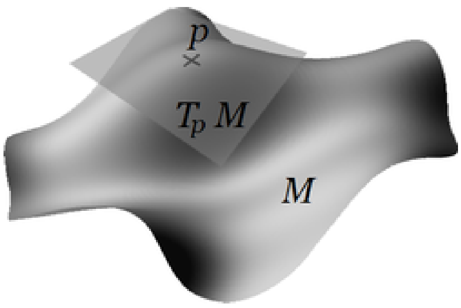
ESPACIOS TANGENTES

JOAQUÍN GONZÁLEZ CERVANTES
ASESOR: DR. OSBALDO MATA



Una introducción a superficies en $\mathbb{R}^3$ y variedades en $\mathbb{R}^n$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles, otros son muy difíciles. Los que escriben los libros de matemáticas avanzadas pocas veces se toman la molestia de mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

Silvanus P. Thompson, Calculus Made Easy (1910)

1 INTRODUCCIÓN

Cuando consideramos una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se tiene que f es diferenciable en a si la derivada de f en a existe, es decir $f'(a)$ existe. En este caso, el espacio tangente a f en a es una línea recta, esto es un espacio vectorial de dimensión 1. En general, si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, se tiene que f es continua en a si existe una matriz T tal que

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - T(x) \cdot h\| = 0$$

Cuando f es diferenciable, el espacio tangente está bien determinado y es un espacio vectorial de dimensión n.
Sin embargo cuando f no es diferenciable en a, ¿Cómo determinamos el espacio tangente?, ¿Qué dimensión tiene?, ¿Que relación existe entre la dimensión del espacio tangente y la dimensión del espacio normal?.
Estas preguntas pueden ser extendidas a espacios mas generales como las variedades. En el presente texto nos introduciremos al concepto de variedad y espacio tangente asociado a una variedad.

OBJETIVOS

El objetivo de este texto es definir de manera general el concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$ y variedad en $\mathbb{R}^n$. Determinar el plano tangente de una superficie en $\mathbb{R}^3$ (variedad en $\mathbb{R}^n$). Determinar la dimensión del espacio tangente a una superficie (variedad) en un punto p. Definir el concepto de curvatura; con este estudio se darán algunos ejemplos de cálculo de curvatura y su aplicación a la Física.

JUSTIFICACIÓN

Es común ver en los estudiantes de cálculo clásico una deficiencia en el concepto de que es una superficie (variedad) y como tiene su propio cálculo diferencial estrictamente comparable con el cálculo familiar en el plano.[1]
Esta exposición provee la noción de variedades diferenciables, la cual es indispensable en algunas ramas de las Matemáticas y sus aplicaciones basadas en el cálculo.

1 Mas adelante veremos como el último es consecuencia del primero.

REQUISITOS PREVIOS Y NOTACIÓN

Suponemos que el lector ha estudiado cálculo de funciones de una variable real, incluida la geometría analítica en el plano, asi como nociones de teoría matricial y álgebra lineal en especial homomorfismos. También suponemos que el lector esta familiarizado con funciones del cálculo elemental, como $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x y $\ln(x)$. En caso de no estar familiarizado vease el ápendice { incluir apendice }.

Ahora enunciaremos las notaciones que usaremos, esto se puede leer rápidamente o saltarse y después volver si fuera necesario.

A la colección de numeros reales la denotaremos $\mathbb{R}$. Cuando escribimos $a \in \mathbb{R}$ nos referimos que a es un elemento del conjunto $\mathbb{R}$, es decir, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$, podemos formar el intervalo cerrado $[a, b]$ formado por todos los x tales que $a \leqslant x \leqslant b$, y el intervalo abierto (a, b) formado por todos los x tales que $a < x < b$.

Si escribimos $A \subset \mathbb{R}$, nos referimos a que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$. El símbolo $A \cup B$ significa la unión de A y B, esto es, los elementos que están tanto en A como en B. Escribimos $A \cap B$, que significa la intersección de A y B, esto es, los elementos de A y B que están tanto en A como en B. A B lo usamos para denotar elemento de A que no están en B.

Una función $f : A \mapsto B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento especifico $f(a)$ de B. Que la función f mande a a $f(a)$ se denota por $a \mapsto f(a)$.

{Incluir imagenes de funciones e intervalos}