Exame Teorico ~~2019~~ 2018 - FC

①

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -a\theta - b\frac{d\theta}{dt}$$

a)
$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -a\theta - b\omega \end{cases}$$

b)
$$\begin{pmatrix} \theta' \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & -b-\lambda \end{vmatrix} = +\lambda(b+\lambda) + a$$
$$= \lambda^2 + b\lambda + a = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4a}}{2} \wedge \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4a}}{2}$$

c)

Sobre amortecimento $\frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

Sub amortecimento $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$

Sobre $\Rightarrow \frac{b^2}{4} > a^2 \Rightarrow b > 2a$

Sub $\Rightarrow \frac{b^2}{4} < a^2 \Rightarrow b < 2a$

Sem amortecimento $\Rightarrow b = 0$

Se não há amortecimento, $b=0$ e

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{-4a}}{2} = \frac{2ia}{2} = ia$$

$$\lambda_2 = -ia$$

Como ambos os valores próprios são puramente imaginários, o método de Euler e RK2 não convergem contudo o método de RK4 converge, desde que:

$$\lambda = \pm ia \geq \pm 2{,}83i$$

Assim, $a \geq 2{,}38$.

Logo é condicionalmente estável para o método RK4.

Sobre amortecimento $b^2 > 4a^2$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$$

Como $b^2 > 4a^2$ então $b^2 - 4a^2 > 0$, logo ambos os valores próprios são reais,
Assim, para o método de Euler e RK2 converge quando

$$-2 \leq \lambda dt \leq 0, \text{ então}$$

Tudo x dt

$$-2 \leq \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} dt \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 - b \leq \pm\sqrt{b^2 - 4a^2} \leq -b$$

$$\Rightarrow (-4 - b)^2 \leq b^2 - 4a^2 \leq b^2$$

$$\Rightarrow b^2 + 8b + 16 \leq b^2 - 4a^2 \leq b^2$$

$$\Rightarrow -8b - 16 \leq 4a^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -2b - 4 \leq a^2 \leq 0$$

Para o método RK4, é estável se

$$-2{,}79 \leq \lambda \leq 0$$

Logo no caso de sobre amortecimento é condicionalmente estável para todos os métodos.

No caso de subamortecimento, $b^2 < 4a^2$, logo os valores próprios são

$$\lambda = \frac{b \pm i\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

Logo os valores são ambos reais e imaginários. Portanto convergem condicionalmente para todos os métodos.

d) Euler implícito

$$f(\theta_n, w_n) = -a\theta_n - bw_n$$

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n - dt(a\theta_{n+1} + bw_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + w_{n+1} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n - dt(a\theta_n + aw_{n+1}dt + bw_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + w_{n+1} dt \end{cases}$$

d)

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{n+1} + a w_{n+1} dt^2 + b w_{n+1} dt = w_n - \ldots \theta_n \\ - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{n+1}(1 + a dt^2 + b dt) = w_n - dt\, a\, \theta_n \\ - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{n+1} = (1 + b dt + a dt^2)^{-1} (w_n - a \theta_n dt) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + w_{n+1} dt \end{cases}$$

e) for n=1: length(t)

w(n+1) = ...

θ(n+1) = ...

end

(2)

$$k(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + k'(x) \frac{d\theta}{dx} = f(x)$$

$$\theta(0) = \alpha \quad ; \quad \theta(L) = \beta$$

b)
a)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\theta(n+1) - 2\theta(n) + \theta(n-1)}{dt^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta(n+1) - \theta(n-1)}{2dt}$$

$$\frac{k(n)}{dt^2}\left(\theta(n+1) - 2\theta(n) + \theta(n-1)\right) + \frac{k'(n)}{2dt}\left(\theta(n+1) - \theta(n-1)\right) = f(n)$$

$$\theta(n+1)\, \frac{2k(n) + dt\, k'(n)}{2dt^2} - \frac{2k(n)}{dt^2}\theta(n) + \frac{2k(n) - k'(n)dt}{2dt^2}\theta(n-1) = f(n)$$

$$\begin{bmatrix} aux2(2) & aux3(2) & 0 & 0 & 0 \\ aux1(3) & aux2(3) & aux3(3) & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & aux1(N-1) & aux2(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(2) \\ \theta(3) \\ \\ \vdots \\ \theta(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(2) - \alpha\, aux1(1) \\ f(n) \\ f(N-1) - \beta\, aux1(N) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} aux1 = \dfrac{2k(n) + dt\, k'(n)}{2dt^2} \\ aux2 = -\dfrac{2k(n)}{dt^2} \\ aux3 = \dfrac{2k(n) - k'(n)dt}{2dt^2} \end{cases}$$

Linha n de A

aux1(n) aux2(n) aux3(n)

c) Sim podíamos usar, um exemplo é a equação de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Uma diferença é que os coeficientes do A e do B não dependem de n.

③

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \; ; \quad D = 1; \; \Delta x = 1, \; \Delta t = 1$$

$u(x,t) \Rightarrow u(i,n)$

a)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(i,n+1) - u(i,n)}{\Delta t}$$

Assim,

$$\frac{u(i,n+1) - u(i,n)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{D}{\Delta x^2}\Big[u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n) + u(i-1,n+1) - 2(i,n+1) + u(i+1,n+1)\Big]$$

$$\Rightarrow u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2}\Big[u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n) + u(i-1,n+1) - 2(i,n+1) + u(i+1,n+1)\Big]$$

b)

$n \rightarrow$

$i \downarrow$

0	0	0	0
1			
1			
1	1	1	1

$$u(2,2) = u(2,1) + \frac{1}{2}\Big[u(1,1) - 2u(2,1) + u(3,1) + u(1,2) - 2u(2,2) + u(3,2)\Big]$$

$$\Rightarrow u(2,2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}u(3,2)$$

$$u(3,2) = u(3,1) + \frac{1}{2}\Big[u(2,1) - 2u(3,1) + u(4,1) + u(2,2) - 2u(3,2) + u(4,2)\Big]$$

$$u(3,2) = 1 + \frac{1}{2}\Big[u(2,2) - 2u(3,2) + 1\Big]$$

$$\begin{cases} u(2,2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} u(3,2) \\ u(3,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} u(2,2) + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ u(3,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} u(3,2)\right) + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(3,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} u(3,2) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{16} u(3,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 15\, u(3,2) = 8 + 2 - 1 + 4$$

$$\Rightarrow u(3,2) = \frac{13}{15}$$

$$u(2,2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{15}$$

$$= \frac{7}{15}$$

c)

$$u(i, n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left[u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n)\right]$$

$$u(\overset{2}{2},\overset{1}{2}) = u(2,1) + \left[u(1,1) - 2u(2,1) + u(3,1)\right]$$

$$u(\overset{3}{3},\overset{1}{2}) = u(3,1) + \left[u(2,1) - 2u(3,1) + u(4,1)\right]$$

$$\begin{cases} u(2,2) = 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \\ u(3,2) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1 \end{cases}$$

d) $$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

$$V(x) = \begin{cases} -\beta(x+\alpha) & x \leq -a \\ 0 & -a < x < +a \\ +\beta(x-\alpha) & x > +a \end{cases} \quad ; \alpha, \beta > 0$$

a) As condições de fronteira de um poço de potencial finito, são

$$\lim_{x \to \pm\infty} \psi(x) = 0.$$

b) Como neste caso o potencial depende de x, temos de usar um x para que a função de onda seja pequena, e para tal o potencial tem de ser elevado, (≈ 20). Assim,

$$V(x) \geq 20$$

$$\Rightarrow \beta(x-a) \geq 20$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{20}{\beta} + a \quad \wedge \quad x \leq -\frac{20}{\beta} - a$$

Tem de ser aumentado quando $\psi(x_{lim})$ for um valor não muito próximo de 0.

c) Método de shooting é fazer a integração numérica com o método de Numerov para a frente e para trás até a um x_{match} = 0,10. Tal que

$$\psi(0) = \psi(N) = 0$$

e que o valor esperado pelo método de shooting B seja 0 e o result(i) seja

$$\frac{\dfrac{\psi'_{frente}(x_{match})}{\psi_{frent}(x_m)} - \dfrac{\psi'_{trás}(x_m)}{\psi_{trás}(x_m)}}{\dfrac{\psi'_{front}(x_m)}{\psi_{frente}(x_m)} + \dfrac{\psi'_{t}(x_m)}{\psi_{t}(x_m)}}$$

d) Para um $x \geq 0$, a zona clássicamente proibida seria quando

$$E < V(x)$$

$$\Rightarrow E < \beta(x-a) \Rightarrow a + \frac{E}{\beta} < x$$

$$\Rightarrow x > \frac{E}{\beta} + a$$