“There is no pain you are receding
A distant ship, smoke on the horizon.
You are only coming through in waves.
Your lips move but
I can't hear what you're saying.”
Pink Floyd

Capítulo 1

Sistemas de Coordenadas y el Tiempo

Como todos los astros que contemplamos están muy distantes de nosotros, perdemos la noción de profundidad y nos parece que todos los objetos celestes se encuentran dispuestos sobre una misma superficie esférica. A esta superficie imaginaria la llamaremos Esfera Celeste. Consideramos el radio de esta esfera como unitario y que el observador local está ubicado en su centro.

La observación nos muestra que el Sol siempre nace al este y se pone al oeste. También observando los astros por algunas horas durante la noche, constatamos que desaparecen algunas estrellas al oeste mientras que a este aparecen otras, como si estos objetos celestes estuvieran girando alrededor de la Tierra. En realidad, es nuestro planeta que gira y lo que observamos es la proyección del movimiento de rotación terrestre en la esfera celeste.

Para determinar la posición de cualquier objeto espacial (natural o artificial) en la esfera celeste en un tiempo especifico, vamos definir, en este capitulo, los sistemas de coordenadas. Aquí, utilizaremos varias disciplinas de forma conjunta: geodesia, astronomía, mecánica, metrología. Pero nos será imposible cubrirlas a todas de forma completa. Así, este material estará limitado a la aplicación en los dominios de la dinámica espacial.

1.1 Principales Sistemas de Coordenadas

Sabemos que una posición en la superficie de la Tierra es completamente especificada con referencia al meridiano de Greenwich y al Ecuador. O sea, cualquier punto en la superficie terrestre se encuentra bien determinado por dos coordenadas: latitud ϕ y longitud λ (ver Figura 1.1). La determinación de una posición en la esfera celeste es un proceso similar y existen varios métodos para realizarla dependiendo de los círculos máximos* elegidos como principales. El sistema es definido de acuerdo a un centro de coordenadas o a un origen de referencia:

* Los círculos máximos dividen una esfera en dos hemisferios idénticos

- Topocéntrico, si el centro se encuentra sobre la superficie terrestre;
- Geocéntrico, cuando el origen del sistema coincide con el centro de masa de la Tierra;
- Heliocéntrico, si el centro del sistema es el Sol;
- Planetocéntrico, cuando el planeta elegido como centro del sistema es otro;
- Baricéntrico, para el origen en el centro de masa de un sistema de varios cuerpos;
- del Satélite, en los casos en que el centro de masa del satélite es elegido como origen del sistema.

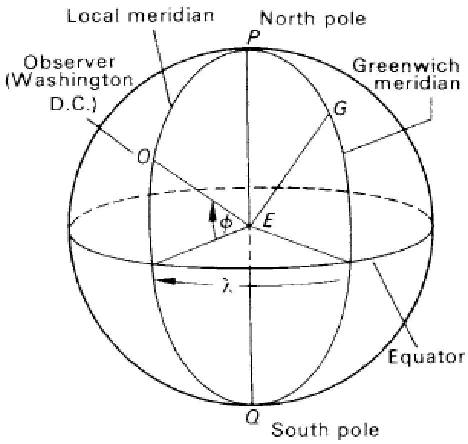


Fig. 1.1. - Definición de latitud ϕ y longitud λ terrestres (la esfera representa la superficie de la Tierra).

La orientación es definida por una base ortogonal que es construida en términos de direcciones privilegiadas, en general relacionadas con un movimiento (la rotación terrestre por ejemplo) o un concepto natural (la intersección de dos planos).

Existen cuatro sistemas principales utilizados para especificar las posiciones de objetos espaciales en la esfera celeste. Cada uno se aplica a un determinado tipo de problema tal como veremos a continuación.

1.1.1 Sistema Horizontal

Este es el sistema más primitivo, pues está inmediatamente relacionado con la primera impresión que un observador tiene al encontrarse sobre un plano y en el centro de una semiesfera donde los cuerpos celestes se mueven.

En la Figura 1.2, el observador en O, con latitud ϕ norte, puede definir el punto directamente opuesto al sentido del hilo de plomo como el zenit Z. La misma línea generada por el plomo define el nadir en la dirección del centro de la Tierra (estamos suponiendo una Tierra esférica). A su alrededor, el plano sobre el cual el observador cree que se encuentra se prolonga hasta encontrarse con los bordes de la esfera celeste en el límite de su horizonte.

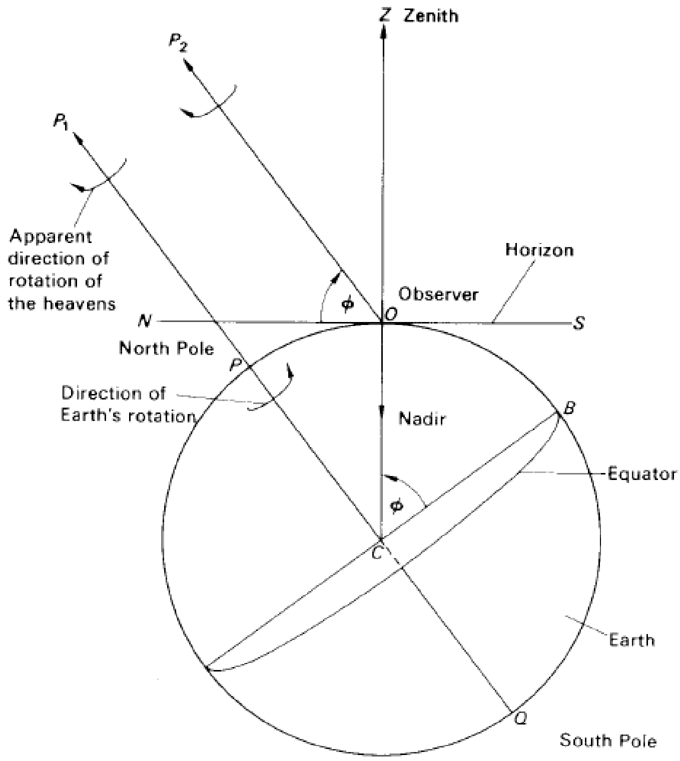


Fig. 1.2 – Observador ubicado en la superficie terrestre. El plano imaginario donde el observador se encuentra es el Horizonte y es tangente a la superficie de una Tierra esférica.

Debido a la rotación terrestre sobre su eje norte-sur PQ, el cielo parece girar al rededor del punto P_1 que es la intersección del prolongamiento del eje PQ con la esfera celeste. Como el radio de la esfera celeste imaginaria es infinito comparado con el radio de la Tierra, no se puede discernir entre este punto y un punto P_2, donde OP_2 es paralelo a QPP_1. Así, P_2 es definido como el polo norte celeste y todos los astros parecen describir círculos centrados en este punto para un observador en el hemisferio norte terrestre. La posición de Polaris, la estrella del polo norte, es aproximadamente dada por la dirección de OP_2. Todas estas definiciones valen para un observador en el hemisferio sur, con Q_2 representando el polo celeste sur. Lamentablemente, no hay ninguna estrella ocupando la posición del polo celestial sur.

El Sistema Horizontal es un sistema de coordenadas centrado en un observador en una superficie planetaria, por lo tanto es Topocéntrico. La Figura 1.3 presenta este sistema con la esfera celeste del observador *O,* el zenit *Z*, el polo norte celeste *P*, y *OX* como la dirección de la posición instantánea de un cuerpo celeste. El plano perpendicular a *OZ* que corta la esfera celeste en el circulo máximo *NWS* es llamado de Horizonte Celeste, o simplemente Horizonte. Sea *X* la posición de un cuerpo en la esfera celeste, el circulo máximo que pasa por los puntos *Z*, *X* y *A* es un circulo vertical.

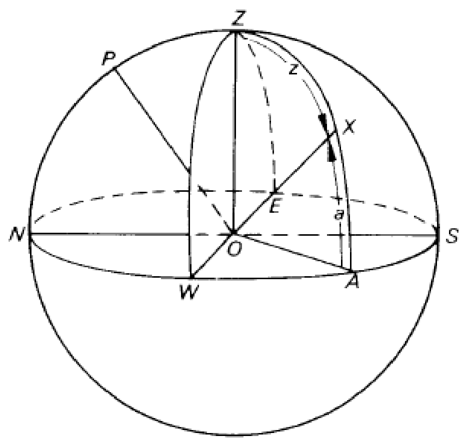


Fig.1.3 – Esfera Celeste del observador y Sistema Horizontal.

En el plano *ZXA*, el ángulo *XOA* o el arco *AX* es denominado elevación (o altura) *a* de *X*. El arco entre el zenit y el objeto celeste, o sea *ZX*, es la llamada distancia del zenit. La elevación (o, si uno quiere, la distancia del zenit) es la primera coordenada del Sistema Horizontal.

Imaginemos un circulo menor paralelo al horizonte que pase por *X*, entonces todos los cuerpos celestes posicionados en este circulo menor en un determinado instante tienen la misma elevación y la misma distancia del zenit. Por lo tanto, para definir completamente la posición de un cuerpo cualquiera, es necesario especificar el circulo vertical sobre el cual el se encuentra ubicado.

Sabemos que *OP* es un vector paralelo al eje de rotación de la Tierra. El circulo vertical que recorre los puntos *Z*, *P* y *N* es definido como circulo vertical principal y el punto *N* como punto norte del horizonte. El punto *S*, exactamente opuesto a *N*, es el punto sur y el punto *W* es el oeste. Así, ahora podemos definir la segunda coordenada necesaria para especificar la posición de nuestro cuerpo celeste *X* en un dado momento en relación al circulo vertical principal.

El ángulo *NOA* o el arco *NA* es llamado azimut *A* de *X*. Si *X* está en la parte oeste de la esfera celeste, como vemos en la Figura 1.3, el azimut es denominado azimut (W) y, en caso contrario, azimut (E).

De esta forma, en un instante especifico, la posición de un objeto espacial en la esfera celeste es completamente determinada en relación al horizonte y al punto norte del horizonte en términos de la elevación y del azimut (W o E). La Tabla 1.1 resume las características del Sistema Horizontal.

Existen varias formas de medirse el azimut y nosotros utilizaremos la definida anteriormente. Una otra forma de medir el azimut es en el sistema *NESW* (Norte-Este-Sur-Oeste), donde este ángulo varia entre 0° y 360° y es medido a partir del punto *N* en la dirección este.

Tabla 1.1 – Características del Sistema Horizontal

Plano Fundamental	Horizonte
Origen de las abscisas	Punto Norte
Sentido	Este o Oeste
Abscisa	Azimut A (0° a ±180° EW)
Ordenada	Elevación a (0° a ±90°)

La principal desventaja del Sistema Horizontal es que sus coordenadas son locales, o sea, el azimut y la elevación de un objeto espacial varían de un lugar a otro en un mismo instante, pues el horizonte y la vertical principal son definidos para cada observador en particular. Además, en un mismo lugar, las coordenadas horizontales varían con el tiempo debido al movimiento de rotación terrestre.

1.1.2 Sistema Horario

El Sistema Horario puede ser Topocéntrico o Geocéntrico. En la Figura 1.4 este sistema se encuentra definido en relación a un observador en la superficie terrestre, donde *O* es la posición del observador en la latitud ϕ, *Z* el zenit y *P* el polo norte. El circulo máximo *TWE* , cuyo plano es perpendicular a *OP* es llamado Ecuador Celeste, pues su plano es paralelo al Ecuador Terrestre. Si el origen de este sistema coincide con el centro de masa de la Tierra, el plano del ecuador celeste será simplemente la proyección del ecuador terrestre en la esfera celeste y el sistema pasa a ser geocéntrico. Podemos observar que el ecuador celeste y el horizonte se interceptan en dos puntos: *W* y *E*.

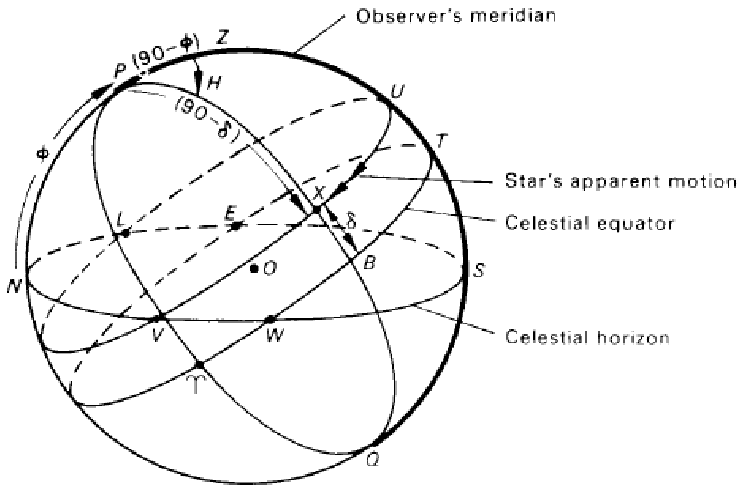


Fig. 1.4 – Esfera Celeste y Sistema Horario

Debido a la rotación de la Tierra, un objeto espacial *X* describe un circulo menor *UXV* en la esfera celeste llamado paralelo de declinación. Cualquier semi-círculo máximo que empieza y termina en los polos celestes *P* y *Q* es conocido como un meridiano. Definimos el meridiano del cuerpo celeste como *PXBQ*, o sea el semi-circulo máximo que pasa por *X* y por los polos de la esfera celeste.

De esta forma, el arco *BX* es denominado declinación δ de *X*. Si el cuerpo celeste se encuentra entre el ecuador celeste y el polo norte, como en la Figura 1.4, el arco *BX* es llamado declinación norte o positiva. Así, la declinación es análoga a la latitud terrestre y, por lo tanto, se la mide de igual manera. El arco *PX* es conocido como distancia polar norte. Como la declinación es definida como positiva para el norte y negativa para el sur, tenemos para todos los objetos espaciales:

$$PX = 90° - \delta$$

Para fijar completamente la posición de X en la esfera celeste, necesitamos un circulo máximo adicional de referencia. Este es el circulo definido por los puntos *PZTSQ*, que es denominado meridiano del observador o meridiano local. La cantidad que define la posición de X en el paralelo de declinación *UXV* es el ángulo en P entre el meridiano del observador y el meridiano *PXQ* que pasa por X en el momento. Este ángulo es llamado de ángulo horario H y es obtenido con:

$$H = U\hat{P}X = \widehat{TB}$$

El ángulo horario es medido a partir del meridiano del observador para oeste (en ambos hemisferios), de 0° a 360° o de 0h a 24h. En la Tabla 1.2 están presentadas las características principales del Sistema Horario.

Tabla 1.2 – Características del Sistema Horario

Plano Fundamental	Ecuador Celeste
Origen de las abscisas	punto de intersección del meridiano del observador con el ecuador celeste
Sentido	retrógrado
Abscisa	Ángulo Horario H (0° a 360° o 0h a 24h)
Ordenada	Declinación δ (0° a ±90°)

1.1.3 Sistema Ecuatorial

En los sistemas de coordenadas anteriores, la posición del observador fue tomada como el centro de la esfera celeste. Consideraremos ahora el centro de masa de la Tierra C como el origen de nuestro sistema de coordenadas (Figura 1.5). Para cuerpos celestes muy distantes, como es el caso de las estrellas no incluyendo el Sol, observamos que este cambio de referencia no tiene ningún efecto sobre las definiciones presentadas hasta el momento.

En el Sistema Horario, la declinación permanece constante a lo largo de un día, mientras el ángulo horario varía de 0h a 24h. Sin embargo, las posiciones de los cuerpos celestes en la esfera celeste son similares a las posiciones de los puntos fijos en la superficie de la Tierra y por lo tanto pueden ser especificadas en relación a un punto en el Ecuador.

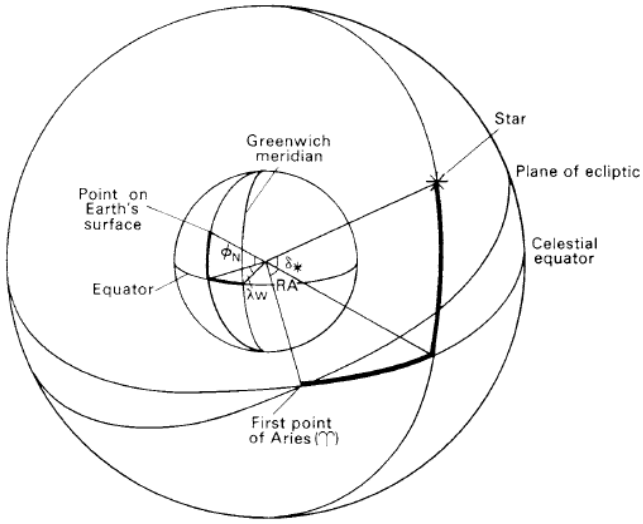


Fig. 1.5 – Esfera Celeste centrada en el centro de la Tierra.

Observemos la Figura 1.6 donde definimos el punto Υ como fijo en el Ecuador Celeste. Cuando, para el observador, el cuerpo celeste *X* se mueve en el espacio, el punto Υ también se mueve y la distancia ΥD, que es llamada ascensión-recta α, se mantiene constante.

El punto Υ elegido aquí como punto de referencia es conocido como Punto Vernal o Equinoccio Vernal y es definido por el encuentro de los planos del Ecuador Terrestre y de la Eclíptica (plano de la órbita de la Tierra al rededor del Sol) cuando el Sol cruza el Ecuador en sentido sur-norte, o sea, el inicio de la primavera en el hemisferio norte*.

Así, en el Sistema Ecuatorial, la posición de *X* es especificada por la declinación δ definida de la misma forma que en el Sistema Horario y por la ascensión-recta α medida a partir del Punto Vernal hasta el meridiano del cuerpo celeste en sentido directo (ver Tabla 1.3).

La ascensión-recta es medida en la dirección leste de 0h a 24h. Nótese que esta dirección es opuesta a la dirección de medida del ángulo horario.

Es importante tener en cuenta que el Sistema Ecuatorial no es fijo en la Tierra y no rota junto con nuestro planeta.

* El símbolo Υ elegido por los astrónomos resulta del hecho que esta dirección en el espacio apuntaba a la constelación de Aries. Debido a la precesión de los equinoccios el eje de rotación terrestre varía a lo largo del tiempo y hoy el Punto Vernal se encuentra en la constelación de Piscis. El periodo de la precesión es de 26 mil años.

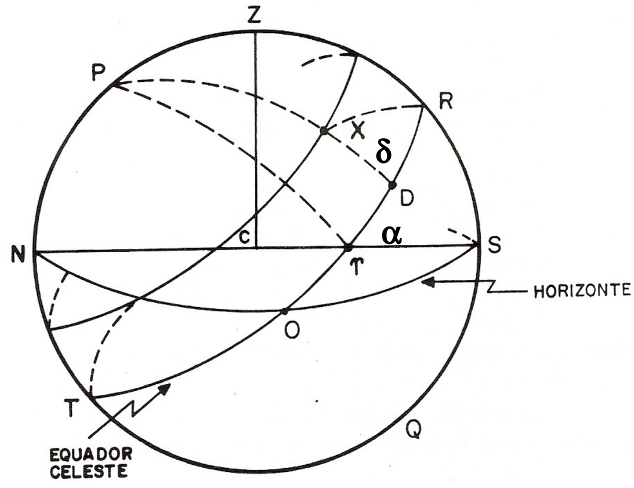


Fig. 1.6 – Esfera Celeste y Sistema Ecuatorial

Tabla 1.3 – Características del Sistema Ecuatorial

Plano Fundamental	Ecuador Celeste
Origen de las abscisas	Punto Vernal ϒ
Sentido	directo
Abscisa	Ascensión-recta α (0° a 360° o 0h a 24h)
Ordenada	Declinación geocéntrica δ (0° a ±90°)

1.1.4 Sistema Eclíptico

La Eclíptica también puede ser definida como el plano orbital del movimiento aparente del Sol (Figura 1.7). El ángulo entre el plano de la Eclíptica y el plano del Ecuador Celeste ε es llamado oblicuidad de la Eclíptica y es igual a aproximadamente 23,5°. La posición de un cuerpo celeste puede ser referida también utilizándose este plano eclíptico como circulo máximo fundamental y el Punto Vernal como punto principal de referencia. Este sistema es particularmente interesante para el estudio del movimiento de los planetas en el Sistema Solar.

Observemos la Figura 1.8, donde el arco ϒ*D*, medido de 0° a 360° a lo largo de la Eclíptica en la dirección del movimiento anual del Sol (o sea este), es conocido como longitud celeste o eclíptica λ. El arco *DX* es llamado latitud celeste o eclíptica β. La Tabla 1.4 resume las características del Sistema Eclíptico.

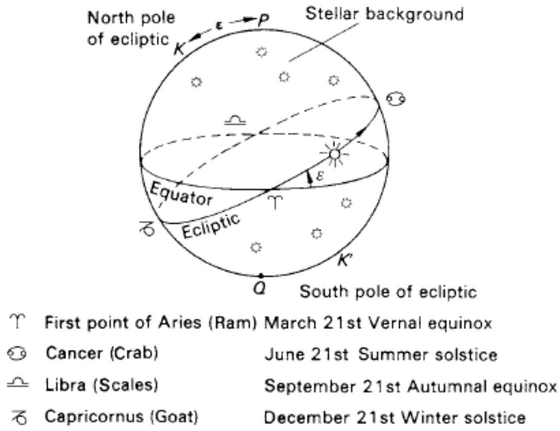


Fig. 1.7 – El camino del Sol a lo largo de la Eclíptica.

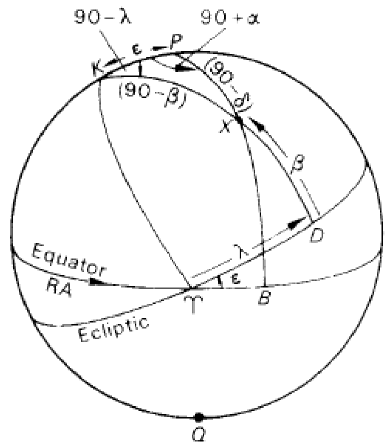


Fig. 1.8 – Esfera Celeste y el Sistema Eclíptico

Tabla 1.4 – Características del Sistema Eclíptico

Plano Fundamental	Eclíptica
Origen de las abscisas	Punto Vernal ♈
Sentido	directo
Abscisa	Longitud Celeste λ (0° a 360°)
Ordenada	Latitud Celeste β (0° a ±90°)

1.2 Coordenadas Cartesianas Geocéntricas

Los sistemas cartesianos son muy apropiados para referirse a puntos relacionados con nuestro planeta. Entre los sistemas cartesianos geocéntricos existen dos tipos: (i) Sistema Cartesiano Terrestre, sujeto al movimiento de rotación de la Tierra y (ii) Sistema Cartesiano Celeste, independiente de la rotación terrestre.

En la Figura 1.9 podemos observar que el origen del Sistema Cartesiano Terrestre es el centro de masa de la Tierra y el eje Z apunta para el polo norte. El eje X de este sistema está direccionado al punto de intersección entre el meridiano de Greenwich y el Ecuador y el eje Y está a 90° del eje X en sentido directo.

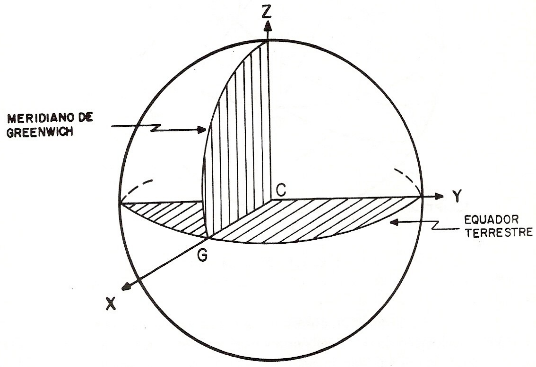


Fig. 1.9 – Sistema Cartesiano Terrestre

El origen del Sistema Cartesiano Celeste también es el centro de masa de la Tierra, así como el eje Z está direccionado para el polo norte como podemos ver en la Figura 1.10. Sin embargo, el eje X de este sistema apunta para el Punto Vernal y el eje Y está a 90° del eje X en sentido directo.

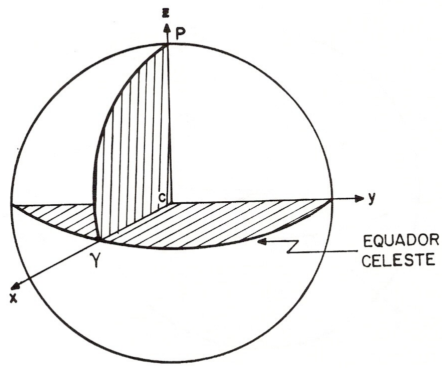


Fig. 1.10 – Sistema Cartesiano Celeste

1.3 Transformaciones de Coordenadas

En general, para especificar la posición de un objeto espacial de forma conveniente, las coordenadas conocidas en un sistema necesitan ser transformadas para otro sistema. Por ejemplo, un vehículo espacial observado desde una estación de control en tierra tendría como coordenadas el azimut y la elevación medidos en un sistema horizontal. Para saber su posición en un sistema inercial, ideal para propagación orbital, será fundamental realizar una transformación de coordenadas.

Partiremos del problema plano. Supongamos que las coordenadas *x,y* de una masa puntual *P* son conocidas en el sistema rectangular *XOY* mostrado en la Figura 1.11.

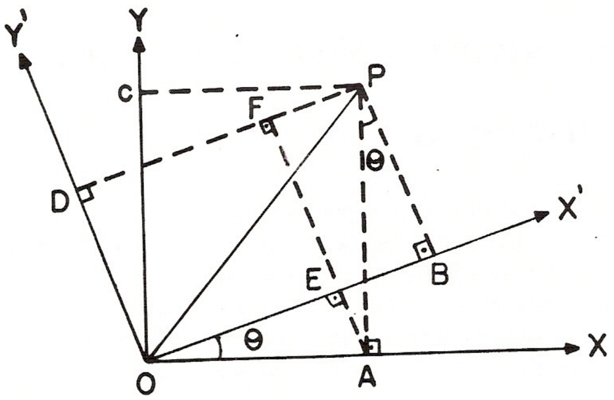


Fig. 1.11 – Transformación en el plano

Queremos conocer las coordenadas *x',y'* de *P* en el sistema *X'OY'*, que está formado por una rotación del sistema *XOY* por un ángulo θ. Tenemos que:

$$x' = OB = OE + EB \tag{1.1}$$

A partir del triángulo *OAE* tenemos:

$$OE = OA\cos(\theta) = x\cos(\theta) \tag{1.2}$$

Y del triángulo *FAP*:

$$EB = FP = PA\cos(90° - \theta) = y\sin(\theta) \tag{1.3}$$

Substituimos (1.2) y (1.3) en (1.1) y obtenemos:

$$x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \tag{1.4}$$

Por otro lado:

$$y' = OD = EF = AF - AE \tag{1.5}$$

Considerando el triángulo *OAE*, tenemos:

$$AE = OA\sin(\theta) = x\sin(\theta) \tag{1.6}$$

Del triángulo *FAP*:

$$AF = PA\sin(90° - \theta) = y\cos(\theta) \tag{1.7}$$

Así, substituimos (1.6) y (1.7) en (1.5) y obtenemos:

$$y' = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \tag{1.8}$$

La matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Esta transformación es llamada transformación de coordenadas en sistema de dos dimensiones. La extensión desde esta para un sistema de tres dimensiones es fácil y automática. Las matrices de rotación ortogonales convencionales de dimensión 3×3- $R_1(\theta), R_2(\theta), R_3(\theta)$ - son utilizadas para girar todo el sistema de un ángulo θ alrededor de los ejes *x*,*y*,*z* respectivamente y son dadas por:

$$R_1(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$$R_2(\theta)=\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$R_3(\theta)=\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Las matrices de transformación son consistentes con un sistema de coordenadas dextrógiro y los signos son positivos para rotaciones en sentido anti-horario cuando son vistas desde el lado positivo del eje de rotación en relación al origen.

Observamos que la inversa de una matriz de rotación es dada por su transpuesta y el determinante es igual a 1:

$$R_i^{-1}(\theta)=R_i^T(\theta)=R_i(-\theta)$$
$$|R_i|=1$$

La Figura 1.12 describe la transformación del sistema de coordenadas terrestre para el sistema celeste. Matemáticamente la transformación es representada por la ecuación:

$$\tilde{X}=R_3(-\theta)\,\tilde{X}' \tag{1.13}$$

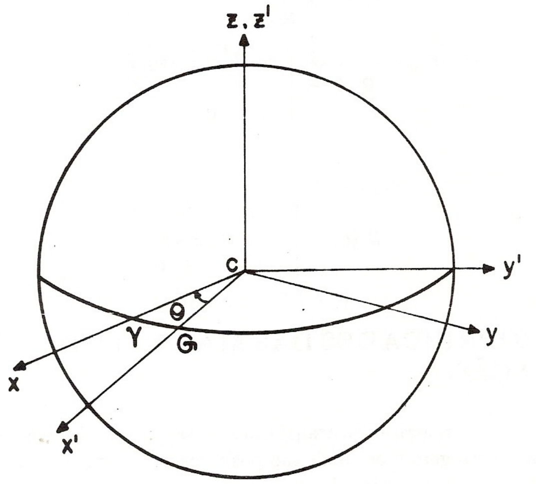


Fig. 1.12 – Transformación entre un sistema terrestre *X'Y'Z'* y un celeste *XYZ*.

La Figura 1.13 demuestra la transformación de coordenadas desde un sistema en el plano orbital hasta un sistema ecuatorial.

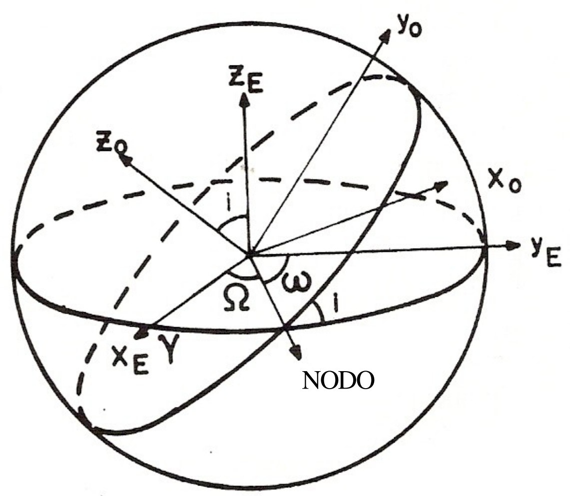


Fig. 1.13 – Transformación entre el plano orbital $x_0y_0z_0$ y un sistema ecuatorial $x_Ey_Ez_E$.

Calculamos las coordenadas en el sistema ecuatorial utilizando:

$$\tilde{X}_E = R_i \tilde{X}_0 = R_3(-\Omega) R_1(-i) R_3(-\omega) \tilde{X}_0 \tag{1.14}$$

donde la matriz de rotación R_i es dada por:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega & -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega & \sin i\sin\Omega \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos i\cos\Omega & -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos i\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

1.4 Elementos Keplerianos

El movimiento que un satélite describe en el espacio puede ser traducido a través de su órbita. Todos los planetas y la mayoría de los vehículos espaciales se mueven en órbitas elípticas (no se debe olvidar que un círculo es un caso especial de elipse). Para observar el movimiento de estos cuerpos celestes se necesitan coordenadas que ubiquen completamente un satélite y su órbita. Estas coordenadas son medidas con relación a un sistema de referencia que, en este caso, tiene su origen en el centro de la Tierra. Existen varios conjuntos de coordenadas que pueden ser utilizados. Uno de los más corrientes son los Elementos Orbitales Keplerianos o Clásicos. A continuación presentamos los seis elementos keplerianos.

Para describir el tamaño y la forma de la órbita de un satélite definimos el semieje mayor a y la excentricidad e de la elipse, donde e tiene un valor adimensional. El semieje es una distancia media entre el satélite y la Tierra. La excentricidad define que tan elíptica es la órbita, o sea que es una medida de su grado de "aplastamiento" en relación a un círculo. Conociéndose estas dos coordenadas es posible definir cuál es el punto más próximo (perigeo) y el más alejado (apogeo) de la Tierra (Figura 1.14).

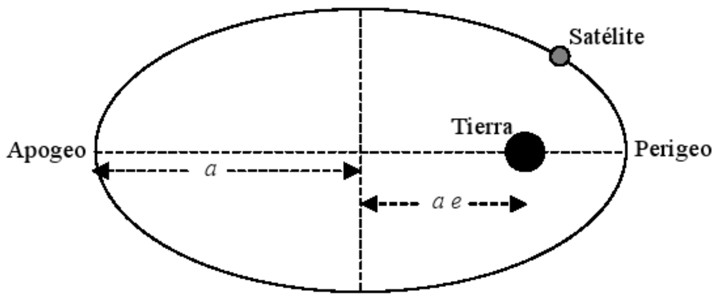


Fig. 1.14 - Semieje mayor a, excentricidad e, perigeo y apogeo de una elipse.

Para orientar esta órbita en el espacio, es preciso conocer su inclinación i en relación a un plano de referencia (en este caso el plano del Ecuador), la longitud del nodo ascendente Ω medida a partir del Punto Vernal y el ángulo entre el nodo ascendente y el perigeo conocido como argumento del perigeo ω (Figura 1.15).

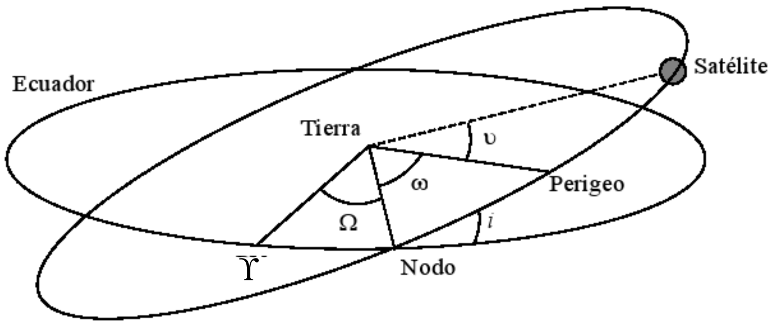


Fig. 1.15 - Inclinación i, longitud del nodo ascendente Ω, argumento del perigeo ω y anomalía verdadera υ (Υ es el Punto Vernal).

Una vez conocida la órbita del satélite, se necesita saber en que lugar de esta órbita él se encuentra. Para esto se utiliza un ángulo llamado de anomalía verdadera υ, que es medido a partir del perigeo orbital.

La posición del satélite en la órbita también puede ser determinada por otros ángulos que tienen una relación geométrica con la anomalía verdadera. Uno de estos ángulos es la anomalía excéntrica E, que es definida geométricamente. La Figura 1.16 muestra la relación entre esta y la anomalía verdadera υ.

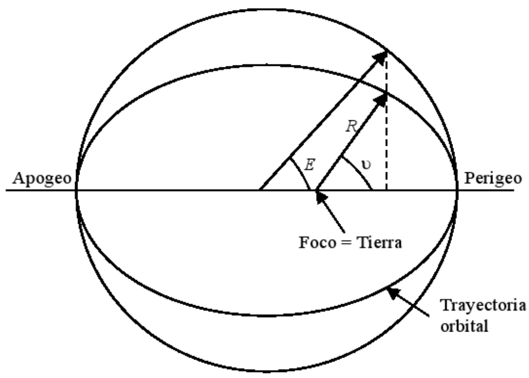


Fig. 1.16 - Elipse del movimiento orbital.

Una expresión matemática de la relación entre la anomalía verdadera υ y la anomalía excéntrica E, utiliza el semi-eje mayor a y la excentricidad e:

$$\sin(\upsilon)=\frac{a\sin E\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} \tag{1.15}$$

Los elementos keplerianos a, e, i, Ω, ω y υ (o E) posicionan completamente un satélite en el espacio. Sin embargo, las coordenadas más adecuadas para describir el movimiento de un satélite en un campo de fuerzas son las Cartesianas $\vec{R}$ (posición) y $\vec{V}$ (velocidad). Las transformaciones entre ellas son posibles y conocidas. Inicialmente se calculan las coordenadas cartesianas en el plano orbital, considerando que el eje x apunta para el perigeo y el origen coincide con el foco:

$$\text{posición:}\quad \begin{aligned} x&=a(\cos E-e)\\ y&=a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned} \tag{1.16a}$$

$$\text{velocidad:}\quad \begin{aligned} \dot{x}&=\frac{-\sqrt{\mu a}}{R}\sin E\\ \dot{y}&=\frac{\sqrt{\mu a}}{R}\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned} \tag{1.16b}$$

donde μ = 398600,4 km^3/s^2 es la constante gravitacional terrestre y las expresiones para las variaciones en x,y vienen del campo de fuerza central que veremos en el próximo capitulo.

Conociéndose los ángulos orbitales i, Ω y ω, existe una matriz de rotación R_i que es una función de estos ángulos y que produce la transformación de coordenadas. En verdad, la transformación completa es realizada a través de tres rotaciones alrededor de los ejes instantáneos de rotación Z, X y Z:

$$\vec{R}=R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} \tag{1.17a}$$

$$\vec{V}=R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\0\end{bmatrix} \tag{1.17b}$$

en que las matrices de rotación son las mismas presentadas en las ecuaciones (1.10) y (1.12). Vimos anteriormente esta transformación entre un sistema cartesiano en el plano orbital y un sistema ecuatorial, que está representada matemáticamente por la ec. (1.14) e ilustrada por la Figura 1.13.

1.5 Sistemas de Tiempo

Hasta este momento, asumimos una cierta unicidad en la determinación del tiempo. Sin embargo, en la práctica, existe una variedad de conceptos históricos y definiciones técnicas que son utilizados de forma sistemática.

Durante muchos años los relojes más precisos que existían eran el movimiento de la Tierra alrededor de su eje (rotación) y alrededor del Sol (translación). A partir de ellos se definía todo lo demás relacionado con el tiempo. Una vuelta de la Tierra alrededor del Sol era un año, una vuelta de la Tierra sobre si misma era un día, que se dividía en 24 horas, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

Esto era suficientemente preciso para las actividades cotidianas, pero poco a poco se fue observando que la Tierra no era el mejor reloj. Las mareas hacen disminuir su giro con cierta regularidad pero, además, hay otras influencias que hacen que la duración de ese giro no sea constante (también llamadas perturbaciones y debidas a los otros cuerpos celestes del Sistema Solar). Las diferencias no afectan a la vida cotidiana pero sí pueden afectar a la precisión de la navegación o a la posición de satélites artificiales.

Con el avance del conocimiento del átomo se descubrió una forma más precisa de medir el tiempo basada en la frecuencia de resonancia de ciertos átomos cuando pasan de un estado a otro. El primer reloj atómico fue construido en 1950 y se utilizaron átomos de cesio. Su precisión era tan alta que en 1967 los organismos de normas internacionales cambiaron la definición de segundo basada en el movimiento de la Tierra por una definición basada en la frecuencia de resonancia del átomo de cesio. El error de los relojes atómicos basados en el cesio es de una parte en 10^{13}.

1.5.1 Universal

El tiempo es determinado por la posición en el cielo, en relación al meridiano local, de un objeto de referencia en la esfera celeste. Vamos a considerar el Sol, como el cuerpo celeste elegido para determinar el paso del tiempo. El día solar es el período de rotación de la Tierra en relación al Sol. El tiempo solar aparente *TSA* para un observador en un dado meridiano es definido como:

$$TSA = H_{\odot} + 12 \text{ horas} \tag{1.18}$$

donde $H_{\odot}$ es el ángulo horario del Sol para este meridiano. La adición de 12 horas es debida a la conveniencia de empezar el día a la media-noche, en lugar del medio-día (pasaje meridiano del Sol). Los astrónomos hacen al revés para evitar el cambio de día en la misma noche de observación. Así, el tiempo solar transcurrido desde el comienzo de un día es el ángulo horario del Sol más 12 horas.

En la primera mitad del día, el Sol todavía no alcanza el meridiano del observador. Por lo tanto, la hora en este período es *a.m.* (*ante meridiem*). Al medio-día, el Sol está en el meridiano y la hora después de este cruzamiento es *p.m.* (*post meridiem*). El tiempo solar aparente puede ser medido con un reloj de Sol.

Sin embargo, la duración exacta de un día solar aparente no es constante debido a la variación de la velocidad orbital de la Tierra y a la inclinación de la Eclíptica de 23,5° en relación al plano ecuatorial. Por este motivo, fue definido otro tiempo llamado tiempo solar medio *TSM* que es de 12 horas más el ángulo horario (medido para el oeste del meridiano del observador) de un Sol ficticio, cuyo período es igual al periodo del Sol verdadero, pero que se mueve con velocidad constante a lo largo del plano ecuatorial. En otras palabras, el tiempo solar medio es simplemente el tiempo solar aparente tomado un promedio uniformemente.

El tiempo solar medio es la base para definir el día solar medio (24 horas o 86.400 segundos). Se corresponde con el tiempo civil y se coordina mediante el tiempo medio de Greenwich TSM_G.

Aunque el tiempo solar medio progrese uniformemente, esta medida de tiempo es todavía inconveniente para el uso práctico porque este tiempo es definido como el ángulo horario del Sol medio. Sin embrago, el ángulo horario hace referencia al meridiano celeste local, que es diferente para cada longitud terrestre. Para evitar la confusión de tener horarios distintos en cada región del globo terrestre, este está dividido en 24 husos horarios (ver Figura 1.17).

El tiempo medido en cada huso horario es el mismo del meridiano que pasa en medio a aquel huso. El tiempo solar medio, según este criterio, es llamado de hora patrón.

Para tener una hora patrón en todo el globo, los husos son numerados a partir del meridiano de Greenwich, positivo para oeste y negativo para este. Como cada huso corresponde a una hora, el tiempo universal *TU* de un observador cuyo meridiano está z husos horarios al oeste de Greenwich y cuya hora solar media es x horas queda entonces definido por:

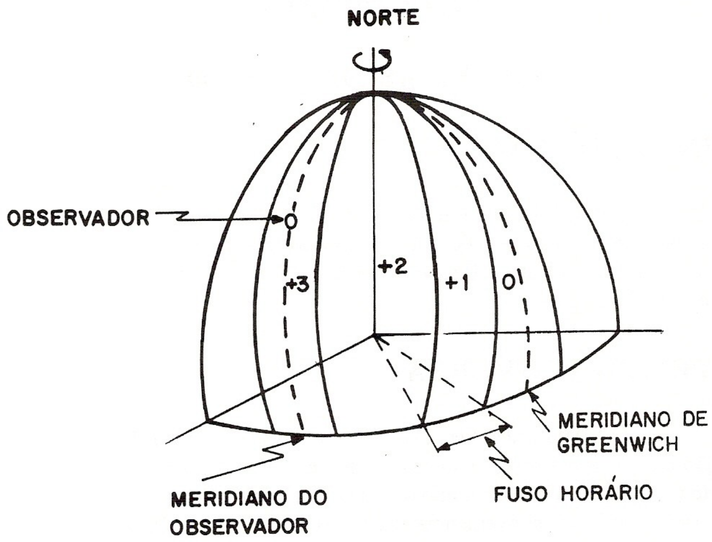


Fig. 1.17 – División del globo en husos horarios.

$$TU = x + z \tag{1.19}$$

así pues el tiempo universal *TU* es el tiempo solar medio en Greenwich TSM_G.

En 1972, se adoptó una medida universal que utiliza la definición atómica de segundo y se llama Tiempo Universal Coordinado *TUC*. Dado que el giro de la Tierra es menos uniforme que el comportamiento de los relojes atómicos, hay una cierta discrepancia entre el tiempo solar medio, base del TSM_G, y el *TUC*. Para que haya sincronía entre los dos tiempos, lo que se hace es controlar con extrema precisión el giro de la Tierra. Se admite que *TUC* y TSM_G son correctos si no difieren en más de 0,9 segundos. Si difieren en más de esa cantidad, se añade o se quita un segundo a los relojes atómicos.

El tiempo universal coordinado también es conocido como Hora Zulu por organismos militares y de navegación aérea. ZULU representa la letra Z en el código Interco. El principal mérito de la hora Zulu es que permite utilizar como referencia una hora en común y no las horas locales con las cuales se requería un proceso de transformación. Mérito este compartido con el tiempo universal.

El GPS, Sistema de Posicionamiento Global, basado en satélites artificiales, que es en realidad un reloj atómico, fue ajustado el 6 de enero de 1980 y desde entonces no se le ha quitado ni añadido ningún segundo. Por lo tanto, el GPS está adelantado 14 segundos frente al *TUC*.

1.5.2 Sideral

Consideremos la Tierra y la esfera celeste (centrada en *C*) como dibujado en la Figura 1.18. Sea *g* la posición de Greenwich, *l* la posición de una localidad cualquiera en la superficie de la Tierra (por ejemplo Córdoba), *G* y *L* los zenites de *g* y *l* en la esfera celeste. Entonces el ángulo entre los meridianos *plq* y *pgq* es la longitud oeste de la localidad (en el caso de Córdoba la longitud es aproximadamente 64°O).

Si ϒ es la posición del Punto Vernal, entonces $G\hat{P}\Upsilon$ es el ángulo horario de ϒ para un observador en Greenwich y $L\hat{P}\Upsilon$ es el ángulo horario de ϒ para un observador en *l*. Entonces:

$$G\hat{P}\Upsilon = L\hat{P}\Upsilon + G\hat{P}L = L\hat{P}\Upsilon + g\hat{p}l$$
$$H(\Upsilon)_G = H(\Upsilon)_l + \lambda_l \qquad (1.20)$$

o sea, el ángulo horario de ϒ en Greenwich es dado por la suma del ángulo horario de ϒ en *l* y la longitud oeste de *l*. Si los ángulos horarios están definidos en horas, minutos y segundos, será necesario convertirlos a sus valores correspondientes en grados para sumar la longitud.

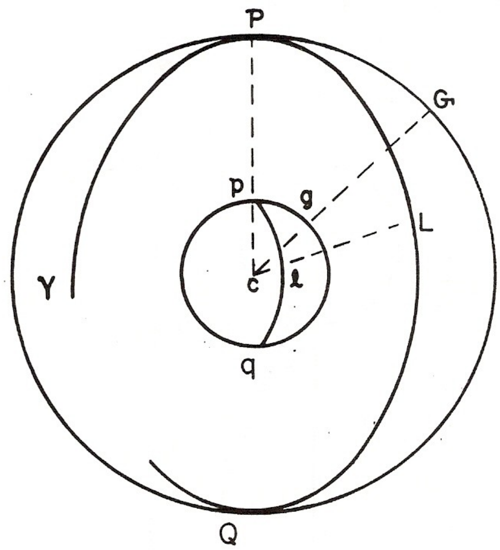


Fig. 1.18 – Definición de Tiempo Sideral.

También podemos definir una relación importante entre el ángulo horario del Punto Vernal y la posición de un objeto espacial en la esfera celeste. Nos referimos a la Figura 1.19. Consideramos un cuerpo celeste cualquier posicionado en *X*. El meridiano de *X* encuentra el ecuador celeste en el punto B, el arco ΥB es la ascensión-recta de X y el arco AB es el ángulo horario de X. Pero:

$$AB + B\Upsilon = A\Upsilon$$

o sea

$$H(X)+\alpha(X)=H(\Upsilon) \tag{1.21}$$

que significa que el ángulo horario de X más la ascensión-recta de X es igual al ángulo horario del Punto Vernal.

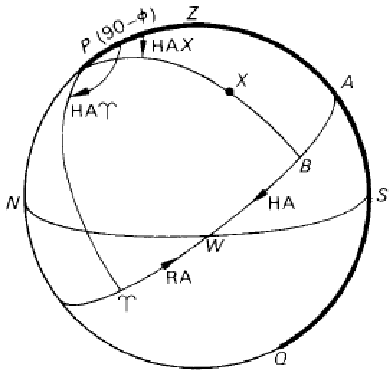


Fig. 1.19 – Otra definición de tiempo sideral.

Ahora definimos el tiempo sideral Θ como el ángulo horario del Punto Vernal Υ. Así, consideramos la ec. (1.20) y tenemos:

$$\Theta_G = \Theta_l \pm \lambda_l \tag{1.22}$$

siendo el signo positivo para longitud oeste y negativo para este. El tiempo sideral en l es llamado tiempo sideral local Θ_{Local}.

Definimos día solar como el periodo de rotación de la Tierra en relación al Sol y día sideral como el tiempo necesario para la Tierra completar una rotación en relación al Punto Vernal Υ. El día sideral es un poco más corto que el día solar. Nos referimos a la Figura 1.20, si consideramos que un día comienza cuando la Tierra está en la posición *A* con el Sol sobre el meridiano de un observador en el punto *O* y el punto vernal sobre la extensión de la línea *AS*, cuando la Tierra hace una rotación completa, el punto vernal estará nuevamente sobre el meridiano local para el observador en el punto *O*. Sin embargo, en este mismo periodo, la Tierra se desplazó de *A* a *B* en su órbita, y el Sol no estará sobre el meridiano local para el observador en *O*.

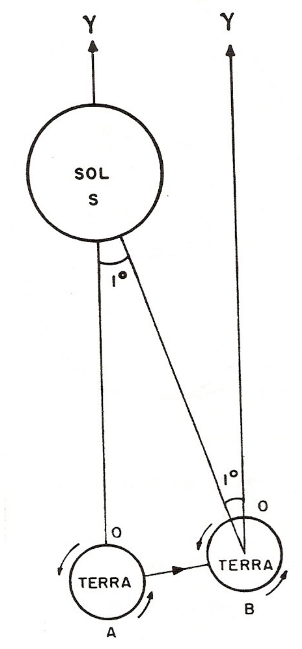


Fig. 1.20 – Relación entre día solar y día sideral.

Un año tiene 365 días y un círculo 360°, por lo tanto, el movimiento diario del Sol en su órbita es de aproximadamente 1°. Así, la Tierra tiene que girar un grado más para tener el Sol en el meridiano local. Como la Tierra lleva aproximadamente 4 minutos para girar un grado, un día solar es 4 minutos más largo que un día sideral.

El tiempo sideral (también llamado de tiempo sidéreo) se usa en observatorios astronómicos por la facilidad que supone a la hora de determinar qué objetos astronómicos serán visibles en un momento dado. Los astros se sitúan en el cielo nocturno empleando la ascensión-recta y la declinación y, cuando el tiempo sideral de un objeto es igual a su ascensión-recta, este se encontrará cruzando el meridiano (H = 0) en el punto más alto del cielo (mayor elevación). Este será el mejor momento para realizar las observaciones. O sea, en el instante de la culminación de una estrella, su ascensión-recta nos da el tiempo sideral. O, a la inversa, conocido el tiempo sideral, tenemos la ascensión-recta de la estrella.

Como caso particular para Greenwich, se establece el tiempo sideral de Greenwich Θ_G, de gran importancia en Astronomía pues esta magnitud está tabulada en todos los Anuarios Astronómicos. Una vez calculada esta cantidad, se puede obtener el tiempo sideral local Θ_{Local} utilizando la ec. (1.22).

1.5.3 Juliano

El día Juliano es simplemente un conteo continuo de días transcurridos desde una época particular. Esta época fue elegida como las 12:00 hs de 1° de enero de 4713 AC.

Cada fecha Juliana es medida de medio-día para medio-día y, por lo tanto, es un numero entero 12 horas después de la media-noche. Este conteo continuo de días partiendo de una determinada época evita las confusiones generadas por los cambios de fechas en el calendario a lo largo del tiempo. Por ejemplo, en 1582, el Papa Gregorio XIII declaró que 05 de octubre era 15 de octubre y eliminó así 10 días.

Existen tablas de conversión entre una fecha cualquiera en el calendario y la fecha juliana. Para convertir desde un tiempo cualquier (hora, minuto, segundo del día en cuestión), hay que calcular la fracción del día pues el día juliano cambia a cada 24 horas. Por ejemplo, la fecha juliana que corresponde al día 10/06/1980 a las 18:45 hs *TU* es:

$$FJ(10/06/1980;18:45TU)=FJ(10/06/1980;00:00TU)+\frac{18+45/60}{24}$$

$$FJ(10/06/198018:45TU)=2444400{,}5+0{,}78125=2444401{,}28125 \text{ días}$$

donde el valor de la fecha juliana a las 00:00 hs *TU* del día 10/06/1980 puede ser encontrado en tablas de anuarios astronómicos.

Ejercicios

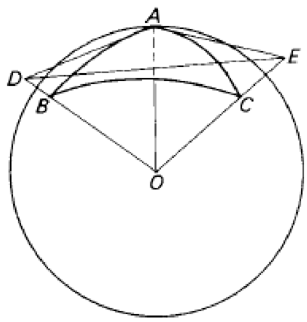
1. La figura del Sistema Horario esta presentada para un observador en el hemisferio norte terrestre. Dibujar la figura correspondiente a un observador en el hemisferio sur con ángulo horario y declinación de un objeto en la esfera celeste.
2. Considerando el Sistema Ecuatorial, encontrar la relación entre el ángulo horario del Punto Vernal y la ascensión-recta del cuerpo celeste.
3. En un triángulo esférico *ABC*:

   i) Formula del coseno: $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$

ii) Formula del seno: $\dfrac{\sin A}{\sin a}=\dfrac{\sin B}{\sin b}=\dfrac{\sin C}{\sin c}$

iii) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$

donde, *A, B* y *C* son los ángulos y *a, b* y *c* son los lados del triángulo.



Considerando ahora los triángulos esféricos de la figura del Sistema Eclíptico (Fig. 1.8), encontrar las expresiones para la latitud celeste y longitud celeste en función de la ascensión-recta y declinación de *X*.

4. Con una elevación de 30°, fue observado un vehículo espacial cuyas coordenadas ecuatoriales eran: ascensión-recta 10° y declinación 15°N desde una localidad a +5° de latitud. Calcular el azimut y la hora sideral de esta observación.
5. Considere un observador ubicado en una longitud 45°O. Si el ángulo horario del Sol medio local coincide con el del Punto Vernal y es igual a 9 h, cuáles son el tiempo universal del observador y el tiempo sideral en Greenwich?
6. El punto extremo norte de Brasil es una localidad llamada Oiapoque con latitud +4° y longitud -52°. En este local, en el tiempo sideral de 60°, fue observado un objeto espacial cuyas coordenadas horizontales eran 80° y 45°. Para determinar el objeto es necesario comparar sus coordenadas ecuatoriales con un listado de objetos conocidos. Encuentre estas coordenadas.
7. Cuantos días siderales demás por año existen que días solares?
8. En que día, aproximadamente, la hora solar coincide con la hora sideral?
9. Si el tiempo medio local es 15:30 hs y el tiempo universal es 11:30 hs, cuál es la longitud del lugar?
10. La longitud de Córdoba es 64,25°O. Utilizamos la hora legal determinada por nuestro huso horario? Cuál es el tiempo sideral local en este instante?