

Introducción a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Nota de clase: Matemática Aplicada II

Gustavo Krimker

Javier García Fronti

July 2025

Una *ecuación diferencial* es una ecuación donde una función desconocida, que en general depende del tiempo, está relacionada con algunas de sus derivadas sucesivas.

$$y'(t) = y^2 \cos(2y + t)$$

y

$$y''(t) - y'(t) = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales. La primera es de orden 1 mientras que la segunda es de orden 2. El *orden* de una ecuación diferencial es el mayor orden de la derivada de y que aparece en la ella.

Las ecuaciones diferenciales constituyen una poderosa herramienta matemática utilizada en el modelado de algún aspecto de la realidad, y cuyo último objetivo es predecir el futuro.

En esta nota presentaremos los aspectos básicos de los métodos de un paso para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Estos constituyen procedimientos elementales para la resolución de ecuaciones diferenciales cuando no existe solución analítica. No se profundizará sobre cuestiones tales como los problemas de estabilidad y consistencia, los cuales pueden consultarse en textos especializados.

En general, las ecuaciones diferenciales de primer orden, pueden escribirse en la forma

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Definición 1 Sea f una función continua y acotada en el rectángulo $R = \{(t, y) : a \leq t \leq b; c \leq y \leq d\}$. Se dice que f satisface **una condición de Lipschitz** con respecto a y si existe una constante positiva β tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \beta |y_1 - y_2|$$

para cualquier $(t, y_1), (t, y_2)$ pertenecientes a R .

Si $f(t, y)$ es una función continua, acotada y que satisface una condición de Lipschitz en un rectángulo R que contiene al punto (t_0, y_0) , entonces existe un intervalo cerrado alrededor de t_0 en que el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
 tiene una solución única.

Para una discusión teórica acerca de este resultado, puede consultarse Kreider, Kuller; Ostberg, *Ecuaciones diferenciales*, Fondo educativo Interamericano .

Si bien puede probarse que ciertos problemas de valores iniciales satisfacen condiciones que aseguran la existencia y unicidad de su solución, en general, no existen expresiones analíticas o fórmulas cerradas que la representen.

Por esta razón se han desarrollado una gran variedad de métodos que permiten obtener aproximaciones numéricas de estos problemas. Esto significa que no encontraremos una fórmula que satisfaga un determinado problema, sino que en su lugar obtendremos una sucesión finita de puntos que satisfacen aproximadamente la solución.

Vamos a considerar algunos métodos clásicos que permiten resolver problemas de primer orden. El hecho de concentrarnos únicamente en ellos responde a que los problemas de órdenes superiores pueden ser expresados mediante un sistema de ecuaciones, todas de orden 1.

1 Método de Euler

Supongamos dado el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Supongamos además que f satisface la condición de Lipschitz y que la función $y(t)$ es de clase C^2 en el intervalo $[t_0; T]$.

Elegiremos un $n \in \mathbb{N}$ y vamos a considerar una partición regular (esto es, puntos equiespaciados) del intervalo $[t_0; T]$:

$$\{t_k = t_0 + hk : k = 0, 1, \dots, n\}$$

siendo $h = \frac{T-t_0}{n}$ el tamaño del paso.

Obsérvese que como $y(t_0) = y_0$ conocemos exactamente que $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

Por otra parte, sabemos que el desarrollo de $y(t)$ en Taylor alrededor de t_0 es

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(c)(t - t_0)^2}{2} \quad (2)$$

Evalutando en t_1 y utilizando los datos conocidos, se tiene que

$$y(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{y''(c_1)h^2}{2}$$

Considerando un paso suficientemente pequeño, h^2 es más pequeño aún. Si lo despreciamos, resulta:

$$y(t_1) \approx y_0 + hf(t_0, y_0) \quad (3)$$

La idea ahora es repetir el mismo proceso. Es decir, dada una aproximación y_k de $y(t_k)$, definimos la aproximación siguiente como

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad (4)$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \cos t \cdot e^t + y(t), \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

en el intervalo $[0; 3]$.

En la Figura 1 pueden observarse los valores que se obtienen al resolver el problema anterior utilizando el método de Euler con $n = 10$. En la misma tabla se comparan dichas aproximaciones con los valores exactos.

x_n	Euler	Exacto
0	0	0
0.3000	0.3000	0.3989
0.6000	0.7769	1.0288
0.9000	1.4611	1.9267
1.2000	2.3581	3.0945
1.5000	3.4264	4.4705
1.8000	4.5495	5.8914
2.1000	5.5020	7.0491
2.4000	5.9158	7.4457
2.7000	5.2520	6.3593
3.0000	2.7919	2.8345

Figure 1: Aproximación de Euler con $n = 10$.

Un estudio exhaustivo acerca de los errores asociados al método de Euler, puede encontrarse en el libro de Atkinson.

2 El método de Taylor

El método de Euler es un caso particular de uno más general: el método de Taylor, que consiste en aproximar la solución mediante desarrollos adecuados de Taylor. Puede probarse que si $\{(t_k; y_k)\}_{k=0}^s$ es la sucesión de aproximaciones generadas por el método de Taylor de orden n , el error local de truncamiento es un $O(h^n)$. Este error mide la exactitud del método en un determinado paso suponiendo que el resultado del paso anterior fuese exacto.

Recordemos que si $y(t)$ puede desarrollarse en Taylor de orden n alrededor de un punto t_k , dicho desarrollo viene dado por

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_n(t_k; y(t_k)) + O(h^{n+1}) \quad (6)$$

donde

$$T_n(t_k; y(t_k)) = \sum_{j=1}^n \frac{d^{(j)}}{dt} f(t_k; y(t_k)) \frac{h^{j-1}}{j!}$$

De la ecuación anterior se obtiene la aproximación

$$y(t_k + h) \approx y(t_k) + hT_n(t_k; y(t_k)) \quad (7)$$

En particular si $n = 1$,

$$y(t_k + h) \approx y(t_k) + hT_1(t_k; y(t_k))$$

de donde resulta

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k; y_k),$$

que es la recurrencia del método de Euler.

Si consideramos el caso $n = 2$, se obtiene $y(t_k + h) \approx y(t_k) + hf(t_k; y(t_k)) + \frac{1}{2}h^2 [f_t(t_k; y(t_k)) + f_y(t_k; y(t_k))f(t_k; y(t_k))]$ Por lo tanto, $y_{k+1} = y_k + hf(t_k; y_k) + \frac{1}{2}h^2 [f_t(t_k; y_k) + f_y(t_k; y_k)f(t_k; y_k)]$ Esta última fórmula se conoce con el nombre de Método de Taylor de orden 2.

3 Los métodos de Runge-Kutta

El método de Taylor tiene como ventaja que permite conocer la precisión con la que se aproxima la solución de una ecuación diferencial. En general puede probarse que el método de Taylor de orden n proporciona una precisión en la aproximación también de orden n . Sin embargo, en la práctica resultan de poca aplicación pues requieren calcular y evaluar las derivadas sucesivas de $f(t, y(t))$, lo cual implica un gran costo computacional. Los métodos desarrollados por Runge y Kutta tienen como objetivo conseguir aproximaciones tan precisas como las de Taylor, pero evitan el cálculo de las derivadas parciales.

Utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2, se tiene que

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_2(t_k; y(t_k)) + O(h^3) \quad (8)$$

La idea es determinar una función $R_2(t_k; y(t_k))$ tal que

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hR_2(t_k; y(t_k)) + O(h^3) \quad (9)$$

y que no involucre derivadas de f .

De las igualdades anteriores resulta que

$$h(T_2(t_k; y(t_k)) - R_2(t_k; y(t_k))) = O(h^3) \quad (10)$$

de donde,

$$T_2(t_k; y(t_k)) - R_2(t_k; y(t_k)) = O(h^2) \quad (11)$$

Para la determinación de R_2 se propone

$$R_2(t; y(t), h) = Af(t; y(t)) + Bf(t + Ch; y(t)) + Chf(t; y(t)) \quad (12)$$

Como $f(t + Ch; y(t) + Chf(t; y(t))) = f(t; y(t)) + f_t(t; y(t))Ch + f_y(t; y(t))f(t; y(t))Ch + O(h^2)$ entonces se tiene que $R_2(t; y(t), h) = (A + B)f(t; y(t)) + BCh(f_t(t; y(t)) + f_y(t; y(t))f(t; y(t))) + O(h^2)$ Por otra parte, $T_2(t_k; y(t_k)) = f(t; y(t)) + \frac{1}{2}h(f_t(t; y(t)) + f_y(t; y(t))f(t; y(t)))$ Luego, utilizando estas dos últimas ecuaciones, resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ BC = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que tiene como solución $B = 12C$ y $A = 1 - 12C$.

De esta forma se obtienen distintos métodos de orden 2 según el valor que se le asigne a C .

En particular, si $C = 1$ se obtienen $A = B = 12$, y reemplazando en la ecuación (12), $R_2(t; y(t), h) = \frac{1}{2}f(t; y(t)) + \frac{1}{2}f(t + h; y(t)) + hf(t; y(t))$ lo cual implica la fórmula de iteración $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \{(f(t_k, y_k) + f[t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)])\}$ que es la fórmula de iteración de Heun.

Mediante un razonamiento similar se obtienen las fórmulas para los métodos de orden 4. En la práctica son los más utilizados: $y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6}$ donde $f_1 = f(t_k; y_k)$
 $f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{h}{2}f_1)$
 $f_3 = f(t_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{h}{2}f_2)$
 $f_4 = f(t_k + h; y_k + hf_3)$