Código de repetição

Example 1.22 Repetition code. Consider a BSC which transmits a wrong bit with probability p. A simple code consists in repeating each bit k times, with k odd. Formally, we have $M = 1$, $N = k$, and

$$\underline{x}(0) = \underbrace{000\dots00}_{k}\,, \tag{1.43}$$

$$\underline{x}(1) = \underbrace{111\dots11}_{k}\,. \tag{1.44}$$

This code has rate $R = M/N = 1/k$. For instance, with $k = 3$, the original stream 0110001 is encoded as 000111111000000000111. A possible decoder consists in parsing the received sequence into groups of k bits, and finding the message m' using a majority rule among the k bits. In our example with $k = 3$, if the received group of three bits is 111 or 110 or any permutation, the corresponding input bit is assigned to 1, otherwise it is assigned to 0. For instance, if the channel output is 000101111011000010111, this decoder returns 0111001.

Figure: Exemplo de um código de repetição simples

Código de repetição

- Mostra-se, para o código de repetição simples, que o erro médio vem dado por: $P_B^{av} = \sum_{r=\lceil k/2 \rceil}^{k} \binom{k}{r} (1-p)^{k-r} p^r$
- O erro anula-se apenas no limite em que $k \to \infty$ e portanto $R \to 0$

Este código só transmite com erro nulo se a taxa de transmissão fôr muito baixa (nula)

Teorema de codificação(Shannon)

- Para cada taxa $R < C$, onde C é a capacidade do canal existe uma sequência de códigos com tamanho de bloco N, taxa R_N e erro médio $P^{av}_{B,N}$ tal que $R_N \to R$ e $P^{av}_{B,N} \to 0$ com $N \to \infty$.
    - uma variável com entropia S toma tipicamente 2^S valores diferentes.
    - Então, o número de valores de $\underline{y}$ para um dado $\underline{x}$ vem dado por $2^{S_{\underline{Y}|\underline{X}}} = 2^{NS_{Y|X}}$
    - O número possível de mensagens recebidas é 2^{NS_Y} e portanto o numero de mensagens que é possível distinguir é $2^{NS_Y}/2^{NS_{Y|X}} = 2^{N(S_Y - S_{Y|X})}$.
    - O número total de mensagens que é preciso distinguir é $2^M = 2^{NR}$. Então para um erro nulo temos que ter $R < S_Y - S_{Y|X} = I_{Y,X} \leq C$ com $C = \max_{p(x)} I_{X,Y}$

$S_{\underline{Y}|\underline{X}} = N S_{Y|X}$

$2^{N(S_Y - S_{Y|X})} < 2^{NR}$

É possivel transmitir com erro nulo apenas se R<C