Revisões sobre vetores e matrizes de mudanças de base

Um vetor pode ser visto como a combinação linear dos vetores da base do espaço vetorial (o referencial), ou seja, como a soma de vetores da base com coeficientes multiplicativos:

$$\vec{v} = v_x\, \vec{e}_x + v_y\, \vec{e}_y$$

Muitas vezes representa-se o vetor através das suas componentes, $\vec{v} = \left(v_x, v_y\right)$. Esta representação tem o inconveniente de não fazer referência explícita aos vetores da base, ainda que tenha a vantagem de ser mais simples.

Consideremos agora a representação dos vetores num novo referencial. Devemos desde logo definir os vetores que compõem a base do novo referencial. Os vetores da nova base são vetores, e por isso podem ser escritos tal como qualquer outro vetore, através de uma combinação vetorial dos vetores da primeira base. Assim podemos escrever:

$$\vec{e}'_x = m_{11}\, \vec{e}_x + m_{12}\, \vec{e}_y$$

$$\vec{e}'_y = m_{21}\, \vec{e}_x + m_{22}\, \vec{e}_y$$

onde agora os coeficientes da combinação linear são os m_{ij}. Estas expressões podem ser reescritas numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix}$$

Aqui M é uma matriz que estabelece como se muda de uma base para a outra (matriz mudança de base). Podemos inverter esta relação e obter:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \end{bmatrix}$$

Como poderemos escrever as coordenadas do vetor $\vec{v}$ em termos da nova base? O vetor $\vec{v}$ é uma combinação dos vetores da base nas duas bases, pelo que:

$$\vec{v} = v_x\, \vec{e}_x + v_y\, \vec{e}_y = v'_x\, \vec{e}'_x + v'_y\, \vec{e}'_y$$

Ou:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_x & v'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \end{bmatrix}$$

Então temos: $\vec{v} = [v'_x \quad v'_y] \begin{bmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \end{bmatrix} = [v'_x \quad v'_y]\, M \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix}$

pelo que: $[v_x \quad v_y] = [v'_x \quad v'_y]\, M$

e também se pode ter: $[v'_x \quad v'_y] = [v_x \quad v_y]\, M^{-1}$

Podemos assim, dados os vetores da nova base, definir M, e depois calcular a inversa, e depois as componentes do vetor na nova base. Essas componentes permitem-nos obter $\vec{v}$ somando vetores de outra base usando o novos coeficientes.