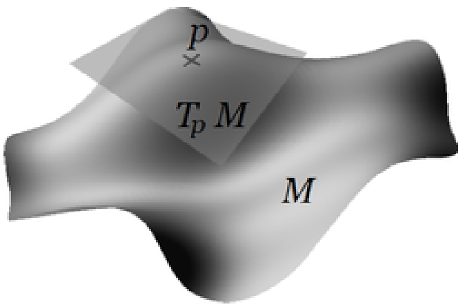
ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA



El concepto abstracto de curvas en $\mathbb{R}^2$ y curva en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

introducción

En este texto hablaremos sobre qué es una curva *suave* en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Cómo calcular su vector tangente en cualquier punto de la curva y así determinar su espacio tangente asociado.
Llevaremos nuestra primera definición de curva a una forma más general y veremos como calcular el espacio tangente con esta nueva definición. Para esto veremos el teorema de la función implícita (funciones $F(x, y) = 0$).
Terminaremos con una breve introdución al concepto de variedad de dimension n y su espacio tangente.

justificación

En los cursos de Cálculo se define el concepto de superficie y el espacio tangente asociado a la superficie. Una superficie es un caso particular de un objeto más abstracto llamado variedad. Las variedades son objetos que se estudian en distintas áreas de la matemática: Topología, Análisis Matemático, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, etc. Es por este motivo que resulta de gran interés para cualquier estudiante de la carrera en matemáticas. En esta exposición realizamos un estudio de las variedades de dimensión dos y tres las cuales generalizan a las superficies y detallaremos la manera de calcular el espacio tangente.

objetivos

Definir el concépto general de curva en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y su espacio tangente. Introducir brevemente el concepto de variedad y su espacio tangente.

Parte I

Los cuaterniones vienen de Hamilton . . . y han sido maldición pura para quien, de alguna forma, los ha tocado. El vector es un sobreviviente inútil . . . y jamás ha sido de la más mínima utilidad para ningún ser viviente.

Lord Kelvin

1 VECTORES

El concépto de vector es básico para el estudio de funciones de varias variables. Da una motivación geométrica para todo lo que veremos. En esta sección platicaremos sobre algunas propiedades del vector que necesitaremos para las secciones siguientes.
Una propiedad significativa de todos los enunciados y demostraciones de esta seccion es que aplican facilmente para 2-dimensión, 3-dimensión y n-dimensión.

UN PUNTO EN EL ESPACIO

Sabemos que un número puede ser usado para representar un punto en una línea, siempre y cuando se elija una unidad de longuitud. Un par de números (un par ordenado) (x, y) puede ser usado para representar un punto en un plano.
imagen
Ahora observemos que (x, y, z) puede ser usado para representar un punto en el espacio, esto es un punto en 3-dimensión, o 3-espacio. Simplemente agregamos un nuevo eje.
imagen
En vez de usar x, y, z podemos usar (x_1, x_2, x_3). A la línea se le puede llamar 1-espacio y al plano, naturalmente, 2-espacio.
Aunque no podemos dibujar un punto en 4-espacio, no hay nada que nos prevenga considerarlo, una cuarteta de números

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

es un punto en 4-espacio. Una quinteta seria un punto en 5-espacio, si continuamos llegamos a la siguiente definición.

Definición 1.1.1 *Un punto en n-espacio es una n-tupla ordenado de números*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con n *un entero positivo.*

La mayoria de nuestros ejemplos serán para los casos $n = 2$, $n = 3$. Así podremos visualizarlos facilmente a lo largo de este texto. Pero nuestras definiciones y demostraciones comunmente serán para n-espacio y así cubrir ambos casos. Cabe mencionar que el caso $n = 4$ ocurre en física.
La idea de tomar al tiempo como cuarta coordenada es vieja. Ya desde la *Encyclopédie* de Diderot, en el siglo XVIII, d'Alembert escribe en su artículo sobre dimensión:

La manera de considerar cantidades con mas de tres dimensiones es tan natural como los otros casos, porque las letras algebraicas siempre pueden ser vistas como representación de números, ya sean racionales o no. Antes mencione que no era posible concivir mas de tres dimensiones. Un caballero astuto de quien soy íntimo cree lo contrario, que podria tomarse a la duración como la cuarta dimensión. Esta idea puede ser discutida, pero para mí, tiene su mérito por el solo hecho de ser nueva.

Encyplopédie, Vol.4 (1754), p. 1010

Observe como d'Alembert se refiere a un *caballero astuto* cuando al paracer se refiere a si mismo. El procede con cautela al proponer una idea avanzada para su tiempo, la cual se hizo mas común en el siglo XX.
No nos queda de otra que definir como sumar puntos.

Definición 1.1.2 *Si* A *y* B *son puntos en n-espacio.* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. *Entonces* $A + B$ *se define*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Ejemplo 1.2 *En el plano, si* $A = (1, 2)$ *y* $B = (-3, 5)$, *entonces*

$$A + B = (-2, 7)$$

VECTOR LOCALIZADO

Definición 1.3.1 *Un vector localizado es un par ordenado de puntos* A *y* B, *donde* A *es el punto inicial y* B *es el punto final. Se denota* $\overrightarrow{AB}$.

Podemos obsvervar que en el plano,

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1)$$

De forma similar,

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2)$$

PRODUCTO PUNTO

Daremos por entendido que a lo largo de esta sección seleccionaremos vectores que vivan en la misma dimenisión.

Definición 1.4.1 *Sean* A *y* B *dos vectores en n-espacio. El producto punto*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Este producto es un número.

Ejemplo 1.5 *Si* $A = (1, 3, -2)$ *y* $B = (-1, 4, -3)$, *entonces*

$$A \cdot B = -1 + 12 + 6 = 17$$

Veamos ahora unas propiedades básicas de este producto.

SP 1. Tenemos que $A \cdot B = B \cdot A$.

SP 2. Si A,B,C son tres vectores, entonces

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$$

SP 3. Si x es un número, entonces

$$(xA) \cdot B = x(A \cdot B) \quad \text{and} \quad A \cdot (xB) = x(A \cdot B)$$

SP 4. Si $A = 0$ es el *vector cero*, entonces $A \cdot A = 0$, de lo contrario

$$A \cdot A > 0$$

Definición 1.5.1 *Sean* A *y* B *dos vectores.* A *y* B *son* perpendiculares *(ortogonales) si*

$$A \cdot B = 0$$

LA NORMA DE UN VECTOR

Definición 1.6.1 *La norma de un vector* A *es el número,*

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Como $A \cdot A \geqslant 0$ *podemos sacarle raíz cuadrada.*

A la norma también se le conoce como *magnitud* de A. Cuando $n = 2$ y $A = (a, b)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que para cualquier vector A tenemos que

$$\|A\| = \|-A\|$$

Definición 1.6.2 *Sean* A *y* B *dos puntos cualquiera. La distancia entra* A *y* B *se define como*

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)}$$

Ejemplo 1.7 *Sea* $A = (-1, 2)$ *y* $B = (3, 4)$. *Entonces la longuitud del vector* $\overrightarrow{AB}$ *es* $\|B - A\|$. *Pero* $B - A = (4, 2)$. *Entonces*

$$\|B - A\| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Sea P un punto en el plano, y sea a un número > 0. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X - P\| < a$$

es llamado *disco abierto* de radio a y centro en P. Si en cambio

$$\|X - P\| \leqslant a$$

el conjunto es llamado *disco cerrado* de radio a y centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X - P\| = a$$

es llamado *circurferencia* de radio a y centro en P.
Si transladamos P al espacio tridimensional, los conjuntos anteriores son llamados *bola abierta*, *bola cerrada*, y *esféra* respectivamente.

DE CUATERNIONES A VECTORES

Los vectores como los conocemos nacieron en las primeras dos decadas del siglo IXX con la representación geométrica de los números complejos. En 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) mostró que los números complejos podian ser considerados abstractamente como pares ordenados (a, b) de números reales. Esta idea era parte de una investigación para encontrar una forma de representar "números"de dos dimensiones en tres dimensiones, nadie logró hacerlo preservando las propiedades básicas de los reales y complejos.

Figura 1: Hamilton

Después de mucha frustración, Hamilton dejó su busqueda del tal sistema númerico de tres dimensiones e inventó uno de cuatro dimensiones, lo llamó cuaterniones. Los cuaterniones de Hamilton se denotaban $q = w + ix + jy + kz$, donde, w,x,y y z eran números reales.
Aunque los cuaterniones fueron fuertemente aceptados por varios científicos, entre ellos Maxwell y Lord Kelvin, tenian un problema que incomodaba a los matemáticos. El producto de cuaterniones no es conmutativo ni homogeneo , es decir, $pq = -qp$.

En el tiempo que Hamilton descubrió los cuaterniones, Hermann Grassmann (1809-1867) estaba escribiendo "The Calculus of Extension (1844)", mejor conocido por su título en alemán, Ausdehnungslehre. En 1832 Grassmann comenzó el desarrollo de un nuevo cálculo geométrico y subsecuentemente usó este estudio para simplificar porciones de dos trabajos clásicos, Analytical Mechanics de Joseph Louis Lagrange y Celestial Mechanics de Pierre Simon Laplace. En su libro, Grassmann por primera vez expande la idea del concepto de un vector (como $ix + jy + kz$ de los cuaterniones) de dos a tres y n dimensiones, lo cual expandios la idea de dimensión de un espacio.

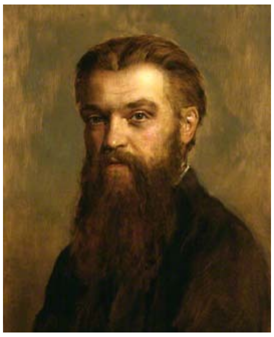


Figura 2: Clifford

William Kingdon Clifford (1845 - 1879) expresó profunda admiración por la obra de Grassmann, y claramente favoreció a los vectores sobre los cuaterniones. Clifford separó el producto de dos cuaterniones en dos productos diferentes de vectores, los cuales llamó producto escalar y producto vectorial, solucionando el problema del producto de cuaterniones.
El desarrolo del álgebra de vectores y análisis vectorial como lo conocemos hoy día fue descrito en un conjunto de notas por el matemático J. Williard Gibbs (1839-1903) para sus estudiantes de la Universidad de Yale.

2 DIFERENCIACIÓN

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Esta sección está centrada en los conceptos de conjunto abierto, límite y continuidad; los conjuntos abiertos son necesarios para entender los límites y, a su vez, los límites son necesarios para entender continuidad y diferenciabilidad.
Comenzamos la formulación del concepto de conjunto abierto mediante la definición de disco abierto. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. El disco abierto (o bala abierta) de radio r y centro en x_0, es el conjunto de puntos x tales que $\|x - x_0\|$ <r, como vimos el capítulo anterior. Este conjunto lo denotaremos por $D_r(x_0)$.

Definición 2.1.1 *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Decimos que* U *es un conjunto abierto cuando para cualquier punto* x_0 *en* U *existe algún* $r > 0$ *tal que* $D_r(x_0)$ *está contenido en* U*, es decir,* $D_r(x_0) \subset U$.

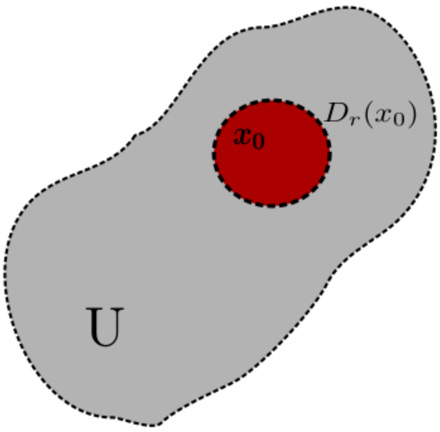


Figura 3: Un conjunto abierto U es aquel que incluye completamente algún disco $D_r(x_0)$ alrededor de cada uno de sus puntos x_0.

Además establecemos la convención de que el conjunto vacio $\emptyset$ es abierto.

Teorema 2.1.2 *Para cada* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$, $D_r(x_0)$ *es un conjunto abierto.*

Demostración Sea $x \in D_r(x_0)$, esto es, sea $\|x - x_0\| < r$. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal

que $D_s(x) \subset D_r(x_0)$. Sea $s = r - \|x - x_0\|$, nótese que $s > 0$, pero que s se hace más chico si x está cerca del borde $D_r(x_0)$
Para probar que $D_s(x) \subset D_r(x_0)$, sea $\boldsymbol{y} \in D_s(x)$; esto es, sea $\|\boldsymbol{y} - x\| < s$. Queremos probar que también $\boldsymbol{y} \in D_r(x_0)$. Probar esto en vista de la definición de un r-disco, equivale a demostrar que $\|\boldsymbol{y} - x_0\| < r$. Usemos la desigualdad del triángulo para esto

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y} - x_0\| &= \|(\boldsymbol{y} - x) + (x - x_0)\| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{y} - x\| + \|x - x_0\| \\ &< s + \|x - x_0\| \\ &= r \end{aligned}$$

De aquí que $\|\boldsymbol{y} - x_0\| < r$. ∎

Definición 2.1.3 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es punto frontera de* A *si toda vecindad de* x *contiene al menos un punto de* A *y al menos un punto fuera de* A*.*

En esta definición, x puede estar o no en A; si $x \in A$, entonces x es un punto frontera si toda vecindad de x contiene al menos un punto que no esté en A. De manera análoga, si x no está en A, es un punto frontera si toda vecindad de x contiene al menos un punto de A.

Figura 4

Ya estamos en posición de definir un límite. Durante toda la exposición siguiente, el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A. Nos interesa hallar el límite de f cuando $x \in A$ tienda a un punto de A o a un punto frontera de A.
El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y de especial interes en este texto, derivadas parciales.

Definición 2.1.4 (Límite) *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$*, donde* A *es un conjunto abierto. Sea* x_0 *un punto de* A *o en la frontera de* A*, y sea* V *una vecindad de* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$*. Decimos que* f *está en* V *conforme* x *tiende a* x_0 *si existe una vecindad* U *de* x_0 *tal que* $x \neq x_0$*,* $x \in U$ *y* $x \in A$ *implica* $f(x) \in V$*. Decimos que* $f(x)$ *tiende a* $\boldsymbol{b}$ *cuando* x *tiende a* x_0*, es decir*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

Del cálculo de una variable sabemos que el concepto de función continua está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin romper, esto es, una curva sin saltos (una curva suave).

Definición 2.1.5 *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *una función dada con dominio* A. *Sea* $x_0 \in A$. *Decimos que* f *es continua en* x_0 *si y sólo si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si decimos simplemente que f es *continua*, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.

DIFERENCIACIÓN

En nuestro trabajo de la sección anterior vimos qué es una función continua. Aquí veremos que significa que una función sea diferenciable y como esto nos ayuda a ver que una gráfica no esté rota, es decir, no debe haber dobleces, esquinas o picos en la gráfica. En otras palabras, la gráfica debe ser suave.
Para precisar estas ideas necesitamos una definición sensata de lo que entedemos por $f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $x = (x_1, \ldots, x_n)$. En realidad esta definición no es tan sencilla, como pudiera pensarse. Necesitamos introducir el concepto de *derivada parcial*. Este concepto se basa en nuestro conocimiento del cálculo en una variable.

Definición 2.2.1 *Sean* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función con valores reales. Entonces* $\partial f / \partial x_1, \ldots, \partial f / \partial x_n$, *las derivadas parciales de* f *respecto a la primera, segunda, ..., n-ésima variable son las funciones con valores reales, de* n *variables, las cuales, en el punto* $(x_1, \ldots, x_n) = x$, *están definidas por*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

si existen los límites, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ *y* e_j *es el j-ésimo vector de la base canónica.*

Parte II

> Yo me alejo con espanto y horror, de la triste maldad de las funciones que no tienen derivadas.
>
> *Charles Hermite*

3 CURVAS EN $\mathbb{R}^2$

CURVA EN R2

VECTOR TANGENTE

ESPACIO TANGENTE

Parte III

APPENDIX

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson, Calculus Made Easy (1910)

A

CÁLCULO EN UNA VARIABLE

BIBLIOGRAFIA

- Jerrold E. Marsden, A. J. T. (1991). Cálculo Vectorial. Addison-Wesley.
- Lang, S. (1970). Introducction to Linear Algebra. Springer.
- Thompson, S. P. (1910). Calculus Made Easy. The Macmillan Company.
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html
- MacTutor, (2016, Septiembre 26), http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gibbs.html