Theorem (Teorema de la función implícita)

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y sea* $F(\boldsymbol{x}, y) \in C^1$ *en una vecindad de* $(\boldsymbol{x_0}, y_0)$ *tal que*

1. $F((\boldsymbol{x_0}, y_0)) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}((\boldsymbol{x_0}, y_0)) \neq 0$

entonces existe una vecindad de $(\boldsymbol{x_0}, y_0)$ *en donde existe una función ímplicita* $y = f(\boldsymbol{x})$ *tal que*

I. $f(\boldsymbol{x_0}) = y_0$

II. $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$

III. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}$

Definition (Subvariedad)

Una subvariedad k-dimensional (de clase C^{α}) $M \subset \mathbb{R}^n$ está definida por la condición de que M está dada localmente como el conjunto cero $F^{-1}(0)$ de un mapeo continuo (α-veces) diferenciable

$$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^{n-k}$$

con rango máximo, es decir, $rank(J_x F|_x) = n - k$ para cada $x \in M \cap U$, donde $M \cap U = F^{-1}(0)$ se cumple para una vecindad de U, para cada punto en M.
Localmente, también podemos describir a M como la imágen de una inmersión (ver definición 4) de clase C^{∞}

$$V \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} M \subset \mathbb{R}^n$$

donde $rank(Df) = k$. Dicha f es la parametrización local, y f^{-1} es llamada una *carta* de M.

Definition (Espacio tangente a $\mathbb{R}^n$)

Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el espacio

$$T_x\mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

es llamado el espacio tangente en el punto x (el espacio de todos los vectores tangentes en el punto x). La derivada (o diferencial) Df de un mapeo diferenciable f esta definido como

$$Df|_x : T_x\mathbb{R}^k \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad (x, v) \mapsto (f(x), J_x f(v)).$$

Definition

Una inmersión es un mapeo diferenciable entre subvariedades diferenciables donde su derivada es inyectiva. Explicitamente, $f : M \to N$ es una inmersión si

$$D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$$

es un mapeo inyectivo para toda $p \in M$. De forma equivalente, f es una inmersión si su derivada tiene rango igual a $\dim M$:

$$rank D_p f = \dim M.$$

Definition (Espacio tangente a una subvariedad)

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad k-dimensional, y sea $p \in M$. El espacio tangente a M en el punto p es el subespacio vectorial $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$, el cual se define como

$$T_pM := Df_u(\{u\} \times \mathbb{R}^k) = Df_u(T_u\mathbb{R}^k)$$

para una parametrización $f : U \to M$ con $f(u) = p$, donde $U \subset \mathbb{R}^k$ es un conjunto abierto.