x)$
  - Entonces $(\Delta_3\ \Delta_3) \rightarrow_\beta (\Delta_3\ \Delta_3\ \Delta_3) \rightarrow_\beta$.....

Propiedad importante: ***tener tipo garantiza que no haya computaciones infinitas***

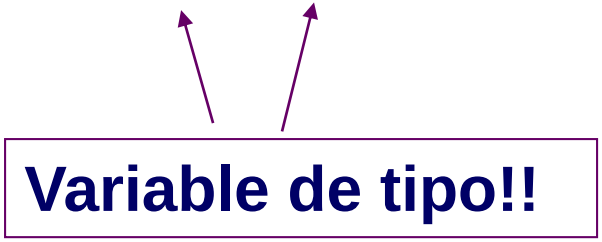
Dado un término e, si existe α tal que Γ |- e:α , entonces e es β-η-normalizable (toda cadena de reducciones temina en una ***forma normal***)

Cálculo λ simplemente tipado en Coq

- Constantes de tipo: nat, bool, etc.
- Las abstracciones se escriben con fun ... => ... El tipo de las variables aparece en las abstracciones:
  - fun x: nat => x : nat → nat
  - fun x: bool => x : bool → bool
  - fun (f:nat→bool)(x:nat) => f x : bool
  - fun (g:nat→nat→bool)(n:nat) => g n n : bool
  - fun (g:nat→nat→bool)(n:nat) => g n : nat → bool

2. Polimorfismo Paramétrico

- En los lenguajes funcionales (ML, Haskell) escribimos: $\lambda x.\ x : \alpha \rightarrow \alpha$



- En Coq, abstraemos el tipo. Los tipos de datos pertenecen a la clase Set:

fun (X:Set)(x:X) => x : forall X:Set, X $\rightarrow$X

Abstrayendo en la clase Set se obtiene polimorfismo paramétrico

3. Tipos dependientes

- Polimorfismo paramétrico = abstraer variables de tipo (de Set).

- En forma más general: podemos abstraer variables de *cualquier tipo*.

  Tipos dependientes: un tipo puede *depender* no solo de otro tipo, sino también de un *objeto de cierto tipo.*

Tipos dependientes
Ejemplos

- Array: Set $\rightarrow$ nat $\rightarrow$ Set
  - **(Array bool 3)**
  - **zip: forall (A B:Set)(k:nat),**
    (Array A k)$\rightarrow$(Array B k)$\rightarrow$(Array (A*B) k)

- Matrix: Set $\rightarrow$nat$\rightarrow$nat$\rightarrow$Set
  - **(Matrix nat 5 4)**
  - **prod:forall n m k:nat,**
    (Matrix nat n k)$\rightarrow$(Matrix nat k m)$\rightarrow$(Matrix nat n m)

Lenguaje de programación de Coq

- Es un lambda cálculo tipado con las siguientes características:

– es de orden superior – permite definir funciones paramétricas – tiene tipos dependientes	**CC**
– permite definir tipos inductivos	**CCI**
– permite definir tipos coinductivos	**CCI$^{\infty}$**

Cálculo de Construcciones (CC)

Cálculo de Construcciones Inductivas = CC + tipos inductivos (CCI)

Cálculo de Construcciones Inductivas y Coinductivos = CCI+tipos coinductivos (CCI$^{\infty}$)

4. Cálculo de Construcciones

Sintaxis

1. Términos

T ::= Set | Prop | Type

| x	variables
| (T T)	aplicación
| [x : T]T	abstracción
| (x : T) T	producto
| T → T	tipo de las funciones*

*** A → B abrevia (x:A)B cuando x no ocurre libre en B**

Ejemplos: [A:Set][x:A]x [f: A → A → A][a:A](f a a)

Sintaxis (cont.)

2. Contextos

$$\Gamma ::= [\,] \mid \Gamma, x{:}T$$

3. Definiciones

$$def ::= C := T$$

Sintaxis - Alcance

La lambda abstracción y el producto son operadores de ligadura

Definición [alcance]

- en el término [x:A]B el alcance de la abstracción [x:A] es B.
- en el tipo (x:A) B el alcance del cuantificador (x:A) es B.

Las nociones de variable libre y ligada son las usuales.

Sintaxis - Sustitución

Definición [sustitución]

sean t y u dos términos y x una variable.

t[x := u] denota el término que resulta de sustituir todas las ocurrencias libres de x en t por el término u.

Otras notaciones: t[u/x], [u/x]t, t[x<-u], t{x:=u}

Asumiremos que la operación de sustitución evita la captura de variables renombrando adecuadamente las variables ligadas.

Reglas de Reducción

Definición [reducción beta y eta]

- $([x:T]f\ \ a) \rightarrow_{\beta} \quad f\ [x := a]$
- $[x:T]\ (f\ x) \rightarrow_{\eta} \quad f$

Definición

- Se define como $\twoheadrightarrow_{\beta}$ y $\twoheadrightarrow_{\eta}$ las relaciones correspondientes a la reescritura de un subtérmino utilizando $\rightarrow_{\beta}$ y $\rightarrow_{\eta}$. Se define $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ como la unión de ambas relaciones.
- Se define como $\twoheadrightarrow_{\beta^*}$ y $\twoheadrightarrow_{\eta^*}$ la clausura reflexiva, transitiva de $\twoheadrightarrow_{\beta}$ y $\twoheadrightarrow_{\eta}$ respectivamente.
- Idem para $\twoheadrightarrow_{\beta\eta^*}$

Reglas Reducción (cont.)

Definición [beta y eta conversión]

- Se definen $\equiv_{\beta\eta}$ como la clausura reflexiva, transitiva y simétrica de $\rightarrow_{\beta\eta^*}$
- Si $t \equiv_{\beta\eta} u$ se dice que t y u son $\beta\eta$-convertibles

Definición [redex, forma normal]

- Un término t es un β-redex si $t \rightarrow_{\beta} u$ y es un η-redex si $t \rightarrow_{\eta} u$
- Un término t está en β-forma normal si ninguno de sus terminos es un β-redex (idem para η-forma normal y $\beta\eta$-forma normal).

Juicio de tipabilidad en CC

Definición [juicio de tipado]
Los juicios t tiene tipo T en el contexto Γ
(Γ |- t:T) y Γ es un contexto bien formado se definen en forma mutuamente recursiva

El conjunto S de clases de objetos se define como :
S = {Set, Prop, Type, Type1, Type2, ...}

El conjunto *R* de reglas de formación de productos es:

R = { <Prop,Prop,Prop>, <Set, Prop, Prop>, <$Type_i$, Prop, Prop>,
<Set, Set, Set>, <Prop, Set, Set >, <$Type_i$, Set, Set>,
<Set,$Type_i$,$Type_i$>, <Prop,$Type_i$,$Type_i$>,
<$Type_i$, $Type_j$, $Type_{max\{i,j\}}$ > | $i \in N$ }

Juicio de Tipabilidad (cont)
Reglas de Buena formación de Contextos

$$\frac{}{[\,] \text{ bien formado}}$$

$$\frac{\Gamma \mid\!- T:s \qquad x \notin \Gamma}{\Gamma, x:T \text{ bien formado}}\ \text{DECLARACION DE VARIABLES}$$

Juicio de Tipabilidad (cont)

Reglas de Tipado I

$$\frac{}{[\,] \vdash \mathbf{Set:Type}}\ \mathbf{AX1} \qquad \frac{}{[\,] \vdash \mathbf{Prop:Type}}\ \mathbf{AX2}$$

$$\frac{}{[\,] \vdash \mathbf{Tipe_i:Type}_{\,i+1}}\ \mathbf{AXi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{T:s_1} \qquad \Gamma, \mathbf{x:T} \vdash \mathbf{U:s_2}}{\Gamma \vdash \mathbf{(x:T)U : s_3}}\ \mathbf{<S1,S2,S3>\in R\ (PROD)}$$

Juicio de Tipabilidad (cont)

Reglas de Tipado II

$$\frac{\Gamma \text{ bien formado} \qquad x{:}t \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : t}\ \text{VAR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (x{:}T)U{:}s \qquad \Gamma, x{:}T \vdash t{:}U}{\Gamma \vdash [x{:}T]t : (x{:}T)U}\ \text{ABSTR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f{:}(x{:}T)U \qquad \Gamma \vdash t{:}T}{\Gamma \vdash (f\ \ t) : U\,[x \leftarrow t]}\ \text{APP}$$

Juicio de Tipabilidad (cont)

Reglas de Tipado III

$$\frac{\Gamma \mid\!- t:T \qquad \Gamma \mid\!- U:s \qquad T \equiv_{\beta\eta} U}{\Gamma \mid\!- t: U}\ (\text{CONV})$$

δ -Reducción

Definición [regla delta]

si C :=E es una definición incorporada al contexto Γ

$t \rightarrow_{\delta, \Gamma} t'$ donde t' es el resultado remplazar una ocurrencia del símbolo de constante C por E en t.

Observar que este remplazo no es una sustitución pues C es un símbolo de constante.

Las definiciones de forma normal y conversion vistas para $\beta\eta$ se definen de forma análoga para δ.

Ver: presentación de CC con δ en Cap. 4 del manual y [Paulin-Mohring96]

Coq: Tácticas vinculadas a la reducción

- Estrategias de reducción
  - cbv $flag_1$ $flag_2$
  - lazy $flag_1$ $flag_2$
    - donde $flag_i$ es el nombre de la reducción (beta o delta)
- Reducción Delta
  - unfold id_1... id_n
  - fold term
- Estrategias de reducción
  - compute **calcula la forma normal**
  - simpl **aplica β y luego δ a constantes transparentes**

Propiedades del Cálculo de Construcciones

Normalización

Si el juicio $\Gamma|\!-A:B$ es derivable entonces A tiene forma normal.

Confluencia

Si $\Gamma|\!-A:B$ y $A \twoheadrightarrow_{\beta\eta^*} A_1$ y $A \twoheadrightarrow_{\beta\eta^*} A_2$ entonces existe C tal que $A_1 \twoheadrightarrow_{\beta\eta^*} C$ y $A_2 \twoheadrightarrow_{\beta\eta^*} C$.

Más Propiedades del Cálculo de Construcciones

Decidibilidad del tipado

Existe un algoritmo que dado un término U y un contexto Γ:

- devuelve un término V tal que $\Gamma |– U : V$ es derivable, o bien
- reporta un error si no existe un término V tal que $\Gamma |– U : V$ pueda derivarse.

Problemas ligados al tipado

1. Chequeo de tipos:

$$\Gamma \vdash U : V \ ?$$

2. Inferencia de tipos:

Dados Γ y U existe V tal que $\Gamma \vdash U : V$?

3. Vacuidad de un tipo:

Dados Γ y V existe U tal que $\Gamma \vdash U : V$?

Los problemas 1 y 2 son decidibles en el cálculo de construcciones, 3 no lo es.