



Física Computacional

2019/2020

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Folha de Revisões 2

Problema FR2.1: BVP – método do Shooting

Considere um oscilador não harmónico de massa $m = 1.5 \text{ kg}$ e $K = 2 \text{ N/m}$ cuja força restauradora é da forma,

$$F_x(x) = -K x \left(1 + \frac{3}{2} \alpha x \right)$$

A oscilação deste oscilador tem amplitudes diferentes para valores de x positivos e negativos. Considere que em $t = 0$, $x = 1.9 \text{ m}$ e $v = 0 \text{ m/s}$ e, usando o método de shooting (que, por sua vez, deve utilizar a função **ode45** do Matlab), ajuste o valor de α (~ -0.2) para que a amplitude negativa seja igual a -1.5 m .

Problema FR2.2: BVP – Transformadas de Fourier discretas

O ficheiro `data.txt` que se encontra na pasta dos trabalhos práticos tem um sinal temporal composto por várias frequências e ruído gaussiano de média zero. A frequência de amostragem foi de 1000 Hz .

- Use as rotinas de Fast Fourier Transform do Matlab para encontrar as frequências (em Hz) presentes no sinal.
- Determine o valor médio da densidade espectral do ruído.

Problema FR2.3: Crank-Nicolson

A equação que descreve a propagação de feixes de luz num meio homogêneo dentro da aproximação paraxial tem uma forma adimensional dada por,

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

Neste trabalho vamos considerar a seguinte equação paraxial

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x)\phi = 0$$

que resulta da adição de um termo que descreve a variação do índice de refração com a variável transversal x . A função $g(x)$ é proporcional à variação do índice de refração relativamente a um valor médio. Aqui usaremos a seguinte expressão:

$$g(x) = -\alpha x^2,$$

que, com α positivo, descreve um meio cujo índice de refração diminui à medida que nos afastamos de $x = 0$. Use inicialmente $\alpha = 0.2$, mas pode variar ligeiramente este valor e verificar as diferenças no resultado final. Considere um feixe gaussiano como condição inicial:

$$\phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

com x entre -20 a 20 e z desde 0 a 16. Considere ϕ igual a zero com $x = -20$ e $x = 20$.

- a) Escreva a equação acima de forma a usar o método de Crank-Nicolson. Escreva a matriz **A** e o vetor **b** do sistema de equações,

$$A\phi = b,$$

- b) Encontre $\phi(x, z)$ usando o método de Crank-Nicolson. Represente graficamente $|\phi(x, z)|$ usando as rotinas do Matlab **mesh** e **contourf**.

Nota: O método de Euler aplicado a esta equação seria sempre instável porque os valores próprios da matriz são imaginários.

Nota de apoio - Problema FR2.3

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x) \phi = 0$$

$$g(x) = -\alpha x^2.$$

Condição inicial:

$$\phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Condição fronteira: ϕ igual a zero em $x = -20$ e $x = 20$.

$$\begin{aligned} \phi(j, n+1) = & \phi(j, n) \\ & + \frac{i \Delta z}{4} \left[\frac{\phi(j-1, n) - 2\phi(j, n) + \phi(j+1, n) + \phi(j-1, n+1)}{(\Delta x)^2} \right. \\ & - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n) + \frac{\phi(j-1, n+1) - 2\phi(j, n+1) + \phi(j+1, n+1)}{(\Delta x)^2} \\ & \left. - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n+1) \right] \end{aligned}$$

Divide-se tudo por $\eta = \frac{i \Delta z}{4(\Delta x)^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(j, n+1)}{\eta} = & \frac{\phi(j, n)}{\eta} \\ & + [\phi(j-1, n) - 2\phi(j, n) + \phi(j+1, n) + \phi(j-1, n+1) \\ & - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n)] \\ & + [\phi(j-1, n+1) - 2\phi(j, n+1) + \phi(j+1, n+1) \\ & - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n+1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\phi(j-1, n+1) + \left(\frac{1}{\eta} + 2 + 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right) \phi(j, n+1) - \phi(j+1, n+1) \\ = \phi(j-1, n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right) \phi(j, n) + \phi(j+1, n) \end{aligned}$$

$$\xi = 2\alpha(\Delta x)^2$$

$$\begin{bmatrix}
\left(\frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(2)^2\right) & -1 & & & & \\
-1 & \left(\frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(3)^2\right) & -1 & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & -1 & \left(\frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(N_x - 2)^2\right) & -1 & \\
& & & -1 & \left(\frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(N_x - 1)^2\right) &
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\phi(2, n+1) \\
\phi(3, n+1) \\
\vdots \\
\phi(N_x - 2, n+1) \\
\phi(N_x - 1, n+1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\phi(1, n+1) + \phi(1, n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(2)^2\right) \phi(2, n) + \phi(3, n) \\
\phi(2, n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(3)^2\right) \phi(3, n) + \phi(4, n) \\
\vdots \\
\phi(N_x - 3, n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(N_x - 2)^2\right) \phi(N_x - 2, n) + \phi(N_x - 1, n) \\
\phi(N_x - 2, n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(N_x - 1)^2\right) \phi(N_x - 1, n) + \phi(N_x, n) + \phi(N_x, n+1)
\end{bmatrix}$$