Componente Gigante

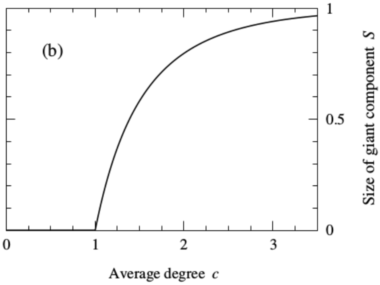


Figure: S em função de c

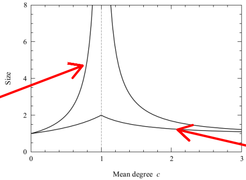
Tamanho médido de uma componente pequena

- Probabilidade de escolher um vértice ao acaso e este pertencer a uma componente pequena de tamanho s, $\pi_s = \frac{\exp(-cs)(sc)^{s-1}}{s!}$, com $\sum_s \pi_s = 1 - S$
- Tamanho médio de uma componente pequena a que pertence um vértice escolhido ao acaso: $\langle s \rangle = \frac{\sum_s s\pi_s}{\sum_s \pi_s}$

n_s = numero de componentes pequenas de tamanho s

$\pi_s = \frac{s n_s}{n}$

$\langle s \rangle = \sum_s \frac{s^2 n_s}{n(1-S)}$



R = tamanho médio de uma componente pequena escolhendo a componente ao acaso

$R = \sum_s \frac{s n_s}{\sum_s n_s} = \frac{\sum_s \pi_s}{\sum_s \pi_s / s}$

Figure: $\langle s \rangle$ em função de c diverge em $c = 1$. A curva de baixo representa a média do tamanho das componentes pequenas dando igual peso a todas as componentes.

Taxa de transmissão em um contacto

Modelo SI

- A rede é uma rede de contactos. Só há transmissão entre vértices ligados por arestas.
- β=probabilidade de transmissão por unidade de tempo (taxa) da doença se transmitir num contacto entre vértices ligados por uma aresta em que um é susceptível e outro infecioso. Na notação do modelo SIR (em que todos interagem com todos, rede totalmente conectada) $\beta \to \frac{\beta}{n}$.
- Tempos longos
  Todos os vértices da componente do vértice inicial infetado ficam infetados. Não há transmissão entre vértices de diferentes componentes.
  um infetado em GC infeta todos os vértices de GC. A probabilidade de haver uma epidemia é S.

Equações dinâmicas

- Equações dinâmicas para $s_i(t)$, $x_i(t)$ probabilidade do vértice i ser suscetivel ou infetado, respetivamente
$\begin{matrix} \frac{ds_i}{dt} = -\beta\, s_i \sum_j A_{i,j} x_j \\ \frac{dx_i}{dt} = \beta\, s_i \sum_j A_{i,j} x_j \end{matrix}$, $x_i(t) + s_i(t) = 1$; $x_i(0) = 1/n$ e $s_i(0) = 1 - 1/n$
$\overset{=}{A}$ =matriz de adjacência , $A_{i,j} = 1$ se há uma aresta entre i e j, caso contrário $A_{i,j} = 0$.
- Tempos curtos $x_i \ll 1$, pode linearizar-se
$\frac{dx_i}{dt} = \beta \sum_j A_{i,j} x_j$, solução $\boxed{\bar{x} \simeq a_1(0) e^{\beta\,\kappa_1 t}\, \bar{v}_1}$ com $\overset{=}{A} \bar{v}_i = \kappa_i \bar{v}_i$ e $\kappa_1 > \kappa_2 \cdots > \kappa_n$ são valores próprios de $\overset{=}{A}$

aproximação baseada no grau

- os elementos de $\bar{v}_1$ são uma medida da centralidade dos vértices. vértices com maior centralidade são os primeiros a ser infetados.
- aproximação baseada no grau
  $s_k(t)$, $x_k(t)$ probabilidade do vértice com grau k ser suscetivel ou infetado, respetivamente
  $v(t) = \sum_k q_k x_k(t) =$ probabilidade de um vizinho estar infetado.
  $\frac{ds_k}{dt} = -\beta k\, v(t)\, s_k$ com solução $s_k(t) = s_0 \exp(-\beta k \int_0^t v(t')dt')$
  definindo $u(t) = \exp(-\beta \int_0^t v(t')dt')$ temos $s_k(t) = s_0 u^k$

$$\frac{du}{dt} = -\beta v(t)\, u(t)$$

$$u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$u(0) = 1$$

aproximação baseada no grau

$x_k(t) + s_k(t) = 1$ $\quad s_k(t) = s_0\, u(t)^k$

- $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(1 - s_k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - s_0 u^k)q_k = \boxed{1 - s_0 g_1(u)}$ com $g_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k q_k$ é a função geradora de q_k
- * $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \boxed{1 - s_0 g_0(u)}$ com $g_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k$
- $u(t)$é obtido como solução de $\frac{du}{dt} = -\beta uv = -\beta u(1 - s_0 g_1(u))$ com $v(0) = 0$ e $u(0) = 1$

$$\begin{cases} v(t) = 1 - s_0 g_1(u) \\ \frac{du}{dt} = -\beta u v \end{cases}$$

- Tempos longos $u(t) \to 0$ e $g_1(0) = p_1/c$
  ** $\frac{du}{dt} = -\beta u(1 - s_0 g_1(0))$ e $u(t) \sim e^{-\beta(1-\frac{p_1}{c}t)}$ vértices com 1 vizinho são os últimos a ser infetados $\quad g_1(0) = p_1/c$
- Tempos curtos, $v(0) = 0$ e $u(0) = 1$; $u = 1 - \varepsilon$
  *** $x(t) \sim x_0\left(1 + Ae^{(\beta(g_1'(1)-1)t)}\right)$ com $g_1'(1) = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle}$,
  $s_0 \sim 1 - 1/n$ $\quad$ Se existe componente gigante $g_1'(1) > 1$ e $x(t)$ cresce com tempo
  Como $s_k(t) = s_0 u^k$os vértices com grau elevado são os primeiros a ser infetados. (têm probabilidade de serem suscetíveis inferior)

$s_k(t) = s_0\, u^k(t)$

*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, x_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(1 - s_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) - s_0 \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, u^k(t)$$

$$= 1 - p_0(t) - s_0 \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, u^k(t) + s_0\, p_0$$

$$= 1 - (1 - s_0)\, p_0 - s_0\, g_0(u)$$ Com $g_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, u^k$

Como $s_0 = 1 - \frac{1}{n} \simeq 1$ temos $x(t) \simeq 1 - s_0\, g_0(u)$

** $$g_1(0) = q_0 = p_1 \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k = p_1/c$$

$$p_k = c^k \frac{e^{-c}}{k!}$$

c = grau médio

$$q_k = \frac{(k+1)\, p_{k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k}$$

***

$$g_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k u^k$$

$$q_k = \frac{(k+1)\, p_{k+1}}{\sum_l l\, p_l}$$

$$g_1'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k q_k u^{k-1}$$

$$c = \langle k \rangle$$

$$g_1'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,(k+1)\, p_{k+1}}{\langle k \rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,(k-1)\, p_k}{\langle k \rangle}$$

$$= \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}$$

$$g_1'(1) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1$$

Modelo SI

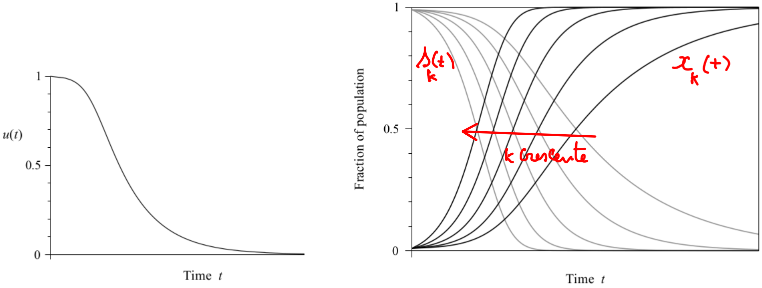


Figure: (a)Tipico $u(t)$para SI (b) s_k e x_k para SI. A infeção cresce mais rápido para k maior

Modelo SIR e tempos longos

- No modelo SIR para além da transmissão há recuperação a uma taxa γ
- Começa-se com um infetado na GC
- Se assumirmos que todos os infetados recuperam num tempo $\tau = \frac{1}{\gamma}$ fixo não aleatório.
  Existe uma probabilidade de um infetado não transmitir (por recuperar antes) $= \lim_{dt \to 0} (1 - \beta\, dt)^{\frac{\tau}{dt}} = e^{-\beta\tau}$
  e uma probabilidade de transmissão através de uma aresta dada por $\phi = 1 - e^{-\beta\tau}$
- Para tempos longos tudo se passa como se a transmissão não ocorresse, em cada aresta, com probabilidade $1 - \phi$ e podemos remover essa aresta, com esta probabilidade.

Transição epidémica e percolação

- A transição epidémica é uma transição de percolação
  Se ϕ for baixo não há GC e não se estabelece uma epidemia.
- $u=$ probabilidade do vértice não contagiar através de uma aresta
  $\phi \sum_k q_k u^k =$ probabilidade de transmitir ao vizinho mas este não propagar a epidemia
- $u = \overbrace{1-\phi}^{\text{não trasnmitiu}} + \overset{\text{trasmitiu mas não propagou}}{\phi \sum_k q_k u^k} = 1 - \phi + \phi g_1(u)$, $u^k=$probabilidade do vértice não transmitir a qualquer vizinho
  $\frac{d}{du}\left[1-\phi_c+\phi_c g_1(u)\right]\Big|_{u=1} = 1$ temos $\phi_c = \frac{1}{g_1'(1)}$
  Se $\phi < \phi_c$ só há uma solução: $u = 1$
  Se $\phi > \phi_c$ há uma solução: $u < 1$

Tamanho da epidemia

- $S = 1 - \sum_k u^k p_k = 1 - g_0(u)$ é a fracção média de vértices infetados
  $S = 0$ se $\phi < \phi_c$ e $S \neq 0$ se $\phi > \phi_c$
- $\phi_c = 1 - e^{-R_{0.c}} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ com $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$
- Para uma rede aleatória com distribuição de grau Poisson
  $\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k \rangle$
  $\phi_c = \frac{1}{\langle k \rangle} = \frac{1}{c}$ e $R_{0,c} = \ln \frac{c}{c-1}$
  $S = 1 - e^{-c\phi S}$

$c_{eff} = c\phi$

$c_{eff,c} = c\,\phi_c = 1 \Rightarrow \phi_c = \frac{1}{c}$

- Vacinação corresponde a remover vértices