Espacios Tangentes

El concepto abstracto de curva en $\mathbb{R}^2$ y variedad en $\mathbb{R}^n$

Joaquín González Cervantes

joaquin@yandex.com

15 de diciembre de 2016

¿De qué trata?

- Definir el concepto de variedad k-dimensional en $\mathbb{R}^n$ y su espacio tangente asociado a un punto.
- Determinar la dimensión de T_pN.
- Interpretar una curva en el plano como un caso especial de variedad utilizando el Teorema de la Función Implícita.
- Analizar el espacio tangente de una curva como un caso particular del espacio tangente asociado a una variedad.

Surge el vector

Hamilton (1843)

Grassmann (1844)

Definición

Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una mapeo

$$c : I \to \mathbb{R}^n$$

para algún intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$.

Caracol de Pascal

El caracol de Pascal es la curva parametrizada

$$c(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

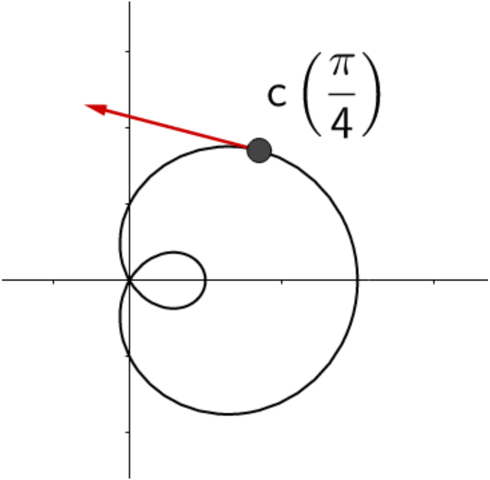
El vector tangente es

$$c'(t) = (-\sin t - 4\cos t \sin t, \cos t + 4\cos^2 t - 2)$$

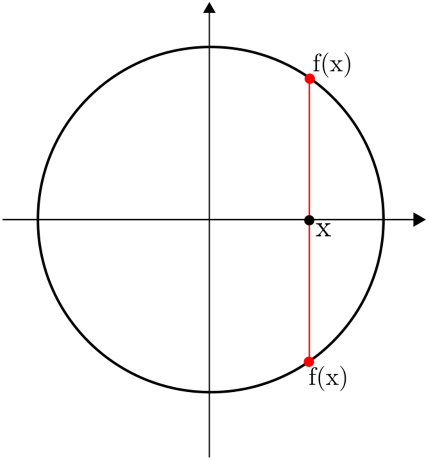
En particular,

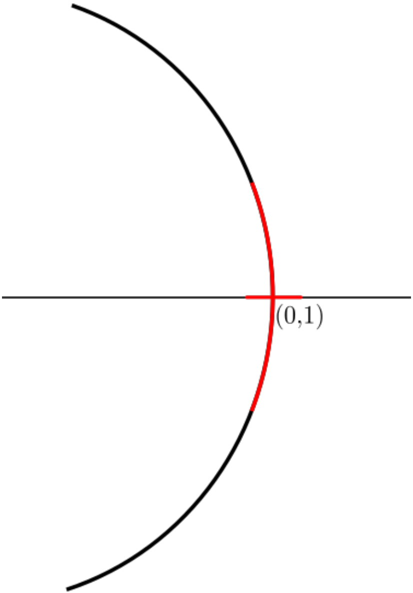
$$c'(\pi/4) = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Caracol de Pascal



$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$




(0,1)

Teorema (Teorema de la función implícita)

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y sea* $F(\boldsymbol{x}, y) \in C^1$ *en una vecindad de* $(\boldsymbol{x_0}, y_0)$ *tal que*

1. $F((\boldsymbol{x_0}, y_0)) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}((\boldsymbol{x_0}, y_0)) \neq 0$

entonces existe una vecindad de $(\boldsymbol{x_0}, y_0)$ *en donde existe una función ímplicita* $y = f(\boldsymbol{x})$ *tal que*

I. $f(\boldsymbol{x_0}) = y_0$

II. $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$

III. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}$

Definición (1-variedad)

Una variedad 1-dimensional (de clase C^α) $M \subset \mathbb{R}^n$ está definida por la condición de que M está dada localmente como el conjunto cero $F^{-1}(0)$ de un mapeo continuo (α-veces) diferenciable

$$U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

con rango máximo, es decir, $rank(J_x F) = 1$ para cada $x \in M \cap U$, donde $M \cap U = F^{-1}(0)$ se cumple para una vecindad de U, para cada punto en M.

Localmente, también podemos describir a M como la imágen de una inmersión de clase C^α

$$V \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} M \subset \mathbb{R}^2$$

donde $rank(Df) = k$. Dicha f es la parametrización local, y f^{-1} es llamada una *carta* de M.

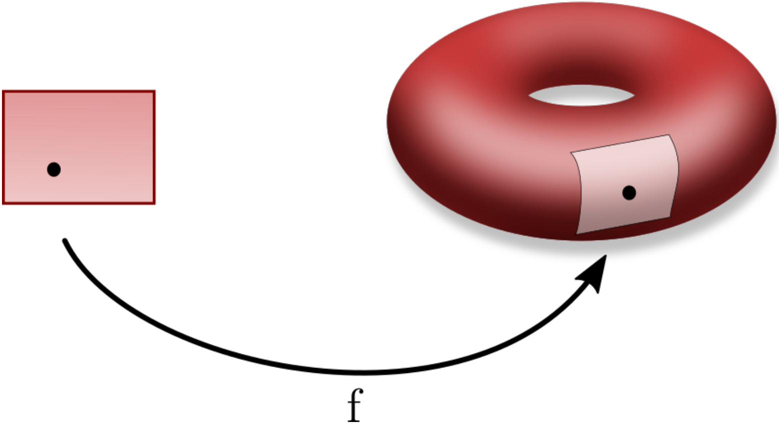
Definición (Espacio tangente a $\mathbb{R}^n$)

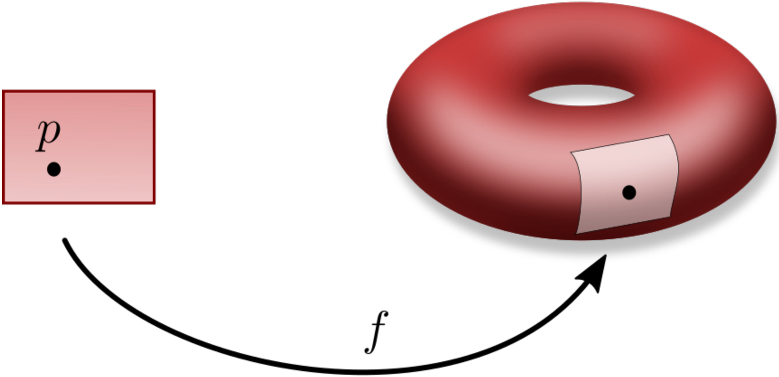
Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el espacio

$$T_x\mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

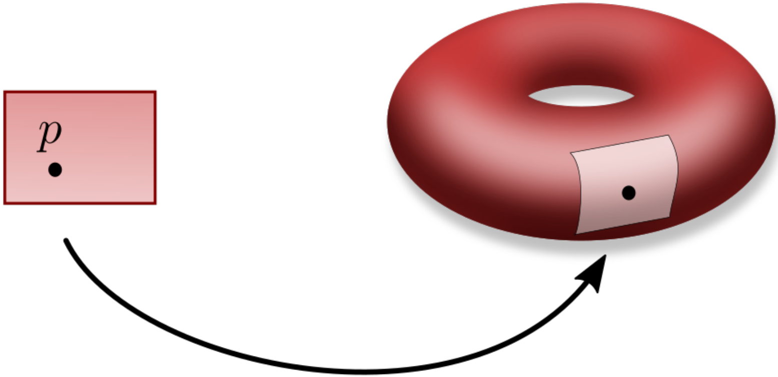
es llamado el espacio tangente en el punto x (el espacio de todos los vectores tangentes en el punto x). La derivada (o diferencial) Df de un mapeo diferenciable f está definido como

$$Df|_x : T_x\mathbb{R}^k \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad (x, v) \mapsto (f(x), J_x f(v)).$$


f

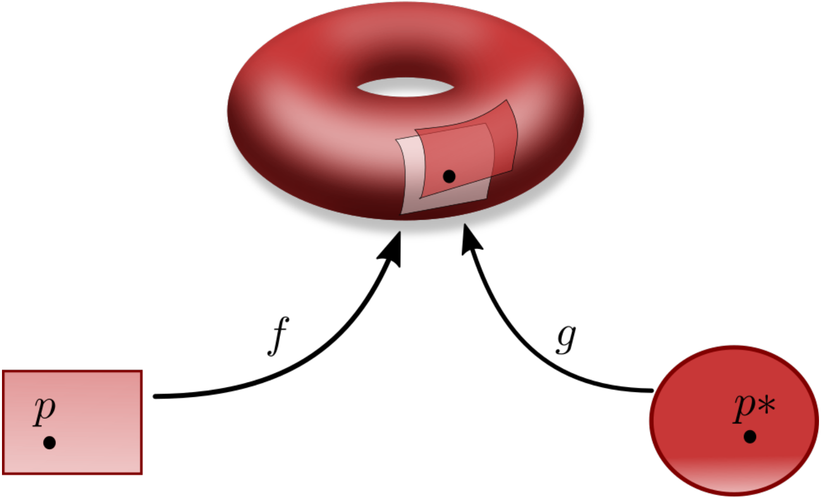


$$D_p f : T_p \mathbb{R}^2 \to \mathrm{T}_{\mathrm{f(p)}} \mathbb{R}^3$$



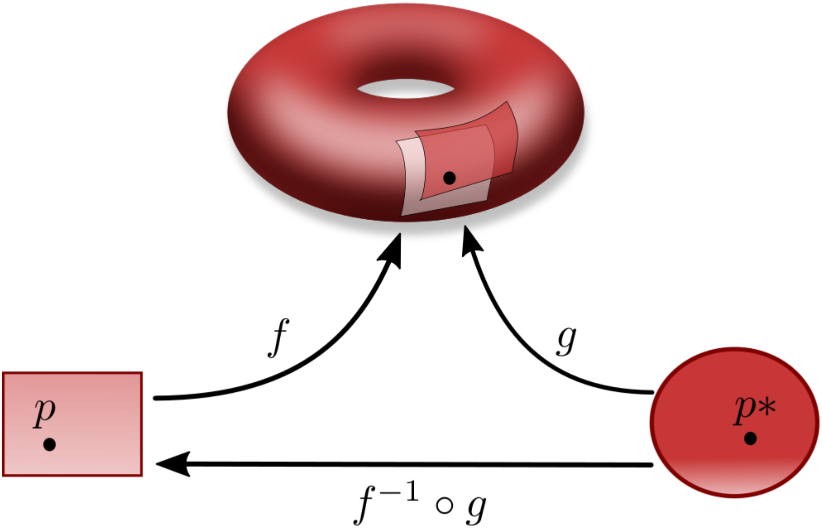
$$T_pM := Df_u(\{u\} \times \mathbb{R}^2) = \mathrm{Df_u}(\mathrm{T_u}\mathbb{R}^2)$$

$$f(u) = p$$


f
g
p
$p*$

Proposición

El espacio vectorial T_pM es k-dimensional y no depende de la elección de f.


f
g
p
$p*$
$f^{-1} \circ g$

Bibliografia

Definición

Una inmersión es un mapeo diferenciable entre variedades donde su derivada es inyectiva. Explícitamente, $f : M \to N$ es una inmersión si

$$D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$$

es un mapeo inyectivo para toda $p \in M$. De forma equivalente, f es una inmersión si su derivada tiene rango igual a dim M:

$$rank D_p f = \dim M.$$