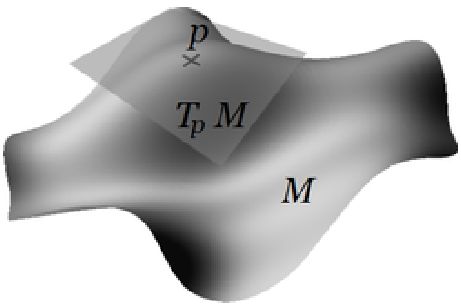
ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA



El concepto abstracto de curvas en $\mathbb{R}^2$ y curva en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En este texto hablaremos sobre qué es una curva *suave* en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, cómo calcular su vector tangente en cualquier punto de la curva y así determinar su espacio tangente asociado.

Llevaremos nuestra primera definición de curva a una forma más general y veremos como calcular el espacio tangente con esta nueva definición. Para esto veremos el teorema de la función implícita (funciones $F(x, y) = 0$).

Terminaremos con una breve introdución al concepto de variedad de dimension n y su espacio tangente.

JUSTIFICACIÓN

En los cursos de Cálculo se define el concepto de curva y el espacio tangente asociado a la curva. Una curva es un caso particular de un objeto más abstracto llamado subvariedad. Las subvariedades son objetos que se estudian en distintas áreas de la matemática: Topología, Análisis Matemático, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, etc. Es por este motivo que resulta de gran interés para cualquier estudiante de la carrera en matemáticas. En esta exposición realizamos un estudio de las subvariedades de dimensión 1 las cuales generalizan a las curvas y detallaremos la manera de calcular el espacio tangente.

OBJETIVOS

Definir el concépto general de curva en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ y su espacio tangente. Introducir brevemente el concepto de subvariedad y su espacio tangente. Demostrar que una subvariedad y su espacio tangente tienen la misma dimensión.

Parte I

Los cuaterniones vienen de Hamilton . . . y han sido maldición pura para quien, de alguna forma, los ha tocado. El vector es un sobreviviente inútil . . . y jamás ha sido de la más mínima utilidad para ningún ser viviente.

Lord Kelvin

1 VECTORES

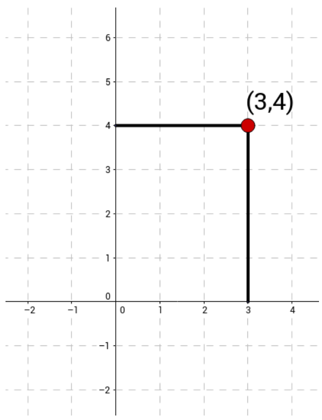
El concepto de vector es básico para el estudio de funciones de varias variables, da una motivación geométrica para todo lo que veremos. En esta sección platicaremos sobre algunas propiedades del vector que necesitamos para las secciones siguientes.

Una propiedad significativa de todos los enunciados de esta sección es que aplican fácilmente para 2-dimensión, 3-dimensión y n-dimensión.

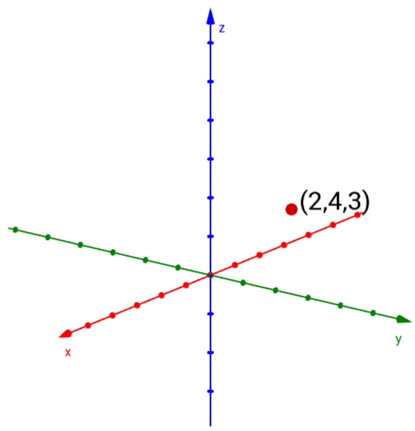
UN PUNTO EN EL ESPACIO

Sabemos que un número puede ser usado para representar un punto en una línea recta, siempre y cuando se elija una unidad de longuitud.

Un par de números (un par ordenado) (x, y) puede ser usado para representar un punto en un plano.



(a) Punto en el plano



(b) Punto en el espacio

Ahora observemos que (x, y, z) puede ser usado para representar un punto en el espacio, esto es un punto en 3-dimensión, o 3-espacio. Simplemente agregamos un nuevo eje.

En vez de usar x, y, z podemos usar (x_1, x_2, x_3). A la línea se le puede llamar 1-espacio y al plano, naturalmente, 2-espacio.

Aunque no podemos dibujar un punto en 4-espacio, no hay nada que nos prevenga considerarlo, una cuarteta de números

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

es un punto en 4-espacio. Una quinteta seria un punto en 5-espacio, si continuamos llegamos a la siguiente definición.

Definición 1.1.1 *Un punto en n-espacio es una n-tupla ordenado de números*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con n *un entero positivo.*

La mayoría de nuestros ejemplos serán para los casos $n = 2$, $n = 3$. Así podremos visualizarlos fácilmente a lo largo de este texto. Pero nuestras definiciones y demostraciones comunmente serán para n-espacio y así cubrir ambos casos. Cabe mencionar que el caso $n = 4$ ocurre en física.

La idea de tomar al tiempo como cuarta coordenada es vieja. Ya desde la *Encyclopédie* de Diderot, en el siglo XVIII, d'Alembert escribe en su artículo sobre dimensión:

La manera de considerar cantidades con mas de tres dimensiones es tan natural como los otros casos, porque las letras algebraicas siempre pueden ser vistas como representación de números, ya sean racionales o no. Antes mencioné que no era posible imaginarse mas de tres dimensiones. Un caballero astuto de quien soy íntimo cree lo contrario, que podria tomarse a la duración como la cuarta dimensión. Esta idea puede ser discutida, pero para mí, tiene su mérito por el solo hecho de ser nueva.

Encyplopédie, Vol.4 (1754), p. 1010

Observe como d'Alembert se refiere a un *caballero astuto* cuando al parecer se refiere a sí mismo. El procede con cautela al proponer una idea avanzada para su tiempo, la cual se hizo mas común en el siglo XX.

No nos queda de otra que definir como sumar puntos.

Definición 1.1.2 *Si* A *y* B *son puntos en n-espacio.* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. *Entonces* $A + B$ *se define*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Ejemplo 1.2 *En el plano, si* $A = (1, 2)$ *y* $B = (-3, 5)$, *entonces*

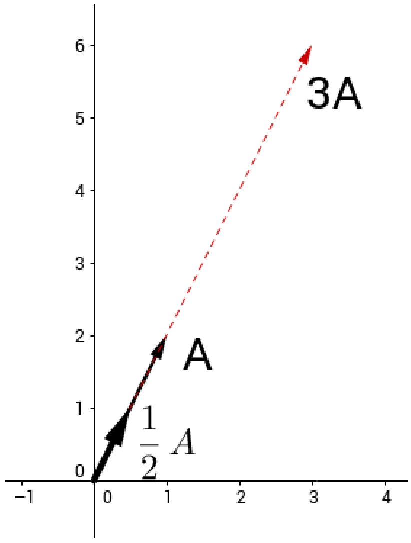
$$A + B = (-2, 7)$$

Ejemplo 1.3 *En el espacio, si* $A = (-1, \pi, 3)$ *y* $B = (\sqrt{2}, 7, -2)$, *entonces*

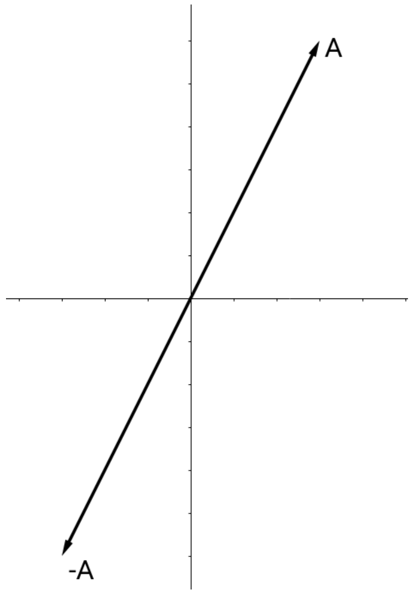
$$A + B = (\sqrt{2} - 1, \pi + 7, 1)$$

Definición 1.3.1 *Si* c *es cualquier número, entonces*

$$cA = (ca_1, \ldots, ca_n)$$



(a) Punto en el plano



(b) Punto en el espacio

Ejemplo 1.4 *Sea* $A = (1, 2)$ *y* $c = 3$. *Entonces*

$$cA = (3, 6)$$

Observe como multiplicar el vector A por 3 equivale a *estirar* el vector 3 veces, de igual forma si $c = \frac{1}{2}$ entonces cA seria la mitad de A. Si $c = -1$ entonces cA tiene la misma *magnitud* que A pero en sentido contrario.

VECTOR LOCALIZADO

Definición 1.5.1 *Un vector localizado es un par ordenado de puntos* A *y* B, *donde* A *es el punto inicial y* B *es el punto final. Se denota* $\overrightarrow{AB}$.

Podemos obsvervar que en el plano,

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1)$$

De forma similar,

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2)$$

Cuando el punto inicial es el origen y el punto final es cualquier otro punto A denotaremos al vector simplemente como A.

PRODUCTO PUNTO

Daremos por entendido que a lo largo de esta sección seleccionaremos vectores que vivan en la misma dimensión.

Definición 1.6.1 *Sean* A *y* B *dos vectores en n-espacio. El producto punto*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Este producto es un número.

Ejemplo 1.7 *Si* $A = (1, 3, -2)$ *y* $B = (-1, 4, -3)$, *entonces*

$$A \cdot B = -1 + 12 + 6 = 17$$

Veamos ahora unas propiedades básicas de este producto.

SP 1. Tenemos que $A \cdot B = B \cdot A$.

SP 2. Si A,B,C son tres vectores, entonces

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$$

SP 3. Si x es un número, entonces

$$(xA) \cdot B = x(A \cdot B) \quad \text{and} \quad A \cdot (xB) = x(A \cdot B)$$

SP 4. Si $A = 0$ es el *vector cero*, entonces $A \cdot A = 0$, de lo contrario

$$A \cdot A > 0$$

Algo de extrema importancia para este texto es el concepto de perpendicularidad entre vectores, a partir de esto definiremos, en capítulos posteriores, lo que es un vector tangente.

Definición 1.7.1 *Sean* A *y* B *dos vectores.* A *y* B *son* perpendiculares *(ortogonales) si*

$$A \cdot B = 0$$

LA NORMA DE UN VECTOR

Una pregunta natural al estudiar vectores es ¿qué longuitud (magnitud) tienen?. Veremos a continuación la definición de *norma* de un vector, la cual contesta a nuestra pregunta.

Definición 1.8.1 *La norma de un vector* A *es el número,*

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Como $A \cdot A \geqslant 0$ *podemos sacarle raíz cuadrada.*

A la norma también se le conoce como *magnitud* de A. Cuando $n = 2$ y $A = (a, b)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que para cualquier vector A tenemos que

$$\|A\| = \| - A\|$$

Definición 1.8.2 *Sean* A *y* B *dos puntos cualquiera. La distancia entra* A *y* B *se define como*

$$\|A-B\| = \sqrt{(A-B)\cdot(A-B)}$$

Ejemplo 1.9 *Sea* $A = (-1,2)$ *y* $B = (3,4)$. *Entonces la longuitud del vector* $\overrightarrow{AB}$ *es* $\|B-A\|$. *Pero* $B-A = (4,2)$. *Entonces*

$$\|B-A\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Sea P un punto en el plano, y sea a un número > 0. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X-P\| < a$$

es llamado *disco abierto* de radio a y centro en P. Si en cambio

$$\|X-P\| \leqslant a$$

el conjunto es llamado *disco cerrado* de radio a y centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X-P\| = a$$

es llamado *circurferencia* de radio a y centro en P.

Si transladamos P al espacio tridimensional, los conjuntos anteriores son llamados *bola abierta*, *bola cerrada* y *esféra* respectivamente.

DE CUATERNIONES A VECTORES

Los vectores como los conocemos nacieron en las primeras dos decadas del siglo IXX con la representación geométrica de los números complejos. En 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) mostró que los números complejos podian ser considerados abstractamente como pares ordenados (a, b) de números reales. Esta idea era parte de una investigación para encontrar una forma de representar "números"de dos dimensiones en tres dimensiones, nadie logró hacerlo preservando las propiedades básicas de los reales y complejos.

Después de mucha frustración, Hamilton dejó su busqueda del tal sistema númerico de tres dimensiones e inventó uno de cuatro dimensiones, lo llamó cuaterniones. Los cuaterniones de Hamilton se denotaban $q = w + ix + jy + kz$, donde, w,x,y y z eran números reales.

Aunque los cuaterniones fueron fuertemente aceptados por varios científicos, entre ellos Maxwell y Lord Kelvin, tenian un problema que incomodaba a los matemáticos. El producto de cuaterniones no es conmutativo ni homogeneo , es decir, $pq = -qp$.

En el tiempo que Hamilton descubrió los cuaterniones, Hermann Grassmann (1809-1867) estaba escribiendo "The Calculus of Extension (1844)", mejor conocido por su título en alemán, Ausdehnungslehre.

Figura 1: Hamilton

En 1832 Grassmann comenzó el desarrollo de un nuevo cálculo geométrico y subsecuentemente usó este estudio para simplificar porciones de dos trabajos clásicos, Analytical Mechanics de Joseph Louis Lagrange y Celestial Mechanics de Pierre Simon Laplace. En su libro, Grassmann por primera vez expande la idea del concepto de un vector (como $ix + jy + kz$ de los cuaterniones) de dos a tres y n dimensiones, lo cual expandios la idea de dimensión de un espacio.

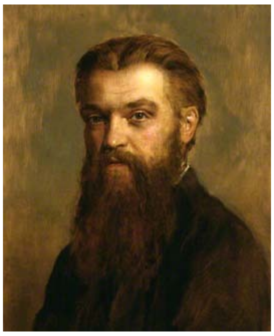


Figura 2: Clifford

William Kingdon Clifford (1845 - 1879) expresó profunda admiración por la obra de Grassmann, y claramente favoreció a los vectores sobre los cuaterniones. Clifford separó el producto de dos cuaterniones en dos productos diferentes de vectores, los cuales llamó producto escalar y producto vectorial, solucionando el problema del producto de cuaterniones.

El desarrolo del álgebra de vectores y análisis vectorial como lo conocemos hoy día fue descrito en un conjunto de notas por el matemático J. Williard Gibbs (1839-1903) para sus estudiantes de la Universidad de Yale.

2 DIFERENCIACIÓN

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Esta sección está centrada en los conceptos de conjunto abierto, límite y continuidad; los conjuntos abiertos son necesarios para entender los límites y, a su vez, los límites son necesarios para entender continuidad y diferenciabilidad.

Comenzamos la formulación del concepto de conjunto abierto mediante la definición de disco abierto. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. El disco abierto (o bola abierta) de radio r y centro en x_0, como vimos en el Ejemplo 1.9, es el conjunto de puntos x tales que $\|x - x_0\| < r$. Este conjunto lo denotaremos por $D_r(x_0)$.

Definición 2.1.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que U es un conjunto abierto cuando para cualquier punto x_0 en U existe algún $r > 0$ tal que $D_r(x_0)$ está contenido en U, es decir, $D_r(x_0) \subset U$.*

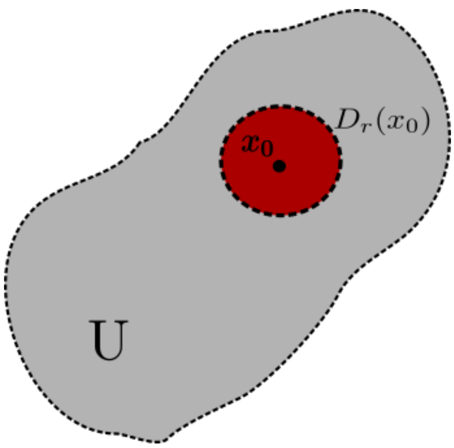


Figura 3: Un conjunto abierto U es aquel que incluye completamente algún disco $D_r(x_0)$ alrededor de cada uno de sus puntos x_0.

Además establecemos la convención de que el conjunto vac/'io $\emptyset$ es abierto.

Teorema 2.1.2 *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, $D_r(x_0)$ es un conjunto abierto.*

Demostración 2.2 *Sea $x \in D_r(x_0)$, esto es, sea $\|x - x_0\| < r$. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, debemos encontrar un $s > 0$ tal que $D_s(x) \subset D_r(x_0)$. Sea $s = r - \|x - x_0\|$, nótese que $s > 0$, pero que s se* *hace más chico si* x *está cerca del borde* $D_r(x_0)$

Para probar que $D_s(x) \subset D_r(x_0)$, *sea* $y \in D_s(x)$; *esto es, sea* $\|y - x\| < s$. *Queremos probar que también* $y \in D_r(x_0)$. *Probar esto en vista de la definición de un r-disco, equivale a demostrar que* $\|y - x_0\| < r$. *Usemos la desigualdad del triángulo para esto*

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &= \|(y - x) + (x - x_0)\| \\ &\leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| \\ &< s + \|x - x_0\| \\ &= r. \end{aligned}$$

De aquí que $\|y - x_0\| < r$. ∎

Definición 2.2.1 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *es punto frontera de* A *si toda vecindad de* x *contiene al menos un punto de* A *y al menos un punto fuera de* A.

En esta definición, x puede estar o no en A; si $x \in A$, entonces x es un punto frontera si toda vecindad de x contiene al menos un punto que no esté en A. De manera análoga, si x no está en A, es un punto frontera si toda vecindad de x contiene al menos un punto de A.

Figura 4

Ya estamos en posición de definir un límite. Durante toda la exposición siguiente, el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A. Nos interesa encontrar el límite de f cuando $x \in A$ tienda a un punto de A o a un punto frontera de A.

El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y de especial interes en este texto, derivadas parciales.

Definición 2.2.2 (Límite) *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, *donde* A *es un conjunto abierto. Sea* x_0 *un punto de* A *o en la frontera de* A, *y sea* V *una vecindad de* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. *Decimos que* f *está en* V *conforme* x *tiende a* x_0 *si existe una vecindad* U *de* x_0 *tal que* $x \neq x_0$, $x \in U$ *y* $x \in A$ *implica* $f(x) \in V$. *Decimos que* $f(x)$ *tiende a* $\boldsymbol{b}$ *cuando* x *tiende a* x_0, *es decir*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

Del cálculo de una variable sabemos que el concepto de función continua está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin romper, esto es, una curva sin saltos.

Definición 2.2.3 *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *una función dada con dominio* A *y* $x_0 \in A$. *Decimos que* f *es continua en* x_0 *si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si decimos simplemente que f es *continua*, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.

DIFERENCIACIÓN

En nuestro trabajo de la sección anterior vimos qué es una función continua. Aquí veremos que significa que una función sea diferenciable y como esto nos ayuda a ver que una gráfica no esté rota, es decir, no debe haber dobleces, esquinas o picos en la gráfica. En otras palabras, la gráfica debe ser suave.

Para precisar estas ideas necesitamos una definición sensata de lo que entedemos por $f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Para ello necesitamos introducir el concepto de *derivada parcial*. Este concepto se basa en nuestro conocimiento del cálculo en una variable.

Entonces comenzaremos con definir que significa que $f(x)$ es diferenciable en un punto x, es decir, la derivada de $f(x)$ en x. Para esto usaremos nuestra definición de límite.

Definición 2.3.1 *Sea* f *una función de valor real definida en una vecindad abierta de* x. *Entonces* $\frac{df}{dx}$ *(la derivada de* f *respecto a* x*) es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En ocasiones usaremos la notación $f'(x)$ para denotar la derivada de f respecto x.

Ejemplo 2.4 *Sea* $f(x) = x^2$ *(figura 5), entonces*

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2+h) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Entonces $f'(1) = 2$.

De forma geométrica para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada nos dice la *pendiente* de la recta tangente a f en un punto x.

Que una función $f(x)$ sea diferenciable en todo su dominio quiere decir que para cualquier x en el dominio de $f(x)$ existe $f'(x)$, esto nos dice que la gráfica de $f(x)$ es suave. Esto nos acerca a la definición de *curva*. Un ejemplo típico de una gráfica no suave la vemos a continuación:

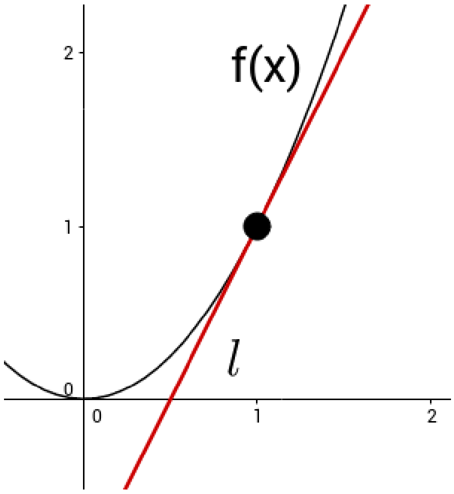


Figura 5: $f(x) = x^2$

Ejemplo 2.5 *Sea* $f(x) = |x|$ *(figura 6) con* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*, vemos que la derivada en* $x = 0$ *no existe.*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

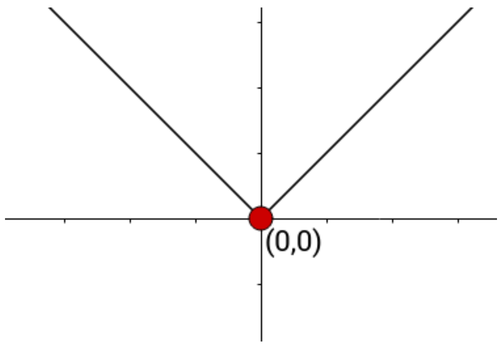


Figura 6: gráfica no suave

Transportando esta idea a funciones de varias variables surge la definición de *derivada parcial*.

Definición 2.5.1 *Sean* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función con valores reales. Entonces* $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$*, las derivadas parciales de* f *respecto a la primera, segunda, ..., n-ésima variable son las funciones con valores reales, de* n *variables, las cuales, en el punto* $(x_1, \ldots, x_n) = x$*, están definidas por*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

si existen los límites, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ *y* e_j *es el j-ésimo vector de la base canónica.*

En otras palabras, $\partial f/\partial x_j$ es simplemente la derivada de f respecto a la variable x_j, manteniendo las otras variables fijas.

Ejemplo 2.6 *Si* $f(x, y) = x^2 y + y^3$, *encontrar* $\partial f/\partial x$ *y* $\partial f/\partial y$. *Para encontrar* $\partial f/\partial x$ *mantenemos* y *constante y diferenciamos sólo respecto de* x, *entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(x^2 y + y^3)}{dx} = 2xy.$$

De forma análoga, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(x^2 y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2.$$

Parte II

Yo me alejo con espanto y horror, de la triste maldad de las funciones que no tienen derivadas.

Charles Hermite

3

CURVAS EN $\mathbb{R}^3$

En este capítulo daremos una primera definición de *curva*, con la cual trabajaremos a lo largo de esta sección. En el siguiente capítulo daremos una definición más general. Veremos como calcular el vector tangente a la curva y como encontrar su espacio tangente.

Es importante mencionar que aunque nuestros casos serán para $\mathbb{R}^3$ son totalmente válidos para $\mathbb{R}^2$.

¿QUÉ ES UNA CURVA?

Si nos pidieran dar un ejemplo de una curva, podriamos decir que una línea recta, como $y - 2x = 1$ (aunque no sea *curva*), o un círculo, por ejemplo $x^2 + y^2 = 1$, o tal vez una parábola, $y - x^2 = 0$.

Todas estas curvas están descritas por su ecuación cartesiana

$$f(x, y) = c,$$

donde f es una función de x y y y c es constante. Todos estos ejemplos son curvas en $\mathbb{R}^2$, pero podríamos considerar curvas en $\mathbb{R}^3$ también, por ejemplo el eje x en $\mathbb{R}^3$ es la línea recta dada por

$$y = 0, \quad z = 0,$$

y de forma general una curva en $\mathbb{R}^3$ se puede definir con el par de ecuaciones

$$f(x, y, z) = c_1, \quad f(x, y, z) = c_2,$$

curvas de éste estilo son llamadas *curvas de nivel*.

Sin embargo existe una forma diferente de pensar las curvas que nos ayudará en muchas ocasiones. Por ejemplo al describir la trayectoria de un móvil, podemos ver a una curva como un punto en movimiento. Así $c(t)$, es la posición del punto en el tiempo t. Usaremos esta idea para dar nuestra primera definición formal de curva en $\mathbb{R}^3$

Definición 3.1.1 *Una curva parametrizada en* $\mathbb{R}^3$ *es una mapeo*

$$c : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$$

para algún α, β *con* $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$.

Ejemplo 3.2 *Una línea recta es el tipo más simple de* curva *en el espacio Euclideo. Es una curva* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$c(t) = p + tq$$

Donde $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.3 *La curva (hélice)* $t \to (a\cos t, a\sin t, 0)$ *viaja alrededor de un círculo de* $a > 0$ *en el plano* xy *de* $\mathbb{R}^3$. *Si dejamos que la curva suba a baje de manera uniforme, obtenemos la hélice* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, *dada por*

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

donde $a > 0$, $b \neq 0$.

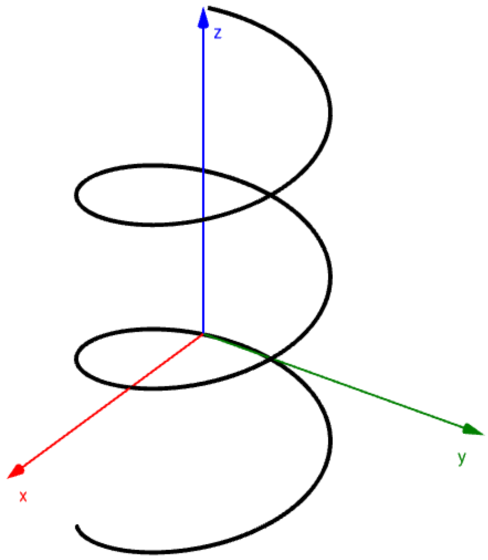


Figura 7: Hélice

Estas curvas estarán descritas exclusivamente en términos de funciones *suaves*: una función $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ se dice que es *suave* si sus derivadas $\frac{d^n f}{dt^n}$ existen para todo $n \geqslant 1$.

Para diferenciar una *función vectorial* como $c(t)$, diferenciamos componente a componente, esto es

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)),$$

entonces

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc_1}{dt}, \frac{dc_2}{dt}, \frac{dc_3}{dt}\right).$$

De aquí en adelante todas las curvas parametrizadas en este texto se asumirán suaves.

VECTOR TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA

Definición 3.4.1 *Si* c *es una curva parametrizada, su primera derivada* $c'(t)$ *es llamada el vector tangente de* c *en el punto* $c(t)$.

Ejemplo 3.5 *El caracol de Pascal es la curva parametrizada*

$$c(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

El vector tangente es

$$c'(t) = (-\sin t - 4\cos t \sin t, \cos t + 4\cos^2 t - 2)$$

En particular,

$$c'(\pi/4) = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

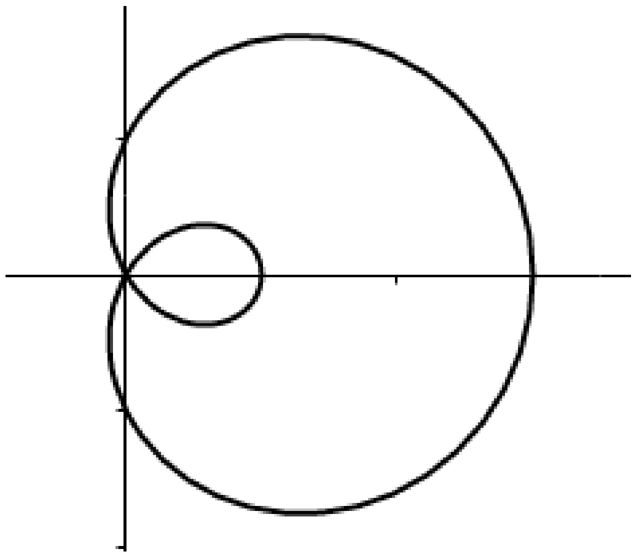


Figura 8: Curva de Pascal

Esta definición puede ser interpretada geométricamente de la siguiente manera. La derivada en t de la función de valor real f en $\mathbb{R}$ está dada por

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Esta expresión también tiene sentido si remplazamos f por una curva $c = (c_1, c_2, c_3)$, es decir,

$$\frac{1}{h}(c(t+h) - c(t)) =$$

$$\left(\frac{c_1(t+h) - c_1(t)}{h}, \frac{c_2(t+h) - c_2(t)}{h}, \frac{c_3(t+h) - c_3(t)}{h}\right)$$

Este es el vector $c(t)$ hacia $c(t+h)$, multiplicado escalarmente por $\frac{1}{h}$. Ahora, cuando h se hace muy pequeño, $c(t+h)$ se aproxima a $c(t)$ y en el límite $h \to 0$, obtenemos el vector tangente

$$\left(\frac{dc_1}{dt}(t), \frac{dc_2}{dt}(t), \frac{dc_3}{dt}(t)\right)$$

el cual tiene como punto inicial $c(t)$.

ESPACIO TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA

Sabemos que dados un punto p y una dirección u podemos describir paramétricamente una línea recta que contenga a p con dirección de u (paralela a u) de la forma

$$l(t) = p + tu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tomaremos esta idea para definir el *espacio tangente* a una curva.

Definición 3.6.1 *Si* $c(t)$ *es una curva parametrizada, entonces el espacio tangente (recta tangente) a* $c(t)$ *es*

$$l(t_1) = (c(t) + t_1 c'(t)), \quad t_1 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.7 *Tomando el ejemplo 3.4, el espacio tangente (recta tangente) en* $c(\pi/4)$ *es*

$$l(t_1) = (c(\pi/4) + t_1 c'(\pi/4))$$

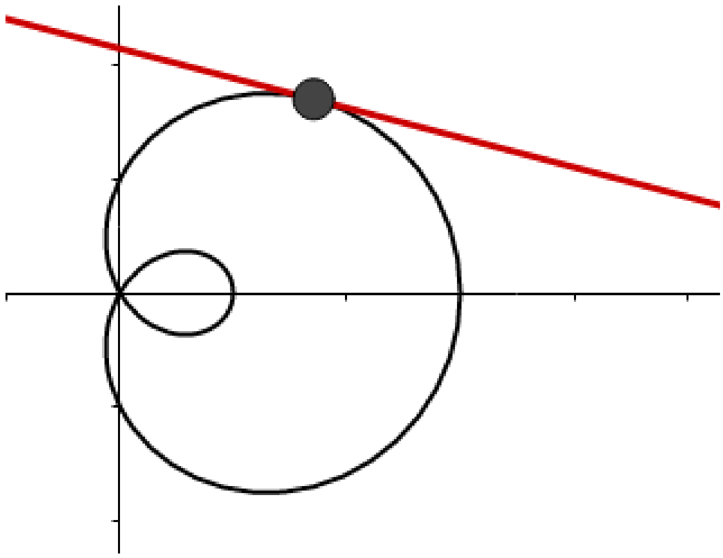


Figura 9: Espacio tangente a la curva de Pascal c en $c(\pi/4)$

4 SUBVARIEDAD 1-DIMENSIONAL

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Este teorema es uno de aquellos que es difícil de comprender por las diferentes condiciones que se deben cumplir, del mismo modo, llega a varias conclusiones. Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 4.2 *Tenemos el círculo unitario* $x^2 + y^2 = 1$ *con centro en el origen. Sabemos que* $x^2 + y^2 = 1$ *no es una función ya que para cada* x *en el dominio tenemos dos* $f(x)$ *en el rango, esto se puede ver claramente en la figura 10 (a).*

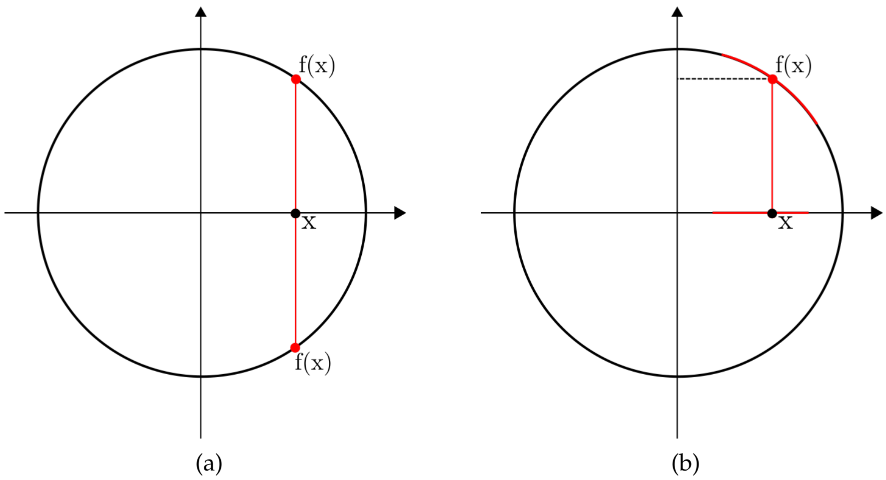


Figura 10: Círculo unitario

Pero si tomamos una vecindad de x *(figura 10 (b)) podemos definir la función* $y = \sqrt{1-x^2}$ *o* $y = -\sqrt{1-x^2}$ *dependiendo de si* x *esta por arriba o por abajo del eje-x. La pregunta ahora es ¿podemos hacer este mismo razonamiento para cualquier punto en el círculo?. La respuesta es no. Si tomamos los puntos* $(1,0)$ *y* $(-1,0)$ *no podemos encontrar una vecindad lo suficientemente pequeña que cumpla que por cada* x *tengamos un único* $f(x)$*, ver figura 11.*

Hasta ahora tenemos que

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

son dos funciones explicitas *que dan la misma relación que* $x^2 + y^2 = 1$*, de forma local para cada punto excepto* $(1,0)$ *y* $(-1,0)$*.*

Entonces el teorema de la función implícita provee condiciones bajo las cuales la relación de la forma $F(x,y) = 0$ *puede ser redefinida como una función* $y = f(x)$ *localmente.*

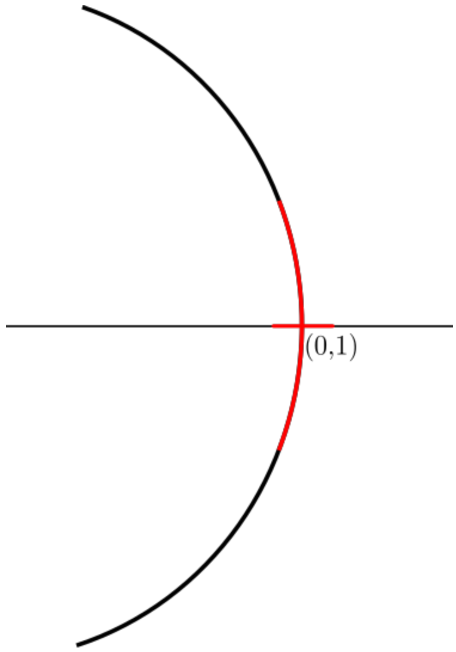


Figura 11: Punto crítico

Aunque no demostraremos este teorema, el siguiente ejemplo nos acerca a la idea de su demostración para funciones de una o dos variables.

Ejemplo 4.3 *Tenemos la relación* $y^5 + y^3 + y + x = 0$.

Vemos que es trivial definir $x = f(y)$, pero ahora la pregunta es ¿podemos definir $y = f(x)$?. La respuesta no es obvia, podriamos intentar resolver en terminos de x, pero, eso supone que podemos encontrar raíces de polinomios de grado 5, lo cual Galois demostró que no es posible. Tratemos ahora fijando x, por ejemplo en x_0, y definamos

$$\phi(y) = y^5 + y^3 + y + x_0$$

entonces,

$$\phi'(y) = 5y^4 + 3y^2 + 1 > 0$$

vemos que $\phi'(y)$ es estrictamente creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$, esto nos dice que $\phi(y)$ cruza el eje-x, es decir, $\phi(y)$ tiene exactamente una raíz, sea y_0.

Vemos que para cada x tenemos una y única tal que $f(x) = 0$, en otras palabras, encontramos una función $y = f(x)$, pero f es ímplicita.

Este teorema nos dice, entre otras cosas, que la relación $y = f(x)$ existe pero no nos da una fórmula para encontrarla.

Teorema 4.3.1 (Teorema de la función implícita) *Sea* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y sea* $F(\overrightarrow{x}, y) \in C^1$ *en una vecindad de* $N_0(\overrightarrow{x_0}, y_0)$ *tal que*

1. $F(N_0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(N_0) \neq 0$

entonces existe una vecindad de (N_0) *en donde existe una función ímplicita* $y = f(\overrightarrow{x})$ *tal que*

i. $f(\overrightarrow{x_0}) = y_0$

ii. $F(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = 0$

iii. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))}$

Caso especial: curva

Para una función dada F de dos variables x, y la ecuación $F(x, y) = 0$ describe una curva siempre y cuando $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ o $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ en cada punto que satisfaga $F(x, y) = 0$. Si esto se cumple, entonces la curva puede ser parametrizada localmente como una curva *regular* parametrizada. Se dice que una curva es regular si su derivada no mapea al 0.

La generalización de este concépto a la situación de varias variables y varias funciones reales simultaneamente, nos da directa y naturalmente, la noción de *subvariedad*

SUBVARIEDAD 1-DIMENSIONAL

Definición 4.4.1 (Subvariedad) *Una subvariedad k-dimensional (de clase* C^α*)* $M \subset \mathbb{R}^n$ *está definida por la condición de que* M *está dada localmente como el conjunto cero* $F^{-1}(0)$ *de un mapeo continuo (*α*-veces) diferenciable*

$$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^{n-k}$$

con rango máximo, es decir, $\mathrm{rank}(J_x F|_x) = n - k$ *para cada* $x \in M \cap U$*, donde* $M \cap U = F^{-1}(0)$ *se cumple para una vecindad de* U*, para cada punto en* M*.*
Localmente, también podemos describir a M *como la imágen de una inmersión (ver definición 4.6.2) de clase* C^∞

$$V \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} M \subset \mathbb{R}^n$$

donde $\mathrm{rank}(Df) = k$*. Dicha* f *es la parametrización local, y* f^{-1} *es llamada una* carta *de* M*.*

Nuestro especial interes es cuando $k = 1$, es decir, para una subvariedad 1-dimensional

Definición 4.4.2 (Subvariedad 1-dimensional) *Una subvariedad 1-dimensional (de clase C^α) $C \subset \mathbb{R}^2$ está definida por la condición de que C está dada localmente como el conjunto cero $F^{-1}(0)$ de un mapeo continuo (α-veces) diferenciable*

$$C \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

con $\mathrm{rank}(J_x F|_x) = 1$ *para cada* $x \in C$.
Localmente, también podemos describir a C como la imágen de una inmersión (ver definición 4.6.2) de clase C^∞

$$I \xrightarrow{f} C$$

donde $\mathrm{rank}(Df) = 1$. *Dicha f es la parametrización local, y f^{-1} es llamada una* carta *de C.*

En la definición anterior, C es la curva que estudiamos en el capítulo 3.

Ejemplo 4.5 *En el ejemplo 4.2, el círculo unitario está dado por la función $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vemos que F es diferenciable, con*

$$\mathrm{rank}(J_x F|_x) = \mathrm{rank}((2x, 2y)) = 1$$

entonces F describe una subvariedad 1-dimensional.

Ejemplo 4.6 *En el ejemplo 4.2, las funciones*

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

pueden parametrizarse

$$r(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad c(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2})$$

respectivamente, de tal forma que r^{-1} y c^{-1} representan cartas de C^1 (circunferencia). Al conjunto $\{r^{-1}, c^{-1}\}$ se le llama un atlas *de C^1.*

Definición 4.6.1 (Espacio tangente a $\mathbb{R}^n$) *Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el espacio*

$$T_x \mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

es llamado el espacio tangente en el punto x (el espacio de todos los vectores tangentes en el punto x). La derivada (o diferencial) Df de un mapeo diferenciable f esta definido como

$$Df|_x : T_x \mathbb{R}^k \to T_{f(x)} \mathbb{R}^n \quad \textit{con} \quad (x, v) \mapsto (f(x), J_x f(v)).$$

Definición 4.6.2 *Una inmersión es un mapeo diferenciable entre subvariedades diferenciables donde su derivada es inyectiva. Explicitamente,* $f : M \to N$ *es una inmersión si*

$$D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$$

es un mapeo inyectivo para toda $p \in M$*. De forma equivalente,* f *es una inmersión si su derivada tiene rango igual a dim*M*:*

$$\mathrm{rank} D_p f = \mathit{dim} M.$$

Definición 4.6.3 (Espacio tangente a una subvariedad) *Sea* $M \subset \mathbb{R}^n$ *una variedad k-dimensional, y sea* $p \in M$*. El espacio tangente a* M *en el punto* p *es el subespacio vectorial* $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^n$*, el cual se define como*

$$T_p M := Df_u(\{u\} \times \mathbb{R}^k) = Df_u(T_u \mathbb{R}^k)$$

para una parametrización $f : U \to M$ *con* $f(u) = p$*, donde* $U \subset \mathbb{R}^k$ *es un conjunto abierto.*

Ejemplo 4.7 *En el caso en que* $k = 1$*, tenemos que el espacio tangente* $T_p C$ *para una subvariedad 1-dimensional* C *es*

$$T_p C := Df_u(\{u\} \times \mathbb{R}) = Df_u(T_u \mathbb{R})$$

para una parametrización f*. Por simplicidad, se puede escribir* $Df|_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cuando no hay peligro de confusión. Entonces* $Df|x$ *se puede ver como mapeo ordinario entre espacios vectoriales, descritos únicamente por la matriz Jacobiana.*

Proposición 4.7.1 *El espacio vectorial* $T_p M$ *es k-dimensional y no depende de la elección de* f*.*

Demostración 4.8 *Para probar esto, difinamos un difeomorfismo (ver definición A.0.5)* $\phi : \mathbb{R}^k \to M \subset \mathbb{R}^n$*, entonces tenemos que* ϕ^{-1} *es suave. Tenemos ahora un conjunto abierto* $W \in \mathbb{R}^n$ *y un mapeo suave* $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*. Entonces* $\phi^* \circ \phi$ *es la identidad en* U *y tenemos las siguientes transformaciones*

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{D\phi} T_x(M) \xrightarrow{D\phi^*} \mathbb{R}^k$$

que describen el mapeo identidad en $\mathbb{R}^k$*. Se sigue que* $D\phi : \mathbb{R}^k \to T_x(M)$ *es un* isomorfismo *(ver definición A.0.2), entonces dim*$T_x(M) = k$ *y esto no depende de la parametrización* f*.* ∎

Parte III

APÉNDICE

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson, Calculus Made Easy (1910)

A

ALGUNAS DEFINICIONES ÚTILES

Definición A.0.1 (Morfismo) *Es un mapeo que conserva la estructura de un objeto matemático a otro. En este texto, vemos a los morfismos como funciones cuando van de conjunto a conjunto, y como transformaciones lineales cuando se define entre espacios vectoriales.*

Definición A.0.2 (Isomorfismo) *Es un morfismo que admite una inversa.*

Teorema A.0.3 *Dos espacios vectoriales son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.*

Lema A.0.4 *Si dos espacios vectorial son isomorfos entonces tienen la misma dimensión.*

Definición A.0.5 (Difeomorfismo) *Es un isomorfismo diferenciable. Su inversa también es diferenciable.*

BIBLIOGRAFIA

- Kuhnel Wolfang. (2006). Differential Geometry. AMS.
- Lang, S. (1970). Introducction to Linear Algebra. Springer.
- Marsden Jerrold E., A. J. T. (1991). Cálculo Vectorial. Addison-Wesley.
- Pressley Andrew. (2012). Elementary Differential Geometry. Springer.
- Thompson, S. P. (1910). Calculus Made Easy. The Macmillan Company.
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gibbs.html
- Mathworld, (2016, Noviembre 01), http://mathworld.wolfram.com/Immersion.html
- Mathworld, (2016, Noviembre 01), http://mathworld.wolfram.com/Diffeomorphism.html