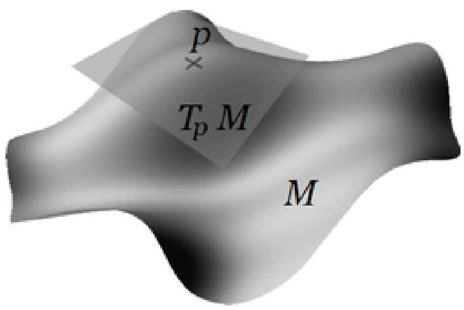
ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA



Una introducción a superficies en $\mathbb{R}^3$ y variedades en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

Cuando consideramos una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se tiene que f es diferenciable en a si la derivada de f en a existe, es decir $f'(a)$ existe. En este caso, el espacio tangente a f en a es una línea recta, esto es un espacio vectorial de dimensión 1. En general, si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, se tiene que f es continua en a si existe una matriz T tal que

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - T(x) \cdot h\| = 0$$

Cuando f es diferenciable, el espacio tangente está bien determinado y es un espacio vectorial de dimensión n.
Sin embargo cuando f no es diferenciable en a, ¿Cómo determinamos el espacio tangente?, ¿Qué dimensión tiene?, ¿Que relación existe entre la dimensión del espacio tangente y la dimensión del espacio normal?.
Estas preguntas pueden ser extendidas a espacios mas generales como las variedades. En el presente texto nos introduciremos al concepto de variedad y espacio tangente asociado a una variedad.

JUSTIFICACIÓN

Es común ver en los estudiantes de cálculo clásico una deficiencia en el concepto de que es una superficie (variedad) y como tiene su propio cálculo diferencial estrictamente comparable con el cálculo familiar en el plano.[1]
Esta exposición provee la noción de variedades diferenciables, la cual es indispensable en algunas ramas de las Matemáticas y sus aplicaciones basadas en el cálculo.

OBJETIVOS

El objetivo de este texto es definir de manera general el concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$ y variedad en $\mathbb{R}^n$. Determinar el plano tangente de una superficie en $\mathbb{R}^3$ (variedad en $\mathbb{R}^n$). Determinar la dimensión del espacio tangente a una superficie (variedad) en un punto p. Definir el concepto de curvatura; con este estudio se darán algunos ejemplos de cálculo de curvatura y su aplicación a la Física.

REQUISITOS PREVIOS Y NOTACIÓN

Suponemos que el lector ha estudiado cálculo de funciones de una variable real, incluida la geometría analítica en el plano, asi como nociones de teoría matricial y álgebra lineal en especial transformaciones lineales. También suponemos que el lector esta familiarizado con funciones del cálculo elemental, como $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x y $\ln(x)$.

1 Mas adelante veremos como el último es consecuencia del primero.

En caso de no estar familiarizado vease el ápendice { incluir apendice }.
Ahora enunciaremos las notaciones que usaremos, esto se puede leer rápidamente o saltarse y después volver si fuera necesario.
A la colección de numeros reales la denotaremos $\mathbb{R}$. Cuando escribimos $a \in \mathbb{R}$ nos referimos que a es un elemento del conjunto $\mathbb{R}$, es decir, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$, podemos formar el intervalo cerrado $[a, b]$ formado por todos los x tales que $a \leqslant x \leqslant b$, y el intervalo abierto (a, b) formado por todos los x tales que $a < x < b$.
Si escribimos $A \subset \mathbb{R}$, nos referimos a que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$. El símbolo $A \cup B$ significa la unión de A y B, esto es, los elementos que están tanto en A como en B. Escribimos $A \cap B$, que significa la intersección de A y B, esto es, los elementos de A y B que están tanto en A como en B. A B lo usamos para denotar elemento de A que no están en B.
Una función $f : A \mapsto B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento especifico $f(a)$ de B. Que la función f mande a a $f(a)$ se denota por $a \mapsto f(a)$.
{Incluir imagenes de funciones e intervalos}

Parte I

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson, Calculus Made Easy (1910)

1 VECTORES

El concépto de vector es básico para el estudio de funciones de varias variables. Da una motivación geométrica para todo lo que veremos. En esta sección platicaremos sobre algunas propiedades del vector que necesitaremos para las secciones siguientes.
Una propiedad significativa de todos los enunciados y demostraciones de esta seccion es que aplican facilmente para 2-dimensión, 3-dimensión y n-dimensión.

UN PUNTO EN EL ESPACIO

Sabemos que un número puede ser usado para representar un punto en una línea, siempre y cuando se elija una unidad de longuitud. Un par de números (un par ordenado) (x, y) puede ser usado para representar un punto en un plano.
imagen
Ahora observemos que (x, y, z) puede ser usado para representar un punto en el espacio, esto es un punto en 3-dimensión, o 3-espacio. Simplemente agregamos un nuevo eje.
imagen
En vez de usar x, y, z podemos usar (x_1, x_2, x_3). A la línea se le puede llamar 1-espacio y al plano, naturalmente, 2-espacio.
Aunque no podemos dibujar un punto en 4-espacio, no hay nada que nos prevenga considerarlo, una cuarteta de números

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

es un punto en 4-espacio. Una quinteta seria un punto en 5-espacio, si continuamos llegamos a la siguiente definición.

Definición 1.1.1 *Un punto en n-espacio es una n-tupla ordenado de números*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con n un entero positivo.

La mayoria de nuestros ejemplos serán para los casos $n = 2$, $n = 3$. Así podremos visualizarlos facilmente a lo largo de este texto. Pero nuestras definiciones y demostraciones comunmente serán para n-espacio y así cubrir ambos casos. Cabe mencionar que el caso $n = 4$ ocurre en física.
La idea de tomar al tiempo como cuarta coordenada es vieja. Ya desde la *Encyclopédie* de Diderot, en el siglo XVIII, d'Alembert escribe en su artículo sobre dimensión:

La manera de considerar cantidades con mas de tres dimensiones es tan natural como los otros casos, porque las letras algebraicas siempre pueden ser vistas como representación de números, ya sean racionales o no. Antes mencione que no era posible concivir mas de tres dimensiones. Un caballero astuto de quien soy íntimo cree lo contrario, que podria tomarse a la duración como la cuarta dimensión. Esta idea puede ser discutida, pero para mí, tiene su mérito por el solo hecho de ser nueva.

Encyplopédie, Vol.4 (1754), p. 1010