Física Computacional
2019/2020

Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Trabalho Prático 4

Aplicação de Métodos de Runge–Kutta — Dinâmica não linear

Problema 4.1: Caos numérico

Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(1 - x^2 - y^2\right) y - x\,. \end{cases}$$

Este sistema possui um atrator circular cujo ciclo limite é dado por $x^2 + y^2 = 1$. Obtenha-o por integração numérica do sistema, para as seguintes condições iniciais $x(0) = 0.01$, $y(0) = 0.01$, passo temporal $h = 0.82$, e um tempo máximo de integração, $t_{\text{fin}} = 25000$:

a) Usando o método de Euler.

b) Usando o método de Runge–Kutta de 4ª ordem.

Repita os cálculos, para ambos os métodos, com $h = 0.1, 0.5$ e 1.0. Comente os resultados.

Problema 4.2: Oscilador de van der Pol

a) Determine numericamente, usando a rotina `ode45`, as soluções do oscilador de van der Pol

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\,(y^2 - 1)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0\,,$$

para três condições iniciais diferentes. Num único gráfico, trace as trajetórias no espaço de fases (y, v). Verifique sempre se existe um ciclo limite e, caso exista, represente-o. Considere os casos $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = 1$.

b) Considere agora que o oscilador de van der Pol, com $\epsilon = 0.3$, é forçado por uma força sinusoidal:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\,(y^2 - 1)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = F_0\cos(1.7t)\,.$$

Caracterize as soluções para $F_0 = 1.0$ e $F_0 = 5.0$. As condições iniciais são $y(0) = 2$ e $v(0) = 0$.

Problema 4.3: Equações de Rössler

Considere as equações de Rössler

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - z\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 0.2y\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0.2 + (x - c)z\,. \end{cases}$$

Determine as soluções para as condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ e $z(0) = -1$, usando a rotina `ode45`. Nas próximas alíneas, quando fizer as figuras, não represente a parte inicial das trajetórias, para ficar mais nítida a forma dos ciclos limite ou atratores estranhos.

a) Encontre a solução das equações para $c = 2.2$. Caracterize essa solução.

b) Repita para $c = 3.5,\ 4.1,\ 5.0,\ 5.2$ e 5.7. Os seus resultados são compatíveis com o diagrama de bifurcações da Apresentação 4?

c) Se designarmos as trajetórias para as condições inicias acima por $\boldsymbol{r}_0$ e as trajetórias de condições inicias ligeiramente diferentes (diferenças de 10^{-3}) por $\boldsymbol{r}$, a diferença da trajetória ao longo do tempo é da forma $\|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t)\| = \left\{[x(t) - x_0(t)]^2 + [y(t) - y_0(t)]^2 + [z(t) - z_0(t)]^2\right\}^{1/2}$. Determine estas duas trajetórias para $c = 2.2$ e faça o gráfico da diferença das trajetórias. Repita para $c = 5.0$. O objetivo desta alínea é verificar as diferentes sensibilidades às condições iniciais das soluções caóticas e das não caóticas.

05/03/2020