Comparing formulae

Comparing path decomposition of T_{11} to analytical expressions ("harmonic decomposition") from Garcia-Suarez 2022 JMPS (can do up N=7, then it becomes too slow)

Number of layers

In[1]:=
```
NN = 5;
```

Harmonic decomposition

In[2]:=
```
(*maximum number of tangents in any expression*)
maxNumberTerms = Floor[NN, 2];
(*number of factors in each group of expressions*)
numberTerms = 2 # & /@ Range[Floor[NN, 2]/2];
(*number of addends belonging to each group*)
numberAddends = Binomial[NN, #] & /@ numberTerms;
indexVectors = If[NN > #[[1]],
      Join[ConstantArray[1, #[[1]]], ConstantArray[0, NN - #[[1]]]],
      ConstantArray[1, #[[1]]]
    ] & /@ Transpose@{numberTerms, numberAddends};
indexSets = Flatten[Permutations[#] & /@ indexVectors, 1];
anTF = 1;
Do[
  layers = Flatten@Position[indexSets[[term]], 1];
  Zs = k_# & /@ layers;
  sortedZs = Zs[[# ;;  ;; 2]] & /@ {1, 2};
  anTF = anTF + (-1)^Length[layers]/2 * (Times @@ sortedZs[[1]])/(Times @@ sortedZs[[2]]) Times @@ (Tan[k_# l_#] & /@ layers);
  , {term, 1, Length@indexSets}];
anTF = (Times @@ (Cos[k_# l_#] & /@ Range[NN])) * anTF;
oldMode = Expand[anTF];
Framed[oldMode]
```

Out[11]=

$$\begin{aligned}
&\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5] - \\
&\frac{\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\,k_1}{k_2} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_3\,l_3]\,k_1}{k_3} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\,k_2}{k_3} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_4\,l_4]\,k_1}{k_4} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_4\,l_4]\,k_2}{k_4} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\,k_3}{k_4} + \\
&\frac{\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\,k_1\,k_3}{k_2\,k_4} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_5\,l_5]\,k_1}{k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_5\,l_5]\,k_2}{k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_5\,l_5]\,k_3}{k_5} + \\
&\frac{\cos[k_4\,l_4]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_3}{k_2\,k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_4}{k_5} + \\
&\frac{\cos[k_3\,l_3]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_4}{k_2\,k_5} + \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_4}{k_3\,k_5} + \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_2\,k_4}{k_3\,k_5}
\end{aligned}$$

Path decomposition

In[12]:=
```
ks = Table[Subscript[k, i], {i, 1, NN}];
ls = Table[Subscript[l, i], {i, 1, NN}];
(*------------------------------------------------------------*)
(*1. Enumerate all directed paths:σ=±1 choice at each interface*)
paths = Tuples[{-1, 1}, NN];
paths = Select[paths, First[#] =!= -1 &];(*2^(NN-1) rows*)
(*2. Amplitude coefficient A_j for each path-----------------*)
amplitudes = Table[
    Product[1 / 2 (1 + paths[[p, i - 1]] * paths[[p, i]] * ks[[i - 1]] / ks[[i]]), (*interface factor*)
     {i, 2, NN}], {p, Length[paths]}];
cosineTerms = Cos[Dot[#, Table[k_ii l_ii, {ii, NN}]] & /@ paths];
newMode = TrigExpand[Total[amplitudes * cosineTerms]];
Framed[newMode]
```

Out[19]=

$$\begin{aligned}
&\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5] - \\
&\frac{\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\,k_1}{k_2} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_3\,l_3]\,k_1}{k_3} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_4\,l_4]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\,k_2}{k_3} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_4\,l_4]\,k_1}{k_4} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_4\,l_4]\,k_2}{k_4} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_5\,l_5]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\,k_3}{k_4} + \\
&\frac{\cos[k_5\,l_5]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\,k_1\,k_3}{k_2\,k_4} - \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_5\,l_5]\,k_1}{k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_3\,l_3]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_5\,l_5]\,k_2}{k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_4\,l_4]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_5\,l_5]\,k_3}{k_5} + \\
&\frac{\cos[k_4\,l_4]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_3}{k_2\,k_5} - \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\cos[k_2\,l_2]\cos[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_4}{k_5} + \\
&\frac{\cos[k_3\,l_3]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_4}{k_2\,k_5} + \\
&\frac{\cos[k_2\,l_2]\sin[k_1\,l_1]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_1\,k_4}{k_3\,k_5} + \\
&\frac{\cos[k_1\,l_1]\sin[k_2\,l_2]\sin[k_3\,l_3]\sin[k_4\,l_4]\sin[k_5\,l_5]\,k_2\,k_4}{k_3\,k_5}
\end{aligned}$$

Compare

In[20]:=
```
Simplify[newMode - oldMode]
```

Out[20]=
```
0
```