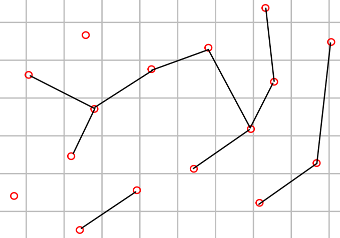
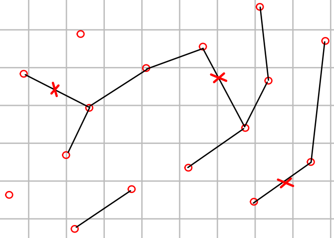
Modelo SIR e tempos longos

- No modelo SIR para além da transmissão há recuperação a uma taxa γ
- Começa-se com um infetado na GC
- Se assumirmos que todos os infetados recuperam num tempo $\tau = \frac{1}{\gamma}$ fixo não aleatório.
  Existe uma probabilidade de um infetado não transmitir (por recuperar antes) $= \lim_{dt \to 0} (1 - \beta\, dt)^{\frac{\tau}{dt}} = e^{-\beta\tau}$ $= 1 - \phi$
  e uma probabilidade de transmissão através de uma aresta dada por $\phi = 1 - e^{-\beta\tau}$
- Para tempos longos tudo se passa como se a transmissão não ocorresse, em cada aresta, com probabilidade $1 - \phi$ e podemos remover essa aresta, com esta probabilidade.

Rede com componente gigante



Percolação- é um modelo do ataque a uma rede removendo arestas e/ou vértices



com probabilidade $1-\phi$

removemos arestas

existe um ϕ_c (phi critico)

tal que para $\phi < \phi_c$ deixa

de existir componente gigante

Transição epidémica e percolação

- A transição epidémica é uma transição de percolação
  Se ϕ for baixo não há GC e não se estabelece uma epidemia.
- $u=$ probabilidade do vértice não contagiar através de uma aresta
  $\phi \sum_k q_k u^k =$ probabilidade de transmitir ao vizinho mas este não propagar a epidemia
- $u = \overbrace{1-\phi}^{\text{não trasnmitiu}} + \overset{\text{trasmitiu mas não propagou}}{\phi \sum_k q_k u^k} = 1 - \phi + \phi g_1(u)$, u^k=probabilidade do vértice não transmitir a qualquer vizinho
  $\frac{d}{du}\left[1 - \phi_c + \phi_c g_1(u)\right]\big|_{u=1} = 1$ temos $\phi_c = \frac{1}{g_1'(1)}$
  Se $\phi < \phi_c$ só há uma solução: $u = 1$
  Se $\phi > \phi_c$ há uma solução: $u < 1$

Tamanho da epidemia

- $S = 1 - \sum_k u^k p_k = 1 - g_0(u)$ é a fracção média de vértices infetados
  $S = 0$ se $\phi < \phi_c$ e $S \neq 0$ se $\phi > \phi_c$
- $\phi_c = 1 - e^{-R_{0.c}} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ com $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$
- Para uma rede aleatória com distribuição de grau Poisson
  $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle$
  $\phi_c = \frac{1}{\langle k \rangle} = \frac{1}{c}$ e $R_{0,c} = \ln \frac{c}{c-1}$
  $S = 1 - e^{-c\phi S}$
- Vacinação corresponde a remover vértices

$c_{eff} = c\phi$

$c_{eff,c} = c\,\phi_c = 1 \Rightarrow \phi_c = \frac{1}{c}$

Epidemias em redes complexas

- distribuição de grau $\longrightarrow$ rede complexa
  $p_k \sim \frac{1}{k^\alpha}$, $2 < \alpha < \infty$
- Se $2 < \alpha < 3$ temos $\left\{\left\langle k^2 \right\rangle = \infty\right\}$ e $\phi_c = 0$. A epidemia existe sempre! É impossivel fazer parar a epidemia.
- Existem Hubs ou seja vértices com elevado número de arestas. Só removendo esses Hubs podemos parar a epidemia.

Dependência temporal para o modelo SIR

- Equações da dinâmica: $\frac{ds_i}{dt} = -\beta s_i \sum_j A_{i,j} x_j$;
  $\frac{dx_i}{dt} = \beta s_i \sum_j A_{i,j} x_j - \gamma x_i$; $\frac{dr_i}{dt} = \gamma x_i$
  $s_0 = 1 - 1/n \;\; x_0 = 1/n$
- Tempos curtos
  Equações linearizadas (Aproximação)
  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \beta M \bar{x}$, com $\overset{=}{M} = \overset{=}{A} - \frac{\gamma}{\beta} \overset{=}{I}$. com $\overset{=}{I}$=matriz identidade
  $x(t) \sim a_1(0) e^{(\beta \kappa_1 - \gamma) t}$ com κ_1 o maior valor próprio de $\overset{=}{A}$
  Transição de fase epidémica
  $R_{0.c} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_c = \frac{1}{\kappa_1}$

Aproximação baseada no grau para SIR

- Equações da dinâmica:
  $\frac{ds_k}{dt} = -\beta k s_k v(t); \frac{dx_k}{dt} = \beta k s_k v(t) - \gamma x_k \; ; \; \frac{dr_k}{dt} = \gamma x_k$
  Definindo $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x_k$e $w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k r_k(t)$,
  Obtém-se $s_k = s_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} k w(t)}$, Define-se $u(t) = \exp(-\frac{\beta}{\gamma} w)$
  Obtém-se, $s_k(t) = s_0 u^k$
- $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (1 - s_k - r_k) =$
  $1 - w(t) - s_o g_1(u) = 1 + \frac{\gamma}{\beta} \ln u - s_0 g_1(u)$
- $\frac{dw}{dt} = \sum_k q_k \frac{dr_k}{dt} = \sum_k \gamma q_k x_k = \gamma v$
- $\frac{du}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma} u \frac{dw}{dt} = -\beta u \left[1 + \frac{\gamma}{\beta} \ln u - s_0 g_1(u) \right]$, resolve-se para $u(t)$
  $s_k = s_0 u^k$
- $s(t) = \sum_k s_k p_k = s_0 g_0(u)$

gráficos para o modelo SIR

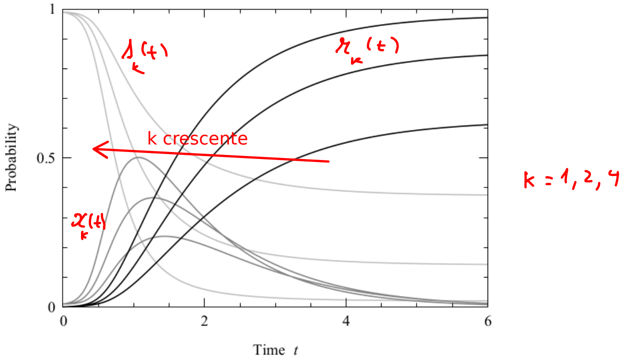


Figure: s_k, x_ke $r_k$par o modelo SIR para $\beta = \gamma = 1$ para k=1,2 e 4 para uma rede com distribuição e grau exponencial com parâmetro $\lambda = 0.1$.(do livro de Newman)

transição epidémica

- Obtém-se na aproximação baseada no grau para $R_{0.c} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_c = \frac{1}{g_1'(1)}$
- Não concorda completamente com o resultado anteriormente obtido $\phi_c = 1 - e^{-R_{0.c}} = \frac{1}{g_1'(1)}$ para o modelo SIS quando cada infetado recupera no tempo exatamente $\tau = \frac{1}{\gamma}$ a não ser quando $R_{0.c} \ll 1$

Modelação e Física Estatística

Método de Monte Carlo em tempo contínuo

António Luís Ferreira

June 1, 2021

Temas

1. equação mestra
2. distribuição do tempo de espera
3. algoritmo

equação mestra

- tempo discreto $P(x,t+\triangle t) = \sum_{x'} \prod_{x,x'} P(x',t)$. com $\prod_{x,x'} = W(x' \rightarrow x)\triangle t$ se $x' \neq x$ e $\prod_{x,x} = 1 - \sum_{x' \neq x} W(x \rightarrow x')\triangle t$ onde $W(x' \rightarrow x)$é a taxa de transição do estado x' para x.
  $P(x,t+\triangle t) - P(x,t) = \sum_{x'} \left[\prod_{x,x'} P(x',t) - \prod_{x',x} P(x,t) \right]$
  dado que $\sum_{x'} \prod_{x',x} = 1$
  $$\begin{aligned} \frac{dP(x,t)}{dt} &= \frac{P(x,t+\triangle t) - P(x,t)}{\triangle t} \\ &= \sum_{x' \neq x} W(x' \rightarrow x) P(x',t) - P(x,t) \sum_{x' \neq x} W(x \rightarrow x') \end{aligned}$$

distribuição do tempo de espera

- a distribuição do tempo de espera, τ, num estado x pode ser obtida de

$$P_W(x,\tau)\triangle t = \lim_{\substack{\triangle t \to 0 \\ n \to \infty}} \textstyle\sum_{x' \neq x} \prod_{x',x} \prod_{x,x}^{n-1} \text{ com } \tau = n\triangle t,$$

$$P_W(x,\tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{x' \neq x} W(x \to x') \left(1 - \textstyle\sum_{x' \neq x} W(x \to x') \frac{\tau}{n}\right)^{n-1}$$

$$P_W(x,\tau) = \lambda_x \exp(-\lambda_x \tau) \text{com } \lambda_x = \textstyle\sum_{x' \neq x} W(x \to x')$$

tempo médio de espera, $\bar{\tau}_x = \frac{1}{\lambda_x}$

algoritmo

- Dado o sistema no estado x gerar um tempo de espera com distribuição exponencial
  $\tau = \frac{1}{\lambda_x} \ln \left(1 - \hat{U}\right)$
- Escolher o estado x' para o qual o sistema transita com probabilidade $\frac{W(x \to x')}{\lambda_x}$. Esta probabilidade está normalizada dado que $\lambda_x = \sum_{x' \neq x} W(x \to x')$
- incrementar o tempo $t_i = t_{i-1} + \tau_{i-1}$ onde t_i representa o instante de tempo onde foi observada a transição entre o estado x_{i-1} e o estado x_i (com $t_0 = 0$)
- Para calcular a média em regime estacionário do observável $\mathscr{O}(x)$ fazemos: $\overline{\mathscr{O}(x)} = \frac{\sum_i \tau_i \mathscr{O}(x_i)}{\sum_i \tau_i}$

caso de número finito de classes de taxas de transição

- No caso em que as transições de qualquer x para x' têm taxas de transição que tomam um conjunto finito, N_C de valores possíveis podemos para um dado x identificar os estados x' que pertencem a cada classe de taxas.
- então $\lambda_x = \sum_{i=1}^{N_C} r_i n_i(x)$ onde r_i é a taxa da classe i e $n_i(x)$ é o número de estados x' na classe i.
- Escolhemos a classe a que pertence o estado final com probabilidade $\frac{n_i(x) r_i}{\lambda_x}$.
- Escolhemos x' , com igual probabilidade de entre os estados finais que pertencem à classe escolhida.
- atualizamos a lista dos estados em cada classe para conhecer $n_i(x')$