Simulação e Modelação

Determinação de Zeros de Funções: método do ponto fixo e de Newton

Pretende-se simular o padrão gerado pelas múltiplas colisões que ocorrem quando se larga uma bola sobre uma superfície e esta sofre reflexões elásticas subsequentes. A bola é largada da posição $(x,y)=(x_0,10)$, sem velocidade inicial. Os pontos da superfície obedecem à equação $y = -\alpha x^2+x^4+6$, onde α é um parâmetro fornecido pelo utilizador, e que deve variar entre 1 e 5. Elabore um programa com vista a estudar este fenómeno.

Siga os seguintes passos com vista a obter o programa pretendido.

Passo 1: Representação da Superfície
A superfície obedece à equação $y = -\alpha x^2+x^4+6$. Defina uma função que use α como parâmetro de entrada e represente a superfície num gráfico.

Passo 2: Defina a função diferença entre as ordenadas da trajectória da bola e as ordenadas dos pontos da superfície
Escreva as equações para a trajectória da bola sujeita à ação da gravidade. Defina, para um mesmo valor de x a diferença entre as ordenadas da trajectória e a equação da superfície. Obtenha uma expressão que só dependa de t e cujo zero represente a colisão da bola com a superfície.
Nota: deve assumir que conhece a posição inicial da bola e a sua velocidade inicial.

Passo 3: Crie uma função que use o método do ponto fixo para determinar o instante em que se dá a colisão e depois o ponto da superfície em que ela ocorre. Repita usando o método de Newton.
Comece por verificar que se $x_0=0$, o seu programa calcula o ponto de contato corretamente.

Passo 4: Produza uma animação até a bola colidir com a superfície.

Passo 5: Determine a direcção da velocidade da bola após reflexão
Considere que a bola colide com a superfície mudando apenas a sua direcção (colisão elástica especular).
Determine o vector gradiente da função $f(x,y)= y+\alpha x^2-x^4-6$, no ponto da colisão. Caso se trate da primeira colisão, use pause para parar a animação e representar um vector normal à superfície, bem como o vector velocidade da bola.
Neste passo deve testar a instrução quiver para desenhar setas no seu gráfico. A instrução quiver tem a seguinte sintaxe para traçar uma seta que parta do ponto $\underline{P}$=(px,py), com componentes $\underline{v}$=(vx,vy): quiver(px,py,vx,vy,0). O 0 no final indica que se pretende que a figura não seja redimensionada automaticamente.

Nota: ajuste os eixos para que o gráfico fique quadrangular e por forma a melhor verificar que o vector é normal à superfície. (ajuda: use axis square)

Passo 6: Determinação da velocidade após a colisão
Podemos decompor qualquer vector numa componente normal à superfície, $\vec{v}_{\perp}$ e outra tangencial, $\vec{v}_{||}$.
Temos que: $\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{||} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + \vec{v}_{||}$. Dado que conhece $\vec{v}$ e $\hat{n}$, determine $\vec{v}_{||}$ e $\vec{v}_{\perp}$. Como se escreverá o vector da velocidade da bola reflectida? Represente-o.

Passo 7: Volte ao passo 3 para o novo movimento e repita o processo tantas vezes quantas requeridas pelo utilizador.

Questões interessantes a abordar:

- estude num gráfico a sequência das abcissas dos pontos de colisão e averigue se, variando o parâmetro α se pode dar uma bifurcação.

- variando x0, analise se a trajectória da bola depende bastante das condições iniciais.

- quantas iterações precisou de fazer em média no método do ponto fixo e que cuidados teve para o implementar.

- quantas iterações precisou de fazer em média no método de Newton e que cuidados teve para o implementar.

.