Aula 10

Interpolação Numérica

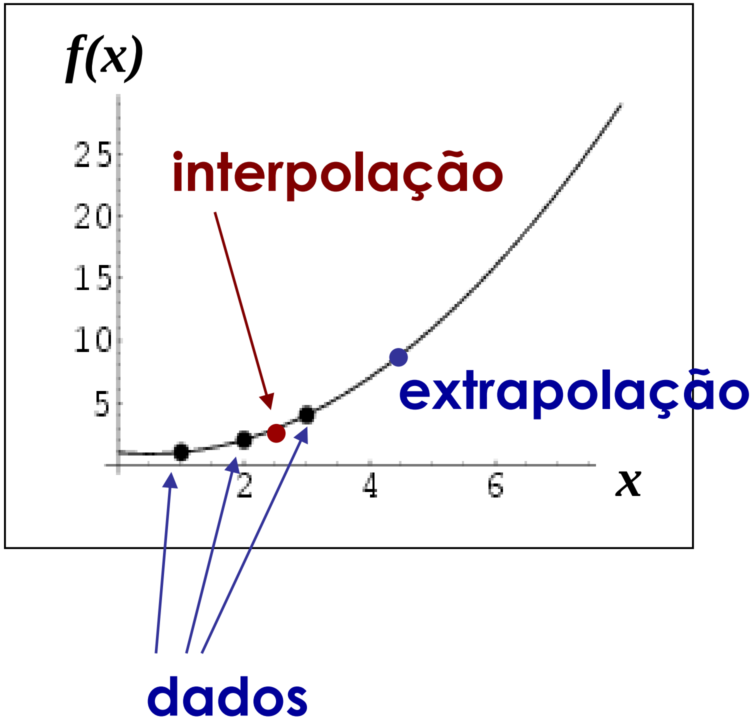
O que é a interpolação?

Problema:
Dado um conjunto de dados iniciais, de uma função definida em [a,b]:

$$f(x_i),\ i=1,\ \ldots,\ n$$

estimar:

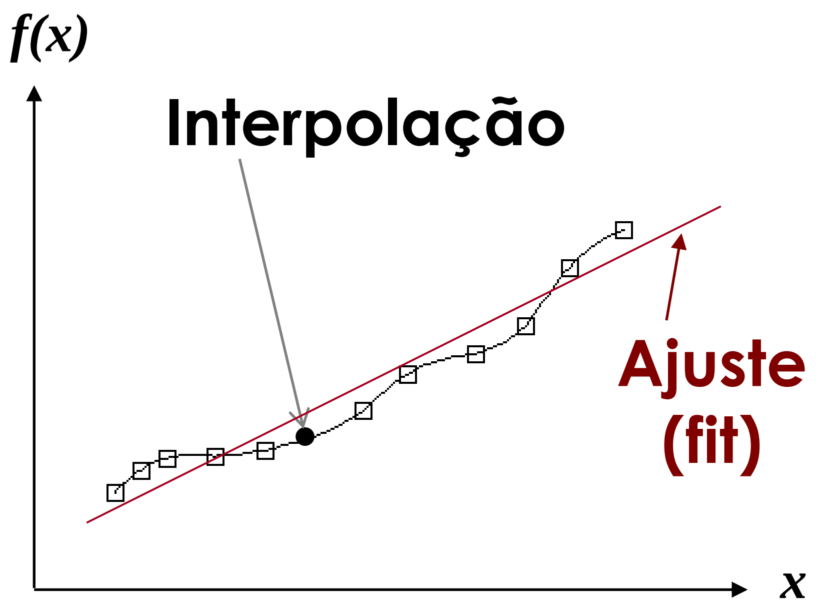
$f(x)$ **para qualquer** x



Solução 1: (interpolação)
Fazer passar por todos os pontos uma curva suave.

Solução 2: Regressão (ajuste)

Solução 2: (regressão)
Fazer passar perto de todos os pontos uma curva suave.



O ajuste exige que se conheça o tipo de curva que deve melhor descrever os dados, i.e., o modelo.

Tipos de modelos:
linear, exponencial, etc.

Interpolação versus Regressão

Na maior parte das situações não há modelos que consigam descrever os dados e os modelos que existem são muitas vezes aproximações grosseiras da realidade.

Há porém muitas situações para as quais se conhecem alguns pontos experimentais e é necessário usar um método que nos permita obter estimativas para pontos não medidos.

Aplicação Prática Simples

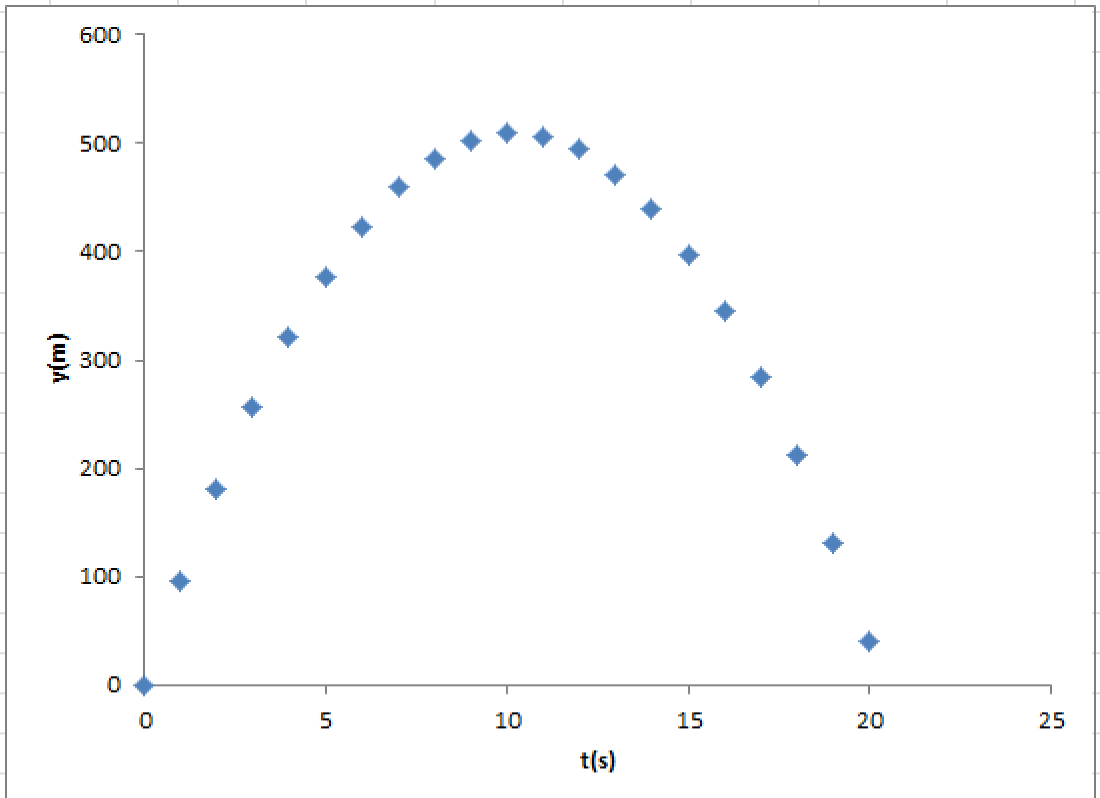
Largo um corpo e filmo a sua queda. Como obter estimativas sobre o instante em que o corpo estava em y=1m, y=2m, y=3m?

Um filme oferece a posição entre intervalos de tempo iguais. Queremos o instante para intervalos de espaço iguais.

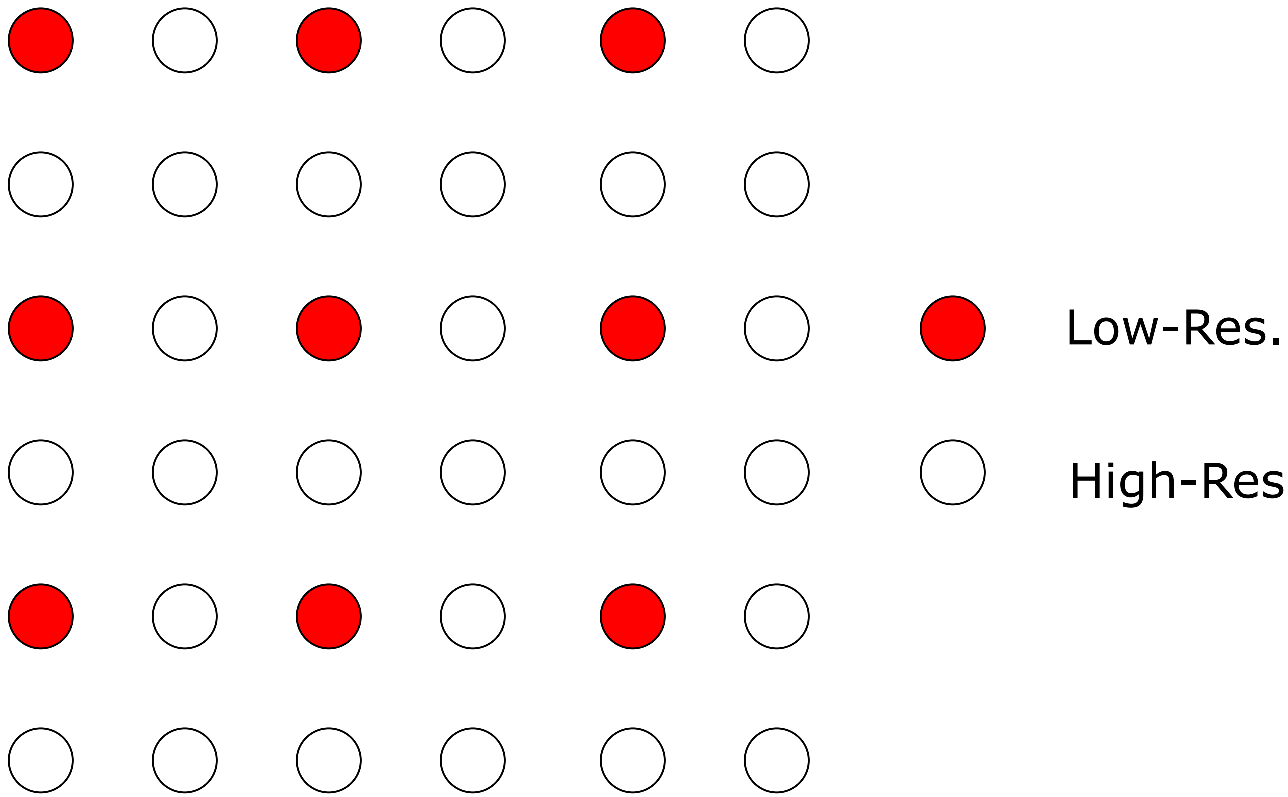
Em que instante cruza a origem?

B2 =100*A2-0.5*9.8*A2^2

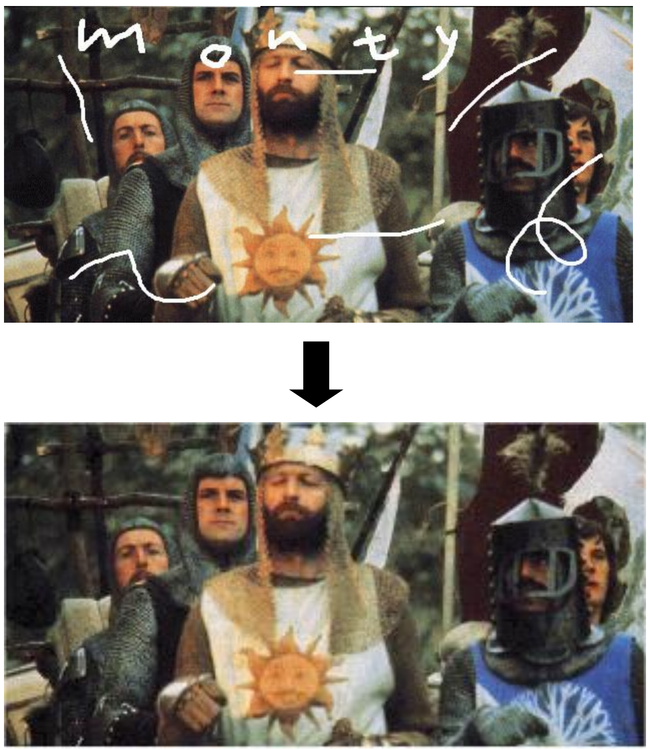
	A	B
1	t	y
2	0	0
3	1	95.1
4	2	180.4
5	3	255.9
6	4	321.6
7	5	377.5
8	6	423.6
9	7	459.9
10	8	486.4
11	9	503.1
12	10	510
13	11	507.1
14	12	494.4
15	13	471.9
16	14	439.6
17	15	397.5
18	16	345.6
19	17	283.9
20	18	212.4
21	19	131.1
22	20	40
23		

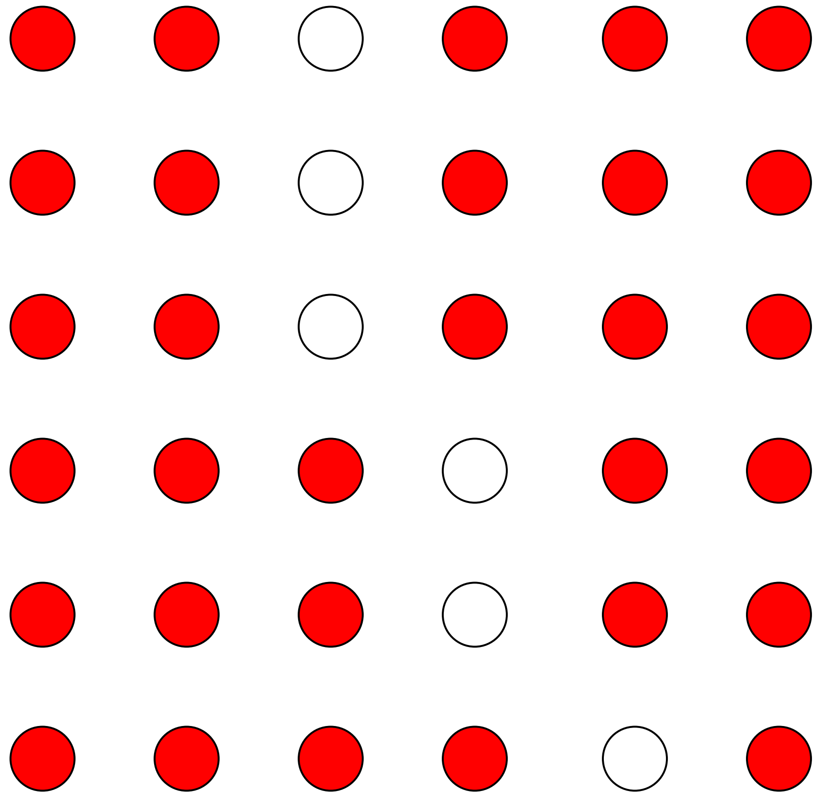


Aumentar a resolução

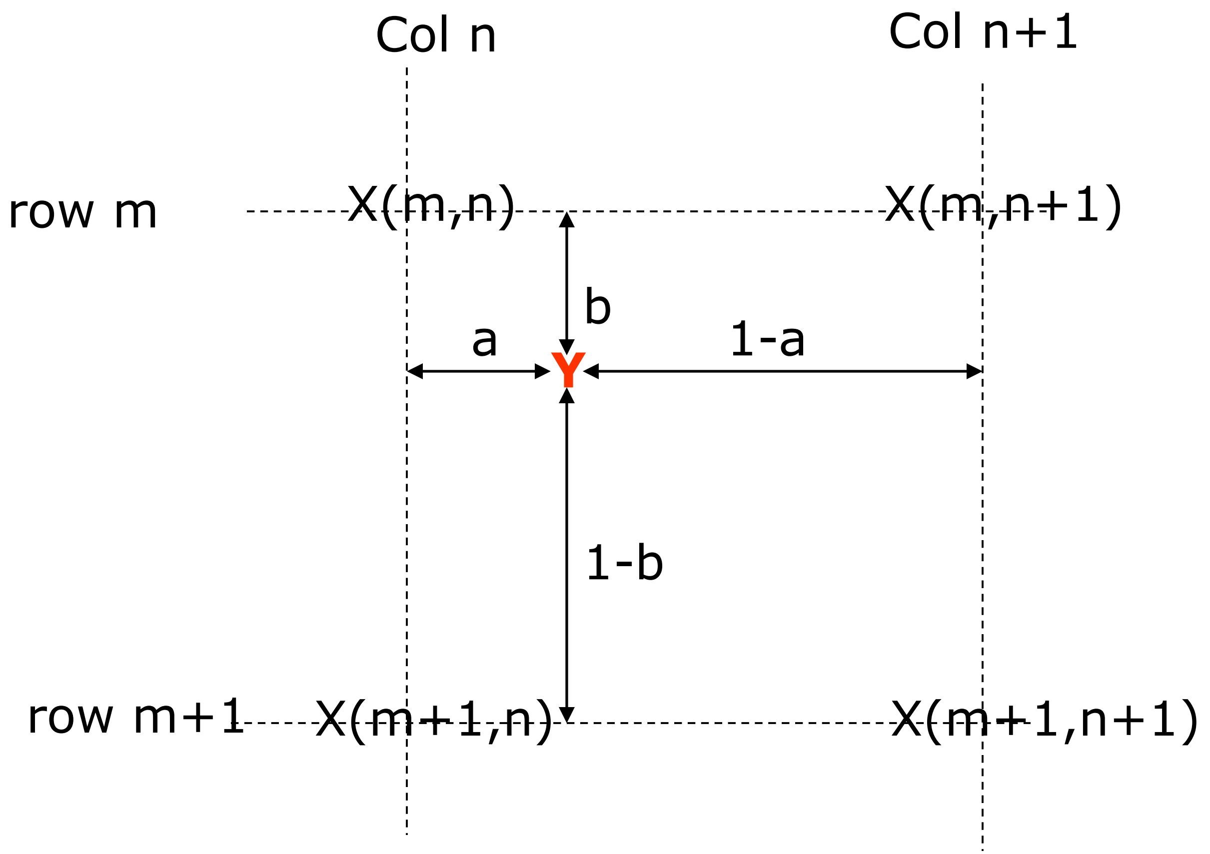


Recuperação de imagens ou eliminar ruído





Non-damaged Damaged



Determinar por interpolação valor de Y

Pixel Replication

low-resolution image (100 × 100)

high-resolution image (400 × 400)

Se copiarmos simplesmente os pixeis vizinhos

Bilinear Interpolation

low-resolution
image (100×100)

high-resolution
image (400×400)

Neste caso as componentes rgb da cor são calculadas nos pontos vazios usando uma função bilinear

Bicubic Interpolation

low-resolution
image (100×100)

high-resolution
image (400×400)

Melhora se o polinómio fôr cúbico

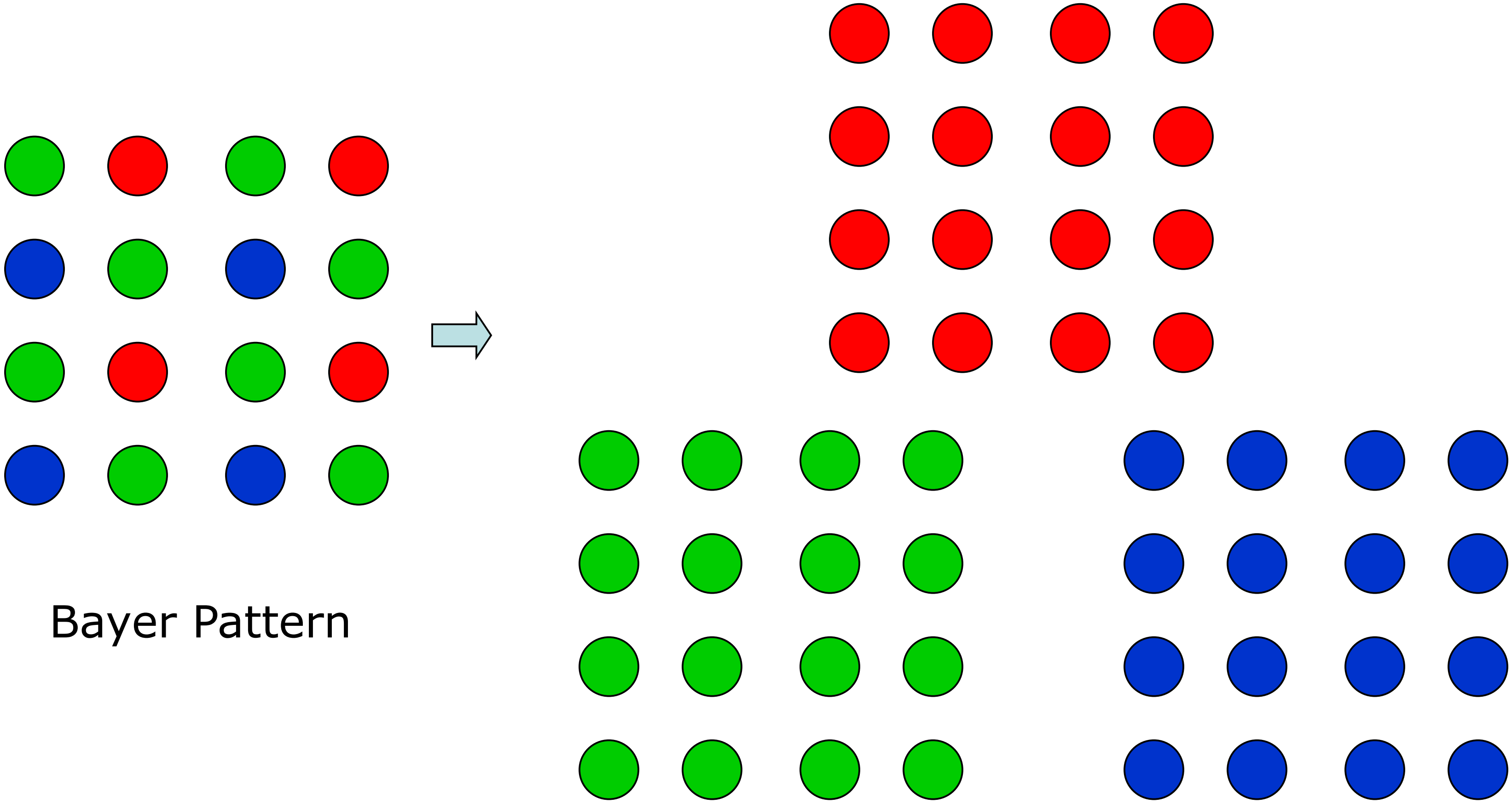
Edge-Directed Interpolation (Li&Orchard'2000)

low-resolution image (100×100)

$\longrightarrow$

high-resolution image (400×400)

Image Demosaicing
(Color-Filter-Array Interpolation)



Bayer Pattern

Image Example

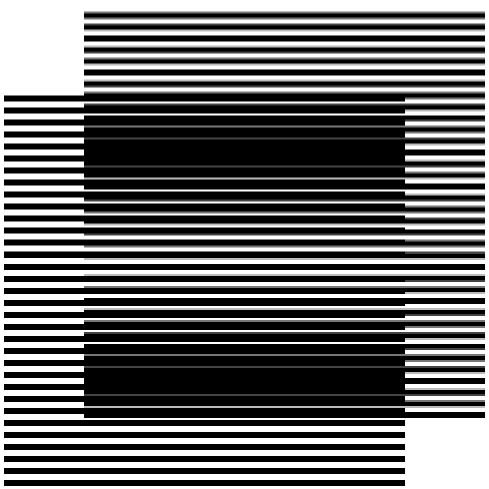
Ad-hoc CFA Interpolation

Advanced CFA Interpolation

http://www.ishootshows.com/2012/04/09/understanding-moire-patterns-in-digital-photography/

Aula 10 Simulação de Modelação

Padrões de Moiré surgem quando diferentes padrões periódicos se sobrepõem. Estes padrões podem estar associados à pixelização do écran (ou sensor da câmara) e ao padrão periódico na figura. O processo de interpolação pode, se mal feito, aumentar este efeito.



Este efeito pode também relevar-se a uma dimensão, como se vê ao lado.
A 1D este efeito é idêntico ao observado nos batimentos. Dado que o efeito é notório a uma escala superior da periodicidade (e é por isso que nas imagens ele tem impacto!) este fenómeno é explorado em nanotecnologia, por exemplo, para fazer alinhamento de peças que precisem ser sobrepostas (por exemplo, máscaras em litografia).

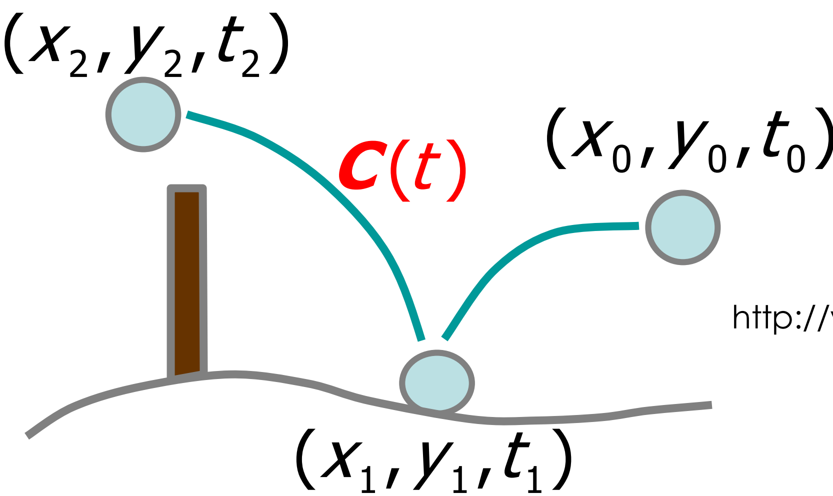
ver mais exemplos em:
http://www.unappel.ch/people/emin-gabrielyan/
public/070804-multi-ring-moire-indicator/

Image Inpainting

Animação de Objectos

Passo 1:

Passo 2: Achar curvas de interpolação/splines adequadas



Passo 3: Animar

http://www.pixar.com/shorts/ljr/theater/short_320.html

Facial Motion Capture

Pirates of the Caribbean: Dead Man's Chest

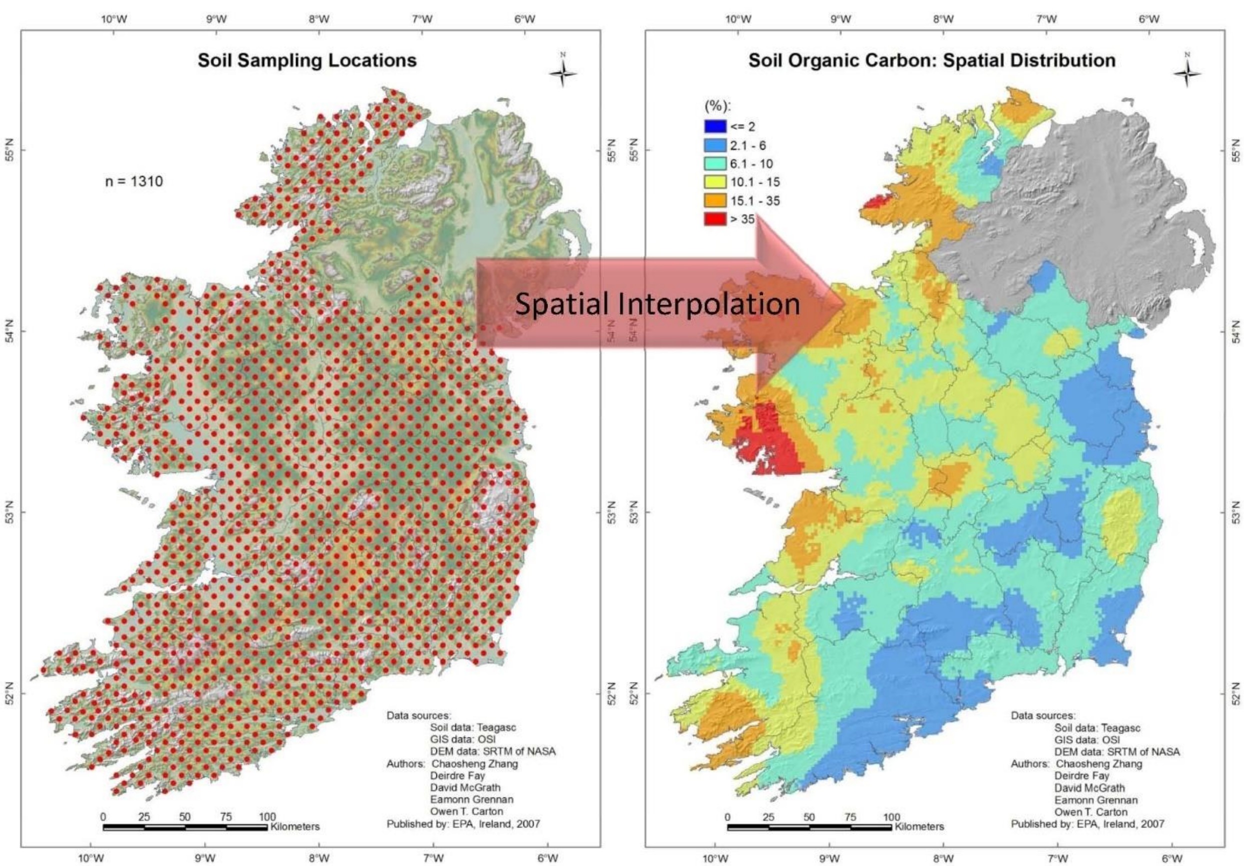
Ideias para trabalhos

- interpolação na manipulação de imagens

- interpolação na animação de objectos

- interpolação áudio

-interpolação espacial (geográfica)



http://www.segh.net/articles/beyond_mapping_new_applications_of_gis_in_environmental_geochemistry_and_health/

Spatial Interpolation: It is virtually impossible for us to have all the materials from an area of interest analysed. For example, in an urban soil geochemical survey, local government would not allow researchers to take all the soils to their labs for analyses. Meanwhile, the budget for laboratory analyses is also often limited. To get the full picture of a study area, spatial interpolation is needed to estimate the values at un-sampled locations based on analyses of sampled locations, and then spatial distribution maps can be produced. There are many spatial interpolation techniques available, and the most popularly used ones are IDW (inverse distance weighted) and kriging in geostatistics.

HEART RATE VARIABILITY USING THE PHONE'S CAMERA

2/1/2014 22 Comments

No doubt the main inconvenience of HRV-based applications is the need for a heart rate monitor. Even when you have one, performing your daily measurement can be a burden (sensor needs to be wet and comfort is clearly an issue).

Can smartphones come to the rescue? Current generation phones include both a camera and a light emitting diode, which can be used for reflection based bio-optical imaging.

The technique is called photoplethysmography (PPG for short) and consists in detecting changes in blood volume during a cardiac cycle, by illuminating the skin and measuring changes in light absorption. PPG has become quite a popular non-invasive method for extracting physiological measurements such as heart rate and oxygen saturation. However, most applications today focus simply on heart rate, and it is not clear from literature if HRV features can also be reliably extracted using a phone's camera [1].

Here is the good news: it is indeed possible to achieve good accuracy in HRV measurements using this technique, but the methods needed are slightly more complicated than acquiring a video and computing peak detection on the PPG signal (which is sufficient for heart rate measurement). This post covers the steps involved in the implementation of **Camera HRV**, the iPhone app I developed to measure HRV using the phone's camera. The algorithms are part of **HRV4Training** since version 3.2.

OVERVIEW

1 - Data acquisition from the phone's camera
2 - Filtering & smoothing
3 - Resampling with cubic spline interpolation
4 - Peak detection
5 - Artifact removal and features extraction
6 - Comparison with heart rate monitors (Polar H7)
7 - Tips

Signal processing pipeline:

http://www.marcoaltini.com/blog/heart-rate-variability-using-the-phones-camera

Aula 10 Simulação de Modelação

KENWOOD

Press Release

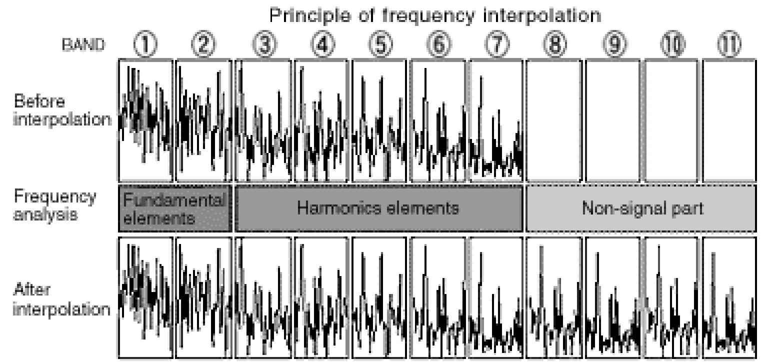
KENWOOD Develops A New Patented Audio Enhancement Technology for Compressed Audio

This new technology is compatible with all compressed audio formats

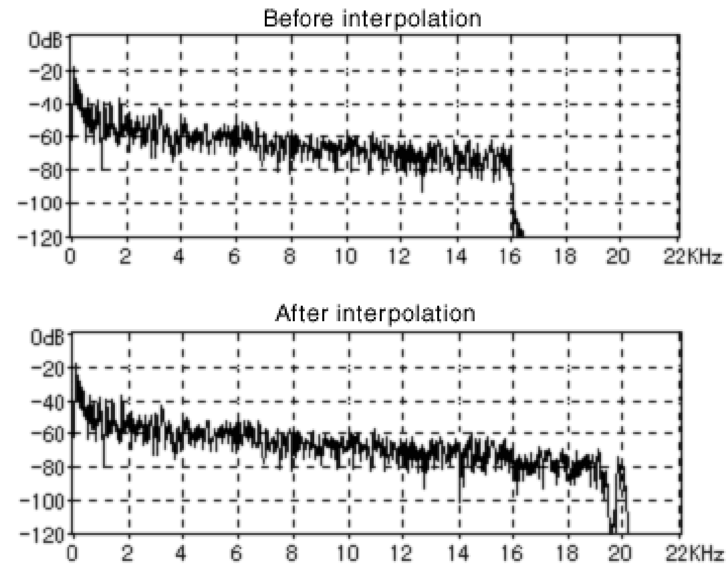
June 20, 2000 -- KENWOOD has developed a new audio enhancement codec that more accurately reproduces high-frequency data lost during the playback of compressed audio formats.

Looking to enhance its reputation as a world-class audio company, capitalize on the growing popularity of Internet audio format downloads (MP3, etc.) and to position itself as a supplier of high-quality audio in the electronic music distribution era, KENWOOD's new development will provide premium audio playback of compressed audio formats -- especially at higher frequencies.

"One of the limitations to high-quality playback of compressed audio formats is the loss of high-frequency information that occurs during compression," said Mr. Hattori, General Manager of KENWOOD's development team. "Our proprietary algorithm analyzes the compressed data using correlation with recorded audio data and interpolates the harmonics, especially for high frequencies." Additionally, this technology can also be used to improve the fidelity of FM playback.



Sample data: MP3



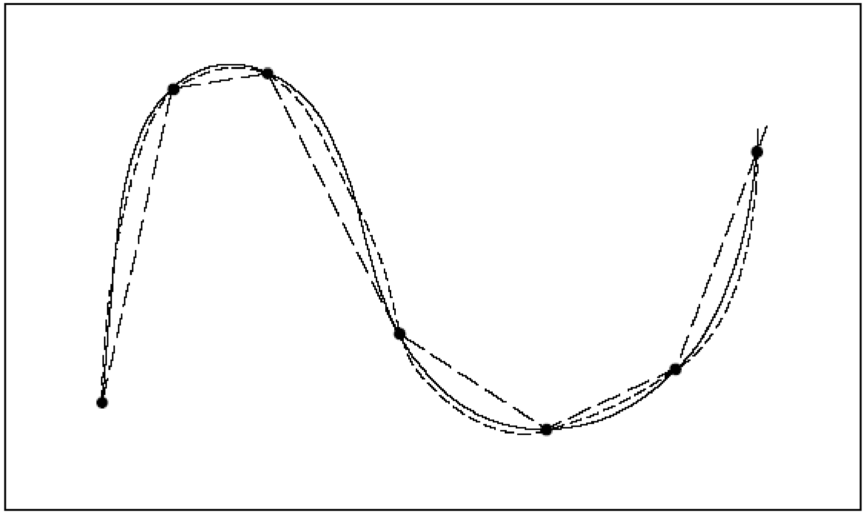
KENWOOD's new audio enhancement technology is compatible with all compressed audio formats on the market, providing an excellent opportunity for current compressed audio formats to improve sound quality during playback. And KENWOOD has already been awarded patents worldwide for their outstanding technology.

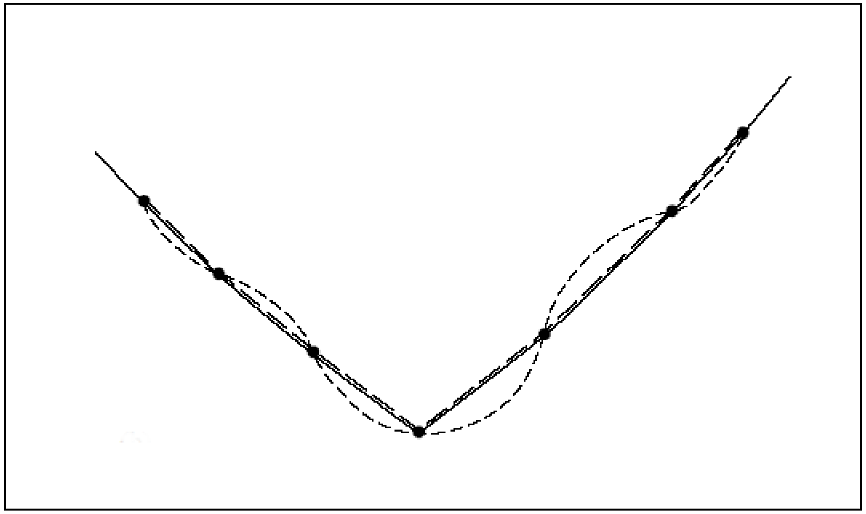
Interpolação

Polinómio que passe por 2 pontos $\longrightarrow$ recta

Polinómio que passe por 3 pontos $\longrightarrow$ parábola

Polinómio que passe por n pontos $\longrightarrow$ polinómio de grau n-1

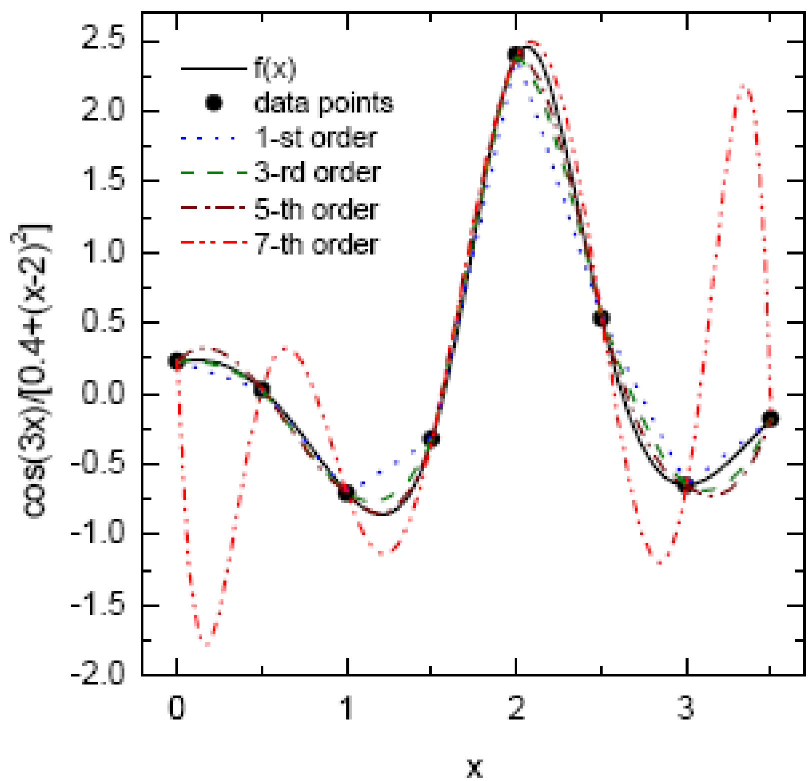




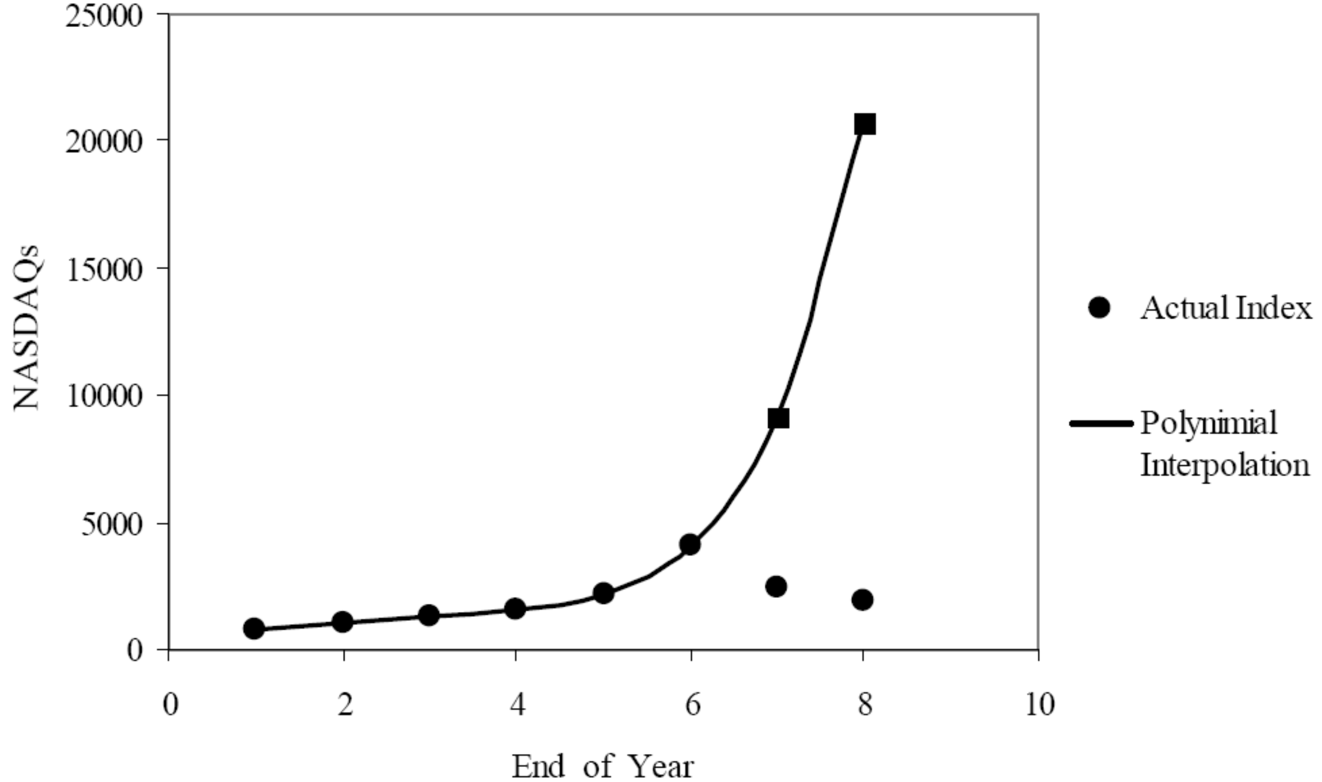
Nem sempre aumentar o número de pontos conduz a melhores aproximações!

Isto porque um polinómio de grau elevado pode oscilar muito e não aproximar bem a função em certos intervalos.

Isto torna-se particularmente perigoso no caso de extrapolações



Exemplo:



A extrapolação é perigosa, como se confirma neste exemplo, se a aplicarmos à previsão da evolução de um índice bolsista.

Como determinar o polinómio?

Temos um conjunto de pontos por onde o polinómio deve passar:

$y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \ y_2= f(x_2), \ \ldots, \ y_n= f(x_n)$

Queremos encontrar: $p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} +, \ldots, + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$

Teriamos que resolver em princípio um sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} +, \ldots, + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} +, \ldots, + a_n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} +, \ldots, + a_n = y_n \end{cases} \longrightarrow \boxed{X \, \underline{a} = \underline{f}}$$

Matriz Vandermonde

Alternativamente

Fórmula Interpoladora de Lagrange

Exemplo 1: (a, f(a)) , (b, f(b))

$$p(x) = f(a) \times p_{1,a}(x) + f(b) \times p_{1,b}(x)$$

$$p(x) = f(a) \times \frac{x-b}{a-b} + f(b) \times \frac{x-a}{b-a}$$

polinómio que se anula excepto em x=b, onde deve ser 1.

$$p_{1,a}(x) = \frac{x-b}{a-b} \qquad p_{1,b}(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Fórmula Interpoladora de Lagrange
(caso geral)

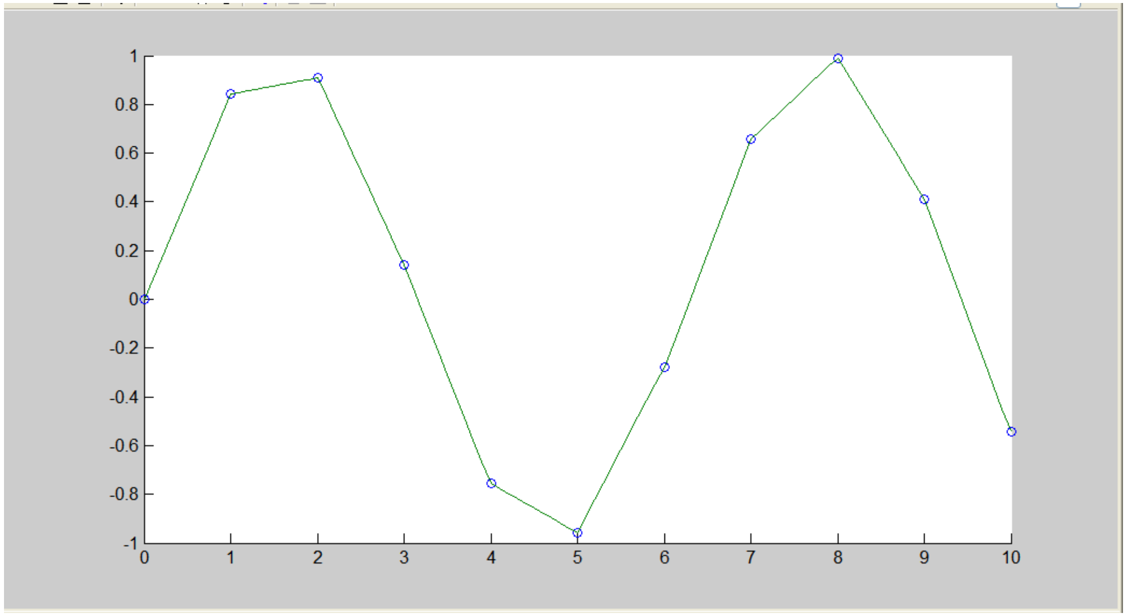
$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_N)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_N)}y_2$$
$$+ \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2)...(x_N-x_{N-1})}y_N$$

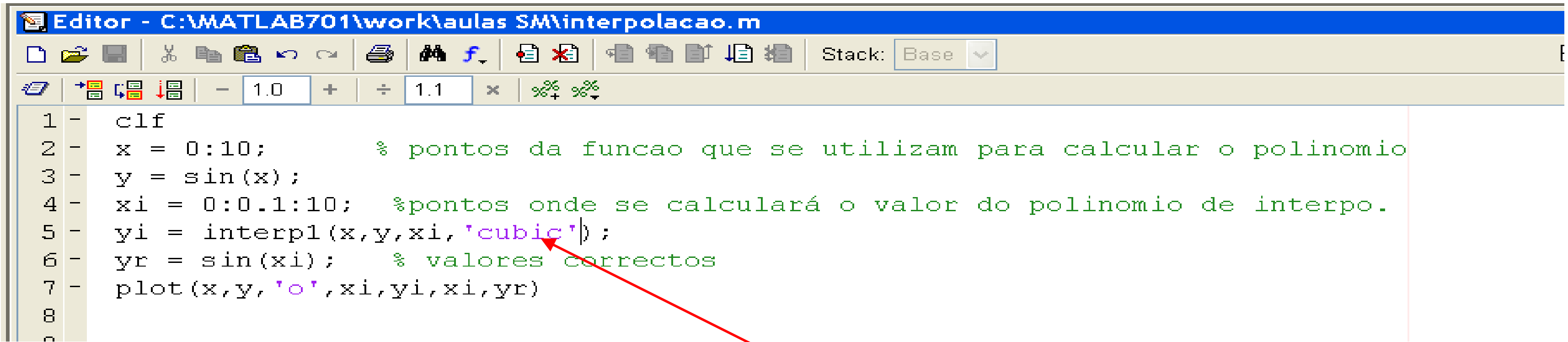
Outros algoritmos mais eficientes: algoritmo de Neville. Reduz o número de operações, construindo uma sequência de polinómios sucessivamente utilizados.

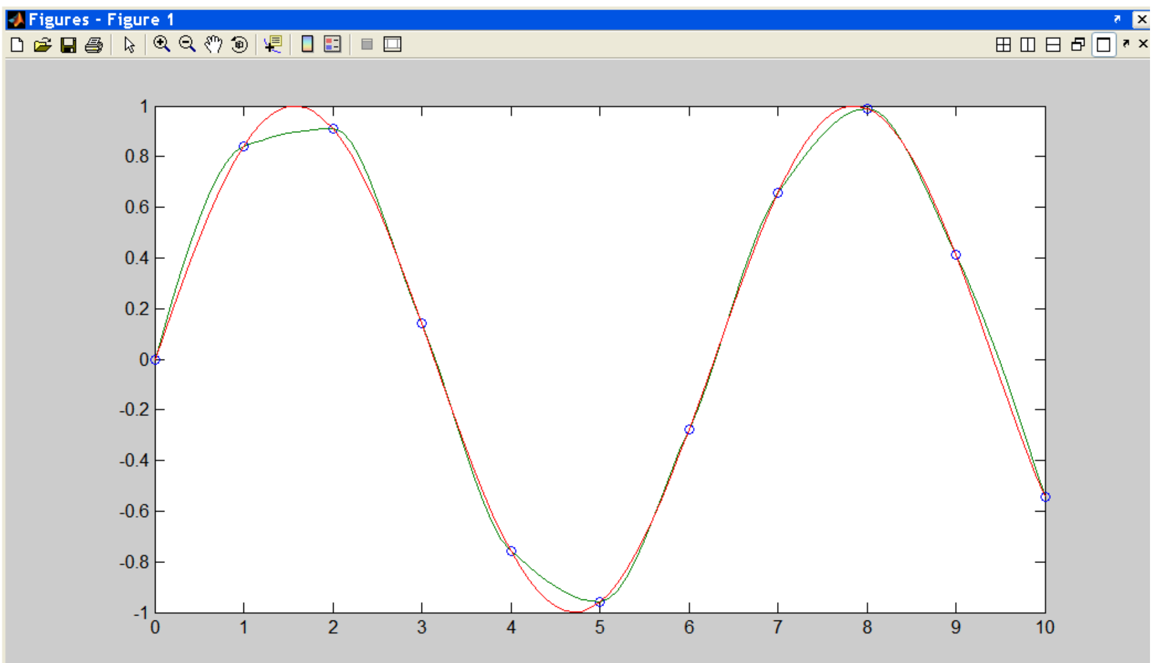
Fórmula de Lagrange:
publicada pela primeira vez por Waring em1779,
redescoberta por Euler em 1783,
e publicada por Lagrange em 1795.

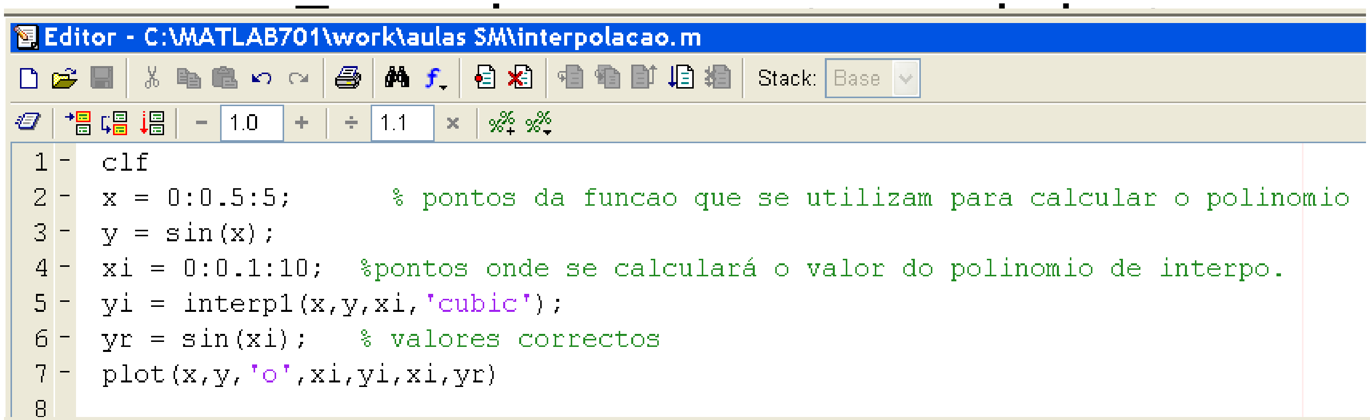
No Matlab a interpolação já vem implementadaatravés de instruções interp1, interp2 ou interp3 para 1d, 2d ou 3d

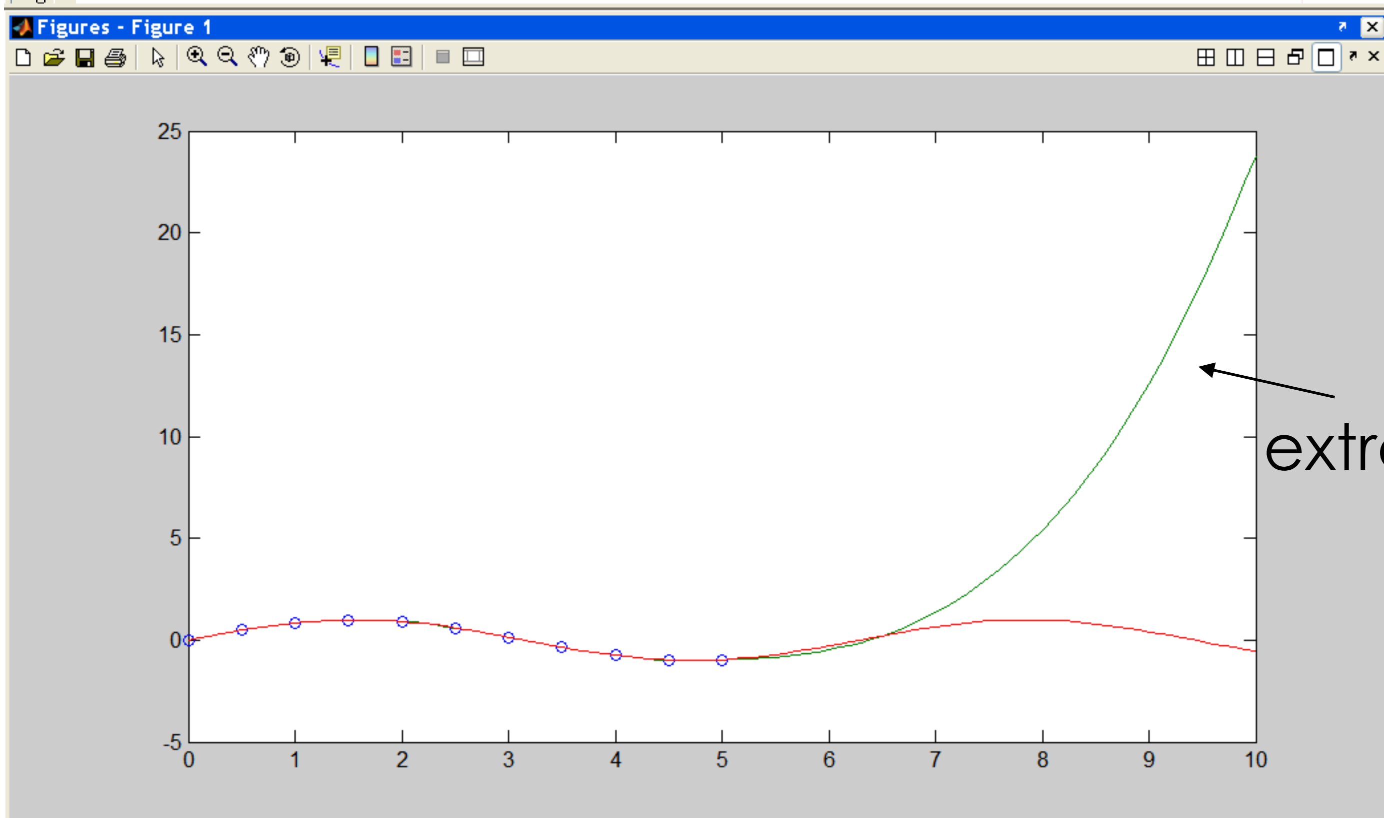
```
clf
x = 0:10;        % pontos da funcao que se utilizam para calcular o polinomio
y = sin(x);
xi = 0:0.1:10;  %pontos onde se calculará o valor do polinomio de interpo.
yi = interp1(x,y,xi);
plot(x,y,'o',xi,yi)
```




Editor - C:\MATLAB701\work\aulas SM\interpolacao.m
Stack: Base
1.0
1.1
clf
x = 0:10;   % pontos da funcao que se utilizam para calcular o polinomio
y = sin(x);
xi = 0:0.1:10; %pontos onde se calculará o valor do polinomio de interpo.
yi = interp1(x,y,xi,'cubic');
yr = sin(xi);   % valores correctos
plot(x,y,'o',xi,yi,xi,yr)


Figures - Figure 1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


Editor - C:\MATLAB701\work\aulas SM\interpolacao.m
Stack: Base
clf
x = 0:0.5:5;   % pontos da funcao que se utilizam para calcular o polinomio
y = sin(x);
xi = 0:0.1:10; %pontos onde se calculará o valor do polinomio de interpo.
yi = interp1(x,y,xi,'cubic');
yr = sin(xi);   % valores correctos
plot(x,y,'o',xi,yi,xi,yr)


Figures - Figure 1
25
20
15
10
5
0
-5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
extrapolação

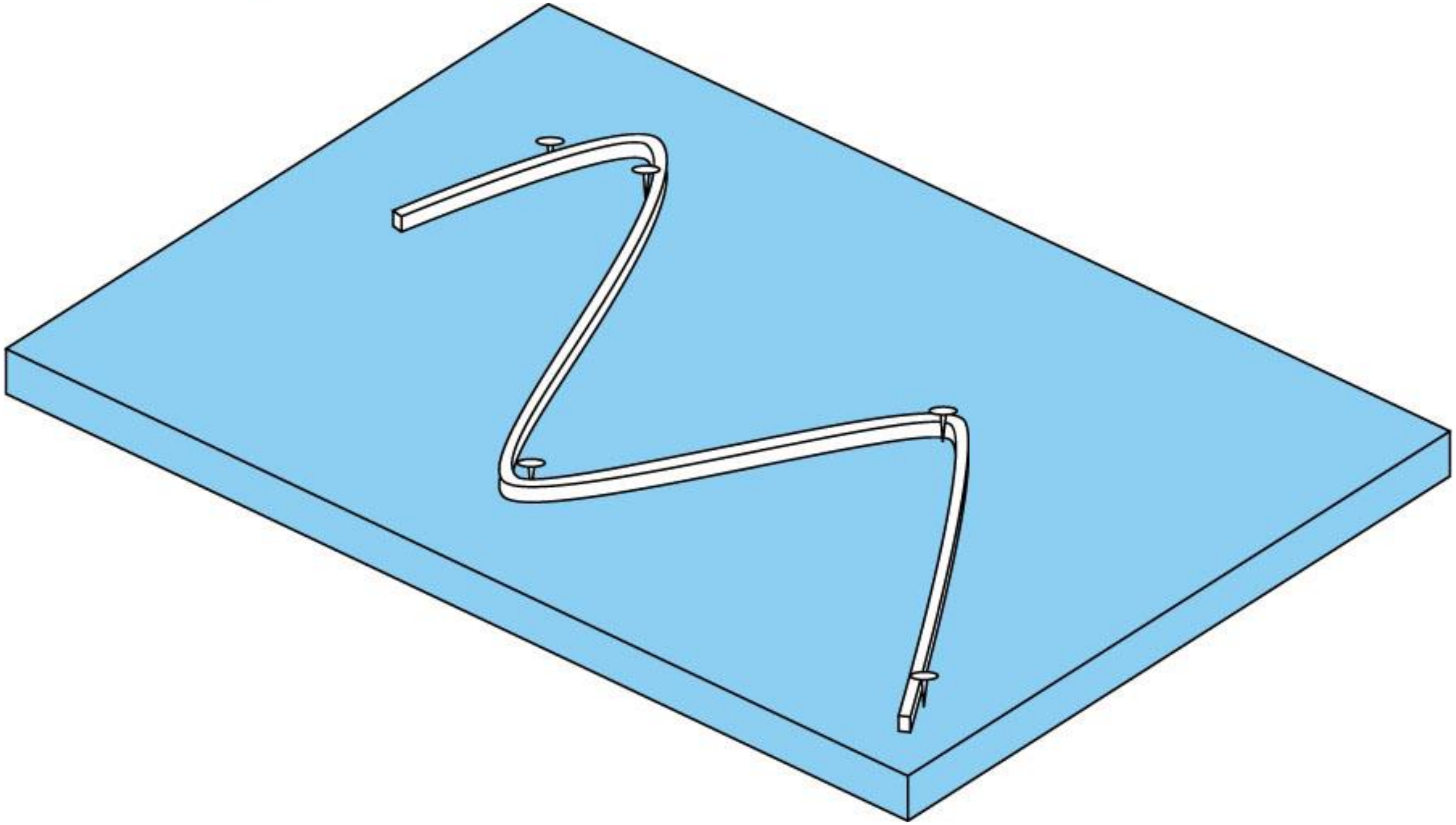
Splines

Como vimos, a utilização de mais dados nem sempre melhora a solução, porque o polinómio de maior grau pode oscilar muito.

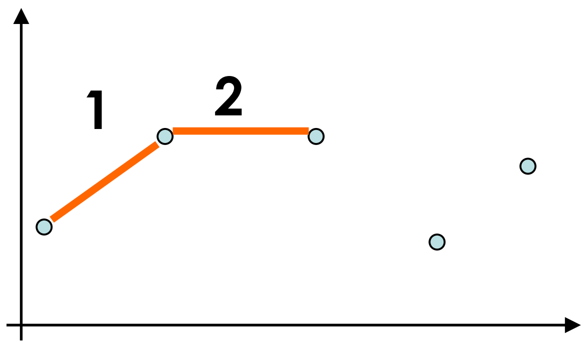
Para poder utilizar séries de dados grandes mas sem os problemas anteriores pode-se aplicar o método da interpolação mas por segmentos.

Porém devemos também garantir que sejam verificadas as condições de continuidade da função e da segunda derivada.

Spline Apparatus...

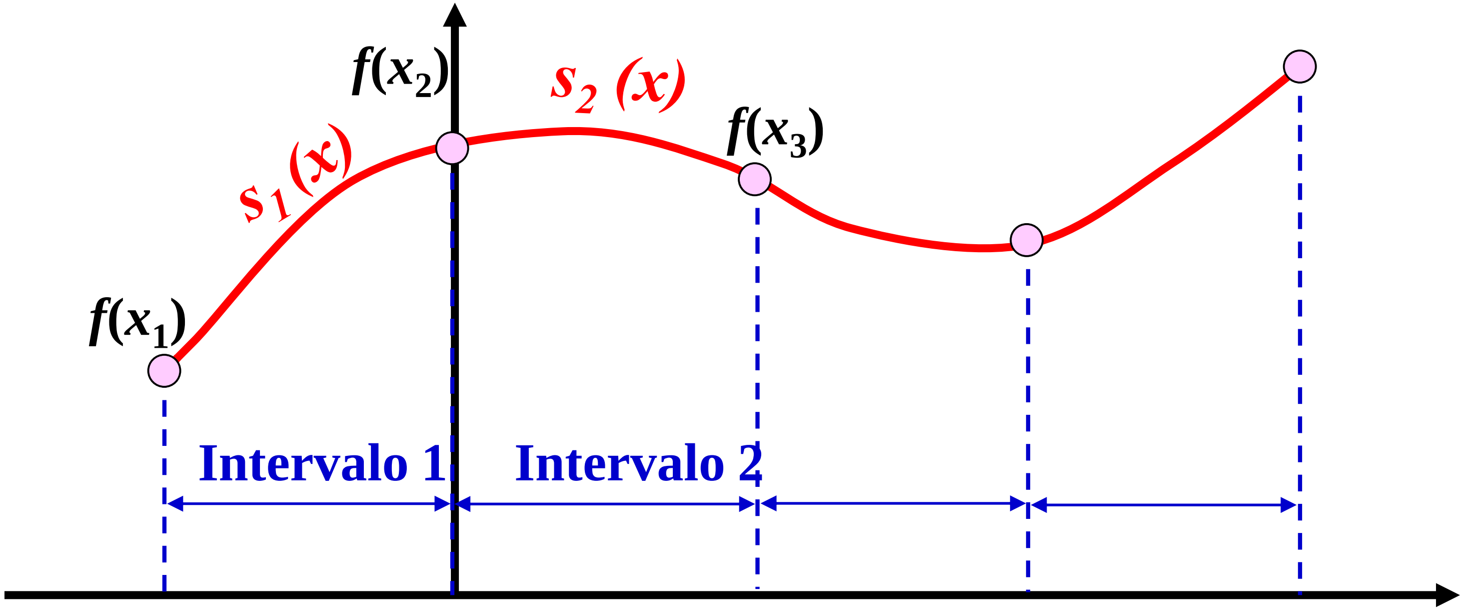


Qual o grau mais baixo dos polinómios que podem ser usados?



Rectas não servem porque só têm dois coeficientes. Assim podemos quanto muito garantir que as rectas passam pelos pontos, mas ficaremos com uma curva global com derivadas descontínuas.

Splines Quadráticos

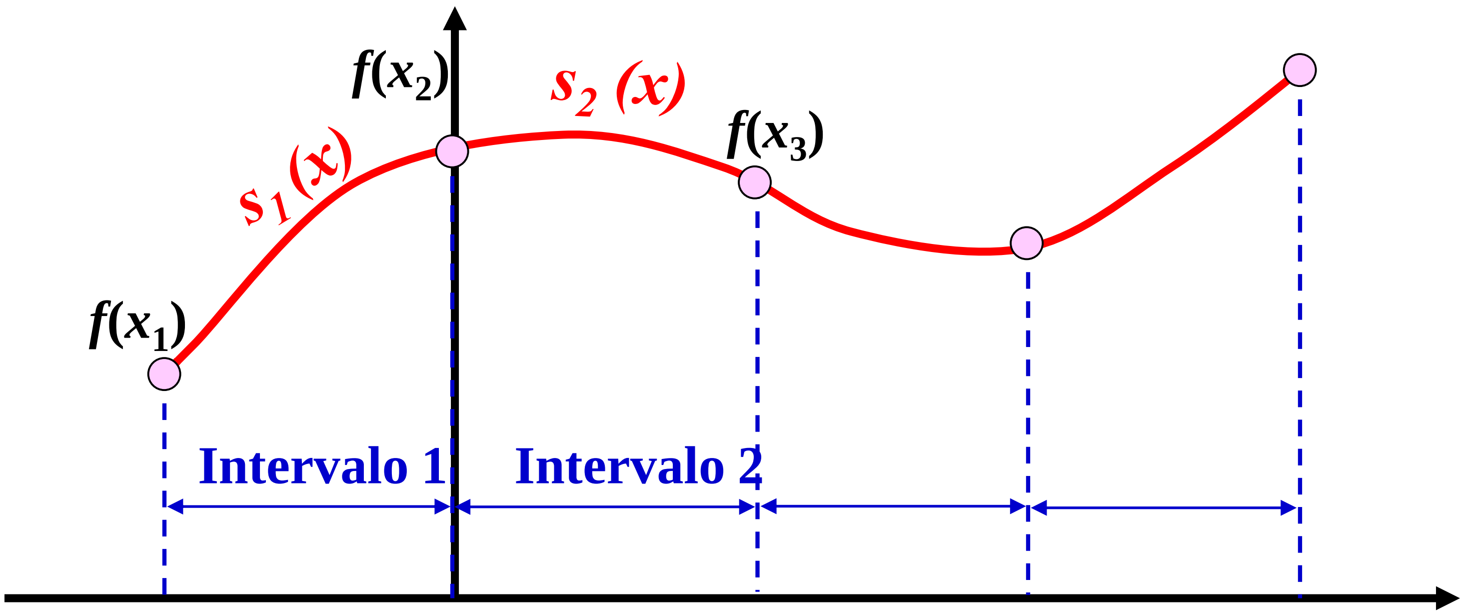


Para cada spline s_i podemos usar dois pontos para determinar dois coeficientes. Como determinar o terceiro?

$$\begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 \\ s_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 \end{cases}$$

Resposta: continuidade na derivada no ponto de passagem de um intervalo para o seguinte.

Splines Quadráticos

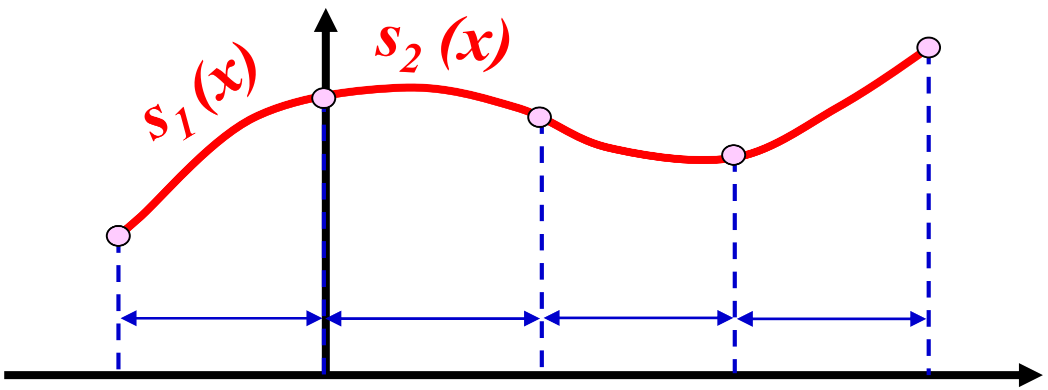


Problema: Como fazer com o primeiro spline?

Resposta: primeiro spline será linear... ou então dão-nos uma condição sobre a derivada nos extremos.

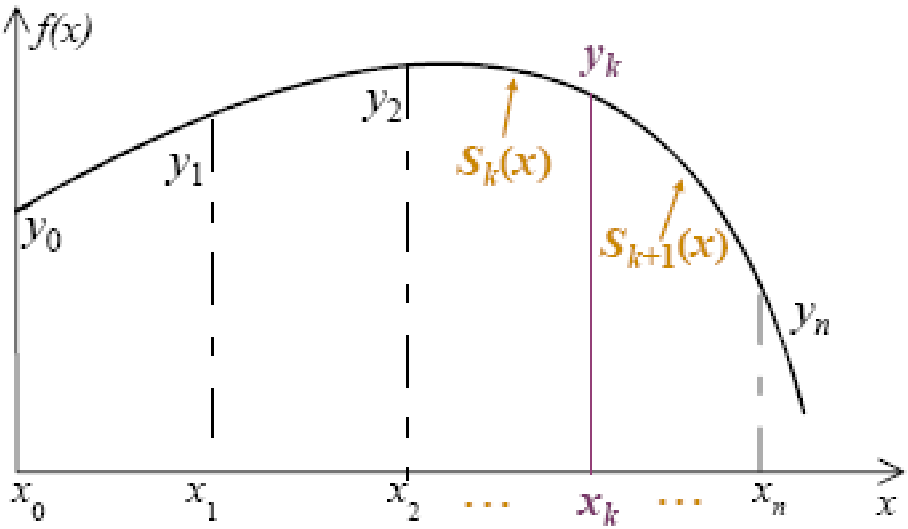
Splines Quadráticos

Inconveniente: segunda derivada em geral descontínua



Para garantir que o polinómio seja contínuo e tenha segunda derivada contínua, temos de impor 4 condições. Isto implica que devemos usar polinómios de 3ª ordem.

Com polinómios de 3ª ordem criam-se **SPLINES CÚBICOS**

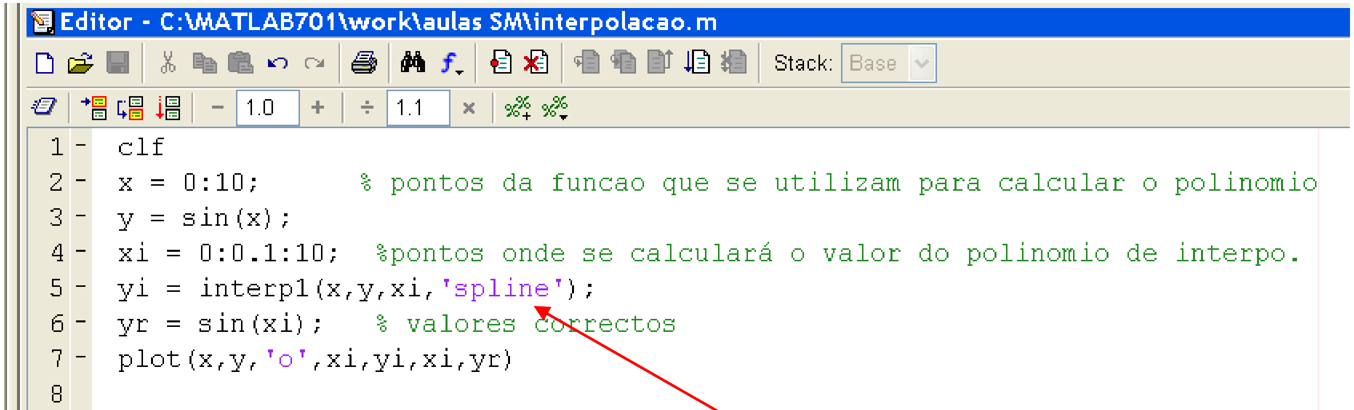


$$s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \quad \text{for} \quad (x_0, x_1)$$
$$s_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \quad \text{for} \quad (x_1, x_2)$$
$$s_3(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 \quad \text{for} \quad (x_2, x_3)$$
$$\cdots$$
$$s_n(x) = a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n \quad \text{for} \quad (x_{n-1}, x_n)$$

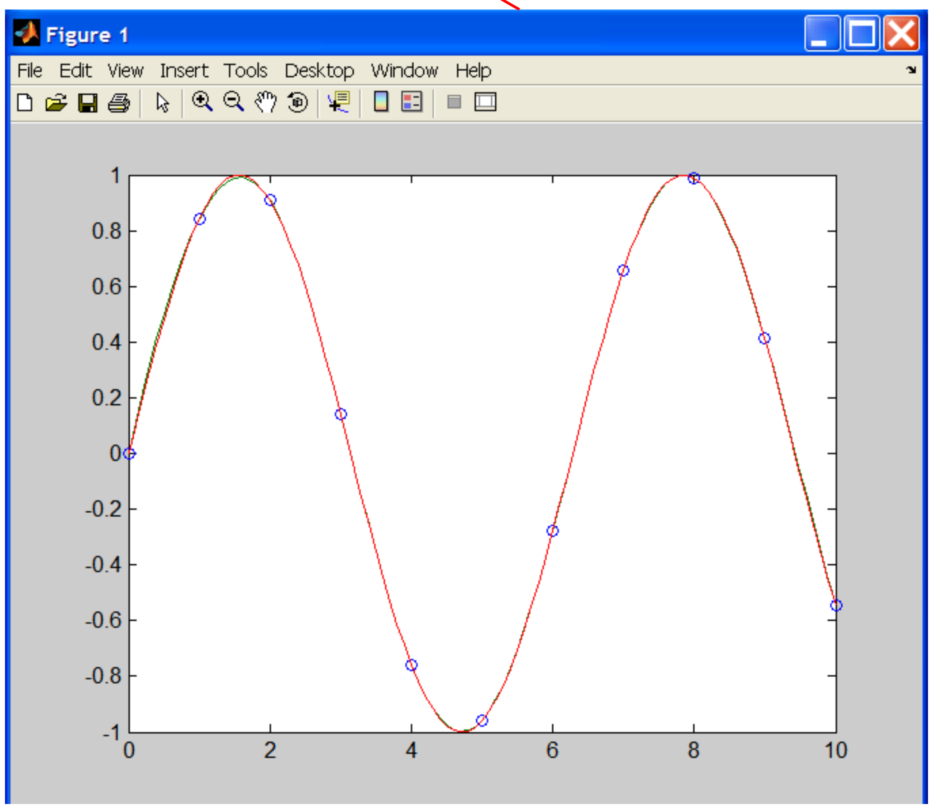
$$s_k(x_k) = f_k$$
$$s_k(x_{k+1}) = f_{k+1}$$
$$s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k)$$
$$s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k)$$

Que fazer no primeiro spline?
R: há duas condições iniciais a introduzir; geralmente são as derivadas nos extremos.

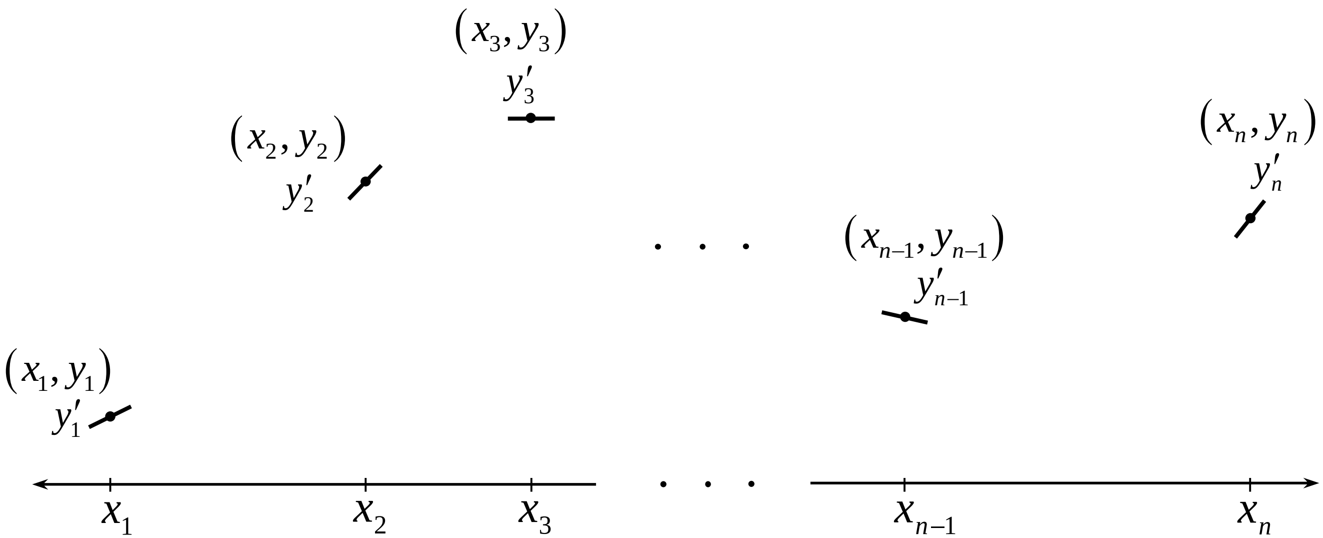
Aula 10 Simulação de Modelação




```
clf
x = 0:10;         % pontos da funcao que se utilizam para calcular o polinomio
y = sin(x);
xi = 0:0.1:10;   %pontos onde se calculará o valor do polinomio de interpo.
yi = interp1(x,y,xi,'spline');
yr = sin(xi);    % valores correctos
plot(x,y,'o',xi,yi,xi,yr)
```



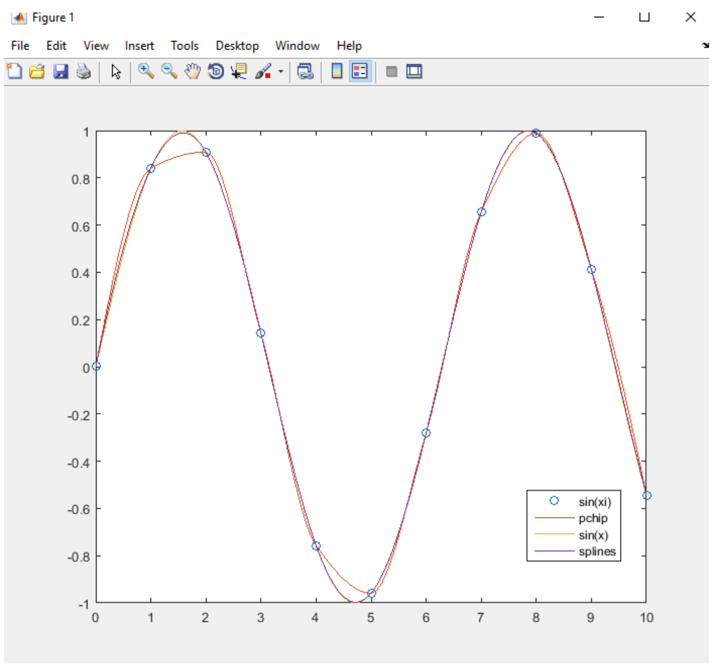
Outro tipo de interpolação polinomial: "piecewise polynomial interpolation"

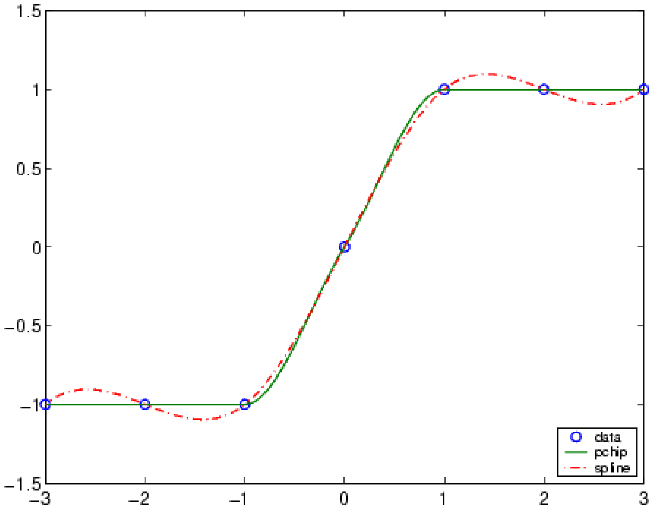


Neste caso assumimos que conhecemos o valor da função e da derivada em vários pontos. Na prática, isso não acontece: a derivada não está acessível na maior parte dos casos. Porém ela pode ser estimada, por exemplo usando um polinómio interpolador (!).

Aula 10 Simulação de Modelação

Este método de interpolação está implementado no Matlab com a opção pchip (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial (PCHIP)) em vez de spline. O resultado é um polinómio interpolador que oscila menos e que, de um ponto de vista computacional é mais simples de determinar.





Aqui o spline oscila

Aqui o pchip evidencia a sua menor suavização devido à ausência de condições na segunda derivada pchip: ideia de construção semelhante à dos polinómios de Lagrange, mas estas funções são locais ('fora' valem zero)

A ideia será construir qualquer spline através da equação:

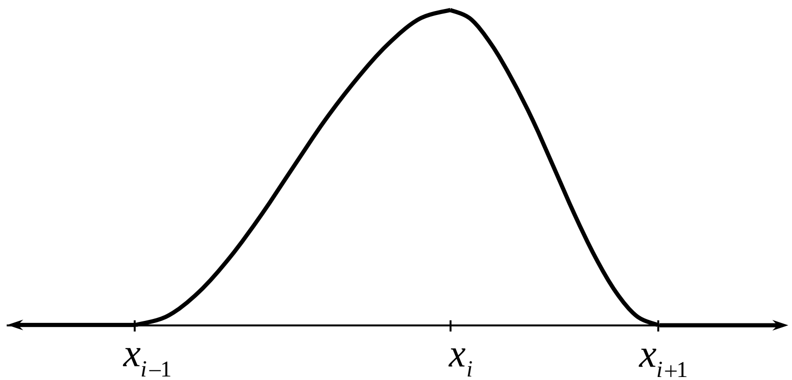
$$f(x) = y_1\Psi_1(x) + y_1'\Phi_1(x) + y_2\Psi_2(x) + y_2'\Phi_2(x) + \cdots + y_n\Psi_n(x) + y_n'\Phi_n(x)$$

soma de funções de base que se ocupam do valor da função nos pontos dados, x_1 , x_2 etc.

soma de funções de base que se ocupam das derivadas da função nos pontos dados, x_1 , x_2 etc.

Como criar a função que é 1 em x_i e 0 nos outros x_j ,
e tem derivada nula nos vários x_j ?

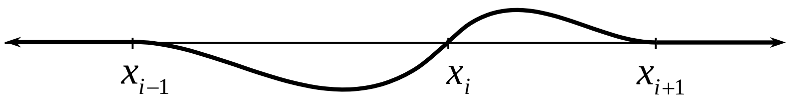
$$\Psi_i(x) = \theta_2\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \theta_1\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$



Com esta função podemos obrigar o polinómio a passar pela função no ponto x_i

Apresentação desta parte é baseada na apresentação de B. Cohen, http://slideplayer.com/slide/4635167/

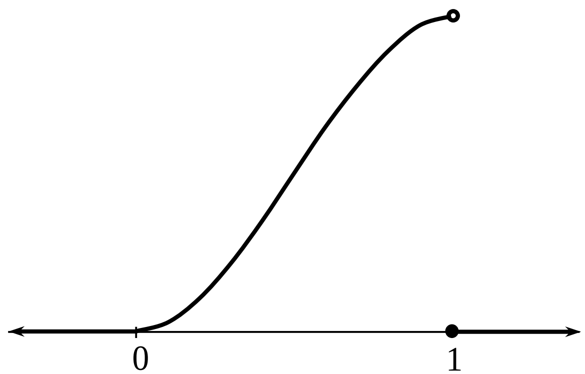
E quanto à derivada?



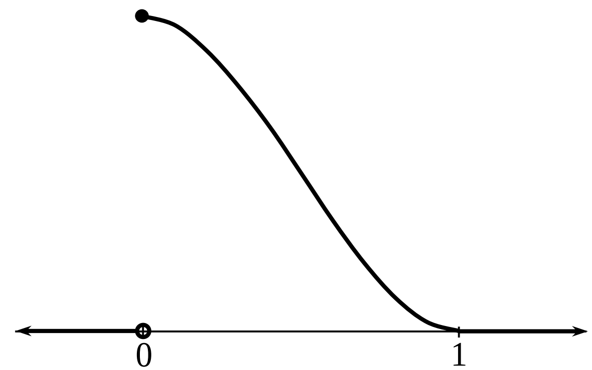
$$\Phi_i(x) = (x_i - x_{i-1})\varphi_2\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + (x_{i+1} - x_i)\varphi_1\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

Com esta função podemos obrigar o polinómio a ter a derivada correcta no ponto x_i

Podemos construir uma solução geral usando um conjunto de funções que formam uma base de funções: o polinómio será uma soma de translações e rescalamentos destas funções elementares

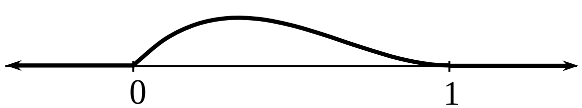


$$\theta_2(0)=0, \quad \theta_2(1)=1$$
$$\theta_2'(0)=0, \quad \theta_2'(1)=0$$



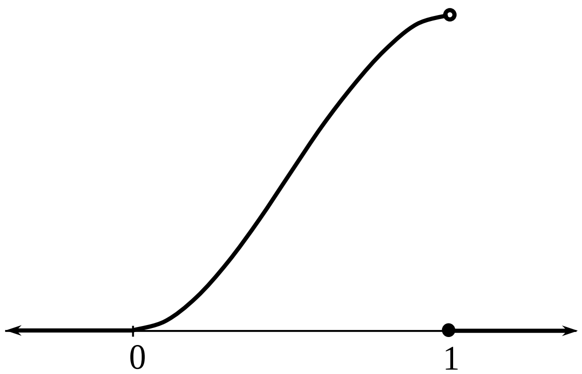
$$\theta_1(0)=1, \quad \theta_1(1)=0$$
$$\theta_1'(0)=0, \quad \theta_1'(1)=0$$

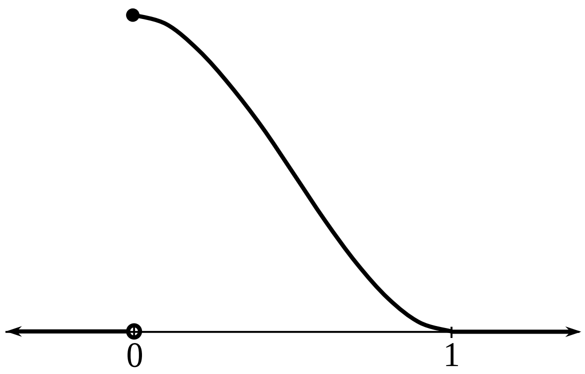
$$\varphi_2(0)=0, \quad \varphi_2(1)=0$$
$$\varphi_2'(0)=0, \quad \varphi_2'(1)=1$$



$$\varphi_1(0)=0, \quad \varphi_1(1)=0$$
$$\varphi_1'(0)=1, \quad \varphi_1'(1)=0$$

Funções da base elementar





$$\theta_2(0)=0, \quad \theta_2(1)=1$$
$$\theta_2'(0)=0, \quad \theta_2'(1)=0$$

$$\theta_1(0)=1, \quad \theta_1(1)=0$$
$$\theta_1'(0)=0, \quad \theta_1'(1)=0$$

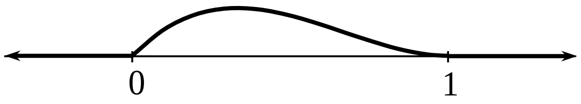
$$\boxed{\theta_2(x)=x^2(3-2x)}$$

$$\boxed{\theta_1(x)=\theta_2(1-x) \;=(x-1)^2(2x+1)}$$

Funções da base elementar

$$\varphi_2(0)=0, \quad \varphi_2(1)=0$$
$$\varphi_2'(0)=0, \quad \varphi_2'(1)=1$$

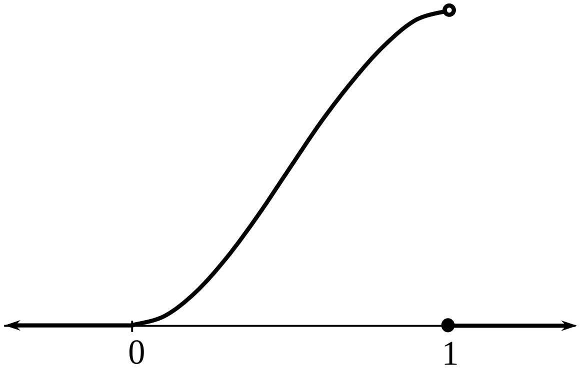
$$\boxed{\varphi_2(x)=x^2(x-1)}$$



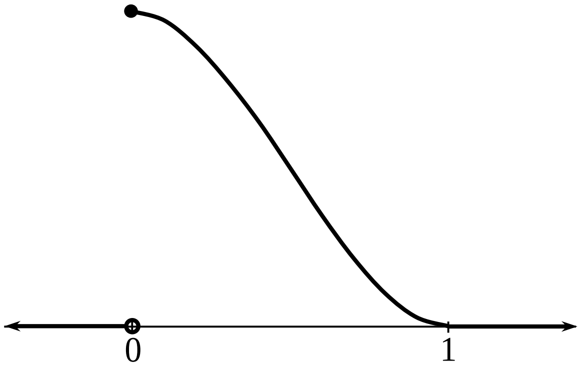
$$\varphi_1(0)=0, \quad \varphi_1(1)=0$$
$$\varphi_1'(0)=1, \quad \varphi_1'(1)=0$$

$$\boxed{\varphi_1(x)=-\varphi_2(1-x)=x(x-1)^2}$$

Base Elementar

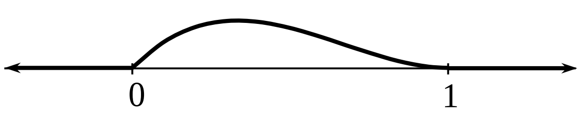


$$\theta_2(x) = \begin{cases} x^2(3-2x) & \text{if } x \in [0,1) \\ 0 & \text{if } x \notin [0,1) \end{cases}$$



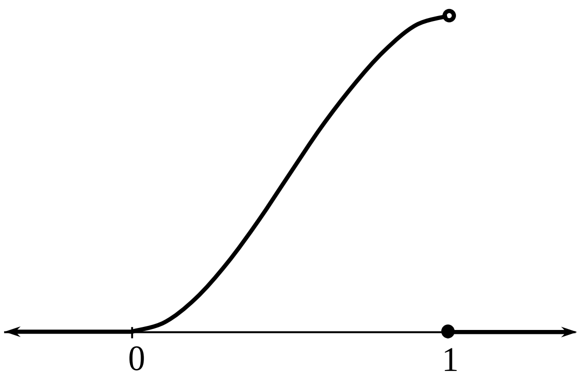
$$\theta_1(x) = \theta_2(1-x) = \begin{cases} (2x+1)(x-1)^2 & \text{if } x \in [0,1) \\ 0 & \text{if } x \notin [0,1) \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x^2(x-1) & \text{if } x \in [0,1) \\ 0 & \text{if } x \notin [0,1) \end{cases}$$

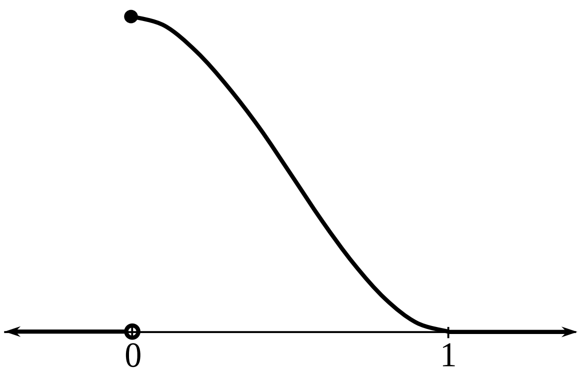


$$\varphi_1(x) = -\varphi_2(1-x) = \begin{cases} x(x-1)^2 & \text{if } x \in [0,1) \\ 0 & \text{if } x \notin [0,1) \end{cases}$$

Como criar a função que é 1 em x_i e 0 nos outros x_j ?

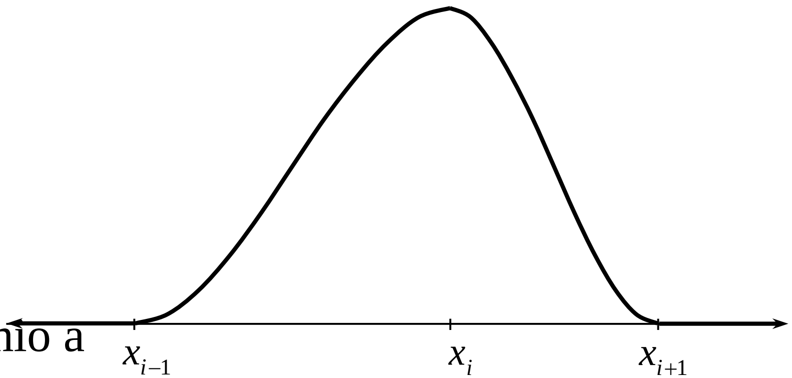


$\theta_2(x)$



$\theta_1(x)$

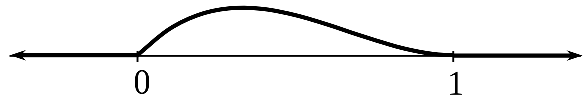
$$\Psi_i(x) = \theta_2\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \theta_1\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$



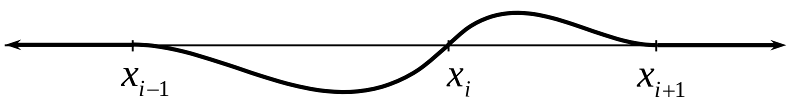
Com esta função podemos obrigar o polinómio a passar pela função no ponto x_i

E quanto à derivada?

$\varphi_2(x)$



$\varphi_1(x)$

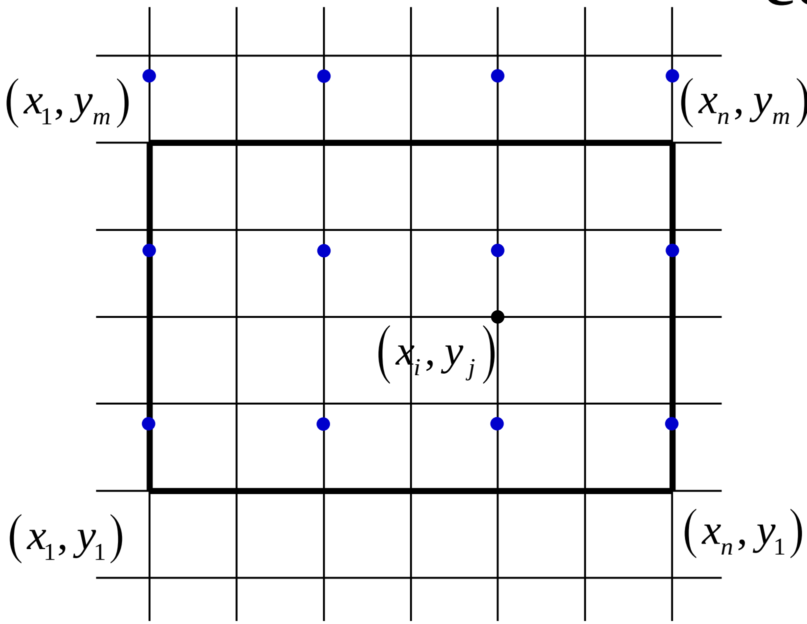


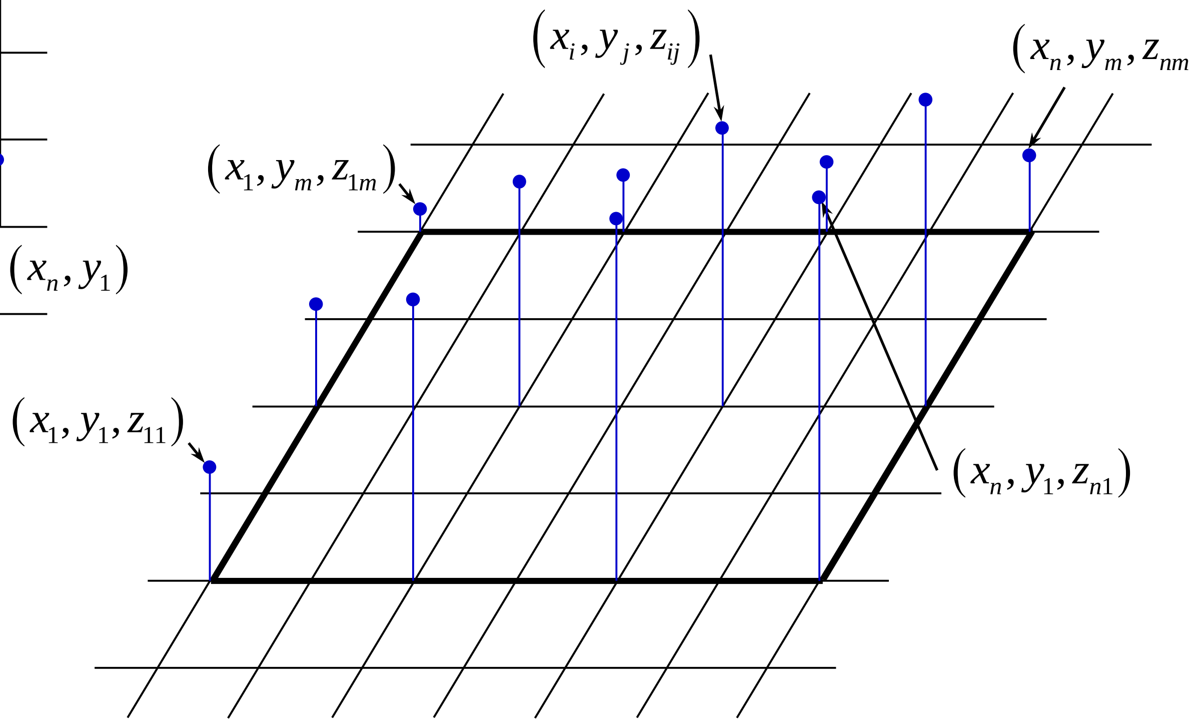
$$\Phi_i(x) = (x_i - x_{i-1})\varphi_2\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + (x_{i+1} - x_i)\varphi_1\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

Com esta função podemos obrigar o polinómio a ter a derivada correcta no ponto x_i

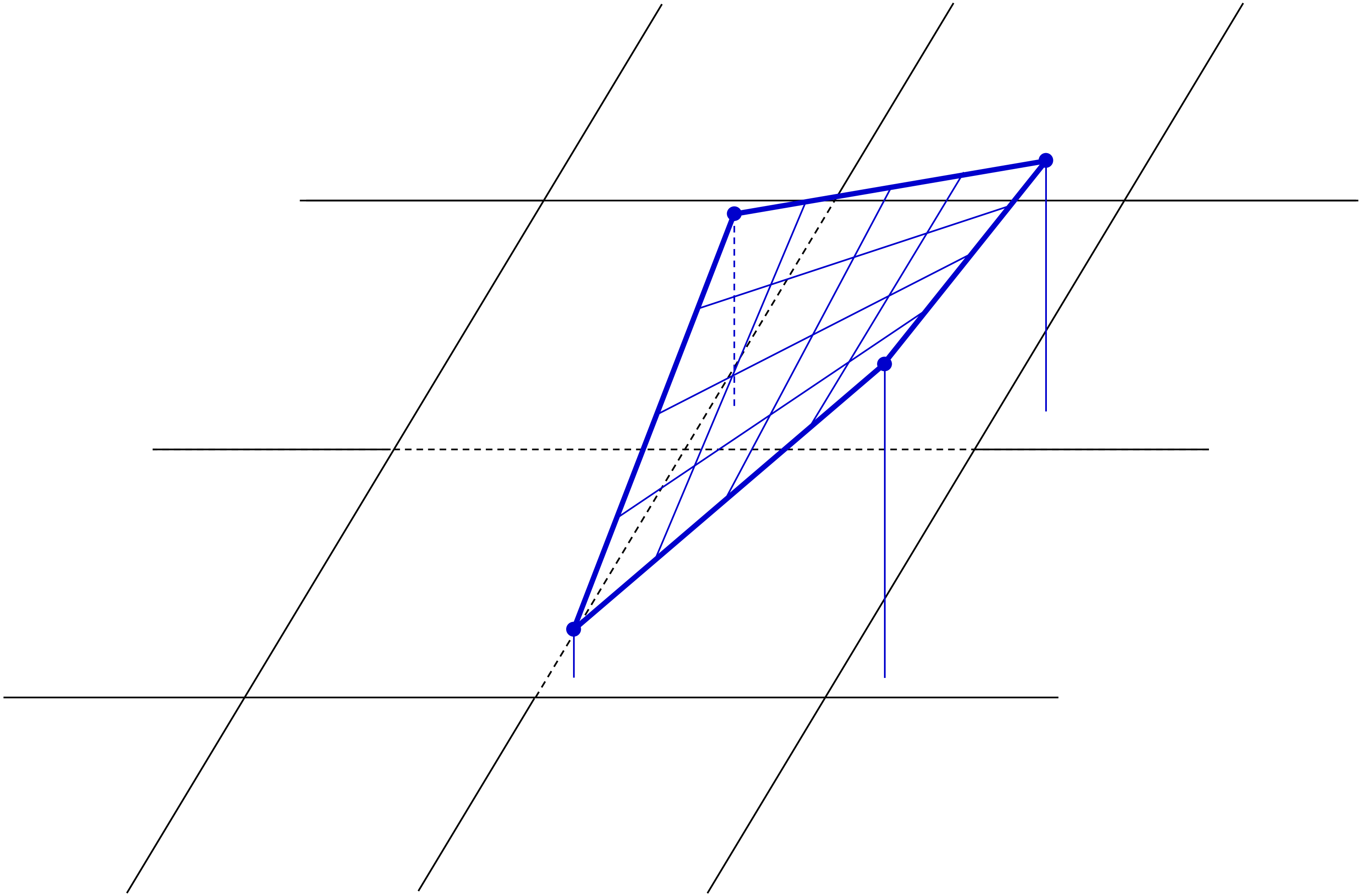
A construção do polinómio torna-se então imediata.

Como fazer a 2D? Admitamos que temos dados num conjunto de pontos

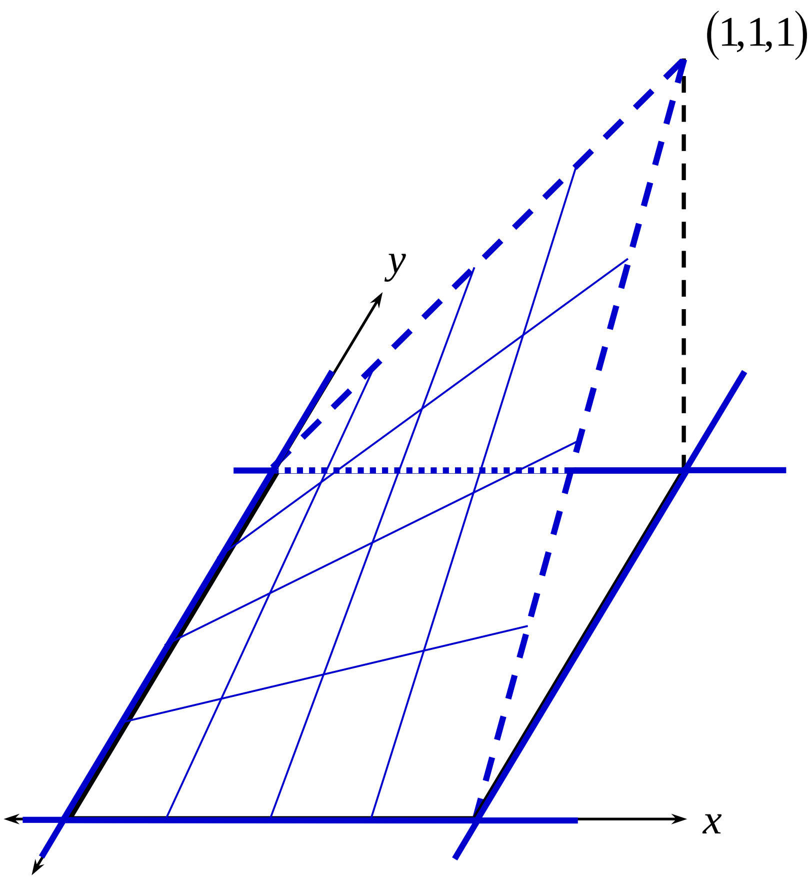


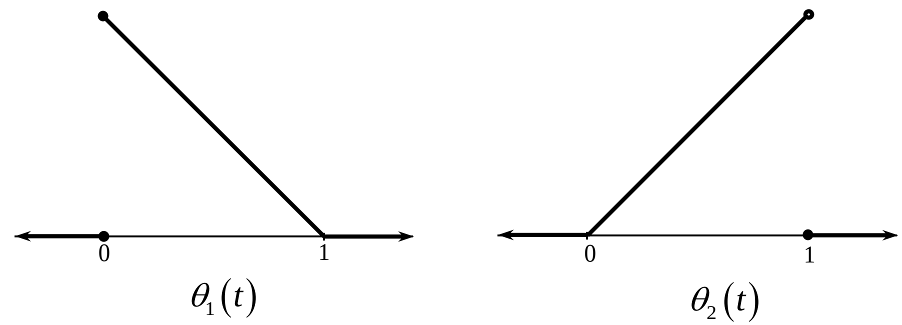


Num elemento podemos definir um polinómio bilinear



Como defini-los? A base de funções é construída a partir da base de funções do caso unidimensional.





Generalização:

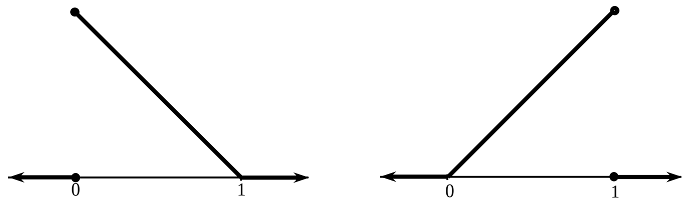
$$\theta_{11}(x,y)=\theta_1(x)\theta_1(y)$$

$$\theta_{12}(x,y)=\theta_1(x)\theta_2(y)$$

$$\theta_{21}(x,y)=\theta_2(x)\theta_1(y)$$

$$\theta_{22}(x,y)=\theta_2(x)\theta_2(y)$$

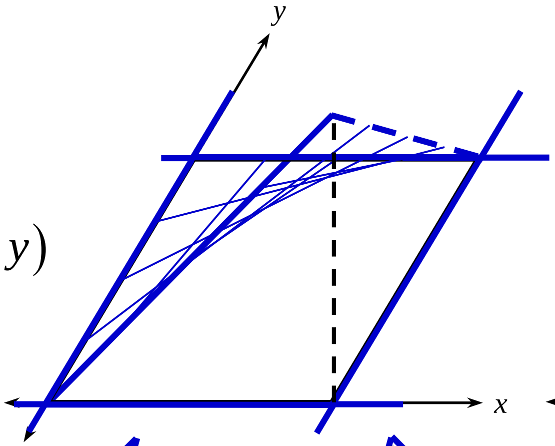
Funções da base 1-D:

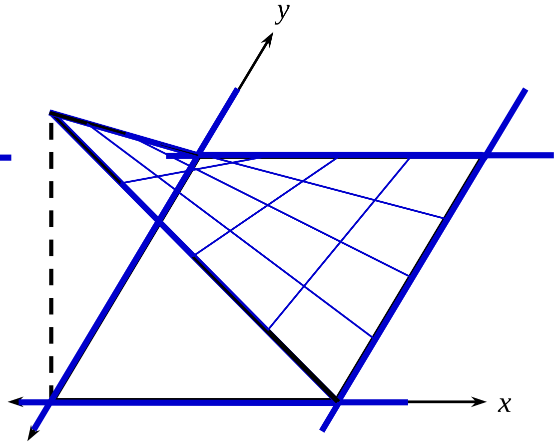


$\theta_1(t)$ $\theta_2(t)$

Base 2D bilinear

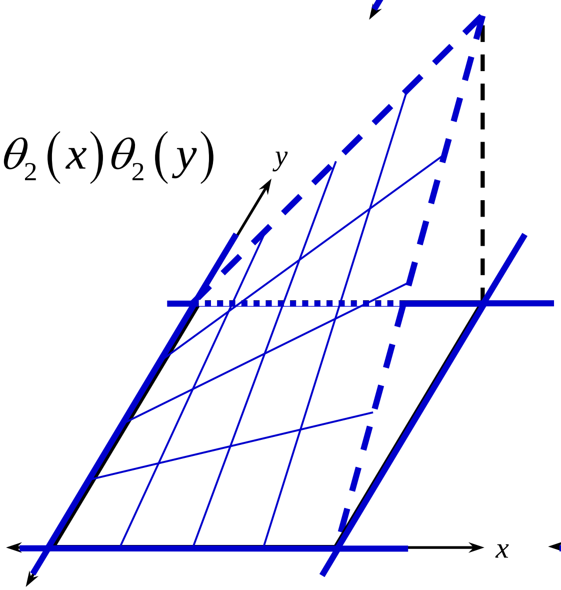
$$\theta_{21}(x,y)=\theta_2(x)\theta_1(y)$$

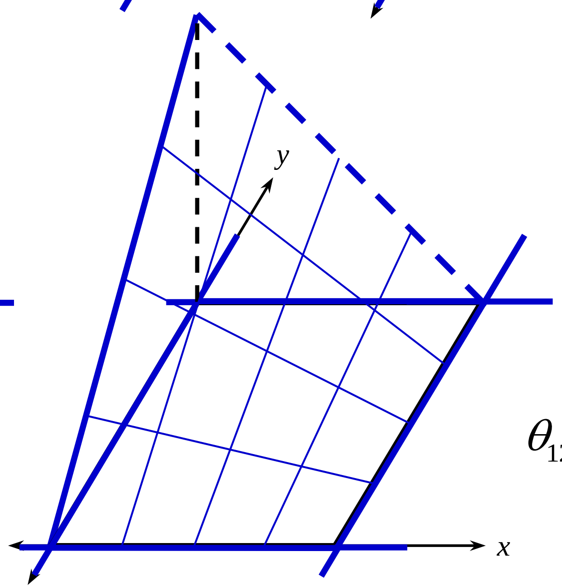




$$\theta_{11}(x,y)=\theta_1(x)\theta_1(y)$$

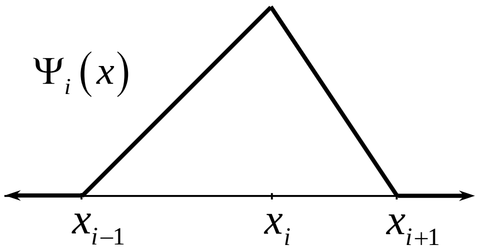
$$\theta_{22}(x,y)=\theta_2(x)\theta_2(y)$$



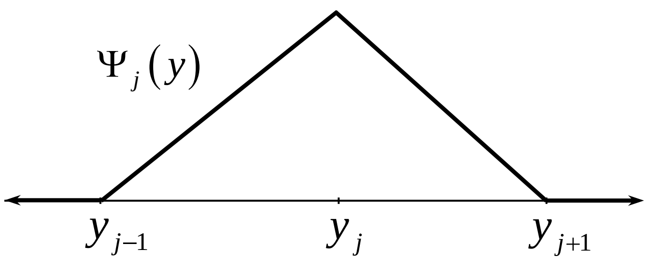


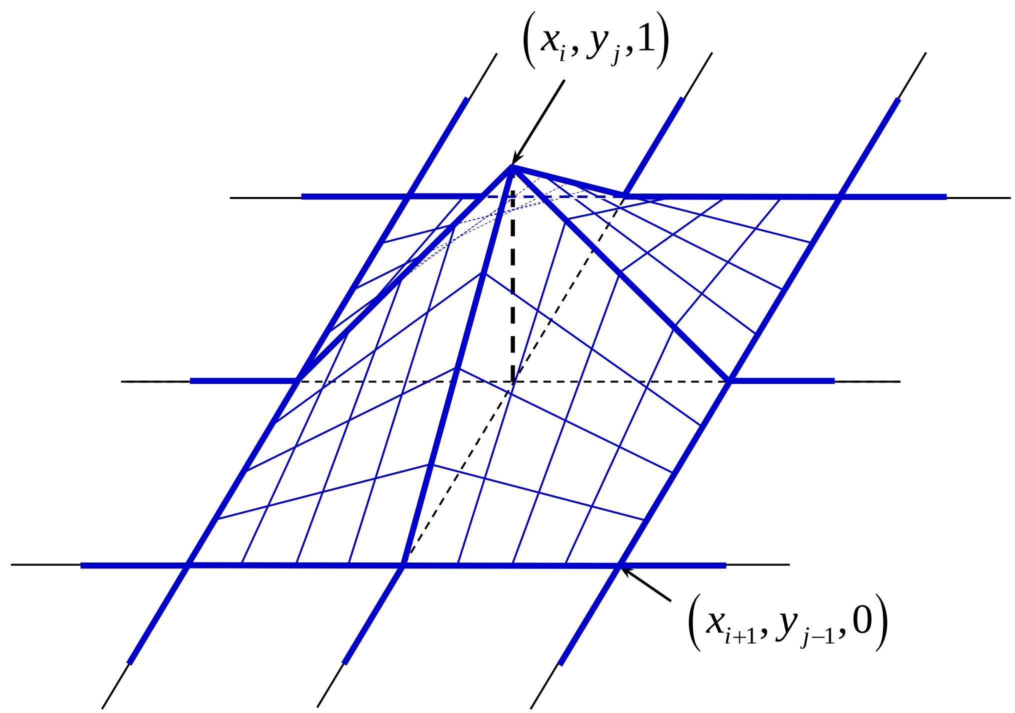
$$\theta_{12}(x,y)=\theta_1(x)\theta_2(y)$$

Polinómios Bilineares: funções da base



$$\Psi_{ij}(x,y) = \Psi_i(x)\Psi_j(y)$$

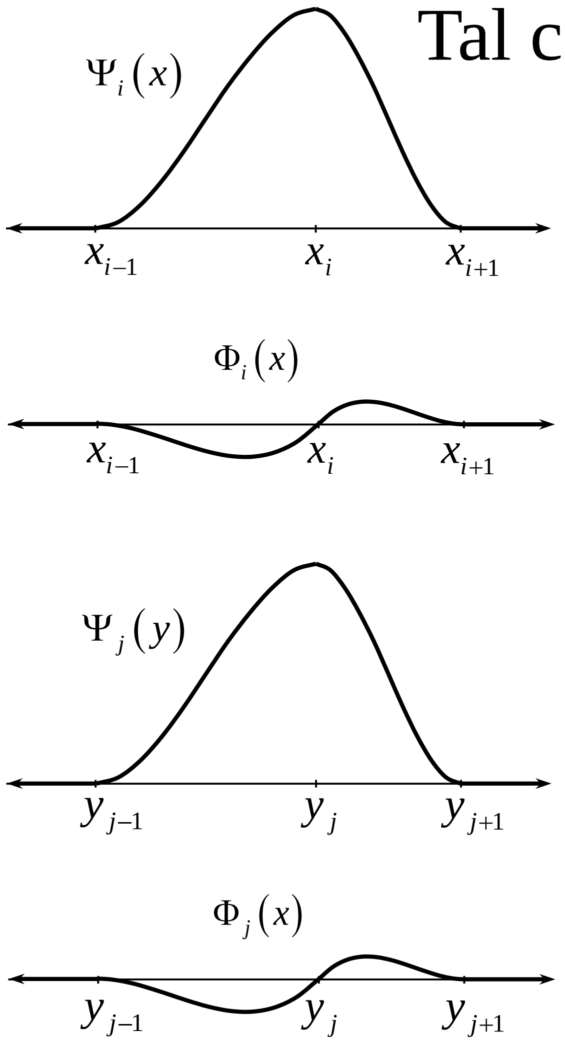




Funções da base são zero há excepção de um ponto onde valem 1.

Como construir polinómios bicúbicos a 2D?

Tal como antes, usamos a base 1d:

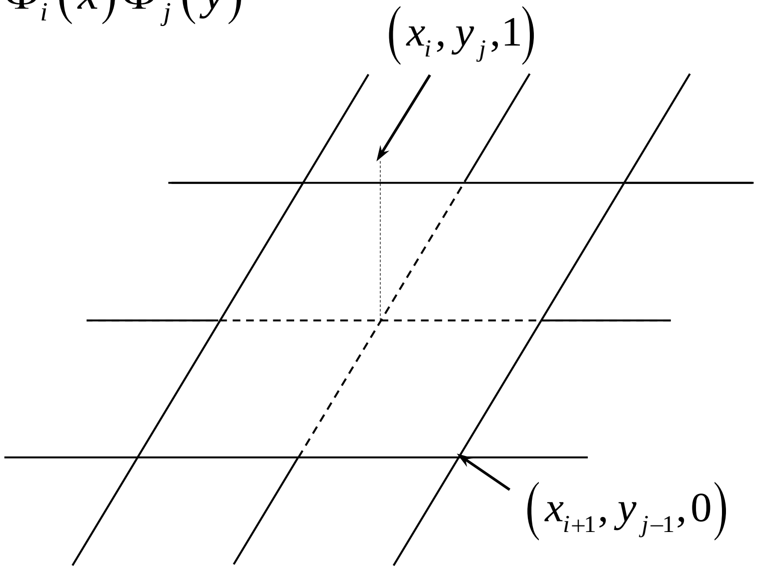


$$\Theta^{\Psi\Psi}{}_{ij}(x,y)=\Psi_i(x)\Psi_j(y)$$

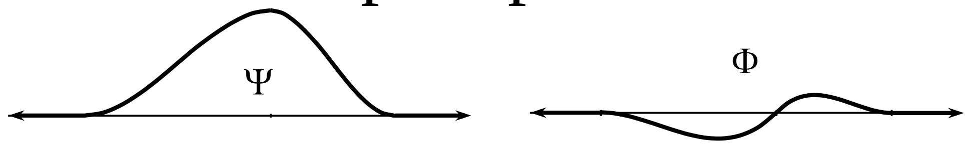
$$\Theta^{\Psi\Phi}{}_{ij}(x,y)=\Psi_i(x)\Phi_j(y)$$

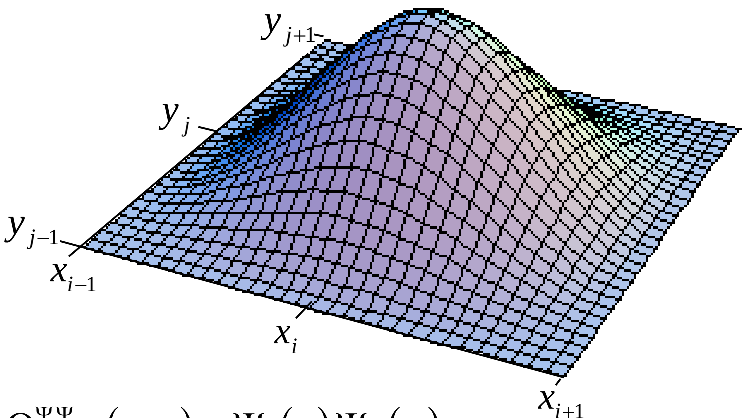
$$\Theta^{\Phi\Psi}{}_{ij}(x,y)=\Phi_i(x)\Psi_j(y)$$

$$\Theta^{\Phi\Phi}{}_{ij}(x,y)=\Phi_i(x)\Phi_j(y)$$

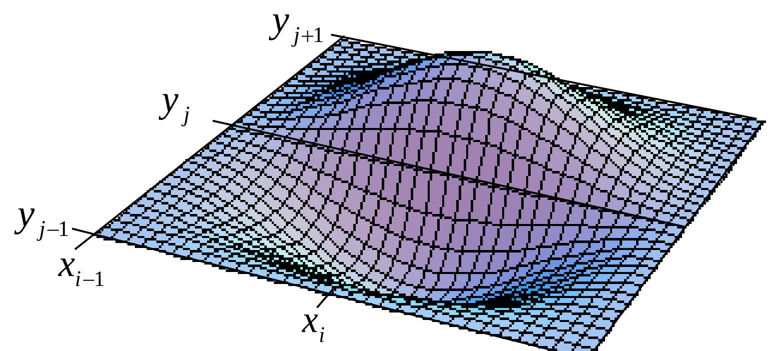


Funções da base a 2-D para polinómios bicúbicos

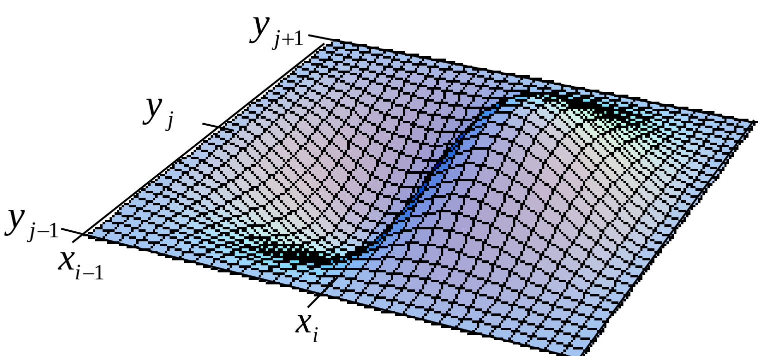




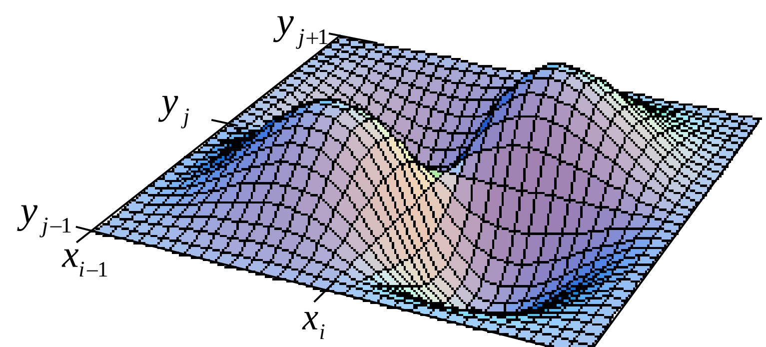
$$\Theta^{\Psi\Psi}{}_{ij}(x,y)=\Psi_i(x)\Psi_j(y)$$



$$\Theta^{\Psi\Phi}{}_{ij}(x,y)=\Psi_i(x)\Phi_j(y)$$



$$\Theta^{\Phi\Psi}{}_{ij}(x,y)=\Phi_i(x)\Psi_j(y)$$



$$\Theta^{\Phi\Phi}{}_{ij}(x,y)=\Phi_i(x)\Phi_j(y)$$

- Aspecto que não considerei aqui: splines

em linhas definidas por equações paramétricas