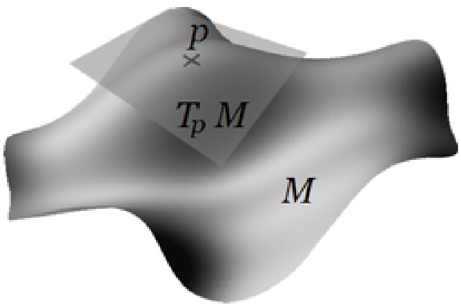
ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA



Una introducción a superficies en $\mathbb{R}^3$ y variedades en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

Cuando consideramos una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se tiene que f es diferenciable en a si la derivada de f en a existe, es decir $f'(a)$ existe. En este caso, el espacio tangente a f en a es una línea recta, esto es un espacio vectorial de dimensión 1. En general, si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, se tiene que f es continua en a si existe una matriz T tal que

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - T(x) \cdot h\| = 0$$

Cuando f es diferenciable, el espacio tangente está bien determinado y es un espacio vectorial de dimensión n.
Sin embargo cuando f no es diferenciable en a, ¿Cómo determinamos el espacio tangente?, ¿Qué dimensión tiene?, ¿Que relación existe entre la dimensión del espacio tangente y la dimensión del espacio normal?.
Estas preguntas pueden ser extendidas a espacios mas generales como las variedades. En el presente texto nos introduciremos al concepto de variedad y espacio tangente asociado a una variedad.

JUSTIFICACIÓN

Es común ver en los estudiantes de cálculo clásico una deficiencia en el concepto de que es una superficie (variedad) y como tiene su propio cálculo diferencial estrictamente comparable con el cálculo familiar en el plano.[1]
Esta exposición provee la noción de variedades diferenciables, la cual es indispensable en algunas ramas de las Matemáticas y sus aplicaciones basadas en el cálculo.

OBJETIVOS

El objetivo de este texto es definir de manera general el concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$ y variedad en $\mathbb{R}^n$. Determinar el plano tangente de una superficie en $\mathbb{R}^3$ (variedad en $\mathbb{R}^n$). Determinar la dimensión del espacio tangente a una superficie (variedad) en un punto p. Definir el concepto de curvatura; con este estudio se darán algunos ejemplos de cálculo de curvatura y su aplicación a la Física.

REQUISITOS PREVIOS Y NOTACIÓN

Suponemos que el lector ha estudiado cálculo de funciones de una variable real, incluida la geometría analítica en el plano, asi como nociones de teoría matricial y álgebra lineal en especial transformaciones lineales. También suponemos que el lector esta familiarizado con funciones del cálculo elemental, como $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x y $\ln(x)$.

1 Mas adelante veremos como el último es consecuencia del primero.

En caso de no estar familiarizado vease el ápendice { incluir apendice }.
Ahora enunciaremos las notaciones que usaremos, esto se puede leer rápidamente o saltarse y después volver si fuera necesario.
A la colección de numeros reales la denotaremos $\mathbb{R}$. Cuando escribimos $a \in \mathbb{R}$ nos referimos que a es un elemento del conjunto $\mathbb{R}$, es decir, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$, podemos formar el intervalo cerrado $[a, b]$ formado por todos los x tales que $a \leqslant x \leqslant b$, y el intervalo abierto (a, b) formado por todos los x tales que $a < x < b$.
Si escribimos $A \subset \mathbb{R}$, nos referimos a que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$.
El símbolo $A \cup B$ significa la unión de A y B, esto es, los elementos que están tanto en A como en B. Escribimos $A \cap B$, que significa la intersección de A y B, esto es, los elementos de A y B que están tanto en A como en B. A B lo usamos para denotar elemento de A que no están en B.
Una función $f : A \mapsto B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento especifico $f(a)$ de B. Que la función f mande a a $f(a)$ se denota por $a \mapsto f(a)$.
{Incluir imagenes de funciones e intervalos}

Parte I

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson, Calculus Made Easy (1910)

1

DIFERENCIACIÓN

El propósito de este primer capítulo es establecer el lengüaje y notación matemática que usaremos en este texto. Mucho de lo que veremos es simplemente una revisión del cálcuo elemental, especialmente diferenciación de funciones.

EL ESPACIO EUCLIDEO

El espacio euclidiano es frecuentemente usado en matemáticas sin ser formalmente definido. Al observar la esquina de un salón se puede ver el proceso familiar con el que se describen los ejes cartesianos y como la medida de tres números describen la posición de un punto. Aquí, en vez de decir que tres números describen la posición de un punto, los definimos como el punto mismo.

Definición 1.1.1 $\mathbb{R}^3$ *es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales. El par* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ *es llamado un* punto *de* $\mathbb{R}^3$.

En álgebra lineal se muestra como $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre los números reales. De hecho si $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ son puntos en $\mathbb{R}^3$, su suma es el punto

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

El múltiplo escalar del punto $\boldsymbol{p}$ por un número real a es el punto

$$a\boldsymbol{p} = (ap_1, ap_2, ap_3)$$

Estas dos operaciones satisfacen los axiomas de un espacio vectorial. Al punto $0 = (0, 0, 0)$ lo llamamos el *origen* de $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.1.2 *Sean* x, y, *y* z *funciones reales en* $\mathbb{R}^3$ *tales que para cada punto* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$x(\boldsymbol{p}) = p_1, \quad y(\boldsymbol{p}) = p_3, \quad z(\boldsymbol{p}) = p_3$$

De cuaterniones a vectores

Los vectores como los conocemos nacieron en las primeras dos decadas del siglo IXX con la representación geométrica de los números complejos. En 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) mostró que los números complejos podian ser considerados abstractamente como pares ordenados (a, b) de números reales. Esta idea era parte

de una investigación para encontrar una forma de representar "números"de dos dimensiones en tres dimensiones, nadie logró hacerlo preservando las propiedades básicas de los reales y complejos.
Después de mucha frustración, Hamilton dejó su busqueda del tal sistema númerico de tres dimensiones e inventó uno de cuatro dimensiones, lo llamó cuaterniones. Los cuaterniones de Hamilton se denotaban $q = w + ix + jy + kz$, donde, w,x,y y z eran números reales.
Aunque los cuaterniones fueron fuertemente aceptados por varios científicos, entre ellos Maxwell y Lord Kelvin, tenian un problema que incomodaba a los matemáticos. El producto de cuaterniones no es conmutativo ni homogeneo , es decir, $pq = -qp$.

Figura 1: Hamilton

En el tiempo que Hamilton descubrió los cuaterniones, Hermann Grassmann (1809-1867) estaba escribiendo "The Calculus of Extension (1844)", mejor conocido por su título en alemán, Ausdehnungslehre. En 1832 Grassmann comenzó el desarrollo de un nuevo cálculo geométrico y subsecuentemente usó este estudio para simplificar porciones de dos trabajos clásicos, Analytical Mechanics de Joseph Louis Lagrange y Celestial Mechanics de Pierre Simon Laplace. En su libro, Grassmann por primera vez expande la idea del concepto de un vector (como $ix + jy + kz$ de los cuaterniones) de dos a tres y n dimensiones, lo cual expandios la idea de dimensión de un espacio.

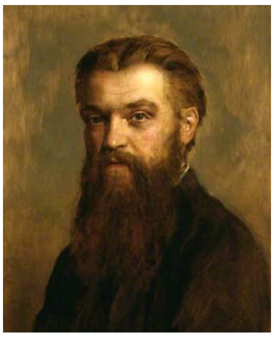


Figura 2: Clifford

William Kingdon Clifford (1845 - 1879) expresó profunda admiración por la obra de Grassmann, y claramente favoreció a los vectores sobre los cuaterniones. Clifford separó el producto de dos cuaterniones en dos productos diferentes de vectores, los cuales llamó producto escalar y producto vectorial, solucionando el problema del producto de cuaterniones.
El desarrolo del álgebra de vectores y análisis vectorial como lo conocemos hoy día fue descrito en un conjunto de notas por el matemático J. Williard Gibbs (1839-1903) para sus estudiantes de la Universidad de Yale.

límites y continuidad

Esta sección está centrada en los conceptos de conjunto abierto, límite y continuidad; los conjuntos abiertos son necesarios para entender los límites y, a su vez, los límites son necesarios para entender continuidad y diferenciabilidad.

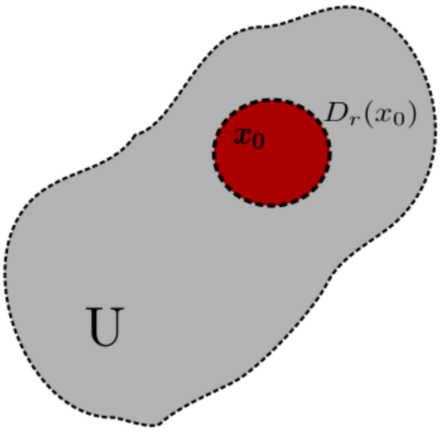


Figura 3

Además establecemos la convención de que el conjunto vacio $\emptyset$ es abierto.

Teorema 1.2.1 *Para cada $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, $D_r(\boldsymbol{x}_0)$ es un conjunto abierto.*

Demostración Sea $\boldsymbol{x} \in D_r(\boldsymbol{x}_0)$, esto es, sea $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r$. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\boldsymbol{x}) \subset D_r(\boldsymbol{x}_0)$. Sea $s = r - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$, nótese que $s > 0$, pero que s se hace más chico si $\boldsymbol{x}$ está cerca del borde $D_r(\boldsymbol{x}_0)$
Para probar que $D_s(\boldsymbol{x}) \subset D_r(\boldsymbol{x}_0)$, sea $\boldsymbol{y} \in D_s(\boldsymbol{x})$; esto es, sea $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < s$. Queremos probar que también $\boldsymbol{y} \in D_r(\boldsymbol{x}_0)$. Probar esto en vista de la definición de un r-disco, equivale a demostrar que $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\| < r$. Usemos la desigualdad del triángulo para esto

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\| &= \|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \\ &= r \end{aligned}$$

De aquí que $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\| < r$. ∎

Definición 1.2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ es punto frontera de A si toda vecindad de $\boldsymbol{x}$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto fuera de A.*

En esta definición, $\boldsymbol{x}$ puede estar o no en A; si $\boldsymbol{x} \in A$, entonces $\boldsymbol{x}$ es un punto frontera si toda vecindad de $\boldsymbol{x}$ contiene al menos un punto que no esté en A. De manera análoga, si $\boldsymbol{x}$ no está en A, es un punto frontera si toda vecindad de $\boldsymbol{x}$ contiene al menos un punto de A.

Figura 4

Ya estamos en posición de definir un límite. Durante toda la exposición siguiente, el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A. Nos interesa hallar el límite de f cuando $\boldsymbol{x} \in A$ tienda a un punto de A o a un punto frontera de A.
El concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y de especial interes en este texto, derivadas parciales.

Definición 1.2.3 (Límite) *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\boldsymbol{x}_0$ un punto de A o en la frontera de A, y sea V una vecindad de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Decimos que f está en V conforme $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x}_0$ si existe una vecindad U de $\boldsymbol{x}_0$ tal que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x} \in U$ y $\boldsymbol{x} \in A$ implica $f(x) \in V$. Decimos que $f(x)$ tiende a $\boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x}_0$, es decir*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(x) = b$$

Del cálculo de una variable sabemos que el concepto de función continua está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin romper, esto es, una curva sin saltos (una curva suave).
{ Añadir ejemplos de funciones continuas y no continuas }

Definición 1.2.4 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Decimos que f es continua en $\boldsymbol{x}_0$ si y sólo si*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

DERIVADAS PARCIALES