Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería

Matemáticas Discretas ii

Taller 1

Autor:
Juan Carlos Garavito Higuera

Profesor:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

Febrero 2023

Ejercicio 1

G es un conjunto finito de n-elementos entonces μ se puede escribir como una tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Demuestre o refute la propiedad asociativa en μ.

- Esta propiedad se puede refutar con el siguiente contraejemplo:

$$(c * b) * d \stackrel{?}{=} c * (b * d)$$
$$b * d \stackrel{?}{=} c * d$$
$$d \neq c$$

En conclusión, se refuta la propiedad asociativa.

Ejercicio 2

Demuestre o refute que el producto de matrices cuadradas es asociativo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$(A * B) * C \stackrel{?}{=} A * (B * C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdh & jce + jdg + lcf + ldh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iae + kaf + ibg + kbh & jae + laf + jbg + lbh \\ ice + kcf + idg + kdh & jce + lcf + jdg + ldh \end{bmatrix}$$

En conclusión el producto de matrices cuadradas es asociativo.

Ejercicio 3

Demuestre o refute que el producto de complejos es un grupo:

Para poder demostrar si el productos de complejos es un grupo debemos primero revisar si esta operación cumple con la propiedad asociativa carácterística de los grupos: Si definimos un número complejo como un número de la forma:

$$a + bi \quad , \quad con \ a, b \in R \wedge i \in C$$

Se intenta un producto de 3 números para demostrar la asociatividad de los complejos:

$$((a\ +\ bi)\ (c+di))\ (e+fi) \stackrel{?}{=} (a\ +\ bi)\ ((c+di)\ (e+fi))$$

$$-lado\ izquierdo:$$

$$((a\ +\ bi)\ (c+di))\ (e+fi)$$
$$\left(ac+(ad)i+(bc)i+(bd)i^2\right)(e+fi)$$
$$ace-adf-bde+((acf)+(ade)+(bce)+(bcf)-(bdf))i$$

$$-lado\ derecho$$

$$(a\ +\ bi)\ ((c+di)\ (e+fi))$$
$$(a+bi)\left(ce+(cf)i+(de)i+(df)i^2\right)$$
$$ace-adf-bde+((acf)+(ade)+(bce)+(bcf)-(bdf))i$$

$$((a\ +\ bi)\ (c+di))\ (e+fi) = (a\ +\ bi)\ ((c+di)\ (e+fi)) = (a\ +\ bi)\ (c+di)\ (e+fi)$$

Por lo tanto podemos concluir que el producto de complejos es asociativo.

Ahora revisamos si esta operación en los complejos pertenece a un grupo:

$$Iniciando\ por\ buscar\ el\ elemento\ neutro.$$
$$Recordamos:\ (a+bi)\times(c+di) =\ ac+di+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$Entonces\ si\ probamos\ (a+bi)\times(1+0i)\ con\ 1+0i\ siendo\ el\ elemento\ neutro...$$

$$(a+bi)\times(1+0i)\ =\ (a1-b0)+(b1+a0)i = (a)+(b)i\ = a+bi$$

$$Podemos\ deducir\ que\ para\ los\ complejos\ el\ elemento\ neutro\ es\ el\ número\ 1\ \in\ R$$
$$con\ una\ parte\ compleja\ de\ valor\ 0.$$

$$Sea\ \mathcal{Z}\ =\ a+bi\quad con\ a,b\ \in\ R\quad y\quad al\ inverso\ lo\ llamamos\ \mathcal{Z}^{\ -1} = \frac{1}{\mathcal{Z}}$$
$$De\ tal\ forma\ que\ al\ multiplicarlo\ por\ el\ conjugado:$$
$$\mathcal{Z}^{\ -1} = \frac{1}{a+bi}\ \times\ \frac{a-bi}{a-bi}$$

$$\mathcal{Z}^{\ -1} =\ \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
$$\mathcal{Z}^{\ -1} = \frac{a}{a^2+b^2}\ -\ \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$
\begin{aligned}
&y\ si\ operamos\ \mathcal{Z}\ \times\ \mathcal{Z}^{\ -1}\\
&= (a+bi) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2} \ - \ \frac{bi}{a^2+b^2} \right)\\
&= (a+bi) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2} \ - \ \frac{bi}{a^2+b^2} \right)\\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} \ - \ \frac{abi}{a^2+b^2} + \frac{abi}{a^2+b^2} - \frac{b^2 i^2}{a^2+b^2} \right)\\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} \ - \ \frac{abi}{a^2+b^2} + \frac{abi}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \right)\\
&= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \ + \frac{abi}{a^2+b^2} - \ \frac{abi}{a^2+b^2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \ + \frac{abi-abi}{a^2+b^2} \right)\\
&= 1 + \frac{0}{a^2+b^2} i\\
&= 1 + 0i\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$tenemos\ entonces...$$

$$Si \ \ n \ = a+bi :$$

$$
\begin{aligned}
&1)\ 1 \times n \ = \ n \quad , \forall\ n \ \in \ C \ \wedge \ 1 \ \in \ C\\
&2)\ \forall\ n \ \in \ C:\ n \ \neq 0 \ \wedge \ \exists \ \ m \ = \ n^{-1} \in \ C \ \ \longrightarrow \ n \times m \ = \ 1
\end{aligned}
$$

De esta manera se comprueba que el producto entre complejos es un Grupo.