

ALLEES DE TOURBILLONS

Dans le sillage d'un obstacle cylindrique, on observe fréquemment une série de tourbillons alternés, émis à une fréquence régulière, c'est l'allée de tourbillons de Bénard-Von Karman. Dans la salle de travaux pratiques, un tunnel hydrodynamique permet d'étudier ces phénomènes, faute de pouvoir y accéder nous effectuons une simulation de cet écoulement grâce à un logiciel de calculs d'éléments finis : *FreeFem++*.

Nous étudions ici l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle de section trapézoïdale. Le programme résout l'équation de Stokes (1) sur le domaine de calcul pour initialiser le champ des vitesses, puis à chaque pas de temps, il résout l'équation de Navier-Stokes stationnaire (2) – il calcule les composantes de forces longitudinales et transverses sur l'obstacle en intégrant les contraintes sur le contour de l'obstacle.

$$\mu \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} p - \rho \vec{f} \quad (1)$$

$$\rho(\vec{v} * \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{f} + \mu \Delta \vec{v} \quad (2)$$

Dans le programme, la géométrie de l'écoulement, le maillage du domaine de calcul et la résolution temporelle du calcul sont définis. Les seules options à ajuster sont :

- Maillage fixe ou adaptif
- Valeur du nombre de Reynolds
- Le nombre d'itérations de calcul

Les calculs sont effectués sur des variables adimensionnées : vitesses normalisées par la vitesse moyenne U , longueurs normalisées par largeur L de l'obstacle, temps normalisé par $\tau = \frac{L}{U}$ temps nécessaire pour parcourir la taille de l'obstacle à vitesse moyenne. Le pas de temps de défaut est de 0,1. Les forces sont normalisées par $\rho U^2 L$, il s'agit donc de coefficients de trainée et de portance à un facteur $\frac{1}{2}$ près.

Nous allons donc exécuter la simulation pour une série de valeurs de nombre de Reynolds Re . Pour diminuer les temps de calculs, nous utilisons dans un premier temps un maillage fixe. Nous allons ainsi essayer de déterminer le nombre de Reynolds critique au-delà duquel il y a émission régulière de tourbillons, ainsi que mesurer la fréquence (adimensionnelle) de ces tourbillons en fonction du nombre de Reynolds. Nous allons aussi mesurer les forces de trainée et de portance sur l'obstacle en fonction du nombre de Reynolds.

VISUALISATION DES RESULTATS

On visualise les champs de pression, vitesse et vorticité grâce au logiciel *ParaView*.

On a effectué les simulations pour les valeurs de nombre de Reynolds suivantes :

10, 20, 30, 33, 34, 35, 38, 40, 45, 50, 100, 125, 150, 250, 500.

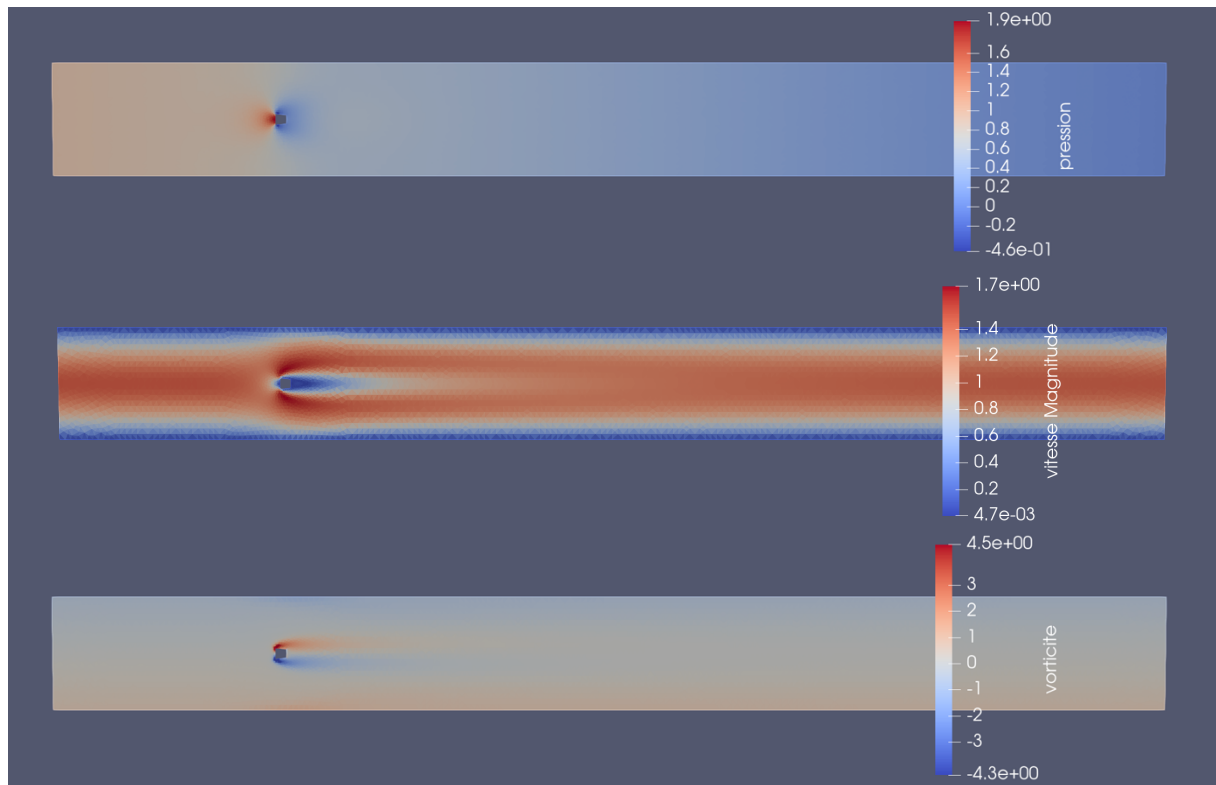


Fig 1.a. (haut) Champ de pression pour $Re = 20$, **(milieu)** Champ des vitesses pour $Re = 20$, **(bas)** Champ de vorticité pour $Re = 20$.

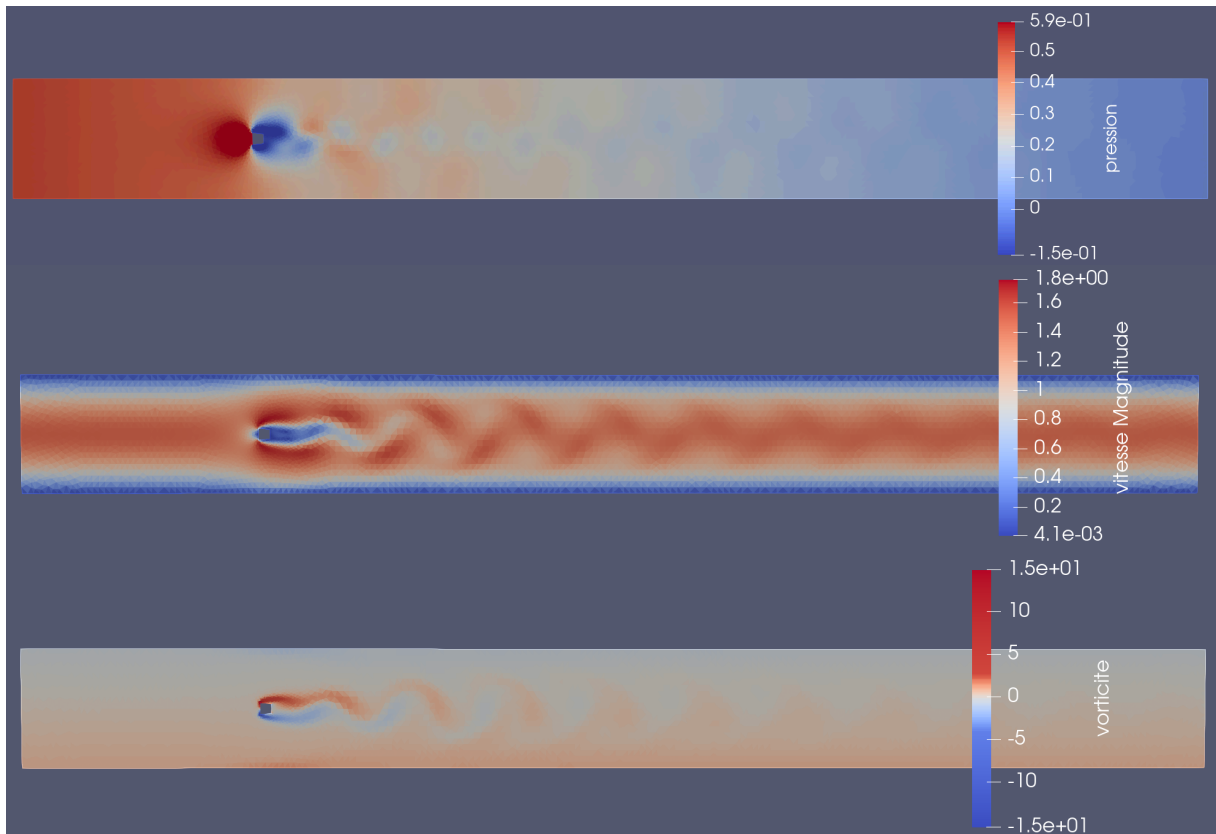


Fig 1.b. (haut) Champ de pression pour $Re = 40$, **(milieu)** Champ des vitesses pour $Re = 40$, **(bas)** Champ de vorticité pour $Re = 40$.

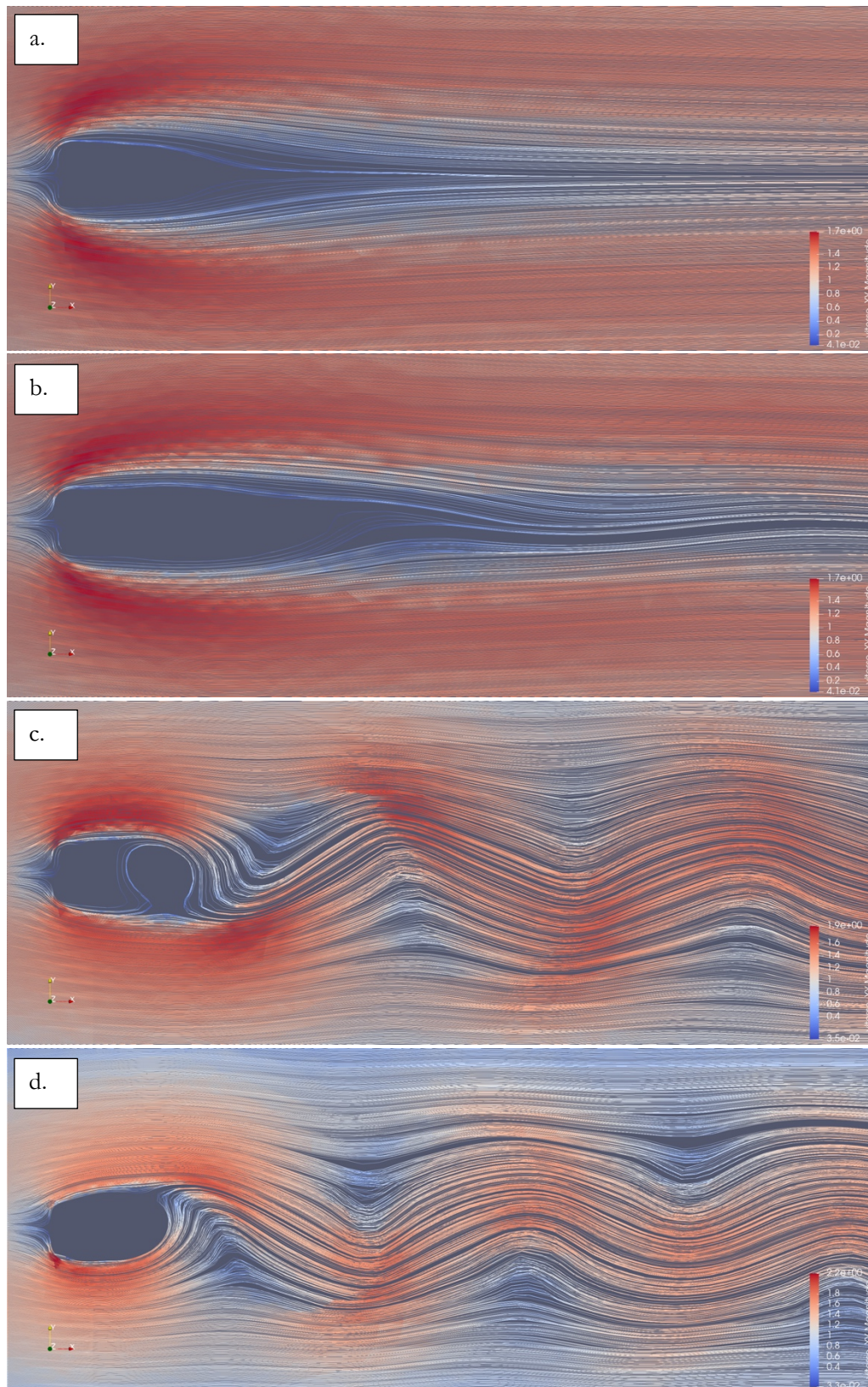


Fig 2.a. Lignes de courant pour $Re = 20$, **b.** Lignes de courant pour $Re = 40$, **c.** Lignes de courant pour $Re = 100$, **d.** Lignes de courant pour $Re = 500$. La plage des couleurs déterminent la magnitude des vitesses, rouge : vitesse élevée, bleu : vitesse faible.

MESURES ET INTERPRETATIONS

On mesure ici un coefficient de trainée adimensionnel en fonction du temps pour les différents nombres de Reynolds. On obtient la figure 3.a. Puis en calculant la valeur moyenne du coefficient de trainée après régime transitoire, nous obtenons la figure 3.b.

On observe sur la figure 3.a un régime transitoire exponentiel du coefficient de trainée de même durée environ pour chaque nombre de Reynolds. Une fois le régime transitoire terminé, nous remarquons qu'au-dessus d'un nombre de Reynolds égal à 35, la valeur du coefficient de trainée commence à osciller. La figure 3.b nous montre que la valeur du coefficient de trainée décroît, lorsque le nombre de Reynolds augmente, de manière exponentielle jusqu'à une valeur de 50, au-delà duquel elle croît. Ce point anguleux serait peut-être dû à un décollement de la couche limite autour de l'obstacle.

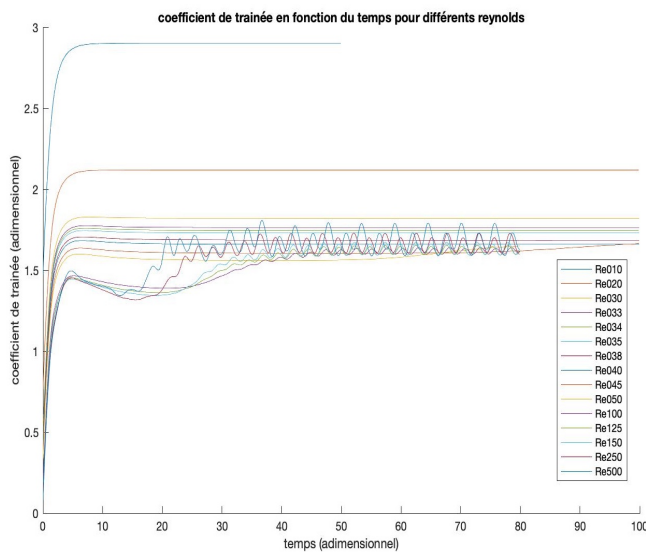


Fig 3. a : Coefficient de trainée en fonction du temps pour différent Reynolds

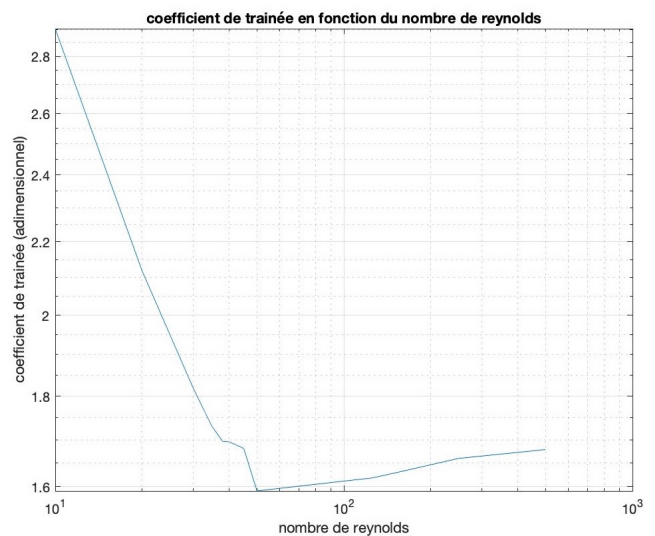


Fig 3. b : Coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds (tracé loglog)

MESURE DU COEFFICIENT DE PORTANCE

On mesure ici un coefficient de portance adimensionnel en fonction du temps pour les différents nombres de Reynolds. On obtient la figure 5.a. La figure 5.b. est un agrandissement de la figure 5.a. pour les nombres de Reynolds inférieurs à 40. Puis, en calculant l'amplitude de fluctuation du coefficient de portance après régime transitoire en fonction du nombre de Reynolds, on obtient la figure 5.c.

Comme pour le coefficient de trainée, on observe un régime transitoire, toutefois nettement plus faible en amplitude. Celui-ci est facilement observable sur la figure 5.b. Nous remarquons également que le coefficient de portance oscille de manière sinusoïdale autour d'une valeur moyenne quasi nulle. Pour un nombre de Reynolds inférieur ou égal à 34 l'oscillation du coefficient de portance est atténuée dans le temps. Le coefficient de portance reste quasi nul jusqu'à un nombre de Reynolds de 35, puis l'amplitude des oscillations croît pour Re plus élevée (fig 5.c). L'apparition des tourbillons engendrent cette augmentation du coefficient de portance.

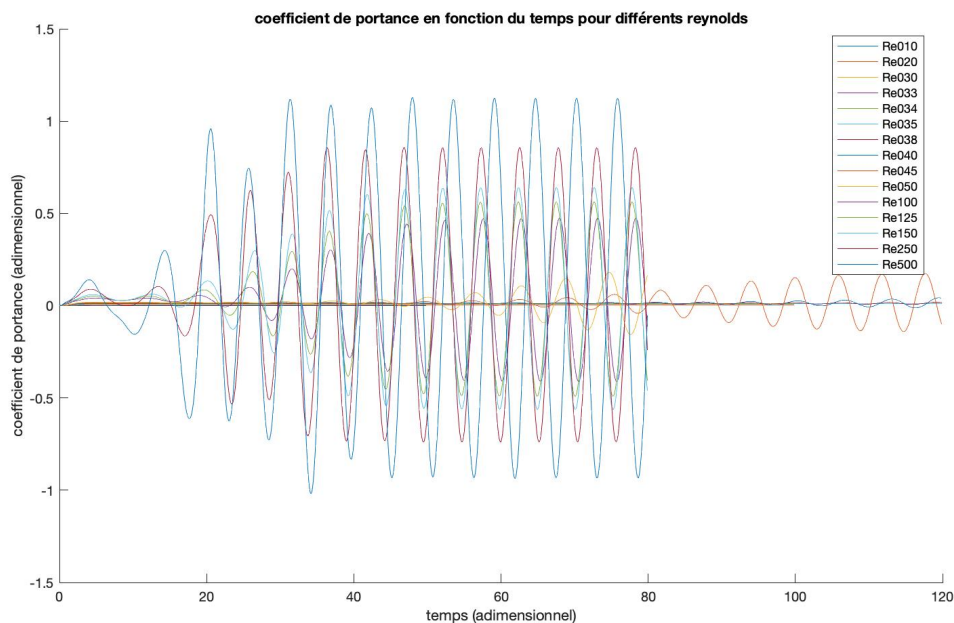


Fig 5. a : Coefficient de portance en fonction du temps pour différent Reynolds

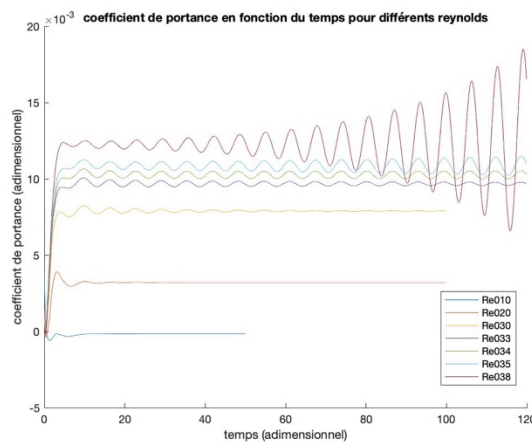


Fig 5. b : Coefficient de portance en fonction du temps pour bas Reynolds (<40)

MESURE DU TAUX DE CROISSANCE D'INSTABILITE

Pour mesurer le taux de croissance d'instabilité σ , on modélise la partie initiale du coefficient de portance par une fonction exponentielle modulée par une fonction sinusoïdale (3)

$$C_p(t) = A + B * \exp(-\sigma t) * \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Nous pouvons nous affranchir du sinus en ne regardant que l'enveloppe du coefficient de portance (fig. 6)

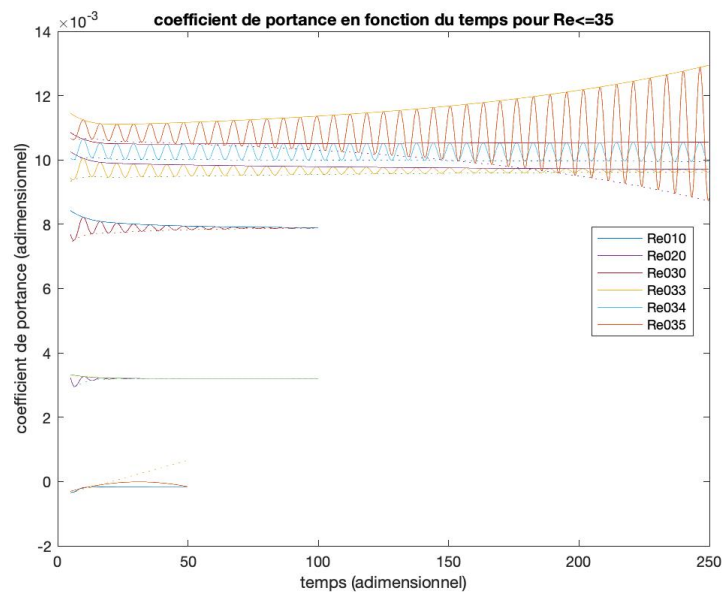


Fig 6 : Enveloppe du coefficient de portance en fonction du temps pour Re inférieur ou égal à 35

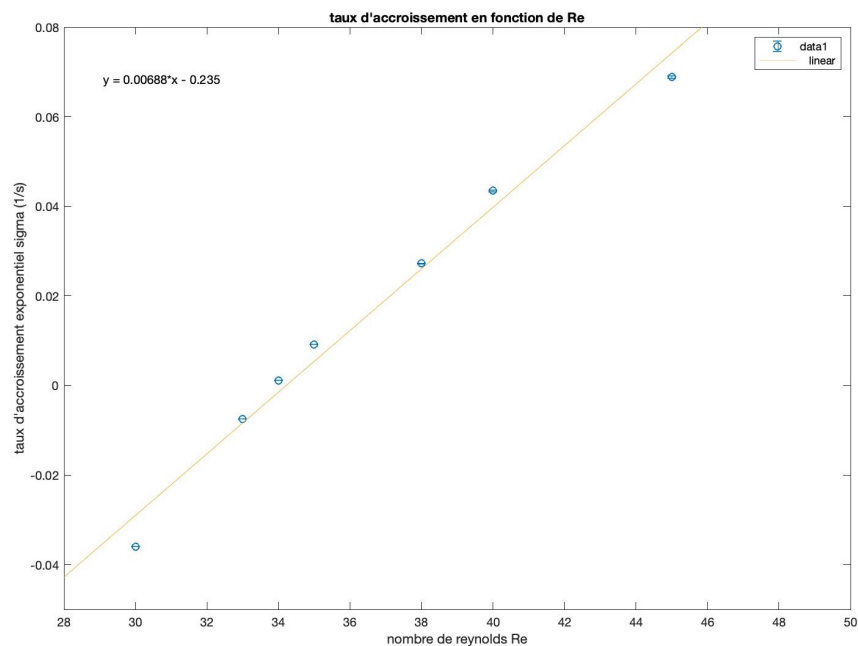


Fig 7 : Taux d'accroissement d'instabilité en fonction du nombre de Reynolds

Nous nous intéressons qu'à des nombres de Reynolds autour de la valeur de nombre de Reynolds critique. Afin de déterminer σ nous effectuons un « curve fitting » sur l'enveloppe du coefficient de portance. Nous traçons ensuite les différentes valeurs de σ en fonction du nombre de Reynolds (fig. 7).

Nous remarquons que le taux d'accroissement d'instabilité dépend linéairement du nombre de Reynolds autour du seuil. En dessous du nombre de Reynolds critique taux d'accroissement est négatif car les oscillations du signal de portance sont amorties (fig. 5.b.). Le seuil est donc caractérisé par un changement de signe de σ . Une régression linéaire du taux d'accroissement nous donne la loi expérimentale suivante (4) :

$$\sigma(Re) = 0.00688 * Re + 0.235 \quad (4)$$

$$\therefore Re_c = 34,2$$

On obtient numériquement un nombre de Reynolds critique (seuil) de 34,2 ce qui est parfaitement en accord avec nos résultats expérimentaux. En effet pour $Re=34$, l'enveloppe décroît, alors que pour $Re=35$, l'enveloppe croît.

AMPLITUDE DE FLUCTUATION DU COEFFICIENT DE PORTANCE

Si l'on trace l'amplitude de fluctuation du coefficient de portance C_p en fonction de l'écart au seuil, on obtient la figure 8.a.

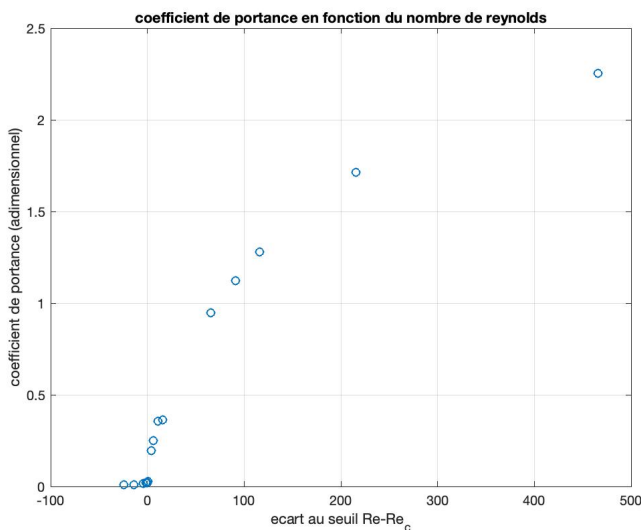


Fig 8.a : Coefficient de portance en fonction de l'écart au seuil $Re - Re_c$

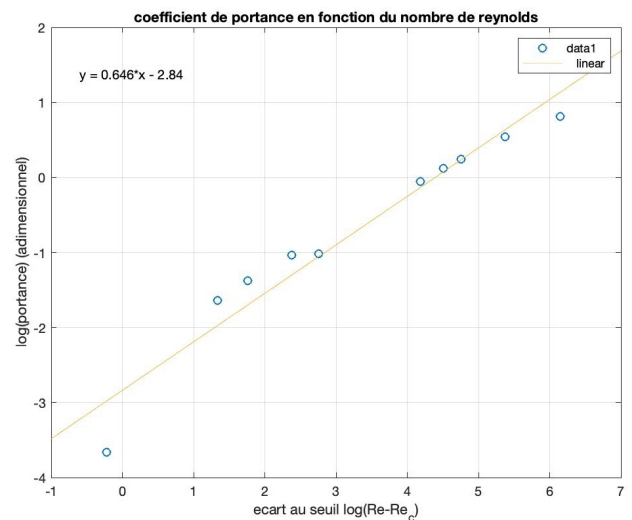


Fig 8.b : tracé loglog du coefficient de portance en fonction de l'écart au seuil $Re - Re_c$

On remarque que le coefficient de portance reste quasi nul en dessous de 0 ($Re < Re_c$), puis croît pour $Re > Re_c$.

Si l'on trace $\ln(C_p)$ en fonction de $\ln(Re - Re_c)$ pour les valeurs de C_p non nulles (fig 8.b) on remarque une corrélation linéaire.

$$\ln(C_p) = a * \ln(Re - Re_c) + b$$

$$C_p = \tilde{b} * (Re - Re_c)^a$$

On obtient donc une loi de puissance entre le coefficient de portance et l'écart au seuil. Avec comme coefficients $a = 0,646$ et $\tilde{b} = 0,0584$. Ceci n'est que valide pour $Re > Re_c$.

MESURE DE LA FREQUENCE D'EMISSION DES TOURBILLONS

Pour déterminer la fréquence d'émission des tourbillons, nous calculons la transformée de Fourier (TF) du coefficient de portance après établissement d'un régime permanent (fig. 9.a). Nous pouvons donc ensuite tracer la fréquence (adimensionnelle) d'émission des tourbillons en fonction du nombre de Reynolds (fig 9.b)

On remarque d'en dessous d'un nombre de Reynolds critique le régime est aperiodique. En régime périodique, on constate que la fréquence d'émission f_e des tourbillons est quasi constante. En effectuant la moyenne on obtient $f_e = 0.1787$ (fréquence adimensionnelle).

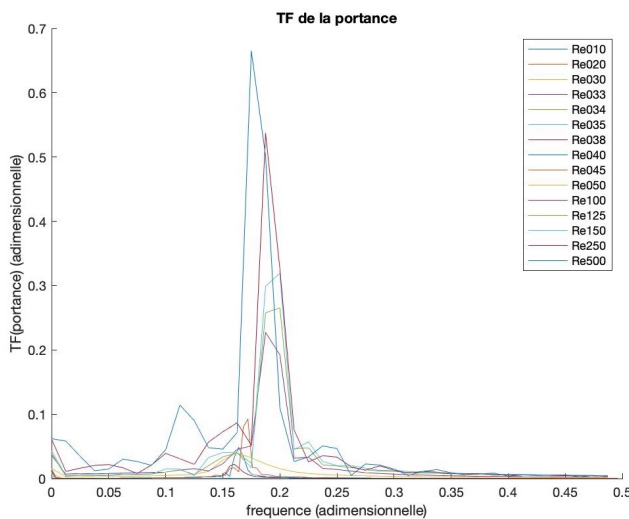


Fig 9. a : Transformée de Fourier du coefficient de portance en régime permanent

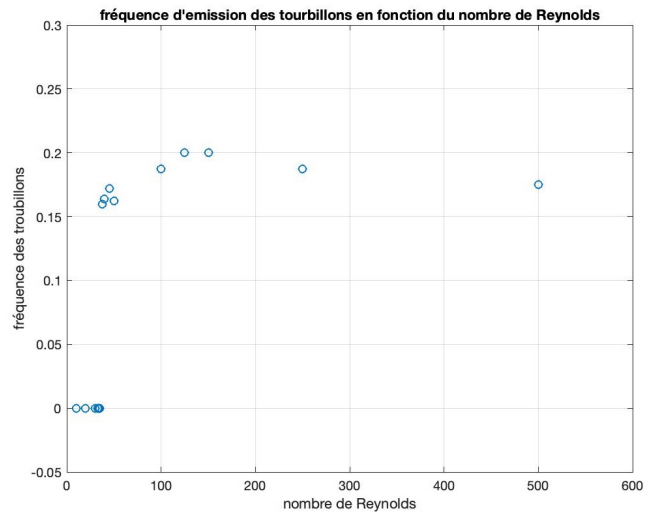


Fig 9. b : Fréquence d'émission des tourbillons en fonction du nombre de Reynolds

Lorsqu'un tourbillon se détache, un écoulement dissymétrique s'écoule autour de l'obstacle, ceci modifie la distribution des pressions. C'est cette séparation alternée des tourbillons qui crée une portance périodique. Si la fréquence de séparation des tourbillons est proche de la fréquence de résonnance propre de l'obstacle, il y a résonnance.

La formule expérimentale (6.1) pour déterminer la fréquence de détachement des tourbillons est :

$$f_e = \frac{U}{L} * g\left(\frac{UL}{\nu}\right) \quad (6.1)$$

Ici g est une fonction.

Puisque la fréquence d'émission des tourbillons est constante, on peut récrire l'équation (6.1) comme :

$$f_e = A * \frac{U}{L} \quad (6.2)$$

Où $A = g\left(\frac{UL}{\nu}\right)$, une constante

La fréquence d'émission des tourbillons dépend, à une constante près, du rapport entre la vitesse moyenne d'écoulement du fluide et de la taille caractéristique de l'obstacle. Ceci a pour conséquence que les tourbillons sont espacés de manière égale dans l'espace.

CONCLUSION

Cette simulation nous a permis de rapidement trouver le nombre de Reynolds critique au-delà duquel il y a émission régulière de tourbillons lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un obstacle dans un milieu confiné. On a pu déterminer cette fréquence d'émission des tourbillons et mesurer les forces de trainée et de portance sur l'obstacle. Le seuil d'émission des tourbillons dépend de la géométrie de l'obstacle ainsi que du rapport entre la taille de l'obstacle et la taille de l'allée de confinement.

Pour pousser cette étude, il aurait fallu comparer les valeurs de la simulation aux valeurs trouvées expérimentalement.