TALLER 1
INFERENCIA ESTADÍSTICA

Profesor: Giovany Babativa

Ejercicios de entrenamiento.

Distribuciones Muestrales

1. Ejercicios 8.26, 8.33, 8.40, 8.42, 8.43, 8.44, 8.49, 8.52, 8.54, 8.59, 8.70, 9.22 del libro de WALPOLE MYERS MYERS YE (Octava edición)

2. **Calcule en R**. Suponga que la variable aleatoria Z sigue una distribución normal estándar, Halle:

   a. $P(Z < -1.2)$
   b. $P(Z > 1.2)$
   c. $P(-1.7 < Z < 1.2)$
   d. $P(-1.7 < Z < -1.2)$

3. **Calcule en R**. Suponga que la variable aleatoria Z sigue una distribución normal estándar, Halle:

   a. La probabilidad de que Z sea menor que ______ es igual a 0.7.
   b. La probabilidad de que Z sea menor que ______ es igual a 0.25.
   c. La probabilidad de que Z sea menor que ______ es igual a 0.6.
   d. La probabilidad de que Z sea menor que ______ es igual a 0.2.
   e. $P(-1.96 < Z < k) = 0.95$

4. **Calcule en R**. Suponga que $X \sim F_n^m$. Encontrar el valor de x para el cual:

   a. $P(X \leq x) = 0.99$ con $m = 7$, $n = 3$.
   b. $P(X \leq x) = 0.005$ con $m = 20$, $n = 30$.
   c. $P(X \leq x) = 0.95$ con $m = 2$, $n = 9$.

5. Use el paquete R en su entorno de R-Studio para generar una variable con $N = 10.000$ valores de una población con distribución uniforme, $X \sim U(0,1)$, genere los histogramas de $\overline{X}$ para 1.000 réplicas de muestras con tamaños $n = 10, 20, 30, 50$ y 100. ¿Que puede concluir?.

6. La resistencia a la tensión para cierto tipo de alambre se distribuye normal con media desconocida μ y varianza desconocida σ^2. Se seleccionaron al azar seis segmentos de alambre de un rollo grande y se midió Y_i : "la resistencia a la tensión en el segmento i", $i = 1, \ldots, 6$. La media de la población μ y la varianza σ^2 se pueden estimara por $\overline{Y}$ y S^2 respectivamente. Encontrar la probabilidad de que $\overline{Y}$ este a lo más a $\frac{2S}{\sqrt{n}}$ de la verdadera media poblacional.

7. Se toma una muestra de tamaño tres de una población con distribución de Poisson de parámetro θ, cuyos resultados son $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 5$. Determine la estimación máximo verosímil de θ.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a *iid* con $X_i \sim Poisson(\theta)$ con una *f.d.p* dada por:

$$f_X(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x), \theta > 0$$

   Obtenga el estimador del parámetro θ vía

   a. Momentos.

   b. Máximo Verosimilitud.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a *iid* con *f.d.p* dada por

$$f_X(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$$

   Obtenga el estimador del parámetro θ vía

   a. Momentos.

   b. Máximo Verosimilitud.

10. El modelo gaussiano representa una gama amplia de situaciones y es el modelo capital en estadística. Es necesario diferenciar las dos formas como se deben estimar las dos constantes que participan en el modelo. Señalando que la *f.d.p* está dada por

$$f_X(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

   Los componentes del parámetro $\theta = (\mu, \sigma^2)$ son tales que $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

   a. Suponiendo que μ es conocido o fijo halle el estimador de σ^2 por los métodos de Momentos y Máximo Verosimilitud.

   b. Halle el estimador de θ vía máximo verosimilitud.

11. Si $X_1, \ldots, X_n$ son una m.a. *iid* donde la v.a. X representa el número de intentos antes de obtener el primer éxito. Encuentre el estimador del parámetro involucrado en la distribución de X vía Momentos y Máximo verosimilitud.

12. Sea X una observación de una *f.d.p* Bernoulli con $f_X(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$ donde $0 < \theta < 1$. Sea $T_1 = X$ y $T_2 = \frac{1}{2}$

   a. ¿Ambos estimadores son insesgados?

   b. Compare el ECM de ambos estimadores.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de alguna *f.d.p* con media μ y varianza σ^2.

   a. Muestre que $T = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ es un estimador insesgado de μ para algún conjunto de constantes conocidas $a_1, \ldots, a_n$ que satisfagan que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

   b. Si $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, muestre que $Var(T)$ es mínima para $a_i = 1/n, i = 1, \ldots, n$. (ayuda: pruebe que $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - 1/n)^2 + 1/n$ cuando $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.)

14. Sea X_1, X_2 una m.a de tamaño 2 de una distribución normal con media μ y varianza 1. Considere los siguientes tres estimadores de θ:

$$T_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$$

$$T_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$

$$T_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

   a. Muestre que T_i es insesgado para $i = 1, 2, 3$.
   b. ¿Cuál de los tres estimadores es el mejor?.

15. Si se define $S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.
   a. Determine $E(S^{*2})$.
   b. A partir de lo encontrado, ¿que puede concluir? (¿El estimador es sesgado, si lo es, para qué parámetro es sesgado, de cuánto es el sesgo?)

16. Si X es una v.a con distribución binomial, ¿será que los siguientes estimadores son sesgados para el parámetro p?.
   a. $\widehat{p} = \frac{X}{n}$
   b. $\widehat{p}^* = \frac{X+\sqrt{n/2}}{n+\sqrt{n}}$

17. Sea X_1, X_2, X_3, X_4 una muestra aleatoria de una distribución exponencial con media θ, considere el estimador

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{6} + 2X_4$$

   ¿Cuánto es el sesgo de T_1?

18. Si T_1 y T_2 son estimadores insesgados del mismo parámetro θ y $V(T_1) = \frac{\theta^2}{n}$, $V(T_2) = \frac{2\theta^2}{n}$.
   a. ¿Qué condición se debe imponer sobre las constantes a y b para que

$$T_3 = aT_1 + bT_2,$$

   también sea un estimador insesgado de θ?
   b. De los estimadores T_1, T_2 y T_3, ¿cuál es el mejor?

19. Calcule la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones tomadas de una población normal con varianza $\sigma^2 = 6$, tenga una varianza muestral S^2:
   a. Superior a 10.745.
   b. Menor que 3.462.
   c. Entre 3.462 y 10.745

20. Suponga que los tiempos requeridos por Transmilenio para alcanzar uno de sus destinos sigue una distribución normal con una desviación estándar de $\sigma = 1$ minuto. Si se elige al azar una muestra de 17 viajes, encuentre la probabilidad de que la varianza muestral de los tiempos sea mayor que 2.

21. Se sabe que los pesos de ciertas especies de peces se distribuyen normalmente con una desviación estándar de 2 gramos; si se toma una muestra de 12 peces de las especies referidas, encuentre la probabilidad de que la varianza de la muestra sea menor que 8

22. Suponga que el número de horas que los adolescentes invierten a la semana en ver televisión tienen una distribución normal con una varianza de 3. Se escoge una muestra de 17 adolescentes y se registra el número de horas que ven televisión a la semana. Calcule la probabilidad de que la desviación estándar muestral de los tiempos obtenidos sea mayor que 16.