Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Física Computacional
2019/2020

Folha de Revisões 1

Problema FR1.1: Oscilador quártico — Método de Crank–Nicolson

Vamos voltar a estudar o oscilador quártico do Problema 2.3 (Problema 3 do Trabalho 2). As propriedades são: massa $m = 1\,\text{kg}$, $K = 1\,\text{N/m}$ e energia potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2\left(1 + \alpha x^2\right) ,$$

com $\alpha = -0.1\,\text{m}^{-2}$. A força restauradora é

$$F_x(x) = -Kx\left(1 + 2\alpha x^2\right) .$$

As equações diferenciais de primeira ordem são:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \,, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{K}{m}\left(x + 2\alpha x^3\right) . \end{cases}$$

Como a segunda equação é não linear, a aplicação do método exige uma abordagem diferente da que foi usada, por exemplo, na alínea d) do Problema 2.1. As equações resultantes da aplicação do método podem ser escritas como

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k - \dfrac{h}{2}(v_{k+1} + v_k) = 0 \,, \\ v_{x,k+1} - v_{x,k} + \dfrac{Kh}{2m}\left[x_k + x_{k+1} + 2\alpha\left(x_k^3 + x_{k+1}^3\right)\right] = 0 \,. \end{cases}$$

Neste problema, em cada passo de Crank–Nicolson, vamos usar um método numérico fornecido pelo MATLAB para determinar os valores de x_{k+1} e $v_{x,k+1}$ que são raízes do sistema escrito acima. No corpo do programa, pode começar por definir um vetor de constantes e as opções para a função `fsolve`

```
const = [h/2, K*h/(2*m), 2*alfa];
options = optimset('Display','off','Tolx',1e-10,'TolFun',1e-10);
```

O ciclo do método de Crank–Nicolson escreve-se

```
for k=1:N-1
   func = @(xv) fcr(xv,x(k),vx(k),const);
   xv0 = [x(k),vx(k)];
   aux = fsolve(func,xv0,options);
   x(k+1) = aux(1);
   vx(k+1) = aux(2);
end
```

Começa-se por definir uma função anónima, baseada numa função escrita num outro ficheiro. Quando se chama a função fsolve, indica-se `xv0 = [x(k), vx(k)]` como os valores perto dos quais deverão ser encontradas as soluções. Falta é claro, escrever o ficheiro `fcr.m`. Complete o seguinte, escrevendo as expressões `F(1)` e `F(2)` que têm que ser iguais a zero, de acordo com o sistema.

```
function F = fcr(xv,xold,vold,const)
  % const(1), const(2) e const(3) estão definidas no programa principal.
   % xold é x(k) e vold é vx(k).
   % xv(1) é x(k+1) e xv(2) é vx(k+1).
   F(1)=_______;
   F(2)=_______;
end
```

Usando as condições iniciais $x(0) = 1$ m e $v_x(0) = 1$ m/s, faça os gráficos de x e v_x em função do tempo e também de v_x em função de x. Obtenha a amplitude e o período da oscilação.

Problema FR1.2: Oscilador quártico — Estimativa de $x(t_{\text{fin}})$

Como foi discutido no início da segunda aula teórica, quando um método para resolução de problemas de ODE com condições iniciais é estável e tem um erro global de ordem n, vem que

$$\left|y_N - y(t_{\text{fin}})\right| = \text{const} \cdot h^n.$$

Assumindo que o desvio é sempre do mesmo sinal,

$$y_N = y(t_{\text{fin}}) \pm \text{const} \cdot h^n.$$

Um gráfico do valor numérico y_N em função de h^n deve ter como ordenada na origem uma estimativa do valor exato $y(t_{\text{fin}})$.

Vamos continuar a estudar o oscilador quártico com as propriedades e as condições iniciais enunciadas nos Problema FR1.1.

a) Sabendo que o método de Euler–Cromer é de ordem 1, use vários valores de h para estimar o valor do deslocamento x para $t_{\text{fin}} = 10\,\text{s}$.

b) Sabendo que o método de Crank–Nicolson é de ordem 2, use vários valores de h para estimar o valor do deslocamento x para $t_{\text{fin}} = 10\,\text{s}$.

Problema FR1.3: Movimento do volante de badminton — Métodos de Runge–Kutta

a) Repita a alínea c) do Problema 1 do Trabalho 1 usando o método de Runge–Kutta de segunda ordem e passo constante que usou no Trabalho 2.

b) Repita a alínea c) do Problema 1 do Trabalho 1 usando o método de Runge–Kutta de terceira ordem e passo constante com a seguinte tabela de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Problema FR1.4: Sistemas dinâmicos e caos

Considere a equação de movimento de um pêndulo amortecido e forçado

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0 \sin(\theta) - q\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + F_D \sin(\omega_D t).$$

Os parâmetros são $\omega_0 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $\omega_D = \frac{2}{3}$ e as condições iniciais $\theta_\mathrm{i} = 0.2$ e $\theta'_\mathrm{i} = 0$.

a) Use a rotina ode45 para integrar a equação até $t = 100$ quando $F_D = 0$, $F_D = 0.1$ e $F_D = 1.2$. Faça gráficos de $\theta(t)$ e da trajetória no espaço de fases em cada um dos casos.

b) No caso $F_D = 0$, encontre os máximos relativos de θ (θ_m) e os tempos para os quais acontecem (t_m). Faça um ajuste linear a $\log(\theta_\mathrm{m}) = b - a\,t_\mathrm{m}$ e compare a com $q/2$.

c) No caso $F_D = 0.1$, calcule a frequência de oscilação após $t = 50$ e compare com ω_D.

d) Que tipo de trajetória obteve no caso $F_D = 1.2$? Justifique.

26/03/2020