Introducción a las Series de tiempo
Taller

Melanie Oyarzún W.
melanie.oyarzun@ucv.cl

Bibliografía recomendada:
Woooldridge, c.12
Stock Watson, c.14
Gujarati, c.12

Diciembre 2021

Outline

La naturaleza de los datos: I

Hasta ahora nos hemos concentrado en datos de corte transversal, principalmente...

La naturaleza de los datos: II

Datos de tipo corte transversal: encuesta CASEN

indiv	sexo	edad	escolaridad	ingreso
1	hombre	41	7	243100
2	mujer	19	12	143650
3	hombre	33	12	.
4	hombre	64	12	377001
5	hombre	37	12	205400
6	mujer	62	12	265200
7	hombre	16	11	.
8	hombre	22	1	.
9	mujer	50	20	663000
10	hombre	45	19	663000
11	hombre	46	12	410800
12	hombre	17	11	.
13	mujer	23	16	.
14	hombre	43	11	232050
15	hombre	29	12	.
16	hombre	5	.	.
17	mujer	37	13	.
18	mujer	3	.	.
19	hombre	44	16	1326000
20	mujer	37	8	.

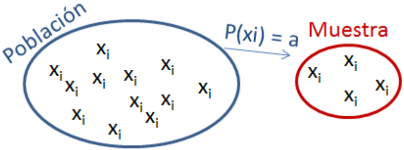
Unidad de observación: individuos

Cada fila representa un individuo (personas, familias, empresas) en un momento del tiempo (en el mismo año, mes, etc.)

Ejemplo: variable edad contiene la edad de 20 personas en la muestra

Corte Transversal y Series de tiempo I

En corte transversal:



- Estimamos modelos de la forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_1 x_{ki} + u_i$$

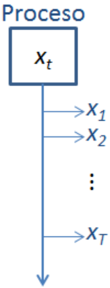
- Supuesto de muestra aleatoria implica que cada observación es independiente:

Corte Transversal y Series de tiempo II

1. (supuesto de exogeneidad) $E[u_i|X_i] = 0$
2. (i.id., por muestreao aleatorio) $E[u_i|X_j] = 0$

Corte Transversal y Series de tiempo III

En series de tiempo:



- Estimamos modelos de la forma:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_1 x_{kt} + u_t$$

- Cada observación es el resultado de un proceso estocástico
- No son independientes (vienen del mismo proceso)
- Requieren un supuesto más estricto:
  - (supuesto de exogeneidad) $E[u_t|X_s] = 0 \quad \forall s$

Proceso Estocástico I

- O proceso de serie temporal: sucesión de variables aleatorias indiciadas por el momento en el tiempo (y_t, z_t, x_t)
- En cada momento se observa un posible resultado (o realización) del proceso estocástico.

Proceso Estocástico II

Ejemplos:

- Modelo estático
  - Se modela la relación contemporánea entre dos variables, i.e., relación en el mismo momento en el tiempo

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t$$

  - Ejemplos:

$$inflación_t = \beta_0 + \beta_1 desempleo_t + u_t$$

  - Múltiple:

$$homicidio_t = \beta_0 + \beta_1 condena_t + \beta_2 desmepleo_t + \beta_3 hombres_t + u_t$$

Conceptos importantes I

Rezagos

- Variables de series de tiempo se denominan con sub-índice t para indicar el perído en el tiempo: y_t
- El valor “rezagado” es el valor de la variable en períodos anteriores: $t_(t-1)$ es el valor 1 período anterior, $y_(t-2)$ es el valor 2 períodos atrás, , $y_(t-j)$ es el valor j períodos atrás.

Diferencias

- Cambio en y entre el período t 1 y t, se indica con Δ

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Tasas de Crecimientos

Conceptos importantes II

- Primera diferencia en logs:

$$\Delta ln(y_t) = ln(y_t) - ln(y_{t-1})$$

- Cambio porcentual de y_t entre $t-1$ y $t \approx 100 \times \Delta ln(y_t)$

Correlación serial

- Muchas variables de series de tiempo están relacionadas con sus valores pasados.
- Razones: inercia, reacciones rezagadas, entre otras.
- Esta relación con el pasado se conoce como **autocorrelación**.
- Si los valores de una variable X en el presente están correlacionados con valores pasados de otra variable, Y, se conoce como **correlación serial**.
- A veces se usan los términos como sinónimos.

Supuestos de Gauss Markov

1. Modelo lineal en parámetros

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_1 x_{kt} + u_t$$

2. Media condicionada nula (exogeneidad estricta)

$$E[u_t|X_{js}] = 0 \quad \forall s$$

3. No hay colinealidad perfecta.
4. Homoscedasticidad

$$Var[u_t|X_{js}] = \sigma \quad \forall s$$

5. No hay correlación serial.

$$Cov[u_t, u_s|X_{js}] = \sigma \quad \forall s \neq t$$

1 a 3 implican que $\hat{\beta}_{MCO}$ es insesgado y 4-5 implican que es eficiente.
(1 a 5 implican que son MELI)

Exogeneidad Estricta

- Ejemplos: ¿cuándo falla supuesto de exogeneidad estricta?
  - Efecto rezagado (variable independiente rezagada)
  - Retroalimentación entre variables
  - Auto-dependencia (variable dependiente rezagada, AR(1))
- Implicancia: $E(\hat{\beta}_{ols}|X) \neq \beta$ (sesgado)
- ¿Cómo se resuelve?
- Bajo ciertos supuestos, aún cuando $E(\hat{\beta}_{ols}|X) \neq \beta$ (es sesgado), ocurre que $E(\hat{\beta}_{ols}|X) \to^{p} \beta$ (es consistente) cuando $n \to \infty$
- Se deben cumplir supuestos asintóticos (en muestra grande)

Supuestos Asintóticos

1. Modelo lineal en parámetros
2. Estacionareidad y dependencia débil
3. Exogeneidad "débil" ($E[u_t X_{jt}] = 0$)
4. No hay colinealidad perfecta.
5. Homoscedasticidad
6. No hay correlación serial.

Estacionareidad: I

"el pasado es similar al futuro"

1. $E[X_t] = \mu$
2. $Var[X_t] = \sigma^2$
3. $Cov[X_t, X_{(t+h)}] = f(h)$ y $\neq g(t)$

Dependencia débil: ("el presente está más correlacionado con el futuro inmediato que con el futuro lejano")

$$corr[X_t, X_{(t+h)}] \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow \infty$$

Estacionareidad: II

"el pasado es similar al futuro"

Ejemplos de series estacionarias y débilmente dependientes:

1. Modelo de Media Móvil MA(1)

$$X_t = \epsilon_t + \gamma \epsilon_{(t-1)} \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

2. Modelo Auto-regresivo AR(1)

$$X_t = \rho X_(t-1) + \epsilon_{(t)} \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Con condición de dependencia débil: $|\rho| < 1$

Series estacionarias y débil. dep.

Media Móvil- Ejemplo

$$X_t = \epsilon_t + \gamma\epsilon_{(t-1)} \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Ejemplos:

- $\Delta ddahelados_t = \epsilon_t - 0{,}5\epsilon_{t-1}$, donde $epsilon_t = \Delta temperatura_t$
- $\Delta preciopetroleo_t = \epsilon_t + 0{,}5\epsilon_{t-1}$, donde $epsilon_t = \Delta huracán_t$

Series estacionarias y débil. dep.

Modelo Auto-regresivo -AR(1)- Ejemplo

$$X_t = \alpha_o + \rho X_(t-1) + \epsilon_{(t)} \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Ejemplos:

- $\Delta preciopetroleo_t = \alpha_0 + 0{,}5\Delta preciopertoleo_{t-1} + \epsilon_t$, donde $\sim iid(0, \sigma^2)$

Series estacionarias y débil. dep.

Diferencias

- MA(1) : memoria "corta", impacto del shock no persiste mucho
- AR(1) : memoria "larga", impacto del shock persiste (en teoría, persiste infinitamente)

Series estacionarias y débil. dep.

Propiedades MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + \gamma \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$\left.\begin{aligned} E(X_t) &= 0 \\ \mathrm{Var}[X_t] &= \sigma^2(1+\gamma^2) \\ \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-1}] &= \gamma\sigma^2 \end{aligned}\right\} \checkmark \textit{ Estacionareidad}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Corr}[X_t, X_{t-1}] &= \frac{\gamma\sigma^2}{\sigma^2(1+\gamma^2)} \\ \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-2}] = 0 &\rightarrow \mathrm{Corr}[X_t, X_{t-2}] = 0 \end{aligned}\right\} \checkmark \textit{ Dependencia débil}$$

Series estacionarias y débil. dep.

Propiedades AR(1)

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$E(X_t) = 0$$

$$\mathrm{Var}[X_t] = \frac{\sigma^2}{(1+\rho^2)}$$

$$\mathrm{Cov}[X_t, X_{t-1}] = \frac{\rho\sigma^2}{(1+\rho^2)}$$

✓ *Estacionareidad*

$$\mathrm{Corr}[X_t, X_{t-1}] = \rho$$

$$\mathrm{Corr}[X_t, X_{t-2}] = \rho^2$$

✓ *Dependencia débil*

Correlación Serial

- Hemos incoporado un supuesto adicional al modelo: **no correlación serial**, ahora lo revisaremos más a fondo.
- Definición: $cov(u_t, u_{t+j}) \neq 0$
- Ejemplo: errores AR(1)

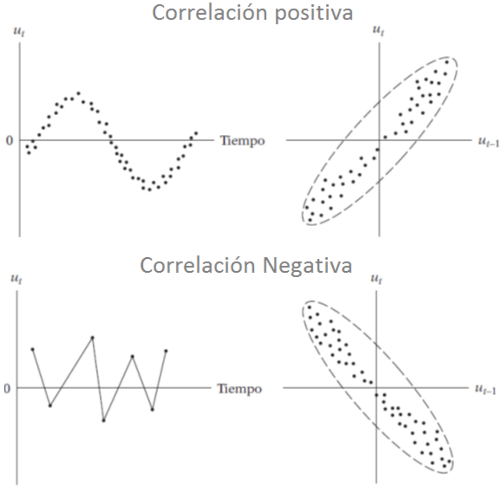
$$u_t = \alpha + \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

- *Intuición:* errores del presente están relacionados con errores futuros.
  - Visto de otra forma, errores del presente están relacionados con errores del pasado.
- Es un problema más propio de datos de series temporales

Correlación Serial

Presencia de correlación serial



Correlación Serial

Posibles fuentes

- **Variables omitidas:** muchas variables en series de tiempo son persistentes; si no se controla por alguna variable, la capta el error en el presente, y seguirá en el futuro.
- **Forma funcional** (mal especificada)
- **Error de medición en variable(s) independiente(s)**. Si el error de medición persiste en el tiempo, también puede llevar a estructura de errores persistentes.

Correlación Serial I

Implicancias

- Sin correlación serial:

$$var(\hat{\beta}|x_t) = var(\frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})u_t}{STC_x}) = \frac{\sigma^2}{SCT_x}$$

- Con correlación serial:
  - Por ejemplo: $cov(u_t, u_{t+j}) = \rho^j \sigma^2$

Correlación Serial II

Implicancias

$$var(\hat{\beta}|x_t) = var(\frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})u_t}{}) = \frac{\sigma^2}{SCT_x}$$

$$Var(\hat{\beta}|x_t) = \frac{\sigma^2}{SSX} + \frac{2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t}(x_t - \bar{x})(x_{t+j} - \bar{x})E[u_t, u_{t+j}]}{SSX^2}$$

$$Var(\hat{\beta}|x_t) = \underbrace{\frac{\sigma^2}{SSX}}_{\text{Varianza MCO}} + \frac{2\sigma^2\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{j=1}^{T-t}(x_t - \bar{x})(x_{t+j} - \bar{x})\rho^j}{SSX^2}$$

Correlación Serial III

Implicancias

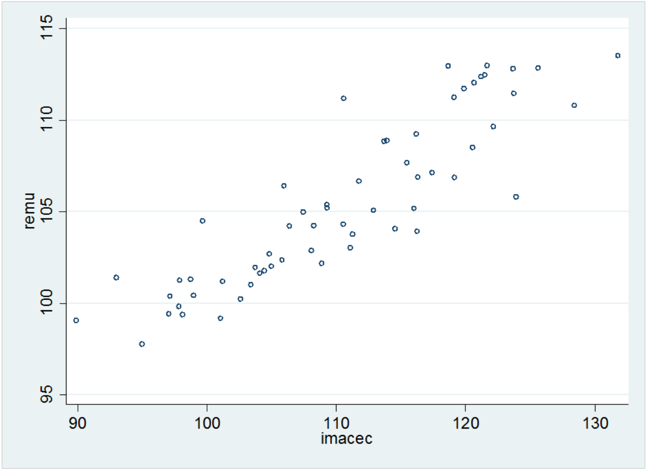
- Es frecuente que $\rho^j > 0$ por lo tanto el segundo término suele ser positivo.
- La varianza estimada con MCO suele sub-estimar la varianza verdadera en presencia de autocorrelación.
- Estimadores MCO no son los más eficientes (en términos de varianza)

Correlación Serial I

Ej1: Remuneraciones y productividad

Correlación Serial II

Ej1: Remuneraciones y productividad



Correlación Serial III

Ej1: Remuneraciones y productividad

Source	SS	df	MS
Model	939.411921	1	939.411921
Residual	257.417986	58	4.43824114
Total	1196.82991	59	20.2852527

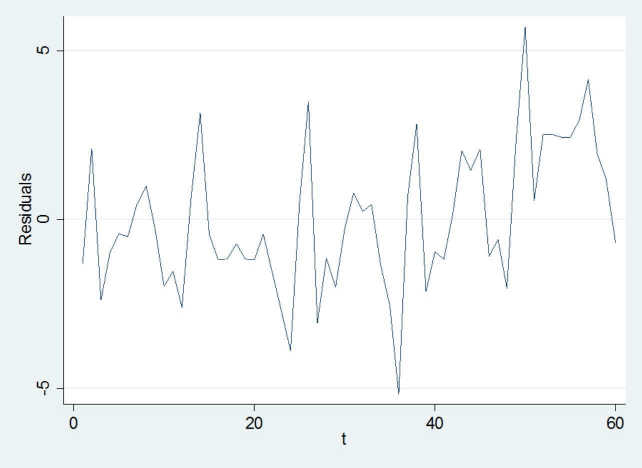
Number of obs	= 60
F(1, 58)	= 211.66
Prob > F	= 0.0000
R-squared	= 0.7849
Adj R-squared	= 0.7812
Root MSE	= 2.1067

remu	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
imacec	.4117452	.0283013	14.55	0.000	.355094	.4683963
_cons	59.95865	3.139917	19.10	0.000	53.67342	66.24388

```
predict uhat, residual
```

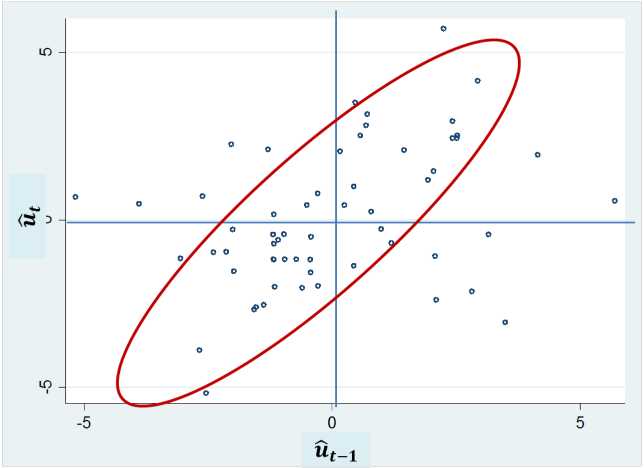
Correlación Serial IV

Ej1: Remuneraciones y productividad



Correlación Serial V

Ej1: Remuneraciones y productividad

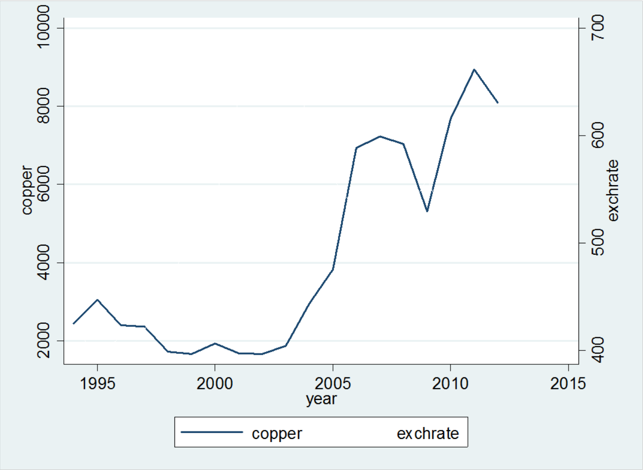


Correlación Serial I

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre

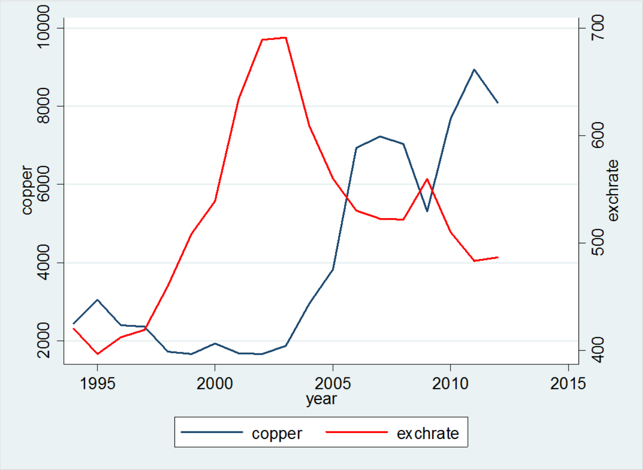
Correlación Serial II

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



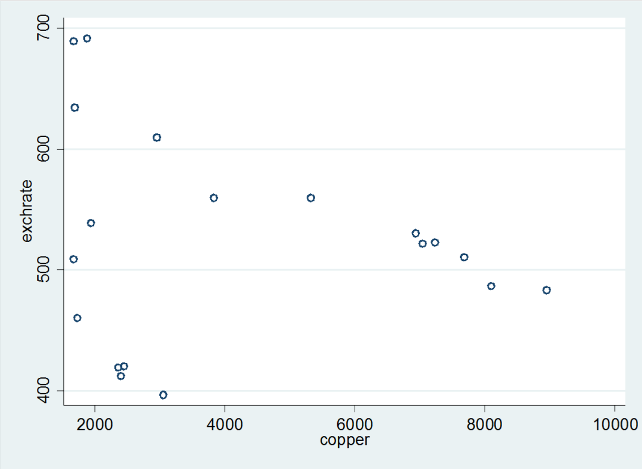
Correlación Serial III

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



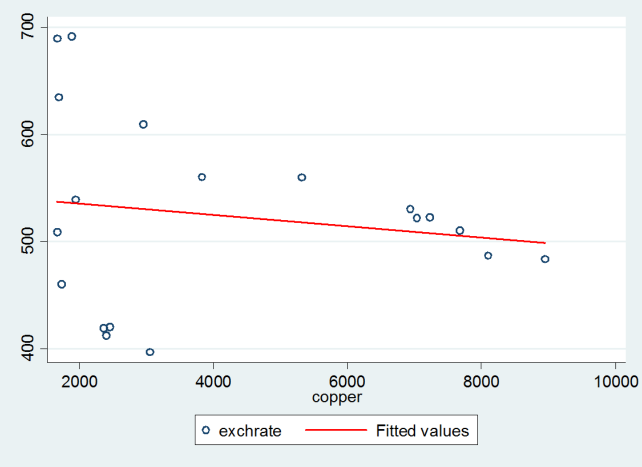
Correlación Serial IV

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



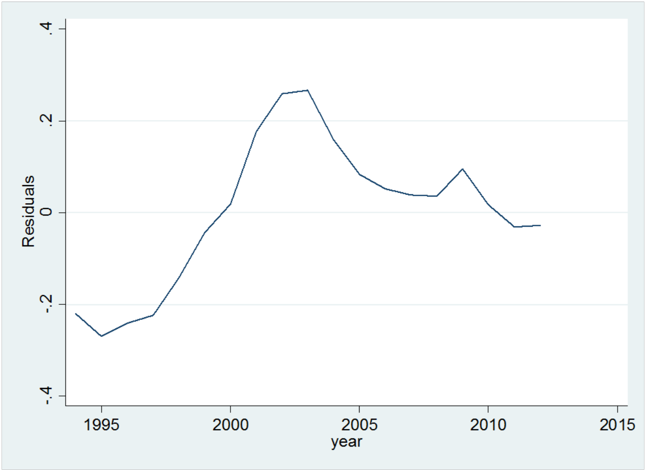
Correlación Serial V

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



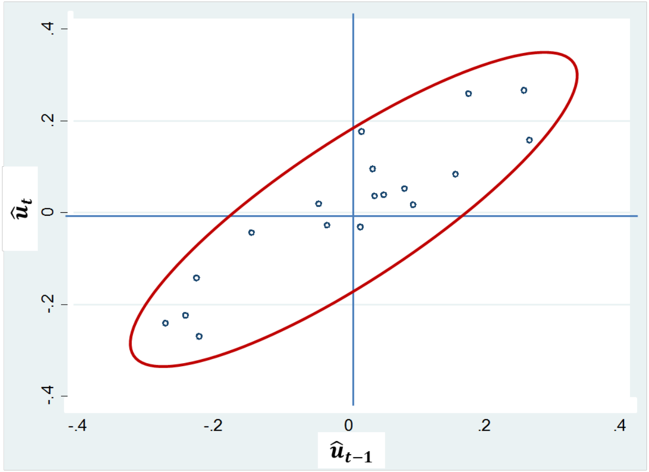
Correlación Serial VI

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



Correlación Serial VII

Ej2: Tipo de cambio y precio de cobre



Correlación Serial

Detección

¿Cómo detectar si las variables tienen errores autocorrelacionados?

- Prueba Durbin-Watson
- Prueba de "rachas" ("runs" test)
- Prueba Breusch-Godfrey

Correlación Serial I

Detección: Prueba de Durbin-Watson

¿Cómo detectar si las variables tienen errores autocorrelacionados?
Una prueba paraétrica es la de Durbin-Watson:

- Modelo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

- El estadístico Durbin-Watson se define como:

$$DW = \frac{\displaystyle\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\displaystyle\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Correlación Serial II

Detección: Prueba de Durbin-Watson

- Es posible demostrar que: $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$
- Durbin y Watson encontraron la distribución de DW, la cual supone que se cumplen todos los supuestos clásicos del modelo MCO, incluyendo exogeneidad y normalidad (supuestos bastante exigentes).

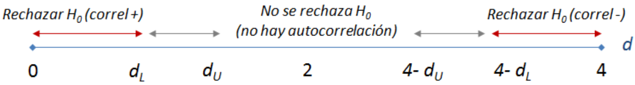
Correlación Serial III

Detección: Prueba de Durbin-Watson

- Test (si la alternativa es correlación positiva):

$$H_0 : \rho = 0 \rightarrow dw = 2 \quad vs. \quad H_1 : \rho > 0 \rightarrow dw < 2$$

- Si d es significativamente ¡ 2, se rechaza H0 a favor de correlación +
- La distribución tiene regiones donde no se puede decidir (no es conclusivo)



- En stata: estat dwatson

Correlación Serial I

Detección: Prueba de “rachas”

¿Cómo detectar si las variables tienen errores autocorrelacionados?
Una primera prueba no paramétrica es la de “rachas”

- Una forma de pensar en el problema tiene que ver con observar el patrón de los residuos: $(+, +, +, +, -, -, +, +, \ldots)$ o “rachas” que sería la sucesión ininterrumpida de un símbolo.
- Si no hay correlación serial, la probabilidad de $+$ en esta serie es independiente de la historia.
  - Si hay demasiadas rachas, sugiere correlación negativa.
  - Si hay muy pocas, sugiere correlación positiva.

Correlación Serial II

Detección: Prueba de "rachas"

- Existe un rango de valores de "rachas" para un período de n observaciones. Sean P y N el número de períodos con residuos positivos y negativos, respectivamente.
- Se puede demostrar que el número de rachas, R, está asintóticamente normalmente distribuido con:

$$E(R) = \frac{2NP}{N+P} + 1$$

$$V(R) = \frac{2NP(2NP - (N+P))}{(N+P)^2(N-1)}$$

Correlación Serial III

Detección: Prueba de “rachas”

- Por lo que podemos hacer una prueba de hipótesis:

$$H_0 : \text{Residuos independientes} \quad vs \quad H1 : \text{residuos correlacionados}$$

- Si las rachas observadas están en un intervalo entorno a un intervalo al valor esperado,no podemos rechazar la hipótesis nula.
- Realizamos un test z:

$$Z = \frac{R - E(R)}{SE(R)}$$

- Si Z es significante, podemos rechazar la nula en favor de presencia de autocorrelación.

Correlación Serial IV

Detección: Prueba de "rachas"

En nuestro ejemplo:

	year	copper	exchrate	lpc	ltco	uhat	uhatlag	plusminus	newrun	runs
1	1994	2450	420.252	7.803843	6.040855	-.2207577	.	-	1	1
2	1995	3050	396.782	8.022897	5.983387	-.2698551	-.2207577	-	0	1
3	1996	2400	412.219	7.783224	6.021555	-.2408461	-.2698551	-	0	1
4	1997	2360	419.249	7.766417	6.038465	-.2245787	-.2408461	-	0	1
5	1998	1730	460.32	7.455877	6.131921	-.1429884	-.2245787	-	0	1
6	1999	1670	508.897	7.420579	6.232246	-.0440121	-.1429884	-	0	1
7	2000	1940	538.871	7.570443	6.289476	.0189445	-.0440121	+	1	2
8	2001	1690	634.429	7.432484	6.452724	.1769209	.0189445	+	0	2
9	2002	1670	689.242	7.420579	6.535593	.2593345	.1769209	+	0	2
10	2003	1880	691.536	7.539027	6.538915	.2671824	.2593345	+	0	2
11	2004	2950	609.55	7.989561	6.412721	.1582047	.2671824	+	0	2
12	2005	3830	559.863	8.25062	6.327692	.0831508	.1582047	+	0	2
13	2006	6940	530.263	8.845057	6.273373	.0515471	.0831508	+	0	2
14	2007	7230	522.691	8.885994	6.25899	.038728	.0515471	+	0	2
15	2008	7040	521.79	8.859364	6.257265	.0359852	.038728	+	0	2
16	2009	5320	559.667	8.579228	6.327343	.0953586	.0359852	+	0	2
17	2010	7680	510.377	8.946375	6.235149	.0171944	.0953586	+	0	2
18	2011	8950	483.364	9.099409	6.18077	-.0313368	.0171944	-	1	3
19	2012	8100	486.747	8.999619	6.187744	-.0281762	-.0313368	-	0	3

Tenemos 3 rachas, $P = 11$, $N = 8$ y $n = 19$.

Correlación Serial V

Detección: Prueba de "rachas"

Así:

$$E(R) = \frac{2 * 11 * 8}{19} + 1 = 10{,}26$$

$$SE(R) = \sqrt{\frac{2 * 11 * 8 * (2 * 11 * 8 - 19}{19^2 * 18}} = 2{,}06$$

$$Z = \frac{3 - 10{,}26}{2{,}06} = -3{,}52$$

Como rechazamos, hay correlación serial. (y en este caso, es positiva)

Correlación Serial

Detección: Prueba de Breusch-Godfrey

- Realice la regresión por MCO de y_t sobre $x_{1t}, \ldots, x_{1kt}$ y obtenga los residuos.
- Efectuamos la regresión de $\hat{u}_t$ sobre $x_{1t}, \ldots, x_{1kt}, \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \ldots, \hat{u}_{t-q}$ para toda $t = (q+1), \ldots, n$
- Calcule el test F de significancia conjunta de que los rezagos del error son excluidos.
- En stata: estat bgodfrey, lag(q)