

Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus¹⁾.

Von Ernst Ising in Hamburg.

(Eingegangen am 9. Dezember 1924.)

Es wird im wesentlichen das thermische Verhalten eines linearen, aus Elementarmagneten bestehenden Körpers untersucht, wobei im Gegensatz zur Weiss'schen Theorie des Ferromagnetismus kein molekulares Feld, sondern nur eine (nicht magnetische) Wechselwirkung benachbarter Elementarmagnete angenommen wird. Es wird gezeigt, daß ein solches Modell noch keine ferromagnetischen Eigenschaften besitzt und diese Aussage auch auf das dreidimensionale Modell ausgedehnt.

1. Annahmen. Die Erklärung, die P. Weiss²⁾ für den Ferromagnetismus gegeben hat, ist zwar formal befriedigend, doch läßt sie besonders die Frage nach einer physikalischen Erklärung der Hypothese des molekularen Feldes offen. Nach dieser Theorie wirkt auf jeden Elementarmagneten, abgesehen von dem äußeren Magnetfeld, ein inneres Feld, das der jeweiligen Magnetisierungsintensität proportional ist. Es liegt nahe, für die Wirkungen der einzelnen Elemente (= Elementarmagnete) elektrische Dipolwirkungen anzusetzen. Dann ergäben sich aber durch Summation der sehr langsam abnehmenden Dipolfelder sehr beträchtliche elektrische Feldstärken, die durch die Leitfähigkeit des Materials zerstört würden. Im Gegensatz zu P. Weiss nehmen wir daher an, daß die Kräfte, die die Elemente aufeinander ausüben, mit der Entfernung rasch abklingen, so daß in erster Näherung sich nur benachbarte Atome beeinflussen.

Zweitens setzen wir an, daß die Elemente nur wenige der Kristallstruktur entsprechende, energetisch ausgezeichnete Orientierungen einnehmen. Infolge der Wärmebewegung gehen die Elemente aus einer möglichen Lage in eine andere über. Wir setzen an, daß die innere Energie am kleinsten ist, wenn alle Elemente gleichgerichtet sind. Diese Annahmen sind im wesentlichen zuerst von W. Lenz³⁾ aufgestellt und näher begründet worden.

2. Die einfache lineare Kette. Die gemachten Voraussetzungen wollen wir auf ein möglichst einfaches Modell anwenden. Wir berechnen das mittlere Moment \mathfrak{J} eines linearen Magneten, bestehend aus n Elementen. Jedes dieser n Elemente soll nur die zwei Stellungen einnehmen können,

¹⁾ Auszug aus der Hamburger Dissertation.

²⁾ P. Weiss, Journ. de phys. (4) **6**, 661, 1907, und Phys. ZS. **9**, 358, 1908.

³⁾ W. Lenz, Phys. ZS. **21**, 613, 1920.

bei denen sein Moment m in die Anordnungsrichtung der Kette weist. Die beiden möglichen Richtungen unterscheiden wir durch die Bezeichnungen positiv und negativ; wir sprechen kurz von positiven und negativen Elementen.

Zur Berechnung von \mathfrak{J} betrachten wir eine Anordnung der Kette mit ν_1 positiven und ν_2 negativen Elementen, wo also

$$\nu_1 + \nu_2 = n. \quad (1)$$

An s Stellen seien negative Elemente zwischen den positiven eingebettet, d. h. an jeder dieser s Stellen befindet sich eine in sich zusammenhängende Gruppe negativer Elemente. Für $s = 3$ haben wir z. B.

$$+ + \underbrace{- -} + \underbrace{- - - -} + + + \underbrace{-} + + - - -$$

Die Kette beginne links mit einem positiven Element und je nachdem, ob sie rechts mit einem negativen oder positiven Element endet, nehme eine Größe δ die Werte 1 oder 0 an. Im obigen Beispiel ist $\delta = 1$. Die negativen Elemente sind also im ganzen auf $(s + \delta)$ Stellen verteilt.

Bei der jetzt vorzunehmenden Abzählung kommt es zunächst einmal nicht darauf an, wieviel negative Elemente jede der $(s + \delta)$ Gruppen enthält, sondern nur auf die Größe s selbst, die Anzahl der Lücken zwischen den positiven Elementen. Diese s Lücken kann man auf $\binom{\nu_1 - 1}{s}$ Arten auswählen. Bei jeder Auswahl lassen sich dann die ν_2 negativen Elemente auf $\binom{\nu_2 - 1}{s + \delta - 1}$ Arten auf $(s + \delta)$ Stellen verteilen. Insgesamt ergibt das Produkt

$$\binom{\nu_1 - 1}{s} \cdot \binom{\nu_2 - 1}{s + \delta - 1} \quad (2)$$

die Anzahl der oben beschriebenen Anordnungen. Die Anzahl der entsprechenden links mit einem negativen Element beginnenden Anordnungen erhält man, wenn man in (2) ν_1 und ν_2 vertauscht: sie ist also

$$\binom{\nu_2 - 1}{s} \binom{\nu_1 - 1}{s + \delta - 1}. \quad (2')$$

1) Daß man eine Anzahl von m Dingen auf $\binom{m-1}{r-1}$ Arten auf r Stellen verteilen oder, was auf dasselbe hinauskommt, m so oft als Summe von r ganzen Zahlen darstellen kann, sieht man, wenn man m in der Form $1 + 1 + \dots + 1$ darstellt und $(r-1)$ von den $(m-1)$ Pluszeichen ausklammert. Das geht gerade $\binom{m-1}{r-1}$ mal. Z. B. haben wir für $m = 5$ und $r = 2$

$$\begin{aligned} 5 &= (1) + (1 + 1 + 1 + 1) = (1 + 1) + (1 + 1 + 1) \\ &= (1 + 1 + 1) + (1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1) + (1). \end{aligned}$$

Wir setzen fest, daß die innere Energie verschwindet, wenn alle Elemente gleichgerichtet sind. Stoßen aber, wie es bei den oben betrachteten Anordnungen der Fall ist, an $(2s + \delta)$ Stellen (nämlich den $2s$ Grenzen der Lücken und der Grenze der Restgruppe am rechten Ende) gleichnamige Pole benachbarter Elemente (d. h. in obiger Bezeichnungsweise positive und negative Elemente) zusammen, so besitze eine solche Anordnung die innere Energie

$$(2s + \delta) \cdot \varepsilon. \quad (\varepsilon \geq 0).$$

Da das Moment unserer Anordnungen

$$(\nu_1 - \nu_2) m \quad (3)$$

ist, so ist ihre Gesamtenergie in einem äußeren Magnetfeld \mathfrak{H}

$$(2s + \delta) \varepsilon + (\nu_2 - \nu_1) (m \mathfrak{H}). \quad (3')$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{(m \mathfrak{H})}{k T}, \quad (4)$$

wo $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$ die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur bezeichnen, und ermitteln zunächst zur Berechnung des mittleren Moments \mathfrak{J} mittels (2), (2'), (3') und (4) die Zustandssumme

$$Z = \sum \left[\binom{\nu_1 - 1}{s} \binom{\nu_2 - 1}{s + \delta - 1} + \binom{\nu_2 - 1}{s} \binom{\nu_1 - 1}{s + \delta - 1} \right] e^{-\frac{\varepsilon}{k T} + (\nu_1 - \nu_2) \cdot \alpha}. \quad (5)$$

Da sich bei der Ableitung von Z nach α jedes Glied mit $(\nu_1 - \nu_2)$, also bis auf den Faktor m mit dem zugehörigen Moment (3) multipliziert, kann das mittlere Moment in der Form

$$\mathfrak{J} = m \frac{\partial}{\partial \alpha} \log Z \quad (6)$$

gewonnen werden. In Gleichung (5) ist über ν_1 und ν_2 mit der Nebenbedingung (1), über s von 0 bis ∞ — für zu große Werte von s verschwinden die Binomialkoeffizienten — und über $\delta = 0,1$ zu summieren.

Diese Summationen lassen sich leicht ausführen, wenn man die Zustandssumme $Z(n)$ als Funktion von n betrachtet und die Nebenbedingung (1) dadurch beseitigt, daß man mittels einer willkürlichen mathematischen Hilfsvariablen x

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n) x^n \quad (7)$$

bildet, wo n in Z die Bedeutung $\nu_1 + \nu_2$ hat. Die Berechnung von $F(x)$ kommt darauf hinaus, daß man über ν_1 und ν_2 unabhängig voneinander von 0 bis ∞ summiert, was sich mittels des binomischen Satzes ohne Schwierigkeiten ausführen läßt. Ist das geschehen, so haben wir nur noch eine geometrische Reihe vor uns, deren Summation

$$F(x) = \frac{2x \left[\coth \alpha - \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) x \right]}{1 - (2 \coth \alpha) x + \left(1 - e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}} \right) x^2}$$

liefert. Entwickelt man diesen geschlossenen Ausdruck für $F(x)$ mittels Partialbruchzerlegung wieder nach Potenzen von x , so findet man als Koeffizienten von x^n

$$Z(n) = c_1 \left(\coth \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}} \right)^n + c_2 \left(\coth \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}} \right)^n.$$

c_1 und c_2 sind hier zur Abkürzung gesetzt für zwei Faktoren, die im folgenden keine Rolle spielen; c_1 ist für alle Werte von α von der Größenordnung 1. Man kann in Z das Glied mit $\left(\coth \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}} \right)^n$ vernachlässigen, da diese Größe stets < 1 ist, während

$$\left(\coth \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}} \right) > 1$$

ist, und da n eine sehr große Zahl ist. Da man den Beitrag von c_1 bei $\frac{d}{d\alpha} \log Z$ wegen $n \gg 1$ vernachlässigen kann, so findet man gemäß Gl. (6)

$$\mathfrak{J} = m \cdot n \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}}}. \quad (8)$$

Diese Funktion verschwindet für $\mathfrak{H} = 0$, d. h. $\alpha = 0$: wir finden also keine Hysteresiserscheinungen und keine spontane Magnetisierung. Eine Vergrößerung von ε bewirkt nur eine Änderung der Kurvenform derart, daß die Sättigung schneller und vollständiger erreicht wird.

Für dieses Verhalten könnten zwei Gründe in Frage kommen. Wenn man sich nämlich für $\mathfrak{H} = 0$ die Wahrscheinlichkeiten als Funktion des Moments \mathfrak{M} aufträgt, so hat diese Kurve entweder zwei gleiche zu $\mathfrak{M} = 0$ symmetrisch gelegene, vermutlich sehr steile Maxima oder nur ein einziges, und zwar aus Symmetriegründen bei $\mathfrak{M} = 0$. Aus dem

Ergebnis $\mathfrak{J} = 0$ der Mittelung kann man, wenn die Kurve der Wahrscheinlichkeiten zwei Maxima hat, nicht notwendig folgern, daß das zu beobachtende mittlere Moment verschwindet. Es wäre vielmehr denkbar, daß der Zustand des Magnets jeweils für längere, gegenüber der Beobachtungsdauer große Zeiten, um eines der beiden einander entgegengesetzt gleichen, wahrscheinlichsten Momente schwankt und dadurch spontane Magnetisierung beobachtet würde. Leider zeigt eine einfache Rechnung, daß die Wahrscheinlichkeiten nur ein einziges Maximum haben. Der größere Energieaufwand des unmagnetischen Zustands wird also durch seine außerordentlich große Komplexibilität kompensiert.

Wie eine analoge Untersuchung¹⁾ zeigt, ändert sich an dem Ergebnis $\mathfrak{J} = 0$ für $\mathfrak{H} = 0$ nichts, wenn wir für die Elemente neben der positiven und negativen Stellung weitere dazu senkrechte Orientierungen zulassen, oder wenn wir die gegenseitige Wirkung zweitbenachbarter Elemente berücksichtigen.

3. Das räumliche Modell. Auch bei einem räumlichen Modell, das den oben aufgestellten Annahmen genügt, gelangt man nicht zu einem anderen Ergebnis. Wir können in einem idealisierten Grenzfall das Resultat ohne weiteres angeben. Wir denken uns den räumlichen ferromagnetischen Kristall aus n_1 regelmäßig angeordneten Ketten aufgebaut, wie wir sie oben betrachteten. Jedes Element kann wieder nur die beiden Orientierungen einnehmen, bei denen sein Moment in die Ausdehnungsrichtung seiner Kette weist. Dagegen sollen die dazu senkrechten Stellungen des Moments zuviel Energie erfordern, um realisiert zu werden. Diese Annahme kann für die von uns betrachtete Magnetisierungsintensität in Längsrichtung der Ketten nur günstig sein²⁾. Wir setzen wieder fest, daß die innere Energie verschwindet, wenn alle Elemente gleichgerichtet sind. Stoßen an einer Stelle innerhalb des Kristalls gleichnamige Pole benachbarter Elemente ein und derselben Kette zusammen, so besitze der Kristall wie früher die Energie ε . Überdies enthalte er jedesmal die Energie $\bar{\varepsilon}$, wenn irgendwo zwei nebeneinander liegende Elemente benachbarter Ketten entgegengesetzt gerichtet sind. In unserem idealisierten Grenzfall sei nun die Energie $\bar{\varepsilon}$ so groß, daß niemals zwei nebeneinander liegende benachbarte Elemente entgegengesetzt gerichtet sind, d. h. aber, es findet nur ein schichtweises Umklappen der Elemente statt. Wir haben es praktisch wieder mit einer einfachen

¹⁾ Vgl. das Original.

²⁾ Man denke an das Verhalten des von P. Weiss (l. c.) untersuchten Pyrrhotins.

linearen Kette zu tun, deren Elemente jetzt diese Schichten sind. Dementsprechend haben wir in den früheren Rechnungen

$$m \text{ durch } n_1 \cdot m$$

und

$$\varepsilon \text{ durch } n_1 \varepsilon$$

zu ersetzen. Wir finden daher in unserem Grenzfall

$$\mathfrak{J} = m \cdot n_1 \cdot n \cdot \frac{\sin(n_1 \alpha)}{\sqrt{\sin^2(n_1 \alpha) + e^{-2n_1 \frac{\varepsilon}{kT}}}}. \quad (9)$$

Obwohl wir hier ein günstigeres Ergebnis erwarten mußten als bei einem allgemeineren räumlichen Modell, so stellen wir doch auch hier ein Verschwinden von \mathfrak{J} mit \mathfrak{H} fest.

Es entsteht also mit dem hier gewählten Modell, dessen wesentlicher Zug die Beschränkung der Wechselwirkung auf diejenige benachbarter Elemente ist, kein Ferromagnetismus. Trotzdem dürfte die vorliegende Untersuchung für das Problem des Ferromagnetismus von einem gewissen Interesse sein, da man mit der Annahme sehr langsam abklingender (elektrischer) Wechselwirkungskräfte auf die große Schwierigkeit stößt, daß in einem elektrischen Leiter beträchtliche elektrische Feldstärken bestehen müßten.

Herrn Prof. Dr. W. Lenz möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und das Interesse, das er ihr entgegengebracht hat, meinen besten Dank aussprechen.

Hamburg, 8. Dezember 1924.
