Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Física Computacional
2019/2020

Trabalho Prático 2

Métodos implícitos e semi-implícitos para ODE
Oscilador harmónico simples e oscilador não harmónico
Órbita de Mercúrio

Problema 2.1: Oscilador harmónico simples

a) Encontre a solução numérica do movimento harmónico simples, recorrendo ao método de Euler para encontrar $x(t)$ e $v_x(t)$, sabendo que $x(0) = 1\,\text{m}$, $v_x(0) = 0\,\text{m/s}$, $K = 1\,\text{N/m}$ e $m = 1\,\text{kg}$. Compare com a solução analítica. Represente graficamente x e v_x em função do tempo e também v_x em função de x. Para verificar a estabilidade das soluções, calcule a energia mecânica total.

b) Os resultados da alínea anterior mostram que o método de Euler, como sabia, não é apropriado para estudar um sistema oscilatório. Repita a alínea usando o método de Euler–Cromer.

c) Repita a alínea a) usando o método de Euler implícito. Quais são as alterações observadas relativamente aos resultados obtidos nos métodos anteriores?

d) Repita mais uma vez a alínea a), usando agora o método dos trapézios ou de Crank–Nicolson. Comente os resultados.

e) Usando o método de Euler–Cromer ou o de Crank–Nicolson, determine a amplitude e o período do movimento. Compare com os valores da solução analítica. Sugestão: faça uma lista dos pontos (t_k, x_k) tais que $x_{k-1} \leq x_k \geq x_{k+1}$. Use a função `lagr` para obter, com maior precisão, uma lista de pontos (t, x) que correspondem aos máximos locais de x. Com esta lista, determine valores médios para o período e amplitude.

Problema 2.2: Órbita de Mercúrio

O método de Euler–Cromer pode ser aplicado ao estudo numérico do movimento de corpos celestes. Neste problema, vamos calcular a órbita do planeta Mercúrio. A primeira aproximação que vamos fazer, dada a muito grande diferença entre as massas de Mercúrio, m_M, e do Sol, m_S, é considerar que o Sol se encontra fixo na origem das coordenadas. Assim, apenas temos que calcular a força que atua sobre o planeta:

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_\mathrm{S} m_\mathrm{M}}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,,$$

onde G é a constante gravitacional, r é o módulo do vetor posição $\boldsymbol{r}$ do planeta e $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ é o versor correspondente. Usando o plano xy como o plano da trajetória, a força pode ser escrita como

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_\mathrm{S} m_\mathrm{M}}{r^3}\left(x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right).$$

Para realizar cálculos numéricos com estas grandezas é mais conveniente utilizar unidades astronómicas, de modo a que os valores dos períodos e das distâncias não tenham ordens de grandeza muito afastadas da unidade. A unidade do tempo é o ano (da Terra) e a unidade astronómica de comprimento, AU, é a distância média entre a Terra e o Sol. Nestas unidades, o produto Gm_S é dado simplesmente por $4\pi^2$. Sempre que precisar de obter a coordenada polar angular θ referente a uma posição (x, y), sugere-se que use `mod(atan2(y,x),2*pi)`: assim irá obter um ângulo entre 0 e 2π.

a) Use o método de Euler–Cromer para representar graficamente uma translação completa de Mercúrio em torno do Sol. Não avance para as alíneas seguintes sem confirmar que o seu resultado está correto: deve obter uma elipse com os dois eixos paralelos aos eixos dos xx e dos yy. Sugere-se um $h = 0.0001$ ano. Note-se que se queremos reproduzir corretamente a trajetória, temos que utilizar condições iniciais exatas. Vamos considerar que em $t = 0$ o planeta se encontra no ponto mais longe do Sol, o afélio. A velocidade inicial tem que ter o valor apropriado para que o planeta descreva a elipse desejada. Use $x(t = 0) = 0.47\,\mathrm{AU}$ e $v_y(t = 0) = 8.2\,\mathrm{AU/ano}$. Para que a trajetória não apareça distorcida, é importante desenhar a figura com as proporções certas. Pode fazê-lo usando, por exemplo, os seguintes comandos do MATLAB:

```
axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5])
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1])
```

b) Calcule o período da órbita. Compare com o valor observado.

c) Num intervalo de tempo muito menor que o período, a área varrida pela linha que une o Sol ao planeta é dada aproximadamente por $r^2\Delta\theta/2$. A segunda lei de Kepler afirma que essa área é a mesma para dois intervalos de tempo iguais. Confirme-o, apenas para a primeira metade da órbita, representando graficamente, em função de t, a área varrida em cada intervalo de tempo h.

Problema 2.3: Oscilador quártico

Considere um oscilador quártico de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, $K = 1\,\mathrm{N/m}$ e energia potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2\left(1 + \alpha x^2\right) .$$

A força restauradora é

$$F_x(x) = -Kx\left(1 + 2\alpha x^2\right) .$$

As equações de primeira ordem são:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \\ \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{K}{m}\left(x + 2\alpha x^3\right). \end{cases}$$

a) Use o método de Euler–Cromer e faça os gráficos de x e v_x em função do tempo e também v_x em função de x, quando $\alpha = -0.1\,\mathrm{m}^{-2}$, $x(0) = 1\,\mathrm{m}$ e $v_x(0) = 1\,\mathrm{m/s}$. Obtenha a amplitude e o período da oscilação.

b) Como varia o período com a amplitude? Faça a amplitude variar de 0.1 a 2 m e represente graficamente os resultados.

05/02/2020