

Espacios Tangentes

El concepto abstracto de curva en \mathbb{R}^2 y variedad en \mathbb{R}^n

Joaquín González Cervantes

joaquin@yandex.com

5 de enero de 2017

¿De qué trata?

- Definir el concepto de variedad k -dimensional en \mathbb{R}^n y su espacio tangente asociado a un punto.
- Determinar la dimensión de $T_p N$.
- Interpretar una curva en el plano como un caso especial de variedad utilizando el Teorema de la Función Implícita.
- Analizar el espacio tangente de una curva como un caso particular del espacio tangente asociado a una variedad.

Surge el vector



Hamilton (1843)



Grassmann (1844)

Definición

Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es un mapeo

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

para algún intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$.

Caracol de Pascal

El caracol de Pascal es la curva parametrizada

$$c(t) = ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

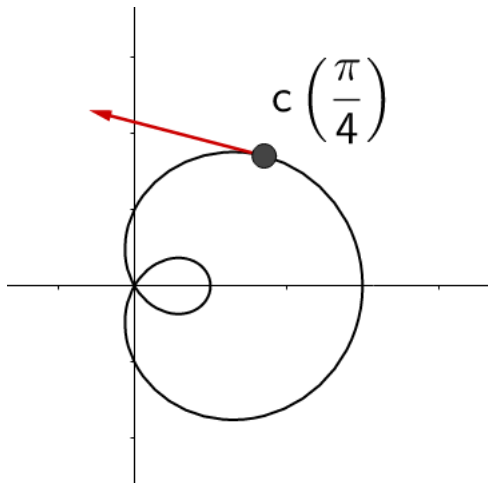
El vector tangente es

$$c'(t) = (-\sin t - 4 \cos t \sin t, \cos t + 4 \cos^2 t - 2)$$

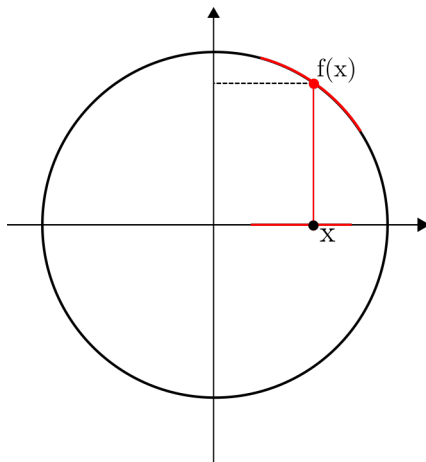
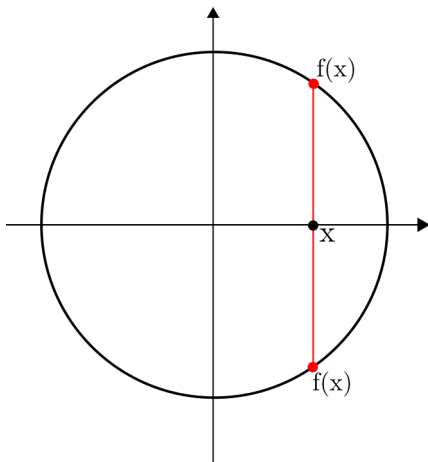
En particular,

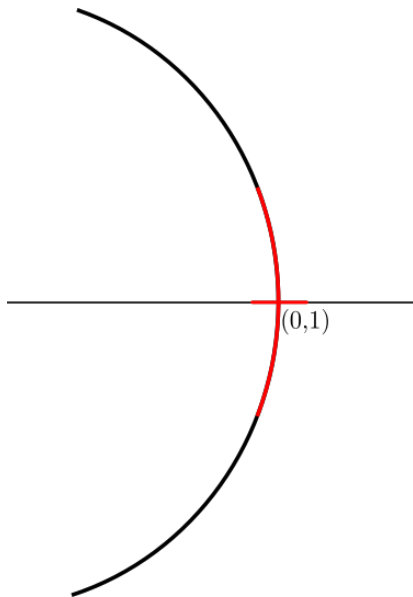
$$c'(\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Caracol de Pascal



$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$





Teorema (Teorema de la función implícita)

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y sea $F(\mathbf{x}, y) \in C^1$ en una vecindad de (\mathbf{x}_0, y_0) tal que

① $F((\mathbf{x}_0, y_0)) = 0$

② $\frac{\partial F}{\partial y}((\mathbf{x}_0, y_0)) \neq 0$

entonces existe una vecindad de (\mathbf{x}_0, y_0) en donde existe una función implícita $y = f(\mathbf{x})$ tal que

I. $f(\mathbf{x}_0) = y_0$

II. $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$

III.
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}$$

Definición (1-variedad)

Una variedad 1-dimensional (de clase C^α) $M \subset \mathbb{R}^n$ está definida por la condición de que M está dada localmente como el conjunto cero $F^{-1}(0)$ de un mapeo continuo (α -veces) diferenciable

$$U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

con rango máximo, es decir, $\text{rank}(J_x F) = 1$ para cada $x \in M \cap U$, donde $M \cap U = F^{-1}(0)$ se cumple para una vecindad de U , para cada punto en M .

Definición (1-variedad)

Una variedad 1-dimensional (de clase C^α) $M \subset \mathbb{R}^n$ está definida por la condición de que M está dada localmente como el conjunto cero $F^{-1}(0)$ de un mapeo continuo (α -veces) diferenciable

$$U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

con rango máximo, es decir, $\text{rank}(J_x F) = 1$ para cada $x \in M \cap U$, donde $M \cap U = F^{-1}(0)$ se cumple para una vecindad de U , para cada punto en M .

Localmente, también podemos describir a M como la imagen de una inmersión de clase C^α

$$V \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} M \subset \mathbb{R}^2$$

donde $\text{rank}(Df) = k$. Dicha f es la parametrización local, y f^{-1} es llamada una *carta* de M .

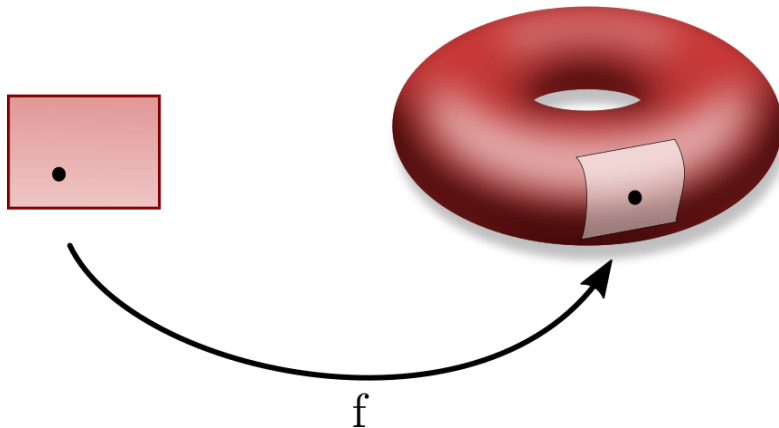
Definición (Espacio tangente a \mathbb{R}^n)

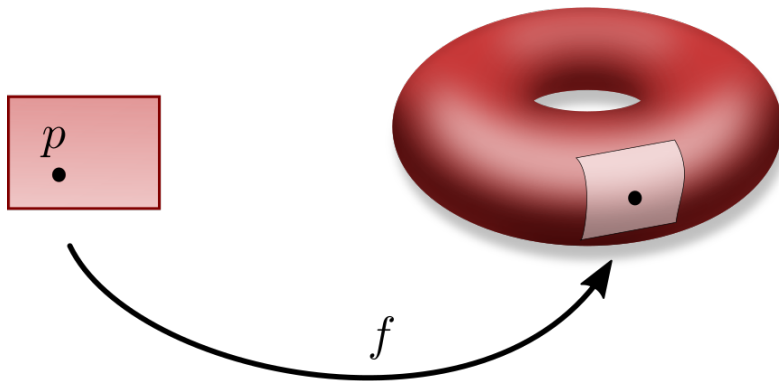
Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el espacio

$$T_x \mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

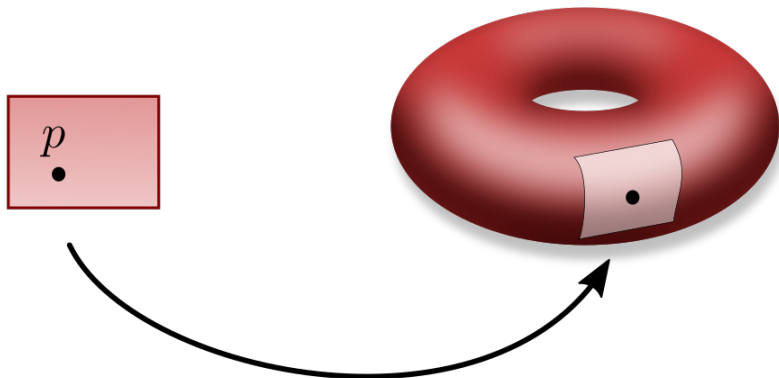
es llamado el espacio tangente en el punto x (el espacio de todos los vectores tangentes en el punto x). La derivada (o diferencial) Df de un mapeo diferenciable f está definido como

$$Df|_x : T_x \mathbb{R}^k \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad (x, v) \mapsto (f(x), J_x f(v)).$$



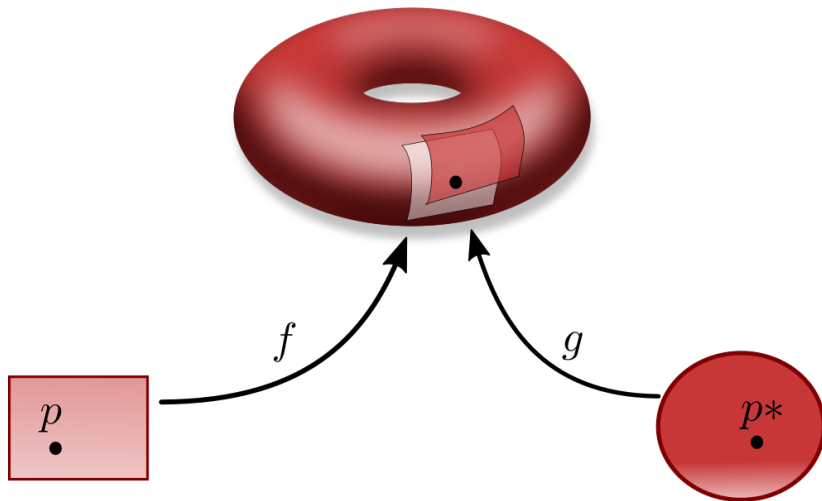


$$D_p f : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^3$$



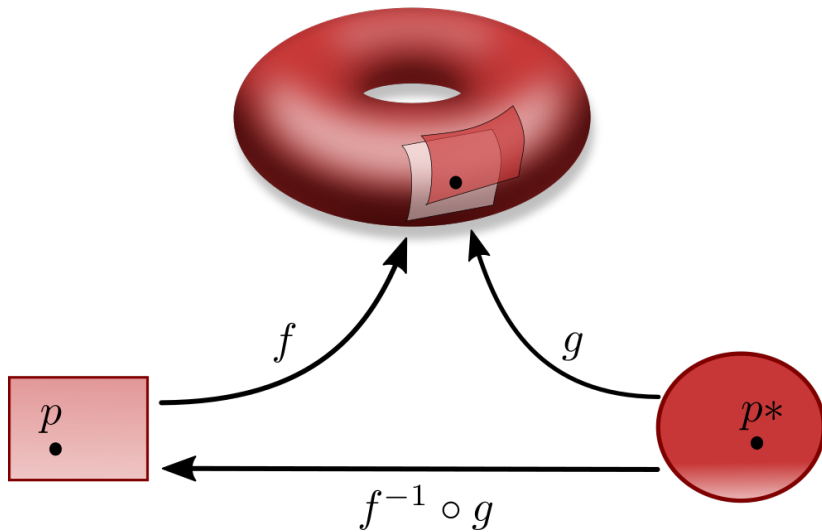
$$T_p M := Df_u(\{u\} \times \mathbb{R}^2) = Df_u(T_u \mathbb{R}^2)$$

$$f(u) = p$$



Proposición

El espacio vectorial $T_p M$ es k -dimensional y no depende de la elección de f .



Bibliografía

- Kuhnel Wolfgang. (2006). Differential Geometry. AMS.
- Lang, S. (1970). Introduction to Linear Algebra. Springer.
- Marsden Jerrold E., A. J. T. (1991). Cálculo Vectorial. Addison-Wesley.
- Pressley Andrew. (2012). Elementary Differential Geometry. Springer.
- Thompson, S. P. (1910). Calculus Made Easy. The Macmillan Company.
- MacTutor, (2016, Septiembre 26),
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html>
- MacTutor, (2016, Septiembre 26),
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html>

Definición

Una inmersión es un mapeo diferenciable entre variedades donde su derivada es inyectiva. Explícitamente, $f : M \rightarrow N$ es una inmersión si

$$D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

es un mapeo inyectivo para toda $p \in M$. De forma equivalente, f es una inmersión si su derivada tiene rango igual a $\dim M$:

$$\text{rank} D_p f = \dim M.$$