

## Breve introdução aos Métodos de Runge-Kutta

OBS: Não perder de vista que os métodos dados até ao momento, nomeadamente, os Métodos de Euler, Euler-Cromer, Euler Implícito, Crank-Nicolson, têm como objectivo a integração numérica de equações diferenciais ordinárias!

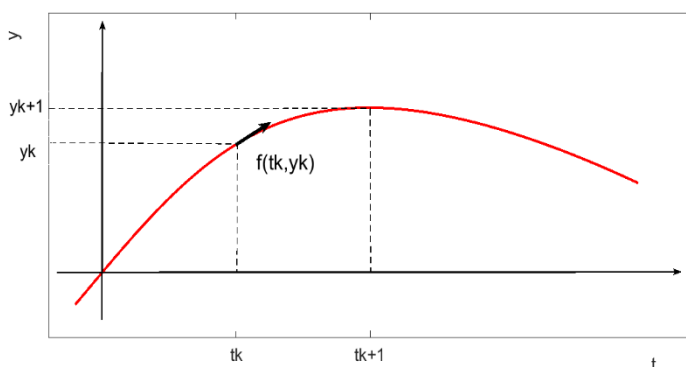
Como ponto de partida considerou-se uma ODE do tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \text{ com uma CI (condição inicial) conhecida.}$$

### Introdução Breve

► Recordemos o Método de Euler...

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) * h \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N-2$$



Pela figura podemos verificar que na iteração  $k$ , entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , a função incremento,

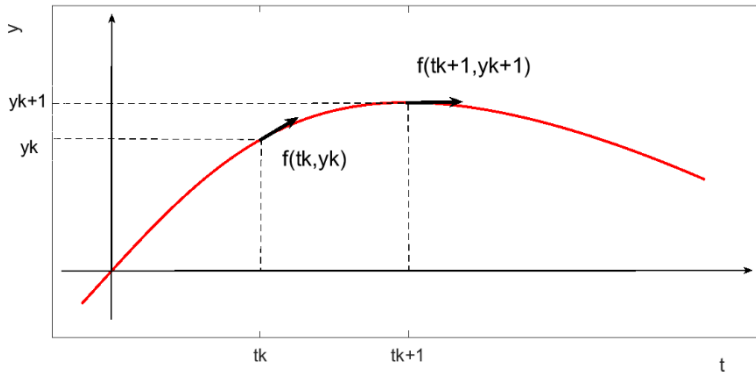
$f(t_k, y_k)$ , (a derivada), é calculada no ponto inicial do intervalo  $(t_k,$

$y_k)$ . Já vimos que essa aproximação vai introduzir erros.

ERRO GLOBAL do método de EULER ►  $O(h)$  !

► E recordemos também o Método de Crank-Nicolson...

$$y_{k+1} = y_k + \left[ f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right] * \frac{h}{2} \quad O(h^2)$$



Neste caso, em cada iteração, a função incremento,  $f(t_k, y_k)$ , (a derivada), é calculada em dois pontos, no ponto inicial  $(t_k, y_k)$  e no

ponto final  $(t_{k+1}, y_{k+1})$  do intervalo. No algoritmo é considerada uma média destes dois valores.

Consequência prática ► ERRO GLOBAL do método de Crank-Nicolson é  $O(h^2)$ !

A precisão aumentou!

E porque não usar a expansão em série de Taylor?

$$\blacksquare y_{k+1} = y_k + h * y'_k + \frac{h^2}{2!} * y''_k + \frac{h^3}{3!} * y'''_k + O(h^4)$$

Mas o cálculo das derivadas de ordem superior é normalmente complexo!

E em alternativa, porque não calcular a função incremento, (a derivada), em vários pontos intermédios? Será que se ganha mais precisão, como no método de Crank-Nicolson?

## Métodos de Runge-Kutta

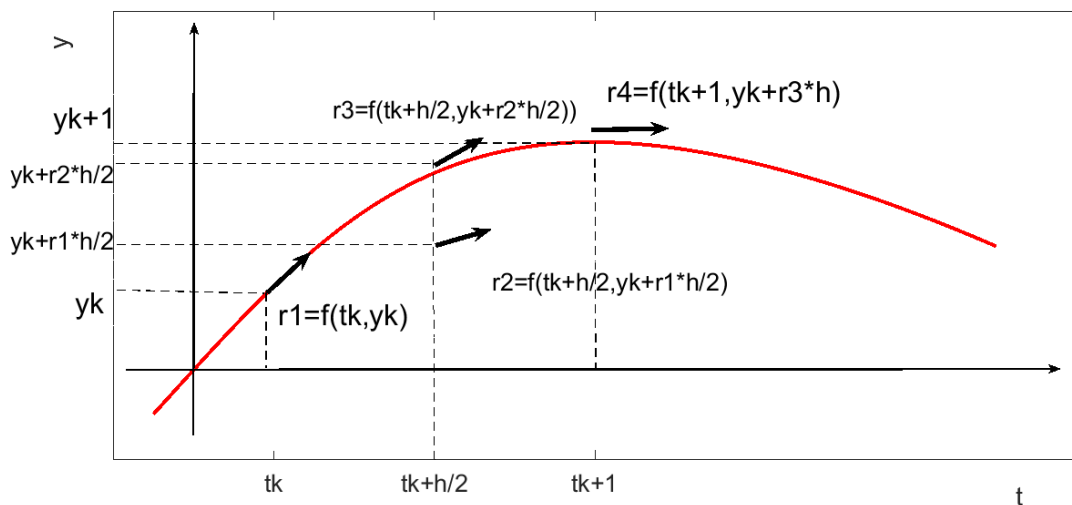
Os métodos de Runge-Kutta conseguem a precisão da série de Taylor, sem o cálculo de derivadas de ordem superior.

Como?

Considerando o cálculo da função incremento,  $f$ , em vários pontos do intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Como exemplo consideremos um método de Runge-Kutta de 4 ordem:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (r_1 + 2 * r_2 + 2 * r_3 + r_4) * h$$



Neste caso, a função incremento é calculada em 4 pontos distintos:

### 1º ponto

P1  $\rightarrow (t_k, y_k)$  e  $r_1 = f(t_k, y_k)$  (função incremento)

À custa desta função incremento,  $r_1$ , encontram-se as coordenadas do 2º ponto,

### 2º ponto

$$P2 \rightarrow \left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}\right) \quad \text{e} \quad r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}\right)$$

De modo semelhante,  $r_2$ , vai ser usado para calcular as coordenadas do 3º ponto,

### 3º ponto

$$P3 \rightarrow \left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}\right) \quad \text{e} \quad r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}\right)$$

E  $r_3$ , vai ser usado para calcular as coordenadas do 4º ponto,

### 4º ponto

$$P4 \rightarrow (t_k + h, y_k + r_3 * h) \quad \text{e} \quad r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 * h)$$

A função incremento, obtida para um dado ponto, vai gerar a coordenada  $y$  do ponto seguinte, e assim sucessivamente.

**A função incremento final** é uma média ponderada das funções incremento ( $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$ ), (a derivada), obtida nos 4 pontos do intervalo. Repare que no instante  $t_k + \frac{h}{2}$ , há dois valores para  $y$ .

E o ERRO GLOBAL é  $O(h^4)$ ! E não foi necessário calcular derivadas de ordem superior!

## Representação de BUTCHER-EXEMPLO

Consulte os slides 7, 8, 9 e 10 da AULA3

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
<hr/>				
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 * \frac{h}{2}\right)$$

$$r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 * \frac{h}{2}\right)$$

$$r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 * h)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (r_1 + 2 * r_2 + 2 * r_3 + r_4) * h$$

Coluna 1	
0	$t_k + 0 * h$
1/2	$t_k + 1/2 * h$
1/2	$t_k + 1/2 * h$
1	$t_k + 1 * h$

Matriz			Coordenada y
$\frac{1}{2}$			$y_k + r_1 * h * \frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$		$y_k + r_1 * h * 0 + r_2 * h * \frac{1}{2}$
0	0	1	$y_k + r_1 * h * 0 + r_2 * h * 0 + r_3 * h * 1$

Linha (Pêsos)			
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (1 * r_1 + 2 * r_2 + 2 * r_3 + 1 * r_4) * h$			