Simulação e Modelação

Trabalho nº 3 – Pêndulo balístico e conservação da energia mecânica

Introdução

O pêndulo balístico é um dispositivo que permite determinar a velocidade de uma bala através da conservação do momento linear.

Este dispositivo é composto por um bloco de massa M que se encontra suspenso por um fio de comprimento L e massa desprezável. Nesta experiencia, uma bala de massa m e velocidade v_0 disparada na horizontal irá ficar alojada no bloco, fazendo com que o pendulo e a bala sejam elevados até uma determinada altura máxima h.

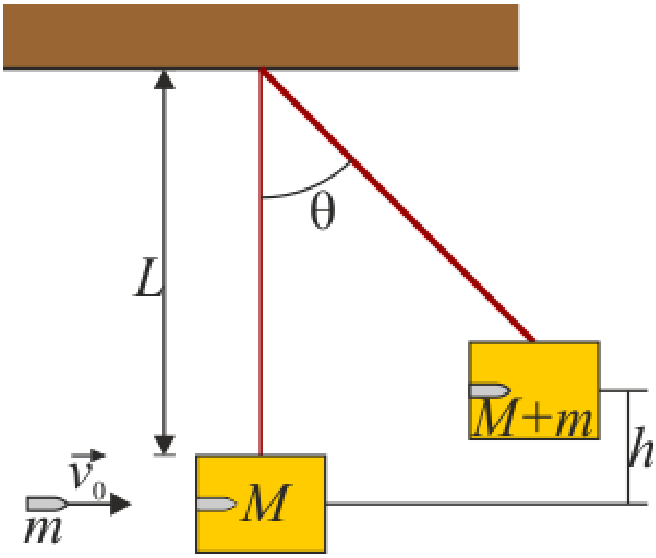

Figura 1 - Pêndulo balístico (esquema)

A lei da conservação do momento linear diz que num sistema fechado o momento total é constante, ou seja, aplicando esta lei ao pêndulo balístico: o momento antes da colisão da bala com o bloco é igual ao momento após a colisão.

$$mv_0 = (M+m)V \Leftrightarrow V = \frac{m}{(m+M)}v_0 \qquad \text{(equação 1)}$$

, sendo V a velocidade do sistema (bloco + bala) após a colisão.

Após a colisão, o conjunto ganha velocidade (e consequentemente energia cinética) que vai perdendo á medida que a altura (e consequentemente a energia potencial) aumenta, até chegar a h, em que a energia cinética e velocidade são nulas.

Pela conservação da energia mecânica (pois vamos considerar que não existem forças dissipativas) temos que: $Em_{inicial} = Em_{final}$ e como $Ep_{inicial} = Ec_{final} = 0\,J$ podemos concluir que:

$$\frac{1}{2}(m+M)V = (m+M)gh \Leftrightarrow V = \sqrt{2gh} \quad \text{(equação 2)}$$

, sendo g a aceleração da gravidade.

Igualando as equações 1 e 2 podemos concluir que:

$$v_0 = \frac{\sqrt{2gh} \times (m+M)}{m} \quad \text{(equação 3).}$$

Métodos

Todos os dados foram criados e analisados usando o Matlab. A sintaxe usada para os criar encontra-se nos ficheiros em anexo. No final foi feito um GUI para poderem ser definidas as condições iniciais: m_b – massa da bala, m_p – massa do pêndulo e v_0 – velocidade da bala após a colisão com o pêndulo; e obtidos os parâmetros calculados: v – velocidade do sistema pêndulo+bala, h – altura máxima atingida pelo pêndulo e o angulo máximo que o pendulo faz com a vertical.

Nesta simulação foi considerado que não existem forças dissipativas (por exemplo, força de atrito, resistência do ar, etc) ou seja, como é um sistema conservativo, há conservação da energia mecânica.

```
while xb < xp
    plot(tetox, tetoy, 'k', 'Linewidth',10); %plot teto
    hold on
    plot([xp xp],[yp yteto], 'k', 'Linewidth', 2); %plot fio
    plot(xp, yp, '.r','markersize', 120); %plot pendulo
    plot(xb, yb,'.','markersize', 20); %plot bala
    hold off
    yb=yp;
    xb= + vinicial*t;
    axis ([-10 30 0 30]);
    pause(0.005);
    t = t+0.005;
end
```

O movimento do pêndulo foi simulado através da equação $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$, sendo θ_0 o ângulo máximo atingido pelo pêndulo, ω a velocidade angular e ϕ a fase inicial do movimento, que neste caso vai ser -π/2 pois o movimento do pêndulo começa quando θ = 0.

Pela equação 1 foi calculada a velocidade v do sistema após a colisão. Com esse valor, e através da lei da conservação da energia mecânica já referida na introdução, foi possível calcular θ_0, ângulo máximo atingido pelo pêndulo:

$$v = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow h = \frac{v^2}{2g} \Leftrightarrow$$

$$L - L\cos(\theta_0) = \frac{v^2}{2g} \Leftrightarrow \cos(\theta_0) = 1 - \frac{v^2}{2gL} \Leftrightarrow \theta_0 = \cos^{-1} 1 - \frac{v^2}{2gL}$$

A altura máxima foi calculada pela equação 2:

$$v = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

```
v = (mbala/(mbala+mpend))* vinicial %velocidade após a colisão (conservação do momento linear)
theta_f = acos(1-((v*v)/(2*g*L))) %angulo maximo (conservação da enegia mecanica)
vang = sqrt(g/L);
hmax = (v.^2)/(2*g)

for t = t:dt:50
    theta = theta_f*cos(vang*t-pi/2);
    x = xp + L*sin(theta);
    y = yp + L*(1-cos(theta));
    plot(tetox, tetoy, 'k', 'Linewidth',10); %plot teto
    hold on
    plot([x xp],[y yteto], 'k', 'Linewidth', 2); %plot fio
    plot(x, y, '.r','markersize', 120); %plot pendulo
    plot(x, y,'.','markersize', 20); %plot bala
    hold off

    axis ([-10 30 0 30]);
    pause(dt);
end
```

Figura 2 - Código usado para a animação do pêndulo

Após ter sido feito o código, foi feito um GUI em que o utilizador insere as condições iniciais do movimento do pêndulo balístico (lado direito do GUI), vê o movimento do pêndulo (centro do GUI) e obtém os parâmetros já acima referidos calculados (lado esquerdo do GUI).

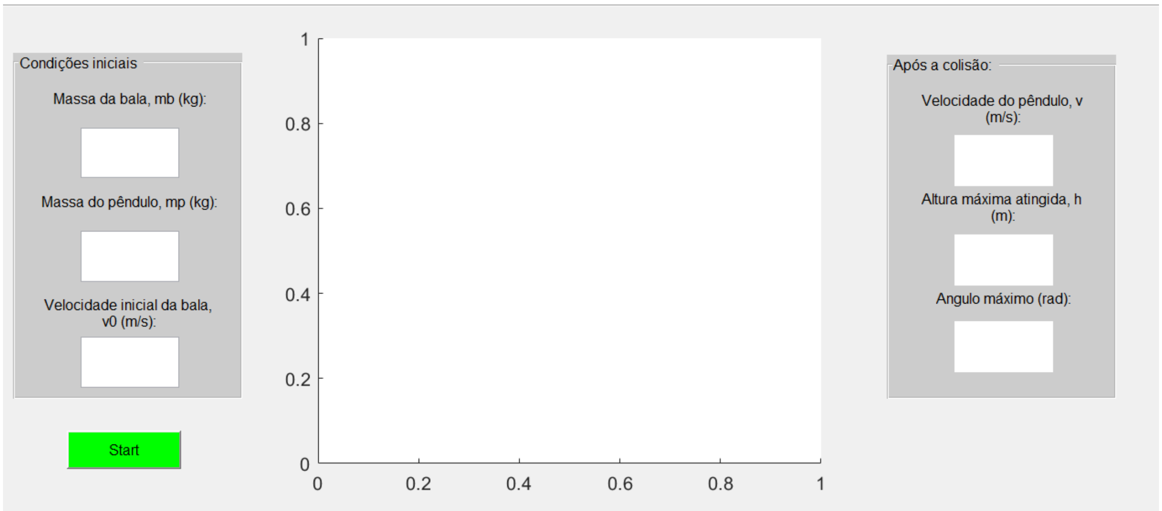

Figura 3 - GUI

Resultados e Discussão

Para analisar o movimento do pêndulo balístico vamos atribuir certos valores as condições iniciais que vão ser alterados 1 a 1, mantendo os outros constantes, ou seja, mantendo os outros com os valores iniciais. Podem ser atribuídos quaisquer valores as condições iniciais, mas decidi começar pelos seguintes:

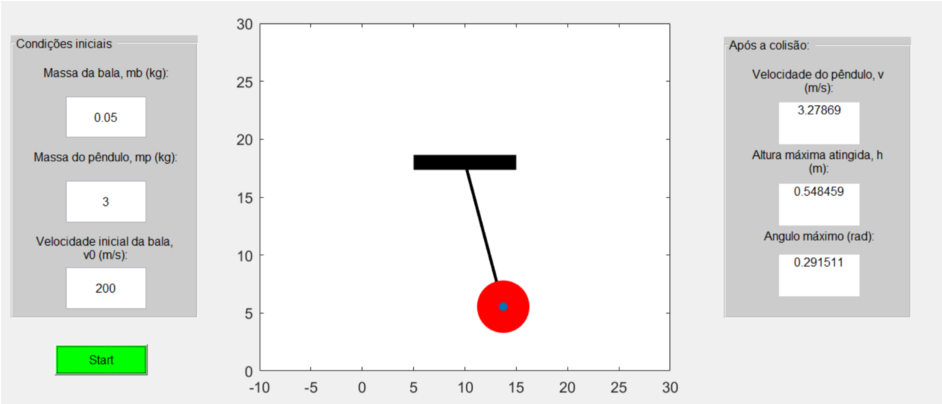

Figura 4 - GUI com as condições iniciais. (Estas condições não têm necessariamente que ter os valores escolhidos aqui)

Se alterarmos as condições iniciais e mantivermos as outras constantes podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Se alterarmos apenas a massa da bala (aumentando-a), vai aumentar a velocidade do sistema após a colisão, a altura máxima atingida e também o angulo máximo. Ou seja, quanto maior a massa da bala, maior a velocidade do pendulo após a colisão e maior a altura máxima atingida.

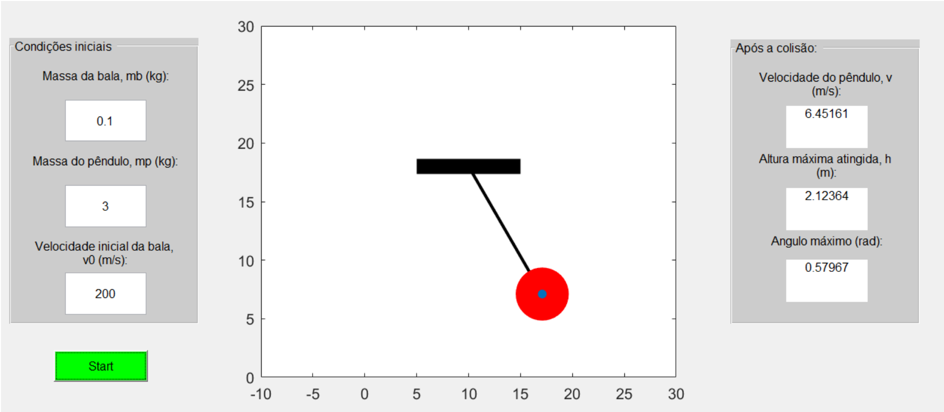

Figura 5 - GUI do pêndulo em que foi alterada apenas a massa da bala, mb

2. Se alterarmos apenas a massa do pêndulo (aumentando-a), todos os parâmetros calculados após a colisão vão diminuir. Ou seja, quanto maior a massa do pêndulo, menos a velocidade após a colisão e a altura máxima.

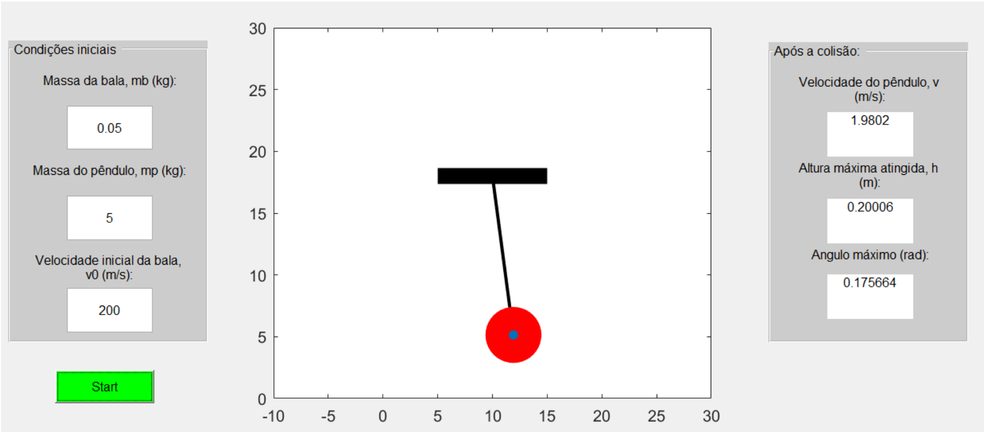

Figura 6 - GUI do pêndulo em que foi alterada apenas a massa do pêndulo, mp

3. Se alterarmos apenas a velocidade inicial da bala (aumentando-a), podemos observar que os parâmetros obtidos após a colisão vão todos aumentar. Ou seja, quanto maior a velocidade inicial da bala, maior a velocidade do pêndulo após a colisão e maior a altura máxima atingida.

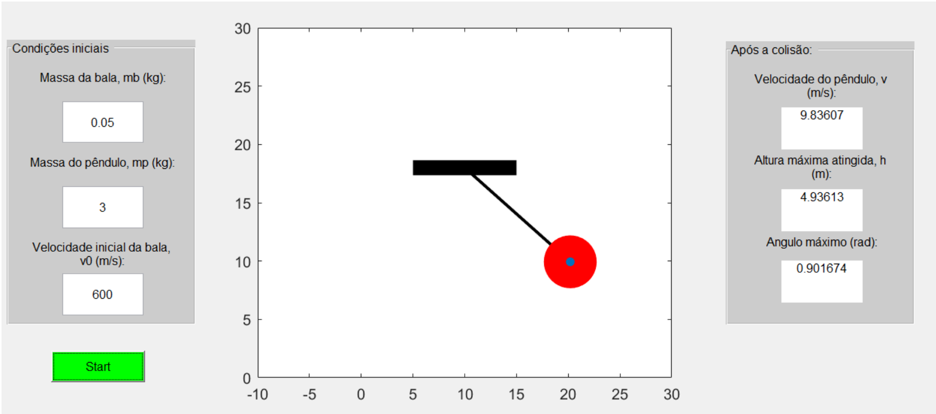

Figura 7 - GUI do pêndulo em que foi alterada apenas a velocidade inicial da bala, v0

Conclusão

Com este trabalho conclui-se que o pendulo balístico é um ótimo dispositivo para resolver problemas de balística (através da lei da conservação do momento linear e da conservação da energia mecânica), como calcular a velocidade da bala antes e após a colisão ou calcular a altura máxima atingida pelo pendulo após a sua colisão com a bala.

Conclui-se também que a utilização de um GUI é bastante útil, pois permite ao utilizador alterar parâmetros e obter resultados de uma forma mais fácil.