

Universidad Nacional de Colombia

FACULTAD DE INGENIERÍA

MATEMÁTICAS DISCRETAS II

Taller Ecuaciones en Diferencias

Autor:
Juan Carlos Garavito Higuera

Profesor:
Francisco Albeiro Gomez Jaramillo

2023

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?



$$U_1 = V_0$$

$$U_2 = \frac{1}{3} U_1$$

$$U_3 = \frac{1}{3} U_2$$

$$U_n = \frac{1}{3} U_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$U_n = K^{n-1} U_1, \quad K = \frac{1}{3}$$

$$U_n = \frac{1}{3}^{n-1} V_0$$

$$\text{Para } U_n = (1/1000000) V_0$$

$$\frac{V_0}{1000000} = \frac{1}{3}^{n-1} V_0$$

$$\log\left(\frac{1}{3}^{n-1}\right)$$

$$\log(1/1000000) = (n-1) \left(\log \frac{1}{3}\right)$$

$$\log(1) - \log(1000000) = (n-1) [\log(1) - \log(3)]$$

$$(n-1) = \frac{\log(1) - \log(1000000)}{\log(1) - \log(3)}$$

$$n = \frac{\log(1) - \log(1000000)}{\log(1) - \log(3)} + 1 = 13,57 \approx 14$$

Luego de 14 acciones,
se tendrán menos de $V_0 (10^{-6})$

2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelva y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

$U = \text{Población}$

$n = \text{Año}$

$$1000(r) = 25$$



$$r = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

$$U_n = U_{n-1} \underbrace{(1+r)}_{K = (1+r)}$$

$$U_n = (1,025)^{n-1} \cdot U_1$$

Para $n=15$, $U_1 = 200'000.000$

$$\begin{aligned} U_{15} &= 1,025^{14} \cdot 200'000.000 \\ &= 282.594.764 \end{aligned}$$

Rta:

Población en 15 años:

$$\approx 282.594.764 \text{ habitantes.}$$

Para $U_1 = 200'000.000$, y $U_n = 750'000.000$

$$750'000.000 = (1,025)^{n-1} \cdot 200'000.000$$

$$750'000.000 = (1,025)^{n-1} \cdot 200'000.000$$

$$\frac{75}{20} = (1,025)^{n-1}$$

$$\log\left(\frac{75}{20}\right) = \log(1,025)^{n-1}$$

$$\log\left(\frac{75}{20}\right) = (n-1) \log(1,025)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{75}{20}\right)}{\log(1,025)} + 1$$

Rta:

$$n = 54,53$$

≈ 55

Luego de 55 años, habrá mas de 750'000.000 de habitantes.

3. Resuelva:

- $u_n = 4u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

$$\bullet U_n = 4U_{n-1} - 1, \quad n \geq 2, \quad k=4 \quad y \quad c=-1$$

Ecuación de la forma: $U_n = kU_{n-1} + c$

$$\begin{aligned} U_n &= k(kU_{n-2} + c) + c = k[k(kU_{n-3} + c) + c] + c \dots \\ &= k^{n-1}U_1 + k^{n-2}c + \dots + kc + c \\ &= k^{n-1}U_1 + c[k^{n-2} + k^{n-3} + \dots + 1] \end{aligned}$$

Se ve que: $P_n = \sum_{i=2}^n k^{n-i} = \frac{(k^{n-1} - 1)}{k-1}, \quad n \geq 2 \quad y \quad k \neq 1$

1. Paso Base $n=2$

$$\sum_{i=2}^2 k^{n-i} = k^{2-2} = k^0 = 1 \quad -\text{Ademas}- \quad \frac{k^{2-1} - 1}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} = 1$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$

$1 = 1, \text{ por lo que } P_2 \text{ se cumple!}$

2. Paso Inductivo

Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 2$ y P_n se cumple. Tomando cualquier $k \neq 1$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= k^{n+1} + \underbrace{k^{n-2} + k^{n-3} + \dots + 1}_{P_n}, \quad \text{donde} \quad P_n = \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} \\ &= k^{n+1} + \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} \\ &= \frac{k^{(n+1)-1} - k^{n-1} + k^{n-1} - 1}{k-1} \\ &= \frac{k^{(n+1)-1} - 1}{k-1}, \quad \text{de modo que } P_{n+1} \text{ se cumple para cualquier } P_n \end{aligned}$$

De esta forma:

$$U_n = k^{n-1} \cdot U_1 + c \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k-1}$$

$$U_n = 4^{n-1} \cdot U_1 - \frac{1}{3}(4^{n-1} - 1)$$

- $U_n = 3U_{n-1} + 2, \quad n \geq 2, \quad k=3 \quad y \quad c=2$

Por lo anterior demostrado:

$$U_n = 3^{n-1} U_1 + 2(3^{n-1} - 1)$$

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

Demonstración (3)

- $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $u_n + 2un - 1 - 13 = 0$, para $n \geq 1$

$$U_n = -4U_{n-1} - 3, \quad n \geq 1$$

$$U_n = -4^{n-1} U_1 + \frac{3}{5} (-4^{n-1} - 1)$$

$$U_n = -2U_{n-1} + 13, \quad n \geq 1$$

$$U_n = -2^{n-1} U_1 - \frac{13}{3} (-2^{n-1} - 1)$$

5. Encuentre las soluciones particulares para:

- $u_n = 3u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $u_0 = 1$
- $u_n = -2u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $u_1 = 3$

$$U_n = 3U_{n-1} + 5 \quad n \geq 1 \quad U_0 = 1$$

$$\begin{aligned} U_n &= 3^{n-1+1} \cdot U_0 + \frac{5}{2} (3^{n-1+1} - 1) \\ &= 3^n \cdot U_0 + \frac{5}{2} (3^n - 1) \\ &= \frac{1}{2} [7 \cdot (3^n) - 5] \quad \checkmark \end{aligned}$$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

$$U_1 = 7 \quad U_2 = 17 \quad U_3 = 37 \quad U_4 = 77 \quad U_5 = 157$$

$$U_2 - U_1 = 10$$

$$U_3 - U_2 = 20$$

$$U_4 - U_3 = 40$$

$$U_5 - U_4 = 80$$

$$U_1 = 7$$

$$U_2 = U_1 + 2^0 \cdot 10$$

$$U_3 = U_2 + 2^1 \cdot 10$$

$$U_4 = U_3 + 2^2 \cdot 10$$

$$U_5 = U_4 + 2^3 \cdot 10$$

$$U_n = U_{n-1} + 2^{n-2} \cdot 10$$

$$= U_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 5, \quad n \geq 2$$

Solución General

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= (U_{n-2} + 2^{n-2} \cdot 5) + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= [(U_{n-3} + 2^{n-3} \cdot 5) + 2^{n-2} \cdot 5] + 2^{n-1} \cdot 5 \\ &= U_1 + 5[2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}] \\ \sum_{i=1}^{n-1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - 1 = 2^n - 1 - 1 = 2^n - 2 \end{aligned}$$

$$U_n = U_1 + 5(2^{n-2})$$

$$= U_1 + 5(2)(2^{n-1} - 1)$$

$$= U_1 + 10(2^{n-1} - 1), \quad n \geq 2$$

↳ Son equivalentes!

7. Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interés del 21% por año.

$$U_0 = 400,000,000 \quad t = 3 \quad i = 21\% = 0,21 \quad A = \text{Pago Anual}$$

→ Como se busca pagar en 3 años, se tiene que $\boxed{U_3 = 0}$, donde:

$$U_n = U_{n-1} \cdot (1+i) - A$$

Se resuelve sustituyendo en:

$$U_n = k^n \cdot U_0 + \frac{c \cdot (k^{n-1} - 1)}{k - 1}, \text{ donde } k = 1,21 \text{ y } c = -A$$

$$U_3 = (1,21)^3 \cdot (400,000,000) - A \frac{(1,21^2 - 1)}{1,21 - 1}$$

$$0 = (1,21)^3 \cdot (400,000,000) - A \frac{(1,21^2 - 1)}{1,21 - 1}$$

$$A = \frac{(1,21)^3 \cdot (400,000,000)}{(1,21^2 - 1)} = \frac{(1,21)^3 \cdot (400,000,000) \cdot (1,21 - 1)}{(1,21^2 - 1)}$$

$$A = 192,870,000 \text{ por año!}$$

$$\hookrightarrow 192,870,000 / 12 \text{ meses} = \$ 16,072,500$$

Cuota Mensual

8. Una planta de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes. ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

la tasa de producción crece todos los meses así:

$$\begin{aligned}r_1 &= 200(1,01) \\r_2 &= [200(1,01)] \cdot (1,01) \\r_3 &= [(200(1,01)) \cdot (1,01)] \cdot (1,01)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} r_n = 200(1,01)n \\ r_n = 202n \end{array} \right\}$$

$$\text{Donde } 202n - 1600 = n$$

$$n = \frac{1600}{202} = 7,42 \approx 8$$

↳ A partir del mes 8, la producción superará las ordenes de 1600T esperadas!

De esta forma, el café acumulado es:

$$U_n = (202n - 1600) + U_{n-1} \quad n \geq 8$$

$U_7 = 0$ ↳ La producción es menor a 1600T, por lo que aún NO se puede vender!
($U_0 \leq n \leq 7 = 0$)

Para $n = 12$

$$\begin{aligned}U_{12} &= 202[6(13) - 23] - 5(1600) \\&= 10100 - 8000 \\&= 2100 \text{ T}\end{aligned}$$

Para $n = 24$ / 2 AÑOS

$$U_{24} = 202[12(75) - 23] - 17(1600)$$

$$U_{24} = 28754$$

$$\left| \begin{array}{l} U_n = U_{n-2} + [202(n-1) - 23] + [202n - 1600] \\ = U_7 - (n-7) \cdot 1600 + 202[3 + 4 + 5 + \dots + n] \\ \sum_{i=8}^n i = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^7 i = \frac{1}{2}n(n+1) - 28 \\ U_n = U_7 - (n-7) \cdot 1600 + 202[\frac{1}{2}n(n+1) - 28] \\ U_n = 101[n^2 + n] - (n-7) \cdot 1600 - 5656 \end{array} \right.$$

9. La productividad en una plantación de 2000 árboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores técnicas de agricultura. El granjero también planta además 100 árboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$$U_0 = 2000, \quad U_n = U_{n-1} (1,05) + 100$$

$$\begin{aligned} U_n &= (1,05)^n \cdot 2000 + \frac{100}{0,05} (1,05^n - 1) \\ &= 2000 \cdot [(1,05)^n + 1,05^n - 1] \\ &= 2000 [2 \cdot (1,05)^n - 1] \end{aligned}$$

Para $n = 10$

$$\begin{aligned} U_{10} &= 2000 [2 \cdot (1,05)^{10} - 1] \\ &= 2000 \cdot 2,258 \\ &= 4515,58 \approx \boxed{4515 \text{ árboles}} \end{aligned}$$

Respecto a la productividad P :

$$P = \frac{(U_{10} - U_0)}{U_0} \cdot 100 = \frac{(4515 - 2000) \cdot 100}{2000}$$

$$\boxed{P = 125,75 \%}$$

↳ Hay una mejora del 125,75 % en la plantación.

10. Resuelva $u_n = 3u_{n-1} + n$, para $u_1 = 5$

$$U_n = 3U_{n-1} + n, \quad U_1 = 5$$

$\rightarrow U_n = 3U_{n-1} + n$, Ecuación NO Homogénea de la forma $U_n = a + bn$

SOLUCIÓN HOMOGENEA:

$$U_n - 3U_{n-1} = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 3 \end{cases} \quad U_n = A3^n$$

SOLUCIÓN PARTICULAR:

$$(a + bn) - 3[a + b(n-1)] = n$$

$$a - 3a + bn - 3bn + 3b = n$$

$$3b - 2(a + bn) = n$$

$$(3b - 2a) + (-2bn) = n$$

$$\begin{aligned} -2b &= 1 \\ b &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b - 2a &= 0 \\ +2a &= +3b \\ 2a &= 3\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2a &= -\frac{3}{2} \\ a &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

De esta forma:

$$U_n = A(3^n) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$$

$$\rightarrow \text{Para } U_1, \quad U_1 = A(3^1) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(1)$$

$$5 = A(3) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{12}$$

$$U_n = \frac{25}{12}(3^n) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$$

11. Encuentre la solución general para $u_n = un - 1 + 2^n$ y $u_n = 2un - 1 + n$

- $U_n = U_{n-1} + 2^n$, NO homogénea de la forma K^n donde $U_n = aK^n$

$$U_n - U_{n-1} = 2^n$$

$$1. \quad U_n - U_{n-1} = 0$$

$$m^2 - m = 0 \quad m_1 = 0$$

$$m(m-1) = 0 \quad m_2 = 1 \quad U_n = A(1)^n = A$$

$$2. \quad a2^n - a2^{n-1} = 2^n$$

$$a2^n [1 - 2^{-1}] = 2^n$$

$$a = 2$$

$$U_n = 2^{n+1} + A$$

$$2(2^n) - 2(2^{n-1}) = 2^n$$

$$2^n [2 - 2^0] = 2^n$$

$$2^n [1] = 2^n$$

$$2^n = 2^n$$

- $U_n = 2U_{n-1} + n$, NO homogénea de la forma K^n donde $U_n = aK^n$

$$U_n - 2U_{n-1} = 2^n$$

$$1. \quad U_n - 2U_{n-1} = 0$$

$$m^2 - m = 0 \quad m_1 = 0$$

$$m(m-1) = 0 \quad m_2 = 1 \quad U_n = A(1)^n = A$$

$$2. \quad (a + bn) - 2(a + b(n-1)) = n$$

$$U_n = -2 - n$$

$$a - 2a + bn - 2b(n-1) + 2b = n$$

$$(2b - a) + (-bn) = n$$

$$b = -1$$

$$2b - a = 0$$

$$2(-1) - a = 0$$

$$a = -2$$

$$U_n = A(2^n) - 2 - n$$

12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6 .

→ Dado que $U_1 = 4$ y $U_2 = 17$, se puede calcular k para U_2 :

$$U_2 = k \cdot U_1 + 5$$

Sust. uyendo U_1 : $U_2 = k \cdot (4) + 5$

Sust. uyendo U_2 : $(17) = k \cdot 4 + 5$

Resolver para k : $k = \frac{17 - 5}{4} = 3$ ↗ $\boxed{k = 3}$ ✓

→ Calcular U_6 por medio de la siguiente propiedad

$$U_n = k U_{n-1} + c$$

$$U_6 = k \cdot U_5 + 5$$

$$U_n = k^{n-1} U_1 + c \frac{(k^{n-1} - 1)}{k - 1}$$

$$U_6 = k^5 \cdot U_1 + \frac{5(k^5 - 1)}{k - 1}$$

$$U_6 = 3^5 \cdot 4 + \frac{5(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$U_6 = 243 \cdot 4 + \frac{5(242)}{2}$$

$$\boxed{U_6 = 1577}$$



→ COMPROBACIÓN de la PROPIEDAD: Siendo $U_1 = 4$ $U_2 = 17$ $k = 3$

$$U_n = k \cdot U_{n-1} + 5$$

$$U_3 = k \cdot U_2 + 5$$

$$U_3 = 3 \cdot 17 + 5$$

$$U_3 = 56$$

$$U_4 = k \cdot U_3 + 5$$

$$U_4 = 3 \cdot 56 + 5$$

$$U_4 = 173$$

$$U_5 = k \cdot U_4 + 5$$

$$U_5 = 3 \cdot 173 + 5$$

$$U_5 = 524$$

$$U_6 = k \cdot U_5 + 5$$

$$U_6 = 3 \cdot 524 + 5$$

$$U_6 = 1577$$



13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$, sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.

0. Condición inicial, $u_1 = [6]^{-1}$ •

$$1. \quad u_2 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6u_0} = [6u_0]^{-1} *$$

$$2. \quad u_3 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{6u_0} = [u_0]^{-1} \Delta$$

$$3. \quad u_4 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{6u_0}{u_0} = [6]$$

$$4. \quad u_5 = \frac{u_4}{u_3} = [6u_0]$$

$$5. \quad u_6 = \frac{u_5}{u_4} = \frac{6u_0}{6} = [u_0]$$

$$6. \quad u_7 = \frac{u_6}{u_5} = \frac{u_0}{6u_0} = [6]^{-1} *$$

$$7. \quad u_8 = \frac{u_7}{u_6} = [6u_0]^{-1} *$$

$$8. \quad u_9 = \frac{u_8}{u_7} = \frac{6}{6u_0} = [u_0]^{-1} \Delta$$

Para $k \in \mathbb{Z}^+$

$$u_n \begin{cases} [6]^{-1}, & n = 1 + 6k \\ [6u_0]^{-1}, & n = 2 + 6k \\ [u_0]^{-1}, & n = 3 + 6k \\ [6], & n = 4 + 6k \\ [6u_0], & n = 5 + 6k \\ [u_0], & n = 6 + 6k \end{cases}$$

Para algún u_0

14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

$$u_n - u_{n-1} - 2u_{n-2} = 0$$

$$k=n-2 \quad k+1=n-1 \quad k+2=n$$

$$u_{k+2} - u_{k+1} - 2u_k = 0$$

Solución Homogénea λ^k

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - 2\lambda^k = 0$$

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \lambda = -1$$

$$u(n) = C_1(-1)^n + C_2(2)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{u(n)}{u(n+1)} &= \frac{C_1(-1)^n + C_2(2)^n}{C_1(-1)^{n+1} + C_2(2)^{n+1}} \\ &= \frac{C_2(2)^n + C_1(-1)^n}{2C_2(2)^n - C_1(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{(-1)^n} \\ &= \frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{u(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

n puede ser par o impar

$$\begin{aligned} n \text{ par} &\rightarrow n = 2k \quad k \in \mathbb{Z}^+ \\ n \text{ impar} &\rightarrow n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow \infty$$

Caso 1 $\rightarrow n$ par

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_2(-2)^{2k} + C_1}{2C_2(-2)^{2k} - C_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_2(4)^k + C_1}{2C_2(4)^k - C_1} \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{L.H.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2} \cancel{C_2(4)} \cancel{C_1} 4^k}{\cancel{2} \cancel{C_2(4)} \cancel{C_1} 4^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caso 2 $\rightarrow n$ impar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_2(-2)^{2k+1} + C_1}{2C_2(-2)^{2k+1} - C_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2C_2(4)^k + C_1}{-4C_2(4)^k - C_1} \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{L.H.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2 \cancel{C_2(4)} \cancel{C_1} 4^k}{-4 \cancel{C_2(4)} \cancel{C_1} 4^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dado que se cumple para todos los casos, se puede concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{u(n+1)} = \frac{1}{2}$$

15. Encuentre el n -ésimo término de la siguiente secuencia: -3, 21, 3, 129, 147, ...

$$U_1 = -3 \quad U_2 = 21 \quad U_3 = 3 \quad U_4 = 129 \quad U_5 = 147$$

Cada U_n se puede expresar como:

$$U_2 = 21 = (-1)^2 (-3)^2 + 12 = (-1)^2 (-3)^2 + (-1) \cdot 2^2 \cdot (-3)$$

$$U_3 = 3 = (-1)^3 (-3)^3 + (-24) = (-1)^3 (-3)^3 + (-1)^2 \cdot 2^3 \cdot (-3)$$

$$U_4 = 129 = (-1)^4 (-3)^4 + 48 = (-1)^4 (-3)^4 + (-1)^3 \cdot 2^4 \cdot (-3)$$

$$U_5 = 147 = (-1)^5 (-3)^5 + (-96) = (-1)^5 (-3)^5 + (-1)^4 \cdot 2^5 \cdot (-3)$$

$$U_n = (-1)^n U_1^n + (-1)^{n-1} 2^n U_1$$

COMPROBACIÓN:

$$\begin{aligned} U_2 &= (-1)^2 U_1^2 + (-1)^{2-1} 2^2 U_1 \\ &= 1 \cdot (-3)^2 + (-1)^1 \cdot 4 \cdot (-3) \\ &= 9 - 4 \cdot (-3) \\ &= 9 + 12 = 21 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4 &= (-1)^4 U_1^4 + (-1)^{4-1} 2^4 U_1 \\ &= 1 \cdot (-3)^4 + (-1)^3 \cdot 16 \cdot (-3) \\ &= 81 + (-1) \cdot 16 \cdot (-3) \\ &= 81 + 16 \cdot 3 = 129 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= (-1)^3 U_1^3 + (-1)^{3-1} 2^3 U_1 \\ &= (-1) (-3)^3 + (-1)^2 \cdot 8 \cdot (-3) \\ &= (-1) (-27) + 1 \cdot 8 \cdot (-3) \\ &= 27 - 8 \cdot 3 = 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5 &= (-1)^5 U_1^5 + (-1)^{5-1} 2^5 U_1 \\ &= (-1) (-3)^5 + (-1)^4 \cdot 32 \cdot (-3) \\ &= (-1) (-243) + 1 \cdot 32 \cdot (-3) \\ &= 243 - 32 \cdot 3 = 147 \quad \checkmark \end{aligned}$$

16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalúe u_6 .

$$U_n - 6U_{n-1} + 8U_{n-2} = 0$$

Polinomio Característico

$$u_1 = 10$$
$$u_2 = 28$$
$$u_6 = ?$$

$$\frac{r^2 + 6r + 8}{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - (4)(1)(8)}} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{\frac{8}{2}}{4} \cdot \frac{\frac{4}{2}}{2}$$

Sln general

$$A(4)^n + B(2)^n$$

$$10 = A_4 + B_2$$

$$28 = A_16 + B_4$$



$$10 = A_4 B_2$$
$$8 = A_8$$
$$A = 1$$
$$\Rightarrow \frac{10 - 4}{2} = B = 3$$

Sln. específica

$$4^n + 3 \cdot 2^n = u_n$$

$$u_6 = 4^6 + 3 \cdot 2^6$$

$$4096 + 192$$

$$u_6 = 4288$$

17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1, u_2 = -2$.

$$U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0 \quad n \geq 1$$

$$U_1 = -1$$

$$U_2 = -2$$

Polinomio Característico $r^2 + 2r + 1$
 $(r+1)^2$

Sln. general

$$-1 = -A - B$$

$$-2 = A + 2B$$

$$\begin{matrix} \\ \Downarrow \\ -3 = 0 + B \end{matrix}$$

$$-3 = B$$

$$\begin{matrix} -1 = -A & -(-3) \end{matrix}$$

$$-4 = -A$$

$$A = 4$$

Sln. específica: $4(-1)^n + (-3)$

$$n(-1)^n$$

18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$.

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = f(n), \quad f(n) = 2$$

→ hallamos el polinomio

$$\begin{aligned} m^2 - 5m + 6 &= 0 \\ \Rightarrow (m-2)(m-3) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 \end{array} \right\}$$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n \quad \rightarrow \text{Parte Homogénea}$$

Solución at bn

$$\begin{aligned} U_n &= a + bn \\ U_{n-1} &= a + b(n-1) \\ U_{n-2} &= a + b(n-2) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Reescribiendo:} \\ a + bn - 5(a + b(n-1)) + 6(a + b(n-2)) \\ \Rightarrow 2a + 2bn - 7b \\ \Rightarrow \underbrace{2(a + bn)}_1 - \underbrace{7b}_0 = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} +b &= 0 \\ b &= 0 \\ a + b &= 1 \\ \cancel{a} &= 1 \end{aligned}$$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n + 1$$

$f(n) = n$ Se sabe que la solución de la parte homogénea es: $U_n = A(2)^n + B(3)^n$

$$\left. \begin{array}{l} U_n = an + b \\ U_{n-1} = a(n-1) + b \\ U_{n-2} = a(n-2) + b \end{array} \right\} \quad a, b \text{ constantes}$$

reemplazar

$$an - 5(a(n-1) + b) + 6(a(n-2) + b) = n$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2a)n}_1 + \underbrace{(12b - 7a)}_0 = n$$

$$a = \frac{1}{2} \quad 12b - 7\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad b = \frac{7}{24}$$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n + \frac{11}{24}$$

$$f(n) = 5^n$$

Sol. Homogénea

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n$$

Sol. alternativa

Reemplazar

$$U_n = a5^n$$

$$U_{n-1} = a5^{n-1}$$

$$U_{n-2} = a5^{n-2}$$

$$\Rightarrow 65^{n-2} \cdot a \Rightarrow 5^n \cdot \underbrace{\left(\frac{6}{25} \cdot a\right)}_1$$

$$\frac{6}{25}a = 1$$

$$\left[a = \frac{25}{6} \right]$$

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n + \frac{25}{6}$$

$$f(n) = 1 + n^2$$

Sol. Homogénea

$$U_n = A(2)^n + B(3)^n$$

Alternativa

$$U_n = a + bn + cn^2$$

$$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2 \quad U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$$

$$(reescribir) \quad a + bn + (n^2 - 5(a + b(n-1) + c(n-1)^2))$$

$$+ 6(a + b(n-2) + c(n-2)^2)$$

$$2a + 2bn + 2cn^2 - 7b - 14cn + 19c = 1 + n^2$$

$$2bn + 2cn^2 - 14cn - 7b + \underbrace{19c}_{2c + 17c} + 2a$$

$$2c(1+n^2) + \underbrace{(2bn - 14cn - 7b + 17c)}_0 + 2a$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$b(2n-7) + (-14-17) + 2a = 0 \quad a = 8 \quad b = \frac{7}{2} \quad c = \frac{1}{2}$$

$$A(2)^n + B(3)^n + 12$$

Solución

19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatriz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$.

$$U_n - 3U_{n-1} + 4U_{n-2} = 0$$

$$\text{P.C} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(4)(1)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \quad \lambda = \frac{3 - \sqrt{7}i}{2}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \rightarrow \lambda = a + bi$$

$$a = \frac{3}{2} \quad b = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{3}{4} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\theta \approx 0,723 = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$U(n) = 2^n \left[C_1 \cos(0,723n) + C_2 \sin(0,723n) \right]$$

$$U(0) = 0 \quad U(1) = 20$$

$$U(0) = 1(C_1(1) + C_2(0)) = 0$$

$$U(1) = 2 \left[C_1 \cos(0,723) + C_2 \sin(0,723) \right] = 20$$

$$2 \left[C_1 \left(\frac{3}{4} \right) + C_2 \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right) \right] = 20$$

$$C_2 \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = 10$$

$$C_2 = \frac{40}{\sqrt{7}}$$

$$U(n) = 2^n \left[\frac{40}{\sqrt{7}} \cdot \sin(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)n) \right]$$

20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

$$k=n-2 \quad k+1=n-1 \quad k+2=n$$

$$f_{k+2} - f_{k+1} - f_k = 0$$

Hallamos el sistema homogéneo

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0$$

$$\lambda^k (\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f_h(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$f_h(0) = 0 \quad f_h(1) = 1$$

$$f_h(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$f_h(1) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5} C_1 = 1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

21. Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $u_0 = 1$

Solución Homogénea

$$u_n - 2u_{n-1} = 0$$

$$k=n-1 \quad k+1=n$$

$$u_{k+1} - 2u_k = 0$$

Supose λ^k

$$\lambda^{k+1} - 2\lambda^k = 0$$

$$\lambda^k(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$f_H(n) = C_1(2)^n$$

Solución particular

$$f_p(n) \sim 3^n$$

$$\text{Propuesta } f_p(n) = \alpha 3^n \quad \text{Sln General}$$

$$\alpha 3^n - 2\alpha 3^{n-1} = 3^n$$

$$\alpha 3^n - \frac{2}{3}\alpha 3^n = 3^n$$

$$\frac{\alpha}{3} 3^n = 3^n$$

$$\frac{\alpha}{3} = 1$$

$$\alpha = 3$$

$$f_p(n) = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

$$f(n) = f_H(n) + f_p(n) = C_1(2)^n + 3^{n+1}$$

$$f(0) = C_1 + 3 = 1 \rightarrow C_1 = -2$$

$$f(n) = -2(2)^n + 3^{n+1}$$

$$f(n) = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

$$f(n) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$