Física Computacional
2019/2020

Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Trabalho Prático 6

Transformada de Fourier discreta
e sua aplicação na resolução de equações diferenciais

Problema 6.1: Propriedades da transformada de Fourier discreta

Considere um vetor `t = 0:0.1:102.3` e vários vetores $y(t)$ como indicado em baixo. Para todos eles, calcule a transformada de Fourier $Y(\omega)$ usando a rotina `fft` do MATLAB. Use `fftshift` para rearranjar a saída da `fft` de forma que a frequência zero esteja no centro. Escreva um vetor de frequências ω adequado ao seu Δt e faça o gráfico da densidade espetral, calculada a partir de $(\Delta t\,|Y(\omega)|)^2$, em função de ω. Note que a multiplicação por Δt não resulta da definição de densidade espetral, mas sim da maneira (incorreta) como o MATLAB calcula a transformada de Fourier discreta.

a) Use $y = \sin(t)$, $y = \sin(10t)$ e $y = \sin(t) + \sin(10t)$ e verifique se os picos da transformada de Fourier estão nas localizações esperadas.
b) Use $y = \sin(10t) + \sin(40t)$ e verifique o efeito de aliasing. Altere o que for necessário para obter um resultado correto.
c) Volte a usar a amostragem definida no início do enunciado do problema, use $y = \sin(10t) + \sin(10.05t)$ e dê uma explicação para o que observa. Altere o que for necessário para obter um resultado melhor.
d) Use uma função complexa $y = \exp(-i10t) + \exp(i20t)$.

Note que o vetor `t` inicial tem 1024 elementos e este valor não foi escolhido ao acaso. De acordo com a documentação do MATLAB, o algoritmo usado pelas funções `fft` e `ifft` (designado *Fast Fourier Transform*) é mais rápido quando o comprimento dos vetores é uma potência de 2.

Problema 6.2: Resolução da equação paraxial

A equação que descreve a propagação de feixes de luz num meio homogéneo dentro da aproximação paraxial tem uma forma adimensional dada por

$$i\frac{\partial q}{dz} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$

Esta equação escrita no espaço de Fourier é da forma

$$i\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} - \frac{1}{2}k^2\tilde{q} = 0,$$

que é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis, cuja solução é

$$\tilde{q}(z,k) = \tilde{q}(0,k)\exp\left(-\frac{i}{2}k^2 z\right).$$

Considere várias formas do feixe em $z = 0$, nomeadamente:

a) Gaussiana do tipo $q(0,x) = \exp(-x^2/2)$.

b) Secante hiperbólica do tipo $q(0,x) = \operatorname{sech}(x)$.

Determine o perfil do feixe em vários valores de z, até $z = 4$. Faça um gráfico da evolução de $|q|^2$, usando, por exemplo, o comando `mesh`. Em todos os casos, crie um vetor para x e outro para k que correspondam a um par de transformadas discretas. O vetor k deve ter o valor de zero no centro. Crie $q(z_1 = 0, x)$, determine a sua transformada de Fourier, use **`fftshift`** para que esta fique de acordo com o vetor k. Calcule $\tilde{q}(z_2, k)$ usando a equação acima, use **`ifftshift`** para que fique de novo na forma de saída de uma TF do MATLAB e determine a sua transformada de Fourier inversa usando a rotina **`ifft`**. Pode fazer um ciclo com instruções deste tipo para obter $q(z,x)$ em vários pontos ao longo do intervalo pretendido.

Problema 6.3 (facultativo): Resolução da equação não linear de Schrödinger

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogéneo, mas no qual o índice de refração varia com a intensidade do feixe, isto é, $n = n_1 + n_2 I$, a equação adimensional que descreve a propagação é:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0,$$

que, rearranjada no espaço de Fourier, fica na forma

$$\frac{\partial\left(\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2 z/2}\right)}{\partial z} = \tilde{V}\mathrm{e}^{ik^2 z/2}, \qquad \tilde{V} = \mathrm{TF}(i|q|^2 q).$$

Considere um feixe inicial do tipo $q(0,x) = \operatorname{sech}(x)$ e determine a sua evolução até $z = 4$.

Pode usar um método de Runge-Kutta (usando a rotina `ode45`) para integrar esta equação, mas com alguns cuidados:

a) Parta de um vetor x e respetivo $q(z_i = 0, x)$ com N elementos.
b) Crie o vetor k da mesma forma que no problema anterior.
c) Prepare o uso da rotina `ode45`

```
abstol=ones(1,N);
abstol=1e-9.*abstol;
options= odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',abstol);
```

d) A função que a rotina `ode45` vai usar pode ser do tipo:

```
function derivadas=nonlinear(z,qtexp,N,k)
derivadas=zeros(N,1)
qt=qtexp./(exp(1i.*k.^2*z/2).');
q=ifft(ifftshift(qt));
V=i.*q.*q.*conj(q);
VT=fftshift(fft(V));
derivadas=VT.*(exp(1i.*k.^2*z/2).');
```

e) Inicialmente calcule a transformada de Fourier de $q(z_i, x)$ e faça um `fftshift`.
f) Multiplique o resultado anterior por $\exp(ik^2 z_i/2)$, obtendo a condição inicial para a `ode45`.
g) Pode chamar a rotina `ode45` com os parâmetros N e k da forma

```
[z,qtexp]=ode45(@nonlinear,[zi zf],[qtexp0],options,N,k);
```

h) Deve multiplicar a matriz `qtexp` que sai da rotina por $e^{-ik^2 z/2}$, usar um `ifftshift` e calcular a transformada de Fourier inversa para obter $q(z, x)$.
i) Faça um gráfico da evolução de $|q|^2$ ao longo de z.

Deve observar que este feixe não alarga. Esta equação modela a propagação paraxial de feixes na presença de difração (que existe sempre) e do efeito de Kerr (índice de refração a variar com a intensidade do feixe). Para algumas intensidades e forma da envolvente igual a uma secante hiperbólica, o feixe não sofre nenhuma alteração de forma ao longo da propagação porque o efeito não linear compensa de forma exata a difração.

09/04/2020