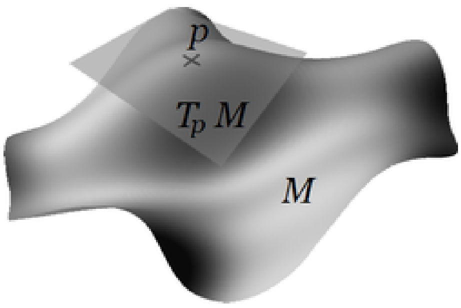
# ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA




Una introducción a superficies en $\mathbb{R}^3$ y variedades en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

# ÍNDICE GENERAL

# Parte I

# 1 INTRODUCCIÓN

Cuando consideramos una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se tiene que $f$ es diferenciable en $a$ si la derivada de $f$ en $a$ existe, es decir $f'(a)$ existe. En este caso, el espacio tangente a $f$ en $a$ es una línea recta, esto es un espacio vectorial de dimensión 1. En general, si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, se tiene que $f$ es continua en $a$ si existe una matriz $T$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - T(x) \cdot h\| = 0$$

Cuando $f$ es diferenciable, el espacio tangente está bien determinado y es un espacio vectorial de dimensión $n$.

Sin embargo cuando $f$ no es diferenciable en $a$, ¿Cómo determinamos el espacio tangente?, ¿Qué dimensión tiene?, ¿Que relación existe entre la dimensión del espacio tangente y la dimensión del espacio normal?.

Estas preguntas pueden ser extendidas a espacios mas generales como las variedades. En el presente texto nos introduciremos al concepto de variedad y espacio tangente asociado a una variedad.

## OBJETIVOS

El objetivo de este texto es definir de manera general el concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$ y variedad en $\mathbb{R}^n$. Determinar el plano tangente de una superficie en $\mathbb{R}^3$ (variedad en $\mathbb{R}^n$). Determinar la dimensión del espacio tangente a una superficie (variedad) en un punto $p$. Definir el concepto de curvatura; con este estudio se darán algunos ejemplos de cálculo de curvatura y su aplicación a la Física.

## JUSTIFICACIÓN

Es común ver en los estudiantes de cálculo clásico una deficiencia en el concepto de que es una superficie (variedad) y como tiene su propio cálculo diferencial estrictamente comparable con el cálculo familiar en el plano.[1]

Esta exposición provee la noción de variedades diferenciables, la cual es indispensable en algunas ramas de las Matemáticas y sus aplicaciones basadas en el cálculo.

1 Mas adelante veremos como el último es consecuencia del primero.