Faculté des sciences

Travaux pratiques du cours LPHY1101 : Physique 1

Auteur : Justin Gérard
École de physique
Année académique 2022-2023

Remerciements

Merci à Loïc Sablon d'avoir réaliser les résolutions des exercices de ce cours et de m'avoir permis de les réutiliser ici.

Introduction

Voici une liste (non exhaustive) de quelques points d'introduction qui peuvent être utiles aux étudiants.

- Présentation personnelle : Ma recherche en deux mots + le numéro de mon bureau B.456 bâtiment Mercator au cas où ils ont des questions.
- Les laboratoires : Ils sont obligatoires et valent pour 4 points de la note finale. La note des laboratoire comprend le rapport et le test d'entrée. Attention, si les étudiants ne passent pas le test d'entrée, l'accès au laboratoire leur sera refusée (donc directement 0 pour le laboratoire en question). Remarque : La dispense des laboratoires n'est envisageable que pour les étudiants qui repassent le cours et qui ont obtenus une note d'au moins 10/20 aux laboratoires.
- Le test Reflexscience : A partir de la semaine 7, un test Reflexscience sera disponible chaque semaine sur moodle et sera constitué d'une capsule vidéo et d'un petit QCM qui sera obligatoirement corrigé en séance de TP. Ce test permet d'acquérir des points bonus pour l'examen et peut par exemple, transformer un 9 en 10 (pratique).
- Règles au TP : Il est interdit de changer de groupe de TP sauf si conflit horaire, à voir avec Loïc l'assistant en charge des TP (aka mon boss).
- Formulaire : Enfin on rappelle aux étudiants qu'il est important d'apprendre à se familiariser avec le formulaire (disponible sur moodle), car une copie de ce formulaire leur sera mise à disposition lors de l'examen final.

TP 1

Un nouvel espoir incertain

1.1 Rappel théorique

1.1.1 Conversion des unités et SI

Le système international des unités (souvent appelé SI) est composé de 7 unités de base :

- Le 'kg' : la mesure de masse.
- La 's' : la mesure de temps.
- Le 'm' : la mesure de longueur.
- Le 'K' : la mesure de température.
- Le 'A' : la mesure d'intensité électrique, d'un courant.
- La 'mol' : la mesure de quantité de matière.
- Le 'cd' (candela) : la mesure d'intensité de lumière.

Du SI dérivent un grand un nombre d'autres unités de mesure, par exemple :

Le 'N' : la mesure de force et $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.

Le 'V' (volt) : la mesure d'une tension électrique et $1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}}$.

1.1.2 Chiffre significatif (labo)

<u>Définition</u> : Un chiffre dans un nombre est dit significatif s'il est connu avec une précision suffisante.

Ce concept intervient par exemple lors de la prise de mesure d'un résultat expérimental. Il existe quelques règles pour savoir si un chiffre est significatif :

- Tous les chiffres non-nus sont significatifs.
- Les zéros à l'intérieur ou à la fin d'un nombre et après la virgule sont significatifs.
- Les zéros en début de nombre ne sont pas significatifs.
- Les zéros à la droite d'un nombre entier ne le sont pas nécessairement. Pour lever le doute on utilise la notation scientifique.
  Exemple : $1000 = 1{,}0\,.\,10^3$ ou $1{,}000\,.\,10^3$? Attention, car ce n'est pas la même précision !

1.1.3 Écriture d'un résultats de mesure et incertitudes (labo)

En pratique, une mesure exacte (précision infinie) ça n'existe pas. Il faut alors tenir compte de l'imprécision faite en écrivant le résultat sous la forme suivante :

$$\text{résultat expérimental} = \text{meilleure estimation} \pm \text{incertitude}$$
$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

Il y a 3 règles d'écriture :

- Un seul chiffre significatif sur l'incertitude (Δx).
- Le nombre de chiffres significatifs sur l'estimation ($\overline{x}$) dépend de la précision de l'incertitude (Δx). Le dernier chiffre de $\overline{x}$ doit être du même ordre de grandeur que Δx.
- $\overline{x}$ est Δx doivent avoir les mêmes unités. En général, on factorise les puissances de 10.

Définition : L'incertitude relative est le nombre adimensionnel (i.e. sans unité) $\frac{\Delta x}{|\overline{x}|}$. Au plus cette valeur est petite, au plus le résultat est précis.

1.1.4 Analyse dimensionnelle

A chaque unité du SI est associé une unique dimension et à chaque dimension est associé un grand nombre d'unité hors SI.

Dimension/grandeur	Symbole	Unité SI
Temps	T	s
Masse	M	kg
Longueur	L	m
Température	Θ (Theta)	K
Intensité électrique	I	A
Quantité de matière	N	mol
Intensité lumineuse	J	cd

Table 1.1 – Tableau des dimensions.

Toutes ces dimension seront utilisées dans le cadre de ce cours. La dimension d'une grandeur quelconque Ψ est notée $[\Psi]$ et est un produit de puissance des dimensions du SI, unique pour chaque grandeur.

Exemple : La force F, mesurée en N (newtons) a pour dimension $[\mathrm{F}] = \mathrm{M}\,.\,\mathrm{L}\,.\,\mathrm{T}^{-2}$ car en SI : $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.
L'astuce pour effectuer une analyse dimensionnelle est donc de remettre en unité SI et utiliser le tableau 1.1.

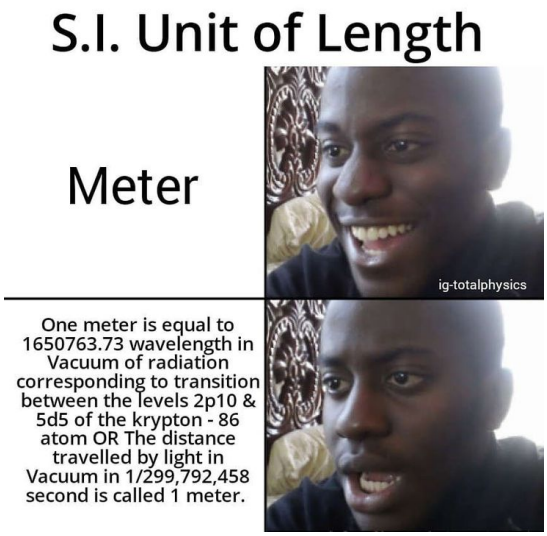
Remarque : Les scalaires sont adimensionnels (e.g. $[\pi] = 1$).

1.1.5 Cinématique à 1D

Remarque : On "oublie" les règles de calculs pour le reste des TP et examen car celles-ci s'appliquent aux résultats expérimentaux, et donc au laboratoires.
Notions théoriques :

- Le déplacement : $\Delta x = x_f - x_i$, avec x_f et x_i la vitesse finale et initiale respectivement.
- La vitesse moyenne : $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, avec Δt le laps de temps. La vitesse moyenne dépend uniquement des points de départ et d'arrivée.
- La vitesse instantanée : $v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$. Il s'agit de la dérivée première de la fonction position (indiquée ici par la variable x). La vitesse instantanée est celle donnée par le compteur. Mathématiquement, il s'agit de la vitesse moyenne sur un intervalle de temps infiniment court.
- L'accélération moyenne : $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. C'est la variation de la vitesse sur un laps de temps.
- L'accélération instantanée : $a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. C'est la dérivée seconde de la fonction position et la dérivée première de la fonction vitesse instantanée.

1.2 Exercices : E1.1, E1.3, E1.4, E1.6, E1.7, E1.11, E1.14, E1.15, E1.17, E1.18 et E1.19



E1.1 (conversions et unité)

La masse volumique de l'eau vaut $\rho = 1\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, mais 'g' et 'cm' n'appartiennent pas au SI. Dans le SI, l'unité de la masse est le 'kg' et celle de la longueur le 'm'. On transforme donc les unités de la manière suivante,

- $1\ \mathrm{kg} = 10^3\ \mathrm{g} \Leftrightarrow 1\ \mathrm{g} = 10^{-3}\ \mathrm{kg}$

- $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m} \Leftrightarrow 1\ \text{cm}^{-3} = (10^{-2})^{-3}\ \text{m}^{-3} = 10^{6}\ \text{m}^{-3}$

et on obtient

$$1\text{g}\,\text{cm}^{-3} = 10^{-3}\ \text{kg}\,.\,10^{6}\ \text{m}^{-3} = 10^{3}\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}. \tag{1.1}$$

E1.3 (chiffre significatif)

23,001 s possède 5 chiffres significatifs
$0.500\,.\,10^{-2}$ possède 3 chiffres significatifs
0.002030 kg possède 4 chiffres significatifs
2700 $\text{kg}\,\text{s}^{-1}$ possède 2 à 4 chiffres significatifs en fonction de comment on l'écrit en notation scientifique ($2{,}7\,.\,10^{3}$; $2{,}70\,.\,10^{2}$; $2{,}700\,.\,10^{1}$)

E1.4 (mesure et incertitude)

On mesure le rayon d'une sphère pour trouver $r = (10.0 \pm 0.2)$ cm.
a) On trouve l'incertitude relative sur le rayon en calculant

$$\frac{\Delta r}{|\overline{r}|} = \frac{0,2}{10,0} = 0,02 = 2\%. \tag{1.2}$$

b) On rappel que $A = 4\pi r^2$. Pour trouver l'incertitude relative sur l'aire, il nous faut ΔA et $|\overline{A}|$. Pour trouver ΔA on utilise la formule de l'énoncé, si $x = a\,.\,b$, alors

$$\Delta x = |\overline{x}|\,.\left(\frac{\Delta a}{|\overline{a}|} + \frac{\Delta b}{|\overline{b}|}\right)$$

et ici, $a = 4\pi r$ et $b = r$ et on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta A &= |\overline{A}|\,.\left(\frac{\Delta 4\pi r}{|4\pi\overline{r}|} + \frac{\Delta r}{|\overline{r}|}\right)\\
&= |\overline{A}|\,.\left(\frac{4\pi\Delta r}{4\pi|\overline{r}|} + \frac{\Delta r}{|\overline{r}|}\right)\\
&= 2|\overline{A}|\frac{\Delta r}{|\overline{r}|}.
\end{aligned}$$

On remarque que pour trouver ΔA on a besoin de $\overline{A}$. Ici, on a directement $\overline{A} = 4\pi\overline{r}^2$. Donc, on obtient,

$$|\overline{A}| = 4\pi|\overline{r}|^2 \qquad \text{et} \qquad \Delta A = 8\pi|\overline{r}|\Delta r$$

et en remplaçant par des valeurs numériques, on trouve

$$|\overline{A}| = 1256.6370...\ \text{cm}^2 \qquad \text{et} \qquad \Delta A = 50.2655...\ \text{cm}^2.$$

<u>Remarque</u> : Attention aux nombre de chiffre significatifs. Il faut tenir compte de certaines règles pour les opérations :

- Le résultat d'une multiplication (ou division) est arrondi pour ne pas avoir plus de chiffres significatifs que le facteur le moins précis du calcul.
- Le résultat d'une addition (ou soustraction) est arrondi pour avoir le même nombre de décimales que le terme qui en contient le moins.

Avec ces règles, on trouve que $\Delta A = 5\,.\,10^1$ cm^2 et $|\overline{A}| = 152,7\,.\,10^1$ cm^2, car $\Delta r = 0,2$ cm n'a qu'un seul chiffre significatif. On a donc,

$$\frac{\Delta A}{|\overline{A}|} = \frac{5}{125.7} = 4\%. \tag{1.3}$$

c) En utilisant la formule du volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ et un raisonnement similaire au point b), on trouve

$$\frac{\Delta V}{|\overline{V}|} = \frac{\Delta\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{|\frac{4}{3}\pi \overline{r}^3|} = \frac{\frac{4}{3}\pi \Delta r^3}{\frac{4}{3}\pi |\overline{r}^3|} = \frac{\Delta r^3}{|\overline{r}^3|}.$$

On utilise ensuite la formule du produit

$$\frac{\Delta r^3}{|\overline{r}^3|} = \frac{\Delta r}{|\overline{r}|} + \frac{\Delta r}{|\overline{r}|} + \frac{\Delta r}{|\overline{r}|} = 3\frac{\Delta r}{|\overline{r}|}$$

pour obtenir

$$\frac{\Delta V}{|\overline{V}|} = 3\frac{\Delta r}{|\overline{r}|} = 3\,.\,2\% = 6\%. \tag{1.4}$$

d) De manière générale, si $x \propto r^n$ alors $\frac{\Delta x}{|\overline{x}|} = n\frac{\Delta r}{|\overline{r}|}$.

E1.6 (mesure et incertitude)

Les dimensions d'une planche sont $L = 17,6$ cm et $l = 13,8$ cm. L'aire de cette planche s'écrit alors comme

$$A = \overline{A} \pm \Delta A.$$

On trouve directement que $\overline{A} = \overline{L}\,.\,\overline{l} = 242,88$ cm^2. Cependant, L et l ont 3 chiffres significatifs et donc,

$$\overline{A} = 243 \text{ cm}^2$$

Pour trouver ΔA on utilise la formule de l'énoncé et

$$\Delta A = |\overline{A}|\,.\left(\frac{\Delta L}{|\overline{L}|} + \frac{\Delta l}{|\overline{l}|}\right) = 4,52 \text{ cm}^2 \approx 5 \text{ cm}^2.$$

La dernière étape se justifie car les erreurs sur L et l n'ont qu'un seul chiffre significatif. Enfin, on trouve

$$A = (273 \pm 5) \text{ cm}^2 \tag{1.5}$$

E1.7 (mesure et incertitude)

En utilisant la notation en puissances de dix, on trouve

a)

$$\frac{1,002}{4,0} = 0,2505 = 2,505 \,.\, 10^{-1} \Rightarrow 2,5 \,.\, 10^{-1} \tag{1.6}$$

car seulement 2 chiffres significatifs pour le facteur le moins précis.

b)

$$(8,00 \,.\, 10^{6})^{-\frac{1}{3}} = 0,5 \,.\, 10^{-2} = 5 \,.\, 10^{-3} = 5,00 \,.\, 10^{-3} \tag{1.7}$$

car 3 chiffres significatifs.

c)

$$0,00076300 = 7,6300 \,.\, 10^{-4} \tag{1.8}$$

E1.11 (analyse dimensionnelle)

L'analyse dimensionnelle permet de dire rapidement si une équation est invalide ou plausible. Si la dimension du nombre de gauche est égale à la dimension du nombre de droite, alors l'équation est plausible (en réalité l'équation est correcte à une constante près et d'autres tests sont nécessaires pour trouver cette constante). Si les dimensions ne correspondent pas, alors l'équation est nécessairement incorrecte. On va maintenant vérifier si les équations suivantes sont homogènes en dimensions.

a)

$$x = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{v^2}{2a}\right] = \frac{[v]^2}{[2][a]} = \frac{(\mathrm{L} \,.\, \mathrm{T}^{-1})^2}{(\mathrm{L} \,.\, \mathrm{T}^{-2})} = \mathrm{L} = [x] \quad \Rightarrow \quad \textbf{OK}$$

<u>Remarque</u> :

- La dimension d'un produit de facteur est le produit des dimensions de chacun des facteurs.
- Une somme ne peut avoir de sens que si chaque terme de la somme à la même dimension que les autres.

b)

$$x = \frac{1}{2}at \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\right][a][t] = \mathrm{L} \,.\, \mathrm{T}^{-2} \,.\, \mathrm{T} = \mathrm{L} \,.\, \mathrm{T}^{-1} \neq [x] \quad \Rightarrow \quad \textbf{PAS OK}$$

c)

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \quad \Rightarrow \quad \left[\sqrt{\frac{2x}{a}}\right] = \left(\frac{[2][x]}{[a]}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{T} = [t] \quad \Rightarrow \quad \textbf{OK}$$

E1.14 (analyse dimensionnelle)

L'objectif est de retrouver la formule de l'accélération centripète en sachant que $a_c = f(r, v)$. On suppose que la fonction f à la forme suivante

$$f(r, v) = r^a v^b$$

avec a et b non connus. On rappel qu'il faut une homogénéité dans les dimensions, c'est à dire,

$$[a_c] = [r^a v^b] = [r^a][v^b].$$

Or, a_c est une accélération en $\mathrm{m\,s^{-2}}$ ce qui implique que $[a_c] = \mathrm{L\,T^{-2}}$. Puisque $[r] = \mathrm{L}$ et $[v] = \mathrm{L\,T^{-1}}$, il suit

$$\mathrm{L^1T^{-2}} = \mathrm{L}^a \,.\, \mathrm{L}^b\mathrm{T}^{-b} = \mathrm{L}^{a+b}\mathrm{T}^{-b}.$$

On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant,

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -b = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{r}. \tag{1.9}$$

E1.15 (cinématique à 1D)

On sait que $\Delta x = 100$ m $\Delta t = 9.58$ s (Usain Bolt court très très vite). Dans une premier temps on souhaite calculer la vitesse moyenne.

a) On utilise la formule et on trouve

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{9.58 \text{ s}} = 10,44 \text{ m s}^{-1} \tag{1.10}$$

b) Pour déterminer si Usain Bolt doit payer une amende pour excès de vitesse dans une zone 30 $\mathrm{km\,h^{-1}}$, on converti le résultat en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

$$\begin{cases} 1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} \\ 1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h} \Leftrightarrow 1 \text{ s}^{-1} = 3600 \text{ h}^{-1} \end{cases}$$

Finalement on a

$$10,44 \text{ m s}^{-1} = 10,44 \,.\, 10^{-3}.3600 \text{ km h}^{-1} = 37,58 \text{ km h}^{-1} > 30 \text{ km h}^{-1} \tag{1.11}$$

et Usain Bolt est bien en infraction lorsqu'il court dans une zone 30. Attention au retrait de permis Usain !

c) On regarde le graphe et l'endroit où la pente est la plus forte détermine le maximum de la vitesse instantanée. Pour déterminer sa valeur, c'est assez complexe car la résolution de l'image est faible. Néanmoins est raisonnable de supposer qu'elle est légèrement supérieure à 11 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

E1.17 (cinématique à 1D)

On a $v_i = 30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, v_f = -40 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $\Delta t = 0.04$ s. Pour déterminer le module (valeur absolue) l'accélération durant l'intervalle de temps, on utilise la formule de l'accélération moyenne,

$$|\overline{a}| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{-40-30}{0.04}\right| = 1,75\,.\,10^3\ \mathrm{m\,s^{-2}}. \tag{1.12}$$

E1.18 (cinématique à 1D)

On connaît la fonction position de la particule $x(t) = 4 - 5t + 3t^2$, où x s'exprime en m et t en s.

a) On souhaite déterminer la vitesse et l'accélération de cette particule après 3 s. Pour trouver ces quantités, on va dériver (chouette) en utilisant les relations suivantes,

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -5 + 6t\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Après 3 s, la vitesse et l'accélération sont

$$v_x(t = 3\ \mathrm{s}) = 13\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad a_x(t = 3\ \mathrm{s}) = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}. \tag{1.13}$$

b) Pour que la particule soit au repos, il faut que sa vitesse soit nulle (sinon il bouge). On cherche donc à résoudre $v_x(t = t') = 0$ où t' est le temps où la particule est au repos.

$$v_x(t) = -5 + 6t \Leftrightarrow v_x(t = t') = -5 + 6t' = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{5}{6}\ \mathrm{s} = 0,833\ \mathrm{s} \tag{1.14}$$

Il s'agit de l'unique solution et qui correspond à un changement de direction.

E1.19 (cinématique à 1D)

On rappel qu'une accélération positive (négative) correspond à une courbe position convexe (concave) car l'accélération est la dérivée seconde de la fonction position. On trouve finalement les relations suivantes (les valeurs chiffrées sont approximatives).

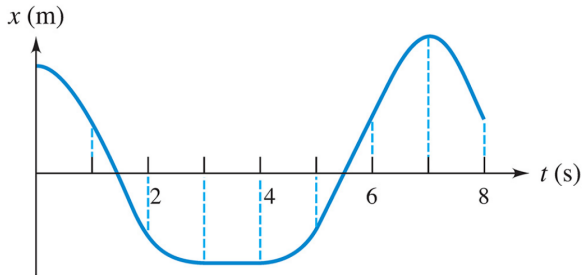


FIGURE 1.1 – Figure 3.41 du Benson.

Situations	Temps
(a)	t=3,5 s
(b)	t=7 s
(c)	t=1,5 s ou t=5,5 s
(d)	t=5 s
(e)	t=7 s
(f)	t=0,5 s ou t=8 s
(g)	t=2 s

TABLE 1.2 – Solutions du problème.

TP 2

Difficile à voir. Toujours en mouvement rectiligne uniforme accéléré est l'avenir.

2.1 Rappel théorique

2.1.1 MRUA

La notion fondamentale du Mouvement Rectiligne Uniforme Accéléré (MRUA) est que l'accélération est constante, ce qui se traduit mathématiquement par,

$$a = \text{cste}.$$

Si on intègre l'accélération on obtient une vitesse, car $a = \frac{dv}{dt}$. Comme l'accélération est constante, c'est facile

$$\int_0^t \frac{dv}{dt}\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t a\ \mathrm{d}\tau = a\,.\,t$$

et pour l'intégrale de la vitesse, on utilise le théorème fondamental de l'analyse qui dit que si $f(t) = \frac{dF}{dt}$, alors

$$\int_a^b f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = F(b) - F(a).$$

On obtient alors,

$$\int_0^t \frac{dv}{dt}\ \mathrm{d}t = v(t) - v(0) \quad \Rightarrow \quad v(t) = at + v(0)$$

avec $v(0)$ la vitesse initiale qui sera renommée en v_0 pour le reste du TP. Pour la position, on procède exactement de la même façon en utilisant la relation $v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t (v_0 + a\tau)\mathrm{d}\tau = v_0\,.\,t + \frac{a\,.\,t^2}{2}$$

avec $x(0)$ qui est interprété comme la position initiale et qui sera notée x_0 dans la suite.

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}.$$

En conclusion, les équations fondamentales du MRUA sont

$$\begin{cases} a_x = \text{cste} \\ v_x(t) = v_{x0} + a_x t \\ x_x(t) = x_{x0} + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Remarque : L'indice x n'est pas vraiment nécessaire ici, mais il permet de se rappeler qu'on travaille en 1D. Par exemple, si on travaillait en 3D on utiliserait trois indices x, y et z. Attention a ne pas confondre l'indice x et la position x.
Il existe d'autres équations pratiques pour le MRUA qui peuvent être dérivées à partir des trois équations fondamentales et qui sont disponibles dans le formulaire. Cependant, leur démonstration est laissée en exercice

$$\begin{cases} x_x(t) = x_{x0} + \frac{1}{2}(v_x(t) + v_{x0})t \\ v_x^2(t) = v_{x0}^2 + 2a_x(x_x(t) - x_{x0}) \end{cases}$$

Enfin, voici une méthode de résolution pratique pour résoudre bon nombre d'exercice de cinématique :

1. Faire un schéma de la situation en considérant l'objet comme un point.
2. Se représenter le système de coordonnées et l'origine du système.
3. Lister les données et les inconnues.
4. Résoudre l'exercice à l'aide des trois formules fondamentales (et des autres si besoin).
5. Vérification graphique (si possible), intuitive (vraisemblance de la solution) et dimensionnelle (s'assurer que les dimensions obtenus collent avec ce qui est demandé).

2.1.2 Cinématique en 2D (ou plus)

Lorsqu'on est plus en 1D les choses deviennent un peu plus compliquées (mais rien de bien sorcier). On doit alors utiliser des vecteurs pour caractériser la position, la vitesse et l'accélération (Annexe A : les vecteur, sur moodle peut aider). On va utiliser la convention des vecteurs directeurs qui forment une base orthonormée de l'espace, ce qui signifie que

- Ces vecteurs sont perpendiculaires entre eux.
- Leur module (ou norme) vaut 1.

Avec le vecteur directeur $\hat{\imath}$ qui génère l'axe x et le vecteur directeur $\hat{\jmath}$ qui génère l'axe y. On écrira alors les vecteurs comme sur la figure 2.1 et si les valeurs dépendent du temps, on écrira

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$$

Par conséquent, on devra écrire

- Vecteur déplacement : $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}$.
- Vitesse moyenne : $\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} = \overline{v}_x\hat{\imath} + \overline{v}_y\hat{\jmath}$.
- Vitesse instantanée : $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$.

- Accélération moyenne : $\overrightarrow{a}_{moy} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} = \overline{a}_x\hat{\imath} + \overline{a}_y\hat{\jmath}$.
- Accélération instantanée : $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$.

Remarque : Pour la cas à 3D, on garde la même logique et on ajoute simplement le vecteur directeur $\hat{k}$ qui génère l'axe z.

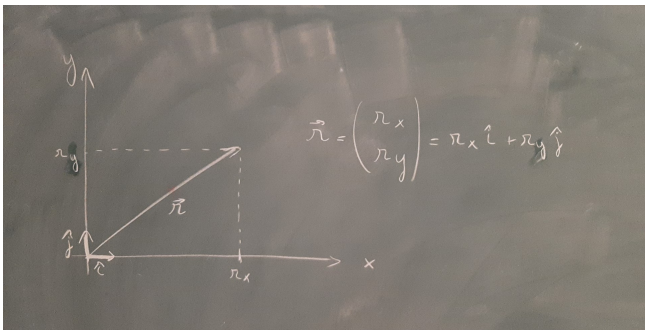
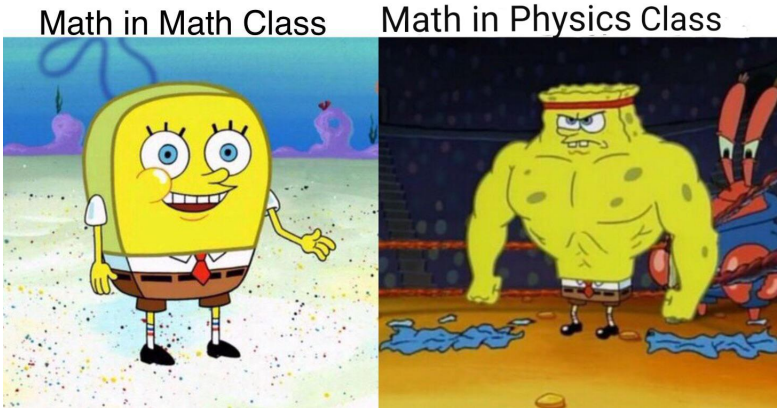


FIGURE 2.1 – Écriture du vecteur $\overrightarrow{r}$ en 2 dimensions.

2.2 Exercices : E2.2, E2.4, E2.8, E2.11 et E2.12



E2.2 Attention caribou en vue !

Les données du problème sont : $v_0 = 30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse initiale du camion ; $d = x_{caribou} - x_0 = 70$ m la distance caribou-camion ; $a_x = -8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ l'accélération constante du camion et $t_r = 0,5$ le temps de réflexe du conducteur. On cherche ici la distance d'arrêt.
Il est utile de séparer le problème en deux parties, car pour $t < t_r$ on est dans un cas de MRU (le conducteur n'a pas encore appuyé sur le frein) et pour $t \geq t_r$ on est dans un cas de MRUA.
Pour le cas de MRU, on a pas d'accélération et la distance réflexe est obtenue comme suit,

$$x_r = x_0 + v_0 t = 0 + 30.0,5 = 15 \text{ m}.$$

Pour trouver la distance parcourue en freinant, il est utile d'utiliser la formule

$$v_x^2(t) = v_0^2 + 2a_x \Delta x$$

avec Δx la distance de freinage, car on cherche une distance (donc on va pas se fatiguer à calculer un temps). Comme on connaît tous les autres termes de l'équation, on a

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_0^2}{2a_x} = \frac{0 - 30^2}{2.(-8)} = 56.25 \text{ m}.$$

Enfin, on trouve la distance d'arrêt en additionnant la distance réflexe et la distance de freinage,

$$\text{distance d'arrêt} = 15 + 56.25 = 71,25 \text{ m} > 70 \text{ m} \tag{2.2}$$

Donc à moins de donner un coup de volant, on devra manger du caribou ce soir...

E2.4 Lancer d'objet

On doit trouver la hauteur maximale H et la durée totale du trajet t_{tot} d'un objet projeté verticalement vers le haut à partir du sol en sachant qu'il atteint 50% de sa hauteur en 2 s. Les donnée du problèmes sont : $a_y = -g = -9,81 \text{ m s}^{-2}$ l'accélération gravitationnelle ; $v_0 > 0$ la vitesse verticale initiale et $y(t = 2s) = \frac{H}{2}$.
Il s'agit d'un problème de chute libre et donc de MRUA (les équations du MRUA s'appliquent). La première chose que l'on sait c'est

$$y(t = 2s) = \frac{H}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{2} = v_0.2 - \frac{g.2^2}{2}$$

mais malheureusement, il s'agit d'une équation à deux inconnues, car on ne connaît ni H ni v_0. Il nous faut donc une autre équation qui n'est autre que

$$v_y^2 = v_0^2 + 2a_y \Delta y \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0^2 - 2gH$$

où $v_y = 0$ car lorsque l'objet atteint une hauteur H sa vitesse est nulle. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues qu'on peut résoudre

$$\begin{cases} H = 4(v_0 - g) \\ 0 = v_o^2 - 2gH \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H = 4(v_0 - g) \\ 0 = v_o^2 - 2g\,.\,4(v_0 - g). \end{cases}$$

Il faut désormais résoudre l'équation du second degré suivante

$$v_0^2 - 8gv_0 + 8g^2 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{8g \pm \sqrt{32}g}{2}$$

et on trouve les deux solutions suivantes $v_{0+} = 67 \text{ m s}^{-1}$ et $v_{0-} = 11,5 \text{ m s}^{-1}$ qui sont toutes les deux acceptables. Les vitesses correspondent aux hauteurs,

$$H_+ = 228,7 \text{ m} \quad \text{et} \quad H_- = 6,73 \text{ m} \tag{2.3}$$

qui sont respectivement le cas où $\frac{H}{2}$ est atteint en montée et descente. Pour trouver la durée totale du trajet on peut commencer par calculer le temps que va mettre l'objet à arriver en H et on utilise l'équation,

$$v_y(t) = v_0 + a_y t \quad \Leftrightarrow \quad 0 = v_0 - gt$$

et on trouve

$$t_+ = \frac{v_{0+}}{g} = 6,8 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_- = \frac{v_{0-}}{g} = 1,17 \text{ s}.$$

sauf qu'il ne s'agit pas du temps total mais du temps nécessaire pour arriver à la hauteur H. Pour trouver le temps total il suffit simplement de multiplier le résultat par un facteur 2 car la trajectoire "montée" est symétrique à la trajectoire "descente". Finalement, on trouve,

$$t_{tot+} = 2t_+ = 13,6 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_{tot-} = 2t_- = 2,3 \text{ s}. \tag{2.4}$$

Remarque : Pour se convaincre que le temps montée et le temps descente sont bien identiques, on peut calculer le temps nécessaire à un objet pour atteindre le sol si celui-ci est lâché d'une hauteur $H_\pm$ avec une vitesse initiale nulle. Spoiler : les temps sont les mêmes !

E2.8 Un petit tour de manège ?

Les données du problèmes sont : $C = 8$ m la circonférence du manège ; $v = 1$ m s^{-1} le module constant de la vitesse et l'origine du système se trouve au nord du manège. Penser à faire un petit schéma pour visualiser.

a) Après 1 s, l'enfant aura parcouru 1 m, car sa vitesse est de 1 m s^{-1}. Il a donc parcouru $\frac{1}{8}$ de tour soit 45°. Dès lors les positions initiale et finale sont données par,

$$\vec{r}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{r}_f = R\sin(45°)\hat{\imath} - R(1 - \cos(45°))\hat{\jmath}$$

avec $R = \frac{8}{2\pi} = 1,27$ m le rayon du manège et le déplacement vaut

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (0,9\hat{\imath} - 0,37\hat{\jmath}) \text{ m}. \tag{2.5}$$

b) Après 3 s, l'enfant à parcouru 135° et les positions initiale et finale sont données par,

$$\vec{r}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{r}_f = R\sin(135°)\hat{\imath} - R(1 - \cos(135°))\hat{\jmath}$$

et la vitesse moyenne est donc donnée par

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{\Delta t} = (0,3\hat{\imath} - 0,72\hat{\jmath}) \text{ m s}^{-1}. \tag{2.6}$$

c) Pour trouver l'accélération moyenne entre 1 s et 3 s on doit connaître $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_f$, car

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

avec $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse, qui est le produit de sa norme v et de la direction dans l'espace,

$$\overrightarrow{v}_i = v\,.\,(\cos(45°)\hat{\imath} - \sin(45°)\hat{\jmath}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_f = v\,.\,(\cos(135°)\hat{\imath} - \sin(135°)\hat{\jmath}).$$

En calculant avec $v = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ on a

$$\overrightarrow{v}_i = 0,707(\hat{\imath} - \hat{\jmath})\ \mathrm{m\,s^{-1}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_f = 0,707(-\hat{\imath} - \hat{\jmath})\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

et donc avec $\Delta t = 2$ s on obtient finalement

$$\overrightarrow{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{v}_f - \overrightarrow{v}_i}{\Delta t} = \frac{0,707}{2}(-\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{\imath} + \hat{\jmath}) = -0,707\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}. \tag{2.7}$$

Remarque : On peut vérifier graphiquement que c'est bien normal d'avoir les composantes en $\hat{\jmath}$ qui se suppriment.

Remarque : De manière générale, une meilleure façon de résoudre le problème est de considérer l'équation générale et puis de remplacer dans les expressions l'angle que l'on souhaite avoir,

$$\overrightarrow{r}(t) = R\sin(\omega t)\hat{\imath} - R(1 - \cos(\omega t)) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = R\omega\cos(\omega t) - R\omega\sin(\omega t)$$

avec $\omega = \frac{v}{R}$ la vitesse angulaire (unité : $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ou $\mathrm{deg\,s^{-1}}$). Donc ωt représente bien un angle et $R\omega$ une vitesse.

E2.11 Le basket c'est plutôt technique mine de rien

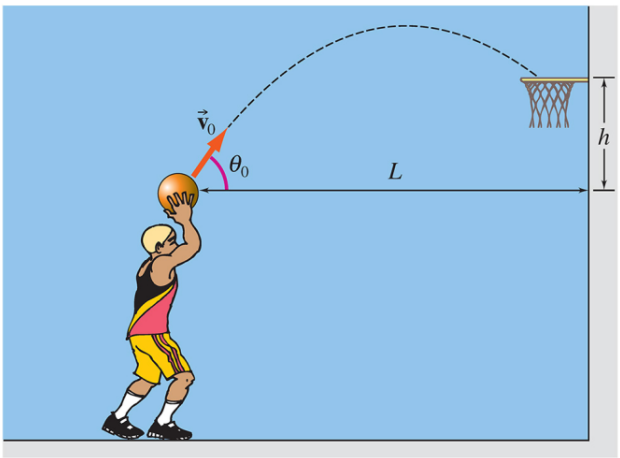


FIGURE 2.2 – Figure 4.47 du Benson.

Un lancer au basket, comme décrit dans cet exercice, c'est ce qu'on appelle en termes techniques un tir balistique (ça sonne cool). Il s'agit d'un mouvement en 2D d'un projectile avec les propriétés suivantes

- Selon l'axe y, on a un MRUA avec une accélération $a_y = \pm g$ en fonction du sens de l'axe.

- Selon l'axe x, on a un MRU avec une accélération nulle $a_x = 0$.
- On néglige bien sur toutes formes de résistance de l'air pour plus de simplicité. Sinon on doit résoudre des équation différentielle et c'est très très très difficile (donc en tant que physicien, on contourne simplement le problème ;-).

Dans ce problème, on suppose que l'angle du lancer θ_0, la distance horizontale jusqu'au panier L et la hauteur du panier h sont connus.

a) Il faut montrer une relation qui parait assez difficile à première vue. Mais commençons simplement par lister tout ce qu'on sait. Comme selon l'axe x on a un MRU et qu'on pose l'origine du repère en $x_0 = 0$, on a

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t = 0 + v_0 \cos(\theta_0)t.$$

Soit t_L le temps où le ballon atteint le panier, ce qui veut dire que t_L vérifie

$$x(t_L) = L \quad \Leftrightarrow \quad L = v_0 \cos(\theta_0)t_L \quad \Leftrightarrow \quad t_L = \frac{L}{v_0 \cos(\theta_0)}.$$

De plus, pour que le ballon atteigne le panier, il doit se trouver à une hauteur h au temps t_L, c'est à dire $y(t_L) = h$. On résout donc l'équation de la position verticale en tenant compte de l'accélération gravitationnelle et en posant que l'origine du repère se trouve en $y_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
h &= y(t_L) \\
h &= y_0 + v_0 \sin(\theta_0)t_L - \frac{gt_L^2}{2} \\
h &= 0 + \frac{v_0 \sin(\theta_0)L}{v_0 \cos(\theta_0)} - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} = L\tan(\theta_0) - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \\
-\frac{1}{v_0^2} &= (\frac{h}{L} - \tan(\theta_0))\frac{2\cos^2(\theta_0)}{gL}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient la bonne relation,

$$v_0^2 = \frac{gL}{2\cos^2(\theta_0)\left(\tan(\theta_0) - \frac{h}{L}\right)} \tag{2.8}$$

b) A la fin de la trajectoire, on a α l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale. Dès lors α vérifie la relation suivante,

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

De plus, puisqu'on est dans une configuration de tir balistique, on a

$$\begin{cases} v_x(t_L) = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y(y_L) = v_{y0} - gt_L = v_0 \sin\theta_0 - \frac{gL}{v_0 \cos\theta_0}. \end{cases}$$

On remplace dans l'équation de α

$$\tan\alpha = \frac{v_0 \sin\theta_0 - \frac{gL}{v_0\cos\theta_0}}{v_0\cos\theta_0} = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0} - \frac{gL}{v_0^2\cos^2\theta_0}.$$

On utilise la relation du point a) un peu remaniée

$$v_0^2\cos^2\theta_0 = \frac{gL}{2\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}$$

pour obtenir

$$\tan\alpha = \tan\theta_0 - \frac{gL}{gL}2\left(\tan\theta_0 - \frac{h}{L}\right) = \frac{2h}{L} - \tan\theta_0. \tag{2.9}$$

c) On a $r = 12$ cm le rayon de la balle, $d = 46$ cm le diamètre du panier, $h = 3-2 = 1$ m la hauteur du panier (depuis la balle) et $\theta_0 = 45°$ l'angle du lancer. Pour que le ballon rentre, il y a une contrainte sur α comme on peut le voir sur la figure 2.3.

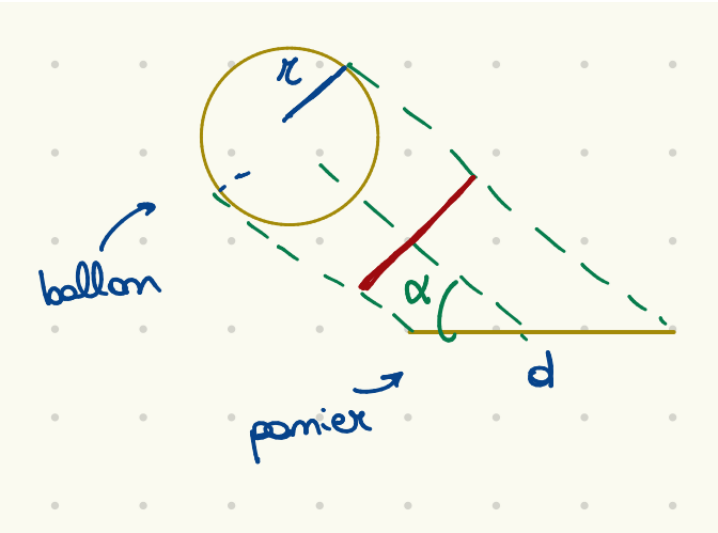


FIGURE 2.3 – Schéma du problème

Mathématiquement, cela donne

$$2r < d\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha > \frac{2r}{d}$$

et on trouve que $\alpha_{min} = \arcsin\left(\frac{2r}{d}\right) = 31,45°$. Du point b), on connaît une relation entre α et L qui nous permet de trouver la solution

$$L_{min} = \frac{2h}{\tan\alpha_{min} + \tan\theta_0} = 2,48 \text{ m}. \tag{2.10}$$

E2.12 Un MCU pour finir (PAS le Marvel Cinematic Universe)

Ici on a affaire à un Mouvement Circulaire Uniforme (MCU). On rappelle que la vitesse $\vec{v}$ est toujours tangente au cercle et que son module v est constant. Cependant,

l'accélération existe bel et bien, car le vecteur $\overrightarrow{v}$ n'est pas constant (changement de direction au cours du temps pour décrire un cercle). L'accélération est appelée accélération centripète $\overrightarrow{a}_c$ et est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire. Le module de l'accélération centripète est donnée par

$$a_c = \frac{v^2}{R} \text{ m s}^{-2}$$

avec R le rayon du cercle. Avec les données du problème on trouve que

$$R = L\sin(\theta) = 1,2\sin(20^\circ) = 0,41 \text{ m}$$

et avec $v = 1,21 \text{ m s}^{-1}$ on trouve

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{1,21^2}{0,41} = 3,57 \text{ m s}^{-2} \tag{2.11}$$

TP 3

Le réveil de la force

3.1 Rappel théorique

3.1.1 Vitesse relative

Pour le TP, on notera $\overrightarrow{r}_{12}$ la position de 1 dans le référentiel 2. Soit un point P dans l'espace et 2 référentiels A et B, alors la relation suivante (Loi de Chasles) est vérifiée

$$\overrightarrow{r}_{PA} = \overrightarrow{r}_{PB} + \overrightarrow{r}_{BA}.$$

De là, en dérivant, on obtient une relation sur la vitesse,

$$\overrightarrow{v}_{PA} = \overrightarrow{v}_{PB} + \overrightarrow{v}_{BA}$$

qui sont respectivement la vitesse de P dans A, la vitesse de P dans B et la vitesse entre A et B. Attention, car si les repères sont non-inertiels, alors la dérivée des vecteurs directeurs est non nulle et on obtient un terme de rotation supplémentaire.
De manière générale, on a

$$\overrightarrow{v}_{absolue} = \overrightarrow{v}_{relative} + \overrightarrow{v}_{entrainement}$$

où on a respectivement la vitesse dans le repère inertiel, la vitesse dans le second repère et la vitesse du second repère dans le repère inertiel.

3.1.2 Mouvement circulaire non uniforme

Pour un mouvement circulaire non uniforme, on prend généralement une base orthonormée non inertielle $\{\hat{u}_\theta, \hat{u}_r\}$ dont les composantes sont respectivement orientée dans la direction tangentielle et radiale. Dans ce système de coordonnées, on a $\overrightarrow{v} = v\hat{u}_\theta$ et

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta + v\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

où le second terme apparaît du fait du repère non inertielle. On peut montrer que

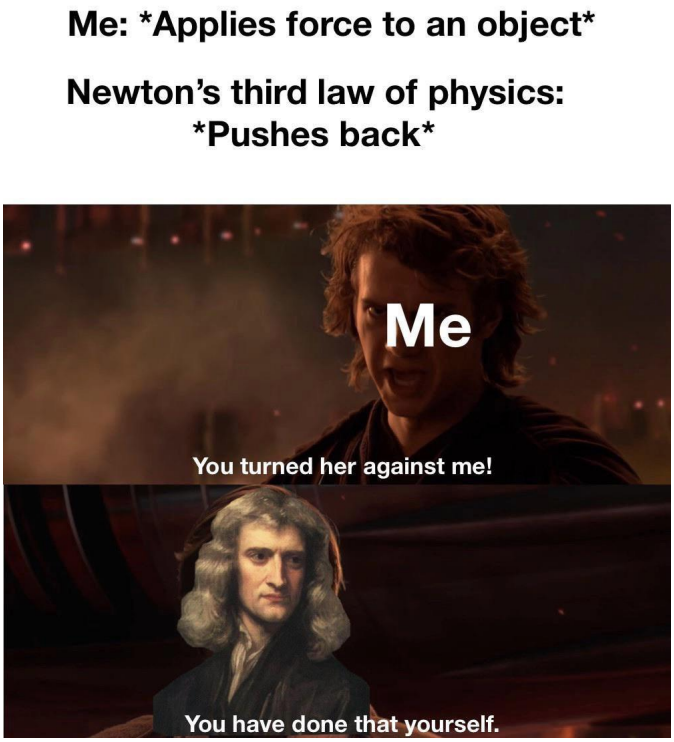
$$\overrightarrow{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta.$$

3.1.3 Dynamique de la particule

Dans les énoncés, on donne une méthode de résolution pour la dynamique à deux dimensions. Le choix du système d'axe est un point essentiel, car il peut permettre de drastiquement faciliter la résolution d'un exercice.
Newton dans sa grande bonté nous a laissé trois lois qui portent son nom

1. Tout objet non soumis à des forces conserve son état de repos.
2. $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$.
3. Action réaction : $\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F}_{BA}$.

3.2 Exercices : E3.1, E3.3, E3.5 et E3.7



E3.1 Course de karting

Pour ce problème, on a $v_A = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse initiale de A ; $v_B = 15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse initiale de B et $C = 100$ m la circonférence de la piste de karting (donc le rayon de la piste est $R = \frac{100}{2\pi} = 15.92$ m).

a) On cherche à déterminer $\overrightarrow{v}_{AB}(t = 8\ \mathrm{s})$ la vitesse de B par rapport à A après 8 s. Commençons par déterminer l'équation de $\overrightarrow{r}_A$ la position de A,

$$\overrightarrow{r}_A(t) = R\cos(\theta_A(t))\hat{\imath} + R\sin(\theta_A(t))\hat{\jmath} \quad \text{où} \quad \theta_A(t) = \frac{\pi}{2} - \omega_A t$$

avec $\omega_A = \frac{v_A}{R}$ la vitesse angulaire de A. Pour trouver l'expression de $\theta_A(t)$ on doit prendre en compte le fait qu'on part du sommet et que les angles sont calculées dans le sens antihoraire. On a donc,

$$\overrightarrow{r}_A(t) = R\sin(\omega_A t)\hat{\imath} + R\cos(\omega_A t)\hat{\jmath}$$

et de façon similaire,

$$\overrightarrow{r}_B(t) = R\sin(\omega_B t)\hat{\imath} + R\cos(\omega_B t)\hat{\jmath}$$

avec $\omega_B = \frac{v_B}{R}$ la vitesse angulaire de B. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, il vient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_A = \frac{d\overrightarrow{r}_A}{dt} &= R\omega_A\cos(\omega_A t)\hat{\imath} - R\omega_A\sin(\omega_A t)\hat{\jmath} \\
&= v_A\cos\left(\frac{v_A}{R}t\right)\hat{\imath} - v_A\sin\left(\frac{v_A}{R}t\right)\hat{\jmath} \\
\overrightarrow{v}_B = \frac{d\overrightarrow{r}_B}{dt} &= R\omega_B\cos(\omega_B t)\hat{\imath} - R\omega_B\sin(\omega_B t)\hat{\jmath} \\
&= v_B\cos\left(\frac{v_B}{R}t\right)\hat{\imath} - v_B\sin\left(\frac{v_B}{R}t\right)\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

La vitesse relative $\overrightarrow{v}_{AB}$ est donnée par,

$$\overrightarrow{v}_{AB} = \overrightarrow{v}_{BS} + \overrightarrow{v}_{SA} = \overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A$$

avec S le sol et $\overrightarrow{v}_{SA}$ la vitesse du sol par rapport à A (c'est donc l'opposée de $\overrightarrow{v}_A$). L'étape intermédiaire n'est pas forcément nécessaire, mais comme il faut bien être rigoureux de temps en temps, on se fait plaisir ici :-).
En remplaçant $v_A = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_B = 15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t = 8$ s et $R = \frac{100}{2\pi}$ m on trouve,

$$\overrightarrow{v}_{AB} = 1,545\hat{\imath} - 23,776\hat{\jmath} \tag{3.1}$$

que l'on peut même vérifier graphiquement.

b) Ici deux solutions

- Soit faire marcher un peu l'intuition physique (j'aime cette solution).
- Soit calculer $\|\overrightarrow{v}_{AB}(t)\|$, dériver puis égaler à 0. Solution longue et embêtante mais la méthode est efficace.

<u>Solution 1</u> : La vitesse v_{AB} sera maximale lorsque les vitesses $\overrightarrow{v}_A$ et $\overrightarrow{v}_B$ seront antiparallèles. Si les vecteurs pointent dans des directions opposées, alors les karts sont séparés d'un demi cercle, soit 50 m. Donc on résout un simple problème de MRU,

$$v_A t + 50 = v_B t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{50}{v_B - v_A} = 10\ \text{s}. \tag{3.2}$$

<u>Solution 2</u> : On se met au boulot en se rappelant qu'en deux dimensions $\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$.

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{v}_{AB}(t)\| &= \|\overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A\| \\
&= \left\| \left(v_B \cos\left(\frac{v_B}{R}t\right) - v_A \cos\left(\frac{v_A}{R}t\right)\right)\hat{\imath} - \left(v_B \sin\left(\frac{v_B}{R}t\right) - v_A \sin\left(\frac{v_A}{R}t\right)\right)\hat{\jmath} \right\| \\
&= \sqrt{\left(v_B \cos\left(\frac{v_B}{R}t\right) - v_A \cos\left(\frac{v_A}{R}t\right)\right)^2 + \left(v_B \sin\left(\frac{v_B}{R}t\right) - v_A \sin\left(\frac{v_A}{R}t\right)\right)^2} \\
&= \Bigg[v_B^2 \cos^2(\frac{v_B}{R}t) + v_A^2 \cos^2(\frac{v_A}{R}t) - 2v_A v_B \cos\left(\frac{v_B}{R}t\right)\cos\left(\frac{v_A}{R}t\right) \\
&\quad + v_B^2 \sin^2(\frac{v_B}{R}t) + v_A^2 \sin^2(\frac{v_A}{R}t) - 2v_A v_B \sin\left(\frac{v_B}{R}t\right)\sin\left(\frac{v_A}{R}t\right) \Bigg]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos\left(\frac{v_B}{R}t - \frac{v_A}{R}t\right)}
\end{aligned}
$$

et on rappelle que $x^{\frac{1}{2}}$ c'est la même chose que $\sqrt{x}$. Maintenant, on dérive et on égale à 0

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{v}_{AB}(t)\| &= 0 \\
\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos\left(\frac{v_B}{R}t - \frac{v_A}{R}t\right)}} 2v_A v_B \frac{v_B - v_A}{R} \sin\left(\frac{v_B - v_A}{R}t\right) &= 0 \\
\sin\left(\frac{v_B - v_A}{R}t\right) &= 0 \\
\sin\left(\frac{v_B - v_A}{50}\pi t\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut que $\frac{v_B - v_A}{50}t \in \mathbb{N}$ (l'ensemble des nombres naturels) et donc $t = 10\alpha$ s avec $\alpha = 1, 2, 3, ...$ Enfin, on se rend compte qu'il n'y a que deux cas différents $t = 0$ s et $t = 10$ s, car après 20 secondes (cas $\alpha = 2$) les karts sont à nouveaux côte à côte car A à fait 2 tours et B en à fait 3. Le temps $t = 0$ correspond au minimum de v_{AB} (départ côte à côte et vitesse orientée dans la même direction) et $t = 10$ au maximum de v_{AB} (situation où les vitesses vont dans des sens opposées). On constate bien vite que la première solution est bien plus courte que la seconde...

E3.3 Vroum vroum en motocyclette

Les données du problème sont $R = 50$ m le rayon de la piste ; $a = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ l'accélération de la motocyclette à 37° ouest par rapport au nord (lorsque la motocyclette est tout à fait à l'est) et l'accélération tangentielle est constante.

a) Avec un système de coordonnées d'un mouvement circulaire non uniforme, on trouve directement

$$
|a_t| = |a \cos 37°| = 7,99\ \mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{et} \qquad |a_r| = |-a \sin 37°| = 6,02\ \mathrm{m\,s^{-2}} \tag{3.3}
$$

b) Comme v augmente uniformément, l'accélération tangentielle a_t est constante mais ce n'est pas le cas pour $a_r(t)$. On calcule donc,

$$a_r(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

et on connaît $a_{r0} = 6,02 \text{ m s}^{-2}$ et donc $v_0 = \sqrt{a_{r0}R} = 17,33 \text{ m s}^{-1}$. On peut utiliser les équations du MRUA, car l'accélération tengentielle est constante

$$\begin{cases} r(t) = 0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} \\ v(t) = v_0 + a_t t. \end{cases}$$

On cherche alors t_{tour} tel que $r(t_{tour}) = 2\pi R$. Donc

$$2\pi R = v_0 t_{tour} + \frac{a_t t_{tour}^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3,99 t_{tour}^2 + 17,35 t_{tour} - 100\pi = 0$$

et la dernière équation admet deux solutions $t_{tour} = -11,31$ s et $t_{tour} = 6,96$ s, mais il faut encore rejeter la solution négative car elle n'a pas de sens dans notre cas. Finalement, on a

$$t_{tour} = 6,96 \text{ s}. \tag{3.4}$$

E3.5 Un problème à deux cordes

Les données du problème sont $m = 7$ kg la masse du bloc ; $\theta_1 = 40°$ l'angle de la première corde ; $\theta_2 = 60°$ l'angle de la seconde corde et $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ l'accélération gravitationnelle. On commence par écrire les équations des deux tensions

$$\overrightarrow{T}_1 = T_1 \cos(\theta_1)\hat{\imath} + T_1 \sin(\theta_1)\hat{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{T}_2 = -T_2 \cos(\theta_2)\hat{\imath} + T_2 \sin(\theta_2)\hat{\jmath}.$$

On sait également que la force du poids s'écrit $\overrightarrow{P} = -mg\hat{\jmath}$ et en appliquant la seconde loi de Newton on trouve

$$\begin{cases} \sum F_x = T_1 \cos(\theta_1) - T_2 \cos(\theta_2) = 0 \\ \sum F_y = T_2 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) = mg \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T_1 = \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \frac{mg - T_1 \sin(\theta_1)}{\sin \theta_2} \\ T_2 = \frac{mg - T_1 \sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)}. \end{cases}$$

Dès lors on a que

$$T_1 = mg \frac{\cot(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \left(1 + \frac{\cot(\theta_2)}{\cot(\theta_1)}\right)^{-1} = 34,864 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 53,415 \text{ N}. \tag{3.5}$$

E3.7 Un bloc sur une pente ! Sounds familiar...

Les données du problème sont $\theta = 37°$ l'angle de la pente ; $m = 1$ kg la masse du bloc ; $F = 5$ N la force horizontale et $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ l'accélération gravitationnelle.

a) On commence par faire le bilan des forces (normale, horizontale et liée au poids)

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} = N\hat{j} \\ \overrightarrow{F} = F\cos(\theta)\hat{i} - F\sin(\theta)\hat{j} \\ \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\sin(\theta)\hat{i} - mg\cos(\theta)\hat{j}. \end{cases}$$

On applique ensuite la seconde loi de Newton

$$\begin{cases} \sum F_x = F\cos(\theta) - mg\sin(\theta) = ma_x \\ \sum F_y = -F\sin(\theta) - mg\cos(\theta) + N = 0 \end{cases}$$

et grâce à la première équation on trouve $a_x = -1,91\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) Avec $v_0 = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $a_x = -1,91\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ et $x_0 = 0$ on utilise la formule de la position du MRUA (car accélération constante)

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2} = 4t - \frac{-1,91t^2}{2}$$

et en évaluant en $t = 2$ s on trouve

$$x(t = 2\ \mathrm{s}) = 4,17\ \mathrm{m}. \tag{3.6}$$

TP 4

Le padawan de Newton, il vous faut devenir

4.1 Rappel théorique

Pas besoin de rappel pour ce TP, car vous êtes déjà bien assez smart :-) Plus sérieusement, on utilise seulement les trois lois de Newton pour ce TP qui se trouvent à la section 3.1.3.

4.2 Exercices : E4.1, E4.4 et E4.7

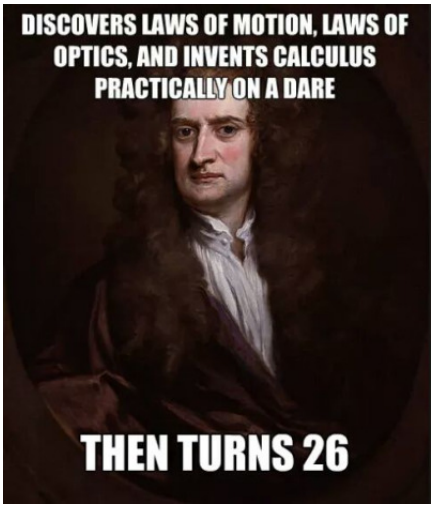


FIGURE 4.1 – Personnellement, j'ai 24 ans et je suis très loin d'avoir accompli autant de choses. Il faudrait que je retourne me mettre au travail plutôt que de chercher des memes pour ce cours...

E4.1 Le petit train

Les données du problème sont $m_i = 4\,.\,10^4$ kg la masse du chariot i avec $i \in \{1, 10\}$; $m_L = 2,5\,.\,10^5$ kg la masse de la locomotive et $F_{1L} = 8\,.\,10^5$ N la force qu'exerce la

locomotive sur le wagon 1. En effet, on rappelle que F_{ij} est la force exercée par j sur i. On suppose que la corde entre les wagons est indéformable, donc chaque wagon subit la même accélération et on néglige le frottement et la rotations des roues.

a) On commence à nouveau par faire le bilan des forces selon l'axe x et l'axe y en utilisant la seconde loi de Newton

$$\begin{cases} \sum F_x = F_{1L} - F_{12} = m_1 a_x \\ \sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$$

avec a_x l'accélération subie par TOUS les wagons (elle est la même à chaque fois), N_1 la force normale du wagon 1 et $g = 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ l'accélération gravitationnelle. On souhaite déterminer la valeur de F_{12} et pour cela on doit connaître a_x. Pour trouver la valeur de a_x, on applique la seconde loi de Newton à tous les wagons, selon l'axe x

$$\sum F_x = F_{1L} - F_{12} + F_{21} - F_{23} + F_{32} - F_{34} + F_{43} - ... = Ma_x$$

avec $M = m_1 + m_2 + m_3 + ...$ la somme des masses de tous les wagons. Puisque $\overrightarrow{F}_{ij} = -\overrightarrow{F}_{ji}$, il vient que $F_{ij} = F_{ji}$ (troisième loi de Newton). Donc on a beaucoup de termes vont s'annuler (et 0 c'est quand même super)

$$\sum F_x = F_{1L} + 0 + 0 + 0 + ... = Ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{F_{1L}}{M} = \frac{8\,.\,10^5}{10\,.\,4\,.\,10^4} = 2\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation pour trouver le résultat

$$F_{1L} - F_{12} = m_1 a_x \quad \Rightarrow \quad F_{12} = F_{1L} - m_1 a_x = 7,2\,.\,10^5\ \mathrm{N}. \tag{4.1}$$

b) Puisque le wagon 10 est le dernier, il n'a qu'un seule force, celle exercée par le wagon 9 notée $F_{10,9}$ qui s'applique selon l'axe x. Donc, avec la seconde loi de Newton selon l'axe x, on a directement que

$$\sum F_x = F_{10,9} = m_{10} a_x = 8\,.\,10^4\ \mathrm{N}. \tag{4.2}$$

c) A nouveau (et on commence à avoir l'habitude) on applique la seconde loi de Newton selon l'axe x à la locomotive, car on sait que la force exercée par la voie sur la locomotive F_{LV} est horizontale et est dirigée vers les x positifs

$$\sum F_x = F_{LV} - F_{1L} = m_L a_x \quad \Rightarrow \quad L_{LV} = F_{1L} + m_L a_x = 1,24\,.\,10^6\ \mathrm{N}. \tag{4.3}$$

E4.4 Machine d'Atwood

Les données du problème sont $m_1 = 3$ kg la masse du bloc 1 ; $m_1 = 5$ kg la masse du bloc 2 et $g = 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ l'accélération gravitationnelle. On commence par placer le repère le long de la poulie pour éviter des calculs inutiles (1 seul axe c'est pratique). De plus on néglige le frottement, la masse et la rotation de la poulie. On considère également le corde indéformable, ce qui veut dire que $a_{1y} = a_{2y} = a_y$. On commence a avoir l'habitude donc on calcule le bilan des forces sur les masses m_1 et m_2 selon l'axe y

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_y & \Leftrightarrow \quad \frac{T - m_1 g}{m_1} = a_y \\ m_2 g - T' = m_2 a_y & \Leftrightarrow \quad \frac{m_2 g - T'}{m_2} = a_y \end{cases}$$

et $T = T'$ car le poulie ne modifie pas la tension dans la corde. Si on ne néglige pas la taille et l'inertie de la poulie alors cette dernière relation ne tient plus. Si on compte bien on a deux équations et deux inconnues et ça on sait résoudre (super bien même) ! Pour trouver T on égale les deux équations

$$\frac{T}{m_1} - g = g - \frac{T}{m_2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 36,79 \text{ N} \tag{4.4}$$

et pour trouver a_y on additionne les deux équations

$$a_y = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 2,45 \text{ m s}^{-2}. \tag{4.5}$$

E4.7 Un bloc sur un coin (encore un bloc...)

On suppose que l'on connaît m la masse du bloc, M la masse du coin, α l'angle du coin et g l'accélération gravitationnelle. On choisit un système d'axe aligné avec le sol.

a) Soit a le module de l'accélération du coin par rapport au sol et a' celui de l'accélération du bloc par rapport au sol. Encore une fois, on applique la seconde lois de Newton d'abord sur le coin

$$\sum F_x = -N \sin\alpha = -Ma$$

et ensuite sur le bloc

$$\begin{cases} \sum F_x = N \sin\alpha = m(-a + a' \cos\alpha) \equiv m a'_x \\ \sum F_y = N \cos\alpha - mg = -m a' \sin\alpha \equiv m a'_y. \end{cases}$$

avec N la norme de la force normale. En additionnant les équations selon l'axe x du bloc et du coin on trouve

$$m(-a + a' \cos\alpha) - Ma = 0 \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{a(M+m)}{m \cos\alpha}$$

mais on ne connaît ni a ni a'. Si on arrive à trouver un autre équation de la forme $a' = ...$ et qui ne dépend pas de N on pourra trouver une expression pour a. Pour supprimer la dépendance en N ça on peut diviser l'équation selon y du bloc par celle selon x du coin

$$-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m(g - a' \sin\alpha)}{-Ma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ma}{\tan\alpha} = mg - m a' \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{g - \frac{Ma}{m \tan\alpha}}{\sin\alpha}.$$

On égalise les deux expressions pour a' et on trouve l'expression de la composante horizontale de l'accélération du coin

$$\frac{g - \frac{Ma}{m \tan\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{a(M+m)}{m \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha}. \tag{4.6}$$

Pour trouver a'_x et a'_y, on remplace simplement dans les équations du bilan des forces

$$a'_x \equiv -a + a' \cos\alpha = -a + \frac{a(M+m)}{m} = \frac{M}{m} a = \frac{Mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha} \tag{4.7}$$

et

$$a'_y \equiv -a' \sin\alpha = -\frac{a(M+m)}{m\cos\alpha} \sin\alpha = -\frac{(M+m) g \sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \tag{4.8}$$

b) Pour trouver le module de la force normale on reprend simplement l'équation selon x du coin et comme on a déjà suffisamment travailler au point a) et bien ça marche directement :-)

$$N = \frac{Ma}{\sin\alpha} = \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}. \tag{4.9}$$

TP 5

L'empire contre-frotte

5.1 Rappel théorique

5.1.1 Forces de frottement

Loi empirique : les expériences montrent que le module de la force de frottement f est proportionnel à celui de la force normale N. La force de frottement $\overrightarrow{f}$ est toujours tangente à la surface, c'est à dire perpendiculaire à la force normale. Il existe deux catégories de frottement sec différentes :

- Statique (objet immobile) : $f_s \leq \mu_s N$ et $f_{s(max)} = \mu_s N$. Si on applique une force $\overrightarrow{F}$ parallèle à la surface sur un objet, mais qu'elle est inférieure à $\mu_s N$, alors l'objet ne bouge pas et $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{F}$.
- Cinétique (objet en mouvement) : $f_c = \mu_c N$ et ne dépend pas de la vitesse. L'orientation de $\overrightarrow{f}$ est opposé à la vitesse de déplacement.

μ_s et μ_c sont des nombres réels positifs (adimensionnels) respectivement appelés coefficient de frottement statique et coefficient de frottement cinétique. Leur valeur est déterminée expérimentalement. En général, $\mu_s \geq \mu_c$ ce qui permet de tracer la figure 5.1.

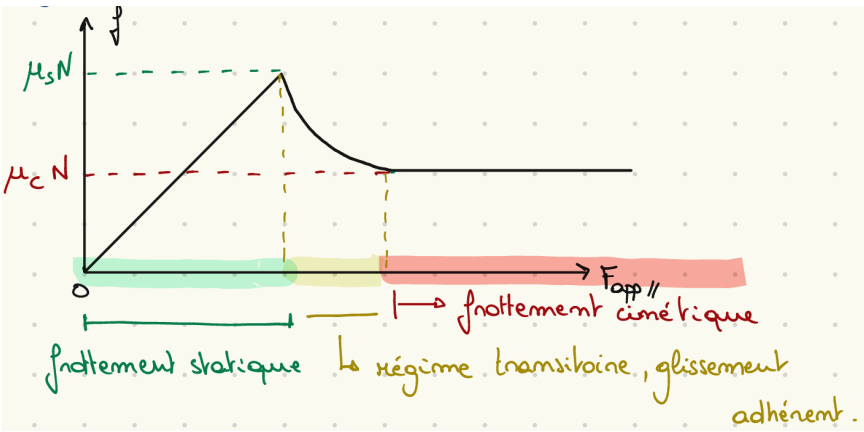
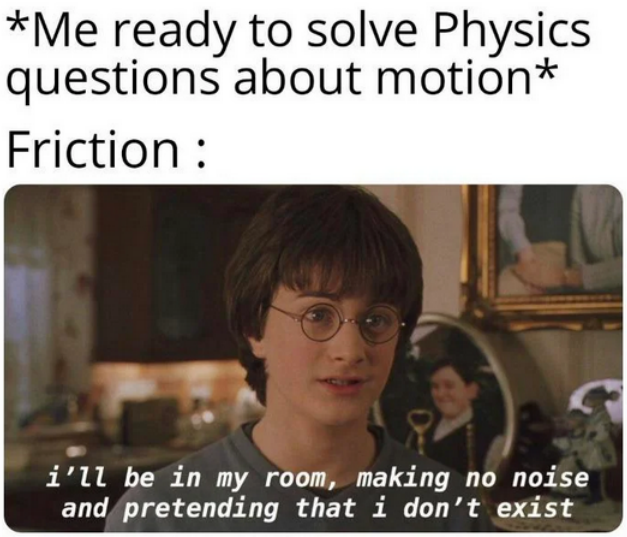


FIGURE 5.1 – Différentes catégories de frottement sec en fonction de la force appliquée sur un objet.

5.2 Exercices : E5.3, E5.4, E5.5 et E5.6



E5.3 Un peu de hockey

Les données du problème sont $m = 90$ g $= 0,09$ kg la masse de la rondelle de hockey ; $v_i = 10$ m s^{-1} sa vitesse initiale, $v_f = 8$ m s^{-1} sa vitesse finale et $\Delta x = 12$ m la distance parcourue.
On commence par faire la même chose (encore) c'est à dire l'inventaire et le bilan des forces qui s'appliquent sur la rondelle de hockey selon l'axe x et y

$$\overrightarrow{f}_c = -f_c\hat{\imath}, \quad \overrightarrow{N} = N\hat{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = -mg\hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_c = ma_x \\ \sum F_y = N - mg = 0 \end{cases}$$

avec $f_c = \mu_c N$ le module de la force de frottement cinétique, a_x l'accélération selon l'axe x, N le module de la force normale et g l'accélération gravitationnelle. Grâce à ces deux équations on trouve

$$f_c = \mu_c N = \mu_c mg \quad \Rightarrow \quad a_x = -\mu_c g$$

et l'accélération est constante. Donc, les équations du MRUA s'appliquent et on utilise la formule suivante

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad a_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} = -1,5 \text{ m s}^{-2}$$

pour enfin trouver

$$f_c = -ma_x = 0,135 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \mu_c = \frac{f_c}{N} = \frac{-a_x}{g} = 0,153. \tag{5.1}$$

E5.4 Une poulie tient la chandelle

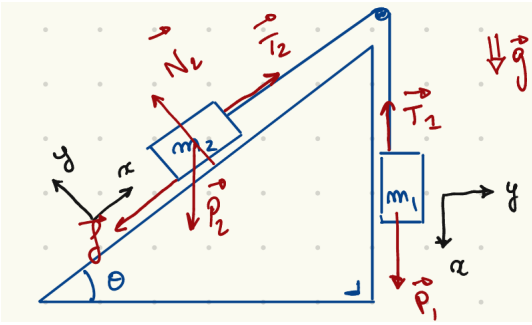


FIGURE 5.2 – Vue schématique.

Les données du problème sont $m_1 = 5$ kg la masse du bloc 1 ; $m_2 = 5$ kg la masse du bloc 2 ; $\mu_c = 0,25$ le coefficient de frottement cinétique ; $\theta = 37°$ l'angle de la pente et g l'accélération gravitationnelle.
On a une poulie idéale sans masse qui redirige les forces, on peut donc considérer que les tensions et les accélérations qui s'appliquent sur les blocs sont identiques, on notera $T_1 = T_2 = T$ et $a_1 = a_2 = a$.

Remarque : Par conséquent, on peut discuter du bilan des forces dans deux repères différents. Un choix pratique est de prendre l'axe x alignée avec la tension dans la corde (c'est également celle du mouvement).

a) Comme d'habitude, on applique la seconde loi de Newton sur les blocs 1 et 2

$$1 : \sum F_x = m_1 g - T = m_1 a \quad \text{et} \quad 2 : \begin{cases} \sum F_x = T - f - m_2 g \sin\theta = m_2 a \\ \sum F_y = N - m_2 g \cos\theta = 0. \end{cases}$$

De l'équation selon x du bloc 2, on trouve $N = m_2 g \cos\theta$ et en remplaçant dans la relation suivante on a

$$f = \mu_c N = \mu_c m_2 g \cos\theta$$

En additionnant les équations selon x des blocs 1 et 2, on obtient

$$m_1 g - \mu_c m_2 g \cos\theta - m_2 g \sin\theta = (m_1 + m_2) a$$

et on isole a pour trouver

$$a = \frac{m_1 g - \mu_c m_2 g \cos\theta - m_2 g \sin\theta}{m_1 + m_1} = 0,974 \text{ m s}^{-2}. \tag{5.2}$$

b) Si le mouvement change de direction, la seule chose qui va changer est le signe de la force de frottement $\vec{f}$. Dès lors, on a directement

$$a = \frac{m_1 g + \mu_c m_2 g \cos\theta - m_2 g \sin\theta}{m_1 + m_1} = 2,93 \text{ m s}^{-2}. \tag{5.3}$$

c) Si $m_2 = 6kg$ on veut trouver m_1 tel que l'accélération est nulle. On isole m_1 dans les équations d'accélérations trouvées aux points a) et b)

$$0 = a = \frac{m_1 g \pm \mu_c m_2 g \cos\theta - m_2 g \sin\theta}{m_1 + m_1}$$

et on obtient

$$m_1 = m_2(\sin\theta \pm \mu_c g \cos\theta). \tag{5.4}$$

Donc on trouve $m_1 = 2,41$ kg si m_1 monte et $m_1 = 4,81$ kg si m_1 descend.

E5.5 Le retour du bloc sur un coin

Les données du problème sont $m = 0,5$ kg la masse du bloc ; $M = 2$ kg la masse du coin ; $\overrightarrow{F}_0$ une force horizontale ; $\mu_s = 0,6$ le coefficient de frottement statique et $\theta = 40°$ l'angle d'inclinaison du coin.
Le module de l'accélération horizontale commune des deux blocs est a. Quand F_0 est maximale, la force de frottement statique est maximale et vers le bas et lorsque F_0 est minimale, la force de frottement statique est maximale et vers le haut. Donc la seule différence entre ces deux cas est le signe de $\overrightarrow{f}_s$.

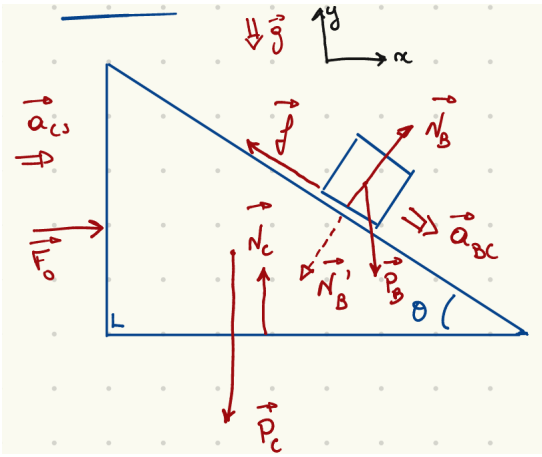


FIGURE 5.3 – Vue schématique.

En réalité on peut traiter les deux cas simultanément dans le bilan des forces qui s'appliquent sur le bloc de masse m

$$\begin{cases} \sum F_x = N\sin\theta \pm \mu_s N\cos\theta = ma \\ \sum F_y = N\cos\theta \mp \mu_s N\sin\theta - mg = 0. \end{cases}$$

Peu importe le signe qu'on choisisse pour $\overrightarrow{f}_s$, il est important que les termes en μ_s ait des signes opposés dans les équation selon x et y (le + avec le - et le - avec le +). Dire que les deux termes ont des signes équivalents est FAUX ! Du système d'équation on trouve

$$N = \frac{mg}{\cos\theta \mp \mu_s \sin\theta} \quad \text{et} \quad a = \frac{N(\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta)}{m} = \frac{g(\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta}.$$

Sur l'ensemble formé des deux blocs (c'est à dire que leur masse vaut $M + m$), le bilan des forces selon x est

$$\sum F_x = F_0 = (M + m)a$$

et donc on trouve

$$F_0 = \frac{(M + m)g(\sin\theta \pm \mu_s \cos\theta)}{\cos\theta \mp \mu_s \sin\theta} \tag{5.5}$$

ce qui donne en valeur chiffrée $F_{0-} = 3,90$ N et $F_{0+} = 71,0$ N (car on se rappelle qu'il y a bien deux cas à traiter). Enfin, on peut conclure que l'intervalle est $3,90 \leq F_0 \leq 71,0$.

E5.6 Retour en enfance (avec de la neige)

Les données du problème sont $m = 3,6$ kg la masse de la luge ; $\theta = 15°$ l'angle de la pente ; $\alpha = 25°$ l'angle de la tension par rapport à la pente inclinée ; $T = 16$ N le module de la tension dans la corde et v la vitesse de la luge est constante lorsque la tension est de 16 N. On choisit un système d'axe orienté avec la pente.

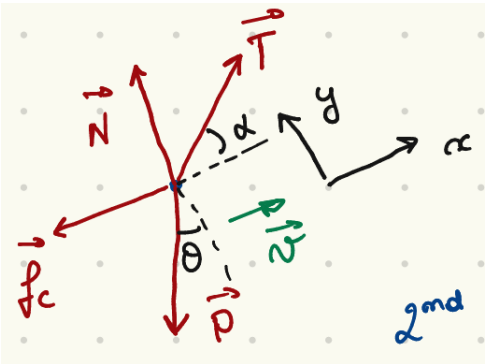


FIGURE 5.4 – Vue schématique.

Avant toute chose on va faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la luge lorsque le gamin la tire. On sait qu'à ce moment là, l'accélération a_x est nulle selon l'axe des x car la vitesse est constante. Le bilan des forces selon l'axe x est donc

$$\sum F_x = T\cos\alpha - mg\sin\theta - f_c = ma_x = 0$$

et on trouve que $f_c = 5,36$ N en l'isolant dans l'équation précédente (c'est la seule inconnue de cette équation). De la même manière, le bilan des forces selon y est

$$\sum F_y = N + T\sin\alpha - mg\cos\theta = ma_y = 0$$

et on trouve $N = 27,35$ N car il s'agit également de la seule inconnue de cette équation. Il suit

$$f_c = \mu_c N \quad \Leftrightarrow \quad \mu_c = \frac{f_c}{N} = 0,196.$$

On sait que lorsque le gamin aura lâché la corde, les valeurs de N et de f_c seront modifiées. Cependant, μ_c (le rapport entre ces deux quantités) restera constant car il est lié aux matériaux ce qui est une très bonne nouvelle.
On va désormais effectuer le bilan des forces selon x et y, mais cette fois-ci lorsque le gamin lâche la corde ($T = 0$). L'accélération selon x n'est plus nulle et on doit rester très vigilant car on a en réalité deux régimes différents : celui où la luge continue de montée à cause de son inertie ($\overrightarrow{f}_c$ dirigée vers les x négatifs) et celui où la luge descend ($\overrightarrow{f}_c$ dirigée vers les x positifs). On trouve alors

$$\begin{cases} \sum F_x = \pm f_c - mg\sin\theta = ma_x \\ \sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \end{cases}$$

où le signe $+$ correspond au cas où la luge descend et le signe $-$ celui où la luge monte encore grâce à son inertie. En isolant a_x dans la première équation et N dans la seconde, on trouve

$$a_x = \frac{\pm\mu_c N}{m} - g\sin\theta \quad \text{et} \quad N = mg\cos\theta$$

et finalement, on trouve

$$a_x = g(\pm\mu_c\cos\theta - \sin\theta). \tag{5.6}$$

Ce qui donne en fonction du signe $a_{x+} = -0,68\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ et $a_{x-} = -4,39\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

TP 6

La menace fictive

6.1 Rappel théorique

6.1.1 Projection d'un vecteur

On rappelle différentes choses :

- Quand on projette un vecteur de module R et d'angle α, sur l'axe dont il est issu (disons x), on trouve $R\cos\alpha$. Si on projette sur l'axe orthogonale (disons y), on trouve $R\sin\alpha$.
- Quand on projette un vecteur de module R et d'angle α, sur l'axe dont il n'est PAS issu (disons x), on trouve $R\sin\alpha$. Si on projette sur l'axe orthogonale (disons y), on trouve $R\cos\alpha$.
- Le point précédent peut être simplement résumé avec la propriété suivante $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.
- Pour trouver où sont les angles dans un schéma on peut utiliser la règle suivante. Deux angles à côtés respectivement perpendiculaires ou parallèles (deux à deux)
  - — ont la même amplitude s'ils sont tous les deux aigus (ou obtus).
  - — sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre est obtus.

6.1.2 Référentiel non-inertiel et forces fictives

Soit deux repères R inertiel et R' (non-)inertiel dont les bases sont respectivement $\{O,x,y,z\}$ et $\{O',x',y',z'\}$. Alors la composition des accélération est

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}'+\overrightarrow{a}_e+\overrightarrow{a}_c$$

avec $\overrightarrow{a}$ l'accélération absolue dans le repère R, $\overrightarrow{a}'$ l'accélération dans R', $\overrightarrow{a}_e$ l'accélération d'entraînement (i.e. de R' dans R) et $\overrightarrow{a}_c$ l'accélération de Coriolis. En appliquant la seconde loi de Newton,

$$\sum\overrightarrow{F}_{ext}=m\overrightarrow{a}=m(\overrightarrow{a}'+\overrightarrow{a}_e+\overrightarrow{a}_c)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante

$$m\overrightarrow{a}' = \sum \overrightarrow{F}_{ext} + \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_c$$

avec $\overrightarrow{F}_e = -m\overrightarrow{a}_e$ la force d'entraînement (par exemple centrifuge) et $\overrightarrow{F}_c = -m\overrightarrow{a}_c$ la force de Coriolis. $\sum \overrightarrow{F}_{ext}$ représente les forces réelles, tandis que $\overrightarrow{F}_e$ et $\overrightarrow{F}_c$ représentent les forces fictives. Par fictives on entend qu'elles ne créent pas le mouvement (un bel exemple est la force de Coriolis).

Remarque : la force de Coriolis n'apparaît qu'en présence d'une rotation et une vitesse dans le repère en rotation.

6.2 Exercices : E6.2, E6.5, E6.6 et Q6.1

FIGURE 6.1 – Deux pour le prix d'un !

E6.2 Le petit bloc sympathise avec un cylindre

Les données du problème sont $R = 40$ cm $= 0{,}4$ m le rayon ; $T = 0,2$ s la période et $\mu_s = 0,75$ le coefficient de frottement statique.

a) Pour trouver démontrer la formule, on utilise à nouveau la même chose et on effectue le bilan des forces qui s'appliquent

$$\begin{cases} \sum F_x = f_s - mg\sin\theta = 0 \\ \sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_r \end{cases}$$

où $a_r = \frac{v^2}{R}$ est l'accélération radiale. La première équation nous apprend que $f_s = mg\sin\theta$ et comme on cherche θ_{max}, la force de frottement doit être maximale et on peut écrire

$f_s = \mu_s N$ ou encore $N = \frac{mg\sin\theta}{\mu_s}$. On réécrit alors la seconde équation en utilisant toutes ces informations

$$\frac{mg\sin\theta}{\mu_s} - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

et on obtient

$$g\sin\theta = \mu_s\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right). \tag{6.1}$$

b) On veut des termes quadratique donc on met l'équation 6.1 au carré.

$$\begin{aligned}
(g\sin\theta)^2 &= \left(\mu_s\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right)\right)^2 \\
g^2\sin^2\theta &= \mu_s^2 g^2\cos^2\theta + 2\mu_s^2 g\cos\theta\frac{v^2}{R} + \mu_s^2\frac{v^4}{R^2} \\
g^2(1-\sin^2\theta) &= \mu_s^2 g^2\cos^2\theta + 2\mu_s^2 g\cos\theta\frac{v^2}{R} + \mu_s^2\frac{v^4}{R^2}
\end{aligned}$$

et si on pose $x = \cos\theta$ on trouve l'équation du seconde degré suivante

$$-g^2(1+\mu_s^2)x^2 - 2\mu_s^2 g\frac{v^2}{R} + g^2 - \mu_s^2\frac{v^4}{R^2} = 0$$

et la seule inconnue de cette équation (à part x) c'est la vitesse v. Cependant, on connaît la période et il suit

$$\frac{2\pi R}{T} = v$$

Pour enfin trouver les solutions suivantes,

$$x_+ = -0,921 \quad \text{et} \quad x_- = 0,631 \tag{6.2}$$

ce qui donne $\theta_+ = 157,103°$ et $\theta_- = 50,842°$. On prend soin de rejeter θ_+, car solution irréaliste.

E6.5 Un pendule kidnappé par un camion

Les données du problème sont $L = 0,8$ m la longueur de la corde du pendule ; $m = 4\,.\,10^{-4}$ kg la masse du pendule et $a = 2,6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ l'accélération du camion.

<u>Référentiel de la route</u> :

a) C'est toujours la même histoire et on commence par appliquer le bilan des forces selon l'axe x et y

$$\begin{cases} \sum F_x = T\sin\theta = ma \\ \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0. \end{cases}$$

On trouve la relation $T = \frac{mg}{\cos\theta}$ grâce à la deuxième équation que l'on injecte dans la première équation

$$T\sin\theta = ma \quad \Leftrightarrow \quad mg\tan\theta = ma \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arctan\frac{a}{g} = 14,84°. \tag{6.3}$$

b) On trouve directement

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = 4,06\,.\,10^{-3}\ \text{N}. \tag{6.4}$$

Référentiel du camion :

a et b) Cette fois-ci le référentiel n'est plus inertiel et on a la présence d'une force fictive d'entraînement $\overrightarrow{F}_e = -m\overrightarrow{a}$ qui est du à l'accélération du repère "camion". Du point de vue du camion, la masse est au repos, donc $\sum\overrightarrow{F} = 0$ et le bilan des forces devient alors

$$\begin{cases} \sum F_x = T\sin\theta - ma = 0 \\ \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0. \end{cases}$$

En utilisant la même méthode que pour le référentiel de la route, on trouve

$$T = 4,06\,.\,10^{-3}\ \text{N} \quad \text{et} \quad \theta = 14,84°. \tag{6.5}$$

Remarque : On peut directement arriver à la même conclusion en observant simplement que les deux systèmes de bilan des forces sont identiques.

E6.6 Un laboratoire au soleil

Les données du problème sont $R_T = 6,37\,.\,10^6$ m le rayon de la Terre ; $T = 24$ h la période de résolution ; $m = 10$ kg la masse du bloc et $g_{loc} = 9,800\ \text{m}\,\text{s}^{-2}$ l'accélération gravitationnelle locale (à l'équateur).

a) On souhaite calculer le module du poids apparent du bloc, c'est à dire celui de la force normale exercée par la table sur le bloc. Pour ça, on effectue le bilan des forces qui s'appliquent sur le bloc selon l'axe y (il est horizontale car $\overrightarrow{g}$ pointe vers le centre de la Terre). Dans cette situation, on a la force centrifuge qui intervient

$$\sum F_y = N + F_c - P = N - m\frac{v^2}{R_T} - mg_{loc} = 0$$

où la sommes des forces est bien nulles car le bloc est au repos dans ce référentiel non-inertiel. On peut déterminer la vitesse angulaire de la Terre de deux façons différentes, $\omega = \frac{v}{R_T}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ce qui nous donne $v = \frac{2\pi R_T}{T}$ et en remplaçant dans l'équation du bilan des forces, on trouve

$$N = m\left(g_{loc} - \frac{4\pi^2 R_T}{T^2}\right) = 97,66\ \text{N}. \tag{6.6}$$

Remarque : En bonus on peut déterminer quelle est la contribution de la rotation terrestre sur cette valeur. Sans rotation, on a simplement $P = mg_{loc} = 98$ N. On trouve alors

$$\frac{P-N}{N} = \frac{98-97,66}{98} = 0,0035$$

ce qui n'est vraiment pas beaucoup :-)

b) Pour cette question, on va simplement utiliser la composition des accélérations qui est donnée par la formule suivante

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$$

où $\overrightarrow{a}_e$ et $\overrightarrow{a}_c$ sont les accélérations centrifuge et de Coriolis. Dans notre cas, $\overrightarrow{a} = g_{loc}$ et on souhaite déterminer a', ce qui donne

$$a' = g_{loc} - \frac{v^2}{R_T} - 2\omega v'$$

mais ici $v' = 0$ car le bloc démarre avec une vitesse nulle lorsqu'on enlève la table. Il reste

$$a' = g_{loc} - \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} = 9,766 \text{ m s}^{-2}. \tag{6.7}$$

Remarque : Dès que le bloc prend de la vitesse, l'effet de Coriolis n'est plus nul !

c) C'est pas évident, mais pour répondre à cette question on a besoin de l'orbite terrestre qui possède un rayon $R = 1,49 \,.\, 10^{11}$ m et de la période de résolution de la terre autour du soleil qui est de $T_S = 365$ j $= 3,15 \,.\, 10^7$ s. On calcule ensuite l'accélération centrifuge en négligeant la taille de la Terre et on obtient

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0,00593 \text{ m s}^{-2}$$

et la contribution de la rotation de la Terre sur elle même était de $\frac{4\pi R}{T^2} = 0,03369$ m s^{-2}. Finalement,

$$\frac{0,00593}{0,03369} = 17\%. \tag{6.8}$$

Q6.1 Un peu de manège

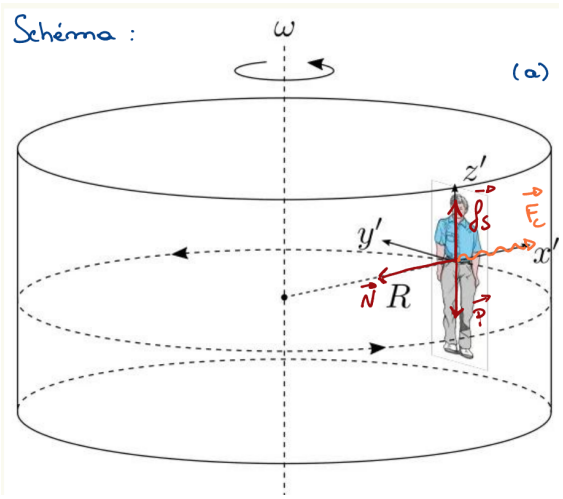


FIGURE 6.2 – Schéma des forces en présence.

La plus grosse difficulté de cet exercice est de placer correctement les forces en présence. Puisque le repère est en rotation (non-inertiel), il y aura présence de forces fictives. Dans notre cas, il y a une force centrifuge, mais pas une force de Coriolis car la personne est statique dans le repère du rotor.

a) La figure 6.2 reprend l'inventaire des forces qui s'appliquent sur une personne dans le rotor.

b) On fait le bilan de forces et l'accélération est nulle dans toutes les directions car notre personnage ne bouge pas

$$\begin{cases} \sum F_x = F_c - N = 0 \\ \sum F_z = f_s - mg = 0 \end{cases}$$

et avec $F_c = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$ on trouve

$$N = m\omega^2 R \quad \text{et} \quad f_s = mg. \tag{6.9}$$

c) La loi du frottement statique nous dit que $f_s \leq f_{s(max)} = \mu_s N$. Donc pour que le personne ne dérape pas on doit vérifier

$$\mu_s \geq \frac{f_s}{N} = \frac{mg}{m\omega^2 R}$$

et on trouve

$$\mu_{s(min)} = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{Rg}{v^2}. \tag{6.10}$$

TP 7

Le retour du travail

7.1 Rappel théorique

7.1.1 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération mathématique prenant en argument deux vecteurs et retournant un nombre réel. La formule mathématique du produit scalaire est donnée par,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a \,.\, b \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

où a et b sont les normes des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ respectivement. On peut également le calculer de la manière suivante

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}) = a_xb_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + a_xb_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + a_yb_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + a_yb_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}.$$

Les produits fondamentaux sont les relations suivantes

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1 = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} \quad \text{et} \quad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0 = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}$$

et en remplaçant dans l'expression de $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ on trouve

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_xb_x + a_yb_y$$

7.1.2 Travail mécanique

Le travail mécanique est une énergie fournie/à fournir par/pour le déplacement d'un objet. Le travail est exprimé en J (joules) dont les dimensions sont $[\mathrm{N}\,.\,\mathrm{m}] = [\mathrm{kg}\,.\,\mathrm{m}^2\,.\,\mathrm{s}^{-2}]$ et il se calcule avec le produit scalaire.
La formule générale du travail est une intégrale curviligne

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B F\cos\theta ds$$

avec $\overrightarrow{ds}$ un élément de déplacement infinitésimal et $\overrightarrow{F}$ la force qui s'applique sur ce déplacement infinitésimal. Si la force est constante, alors on peut directement écrire

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \overrightarrow{F} \cdot \int_A^B \overrightarrow{ds} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S}$$

où $\overrightarrow{S}$ est le vecteur déplacement du point d'application de la force (sa norme est une distance). Avec ce que l'on sait du produit scalaire, on peut obtenir d'autres formes pour W_{AB}

$$W_{AB} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = F \,.\, S \cos\theta = F_x \Delta x + F_y \Delta y.$$

Pour certaines forces dites "conservatives", le travail ne dépend pas du chemin parcouru mais uniquement des points A et B. Par exemple : les forces constantes, la gravité, l'électromagnétisme,...

7.2 Exercices : E7.2, E7.3, E7.4, E7.5 et E7.6

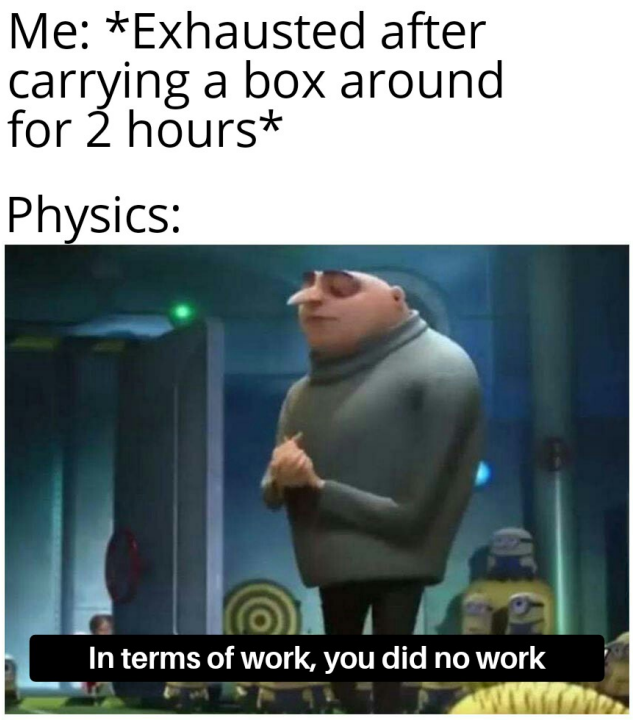


FIGURE 7.1 – La blague est rigolote car si on applique une force constante pour soulever une caisse pendant 2h et qu'on retourne au même endroit (c'est-à-dire $A = B$), alors le travail est nul (car il s'agit d'une force conservative et que $\Delta x = \Delta y = 0$). C'est toujours moins drôle quand on doit expliquer une blague, mais au moins tout le monde peut apprécier la grande qualité de ce meme :-)

E7.2 + 7.4 Deux pierres d'un coup

On va résoudre directement deux problèmes pour le prix d'un. Les données du problème sont $m = 1,8$ kg la masse du bloc ; $v = cste$ la vitesse du bloc (par conséquent son accélération est nulle $a_x = 0$) ; $\mu_c = 0,25$ le coefficient de frottement cinétique ; $\theta = 45°$ l'angle de la force $\overrightarrow{F}$ avec l'horizontale et $\overrightarrow{S} = \Delta x\hat{i} = 2$ m$\hat{i}$ le vecteur déplacement. Une représentation schématique du problème est donnée par la figure 7.2.

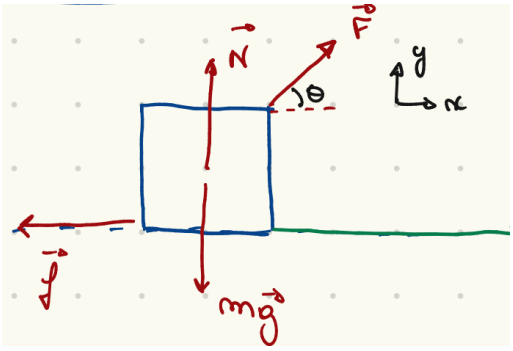


FIGURE 7.2 – Représentation schématique.

a) Pour trouver le travail effectué sur le bloc par la force $\overrightarrow{F}$, noté $W_F = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S}$ on va utiliser un raisonnement JAMAIS vu en TP... le bilan des forces (pour trouver le module de la force $\overrightarrow{F}$ car on en aura besoin dans le calcul de W_F) !!!

$$\begin{cases} \sum F_x = F\cos\theta - f = ma_x = 0 \\ \sum F_y = F\sin\theta - mg + N = ma_y = 0 \end{cases}$$

où $f = \mu_c N$ est le module de la force de frottement cinétique. De la seconde équation, on trouve $N = mg - F\sin\theta$ et lorsqu'on remplace dans la première équation on trouve

$$\begin{aligned} &F\cos\theta - \mu_c(mg - F\sin\theta) = 0 \\ \Leftrightarrow &F(\cos\theta + \mu_c\sin\theta) = \mu_c mg \\ \Leftrightarrow &F = \frac{\mu_c mg}{\cos\theta + \mu_c\sin\theta} = 4,99 \text{ N}. \end{aligned}$$

On se rappelle que $\overrightarrow{F}$ est une force constante et on obtient finalement

$$W_F = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = (F\cos\theta\hat{i} + F\sin\theta\hat{j}) \cdot \Delta x\hat{i} = F\Delta x\cos\theta = 7,06 \text{ J}. \tag{7.1}$$

Pour l'exercice 7.4, la seule différence est $\theta = 45° \rightarrow \theta = -45°$ et on remplace directement pour trouver

$$F = 8,32 \text{ N} \quad \text{et} \quad W_F = 11,77 \text{ J}. \tag{7.2}$$

b) Pour trouver le travail effectué sur le bloc par la force de frottement $\overrightarrow{f}$, noté W_f on calcule simplement

$$W = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{S} = -\mu_c N\Delta x$$

or de la première équation du bilan des forces on sait que $N = \frac{1}{\mu_c} F \cos\theta$ et on a finalement

$$W_f = -7,06 \text{ J}. \tag{7.3}$$

Pour l'exercice 7.4, on trouve

$$W_f = -11,77 \text{ J}. \tag{7.4}$$

c) Pour les deux exercices on trouve directement que le travail travail effectué sur le bloc par la force de gravité, noté W_g est nul, car $\overrightarrow{P}$ est perpendiculaire avec $\overrightarrow{S}$.

E7.3 Un cas typique de surinformation

Les données du problème sont $r = 0,03$ m le rayon de la poulie ; $R = 0,1$ m le rayon de la trajectoire décrite par la poulie ; $m = 5$ kg la masse du seau ; $\Delta t = 8$ s le temps qu'on va passer à soulever le seau et $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ la vitesse (constante).
Puisqu'on cherche la quantité de travail W_T nécessaire pour soulever le seau, on a trop d'informations (on est très content pour la poulie qu'elle ait une poignée servant à la faire tourner, mais on s'en fout parce que cela ne modifie aucune propriété de notre problème).
On commence comme d'habitude par un petit bilan des forces

$$\sum F_y = T - mg = ma_y = 0$$

où l'accélération verticale a_y est nulle car la vitesse est constante. On trouve $T = mg$ et on obtient

$$W_T = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{S} = T\hat{\jmath} \cdot \Delta y \hat{\jmath} = T\Delta y$$

et puisqu'on est dans le cas d'un MRU, on a $\Delta y = v\Delta t$ et finalement on trouve

$$W_T = mgv\Delta t = 784,8 \text{ J}. \tag{7.5}$$

E7.5 Une intégrale c'est l'aire sous la courbe

Pour cet exercice, on va devoir calculer des intégrales ("tin tin dramatique"+bruit d'éclair effrayant). En d'autres termes c'est la panique à bord, mais ne vous inquiétez pas car les intégrales c'est souvent très gentil. La première chose à faire dans cette situation c'est de reprendre la formule générale du travail (car la force n'est pas constante)

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_A^B F_x dx$$

mais malheureusement, on ne connaît pas l'expression mathématique de F_x (sinon on pourrait simplement l'intégrer et l'évaluer entre certaines bornes d'intégration et le tour aurait été joué). Cependant, tout n'est pas perdu ! En effet, une autre façon d'obtenir le résultat d'une intégrale est de calculer l'aire sous la courbe. On va alors prendre soin de diviser notre courbe en quatre régions distinctes comme indiqué sur la figure 7.3. On trouve alors

$$A_1 = -10 \text{ J}, \quad A_2 = 10 \text{ J}, \quad A_3 = 20 \text{ J}, \quad \text{et} \quad A_4 = 10 \text{ J}$$

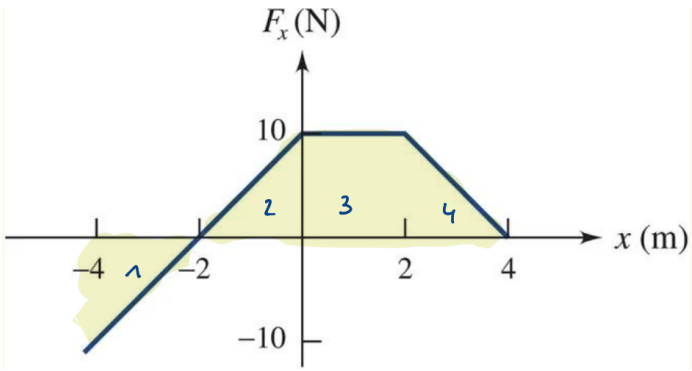


FIGURE 7.3 – Définitions des quatre régions.

a) On trouve que

$$W_{-4,4} = \int_{-4}^{4} F_x dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30 \text{ J}. \tag{7.6}$$

b) Attention, ici on intègre dans l'autre sens (x décroît) et on a l'apparition d'un signe négatif

$$W_{0,-2} = \int_{0}^{-2} F_x dx = -\int_{-2}^{0} F_x dx = -A_2 = -10 \text{ J}. \tag{7.7}$$

E7.6 Enfin on va en ressort-tire !

Les données du problème sont $k = 10 \text{ N m}^{-1}$ la constante de rappel d'un ressort (et c'est tout :-). Il faut tout de même se rappeler de la forme de la force de rappel d'un ressort (Loi de Hooke) et dans notre cas on a

$$\overrightarrow{F}_{res} = -k(x - x_{eq})\hat{\imath} = -kx\hat{\imath}$$

où on prend simplement $x_{eq} = 0$ pour se simplifier la vie (x_{eq} signifie équilibre). On constate que la force du ressort dépend de x, elle n'est donc pas constante, on utilise alors la formule du travail générale

$$W_{res} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B -kx\hat{\imath} \cdot dx\hat{\imath} = \int_A^B -kxdx$$

où le déplacement n'a une composante que selon x, ce qui explique pourquoi $\overrightarrow{ds} = dx\hat{\imath}$. Soit $A = x_i$ et $B = x_f$ respectivement les positions initiale et finale on trouve

$$W_{res} = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2).$$

a) On trouve alors directement

$$W_{res} = -\frac{40}{2}(0,1^2 - 0^2) = -0,2 \text{ J}$$

mais comme $\overrightarrow{F_{res}} = -\overrightarrow{F}_{ext} \Rightarrow W_{res} = -W_{ext}$ et on trouve la condition suivante

$$W_{ext} > 0,2 \text{ J}. \tag{7.8}$$

b) On a

$$W_{res} = -\frac{40}{2}((-0,2)^2 - (0,1)^2) = -0,6 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad W_{ext} > 0,6 \text{ J}. \tag{7.9}$$

TP 8

Aucune limite à la puissance

8.1 Rappel théorique

8.1.1 Théorème de l'énergie cinétique

Pour une force quelconque on a vu au TP précédent que le travail était donné par l'expression suivante

$$W = \int_A^B = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

et si plusieurs forces s'appliquent l'expression devient

$$\sum W = \int_A^B \left(\sum \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B m\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v}dt$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant les relations $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{v}dt$. Pour trouver la valeur du produit scalaire dans la dernière intégrale on va calculer la dérivée suivante (qui va nous donner exactement ce qu'on cherche)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(mv^2) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{v} \cdot \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v}$$

car le produit scalaire commute. On trouve donc

$$\sum W = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{d}{dt}(v^2) = \frac{m}{2}\left[v^2\right]_A^B = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \Delta K$$

avec $K = \frac{mv^2}{2}$ l'énergie cinétique.

Remarque : Effectuer un travail non nul sur une particule en modifie la vitesse. Ce qui signifie que si la somme des "travails" qui s'appliquent sur un objet est nulle, alors la vitesse de cet objet est constante.

8.1.2 La puissance

La puissance est définie comme le travail effectué par unité de temps et son expression mathématiquement est donnée par

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

or on sait que $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}$. Il suit

$$P = \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{ds}}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = Fv\cos\theta.$$

L'unité de la puissance est le watt : 1 W = 1 $\mathrm{J\,s^{-1}}$ dont les dimensions sont $[\mathrm{J\,s^{-1}}] = [\mathrm{N\,.\,m\,.\,s^{-1}}] = [\mathrm{kg\,.\,m^2\,.\,s^{-3}}]$. Pour une puissance moyenne, on pourra utiliser la formule suivante

$$P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

8.2 Exercices : E8.2, E8.4, E8.5 et E8.7

E8.2 Le retour de la luge

Les données du problème sont $m = 6$ kg la masse de la luge ; $v = cste$ la vitesse de la luge ; $S = 4$ m le déplacement de la luge ; $\theta = 30°$ l'angle de la pente et μ_c le coefficient de frottement cinétique (car la luge bouge).
Je vous laisse devenir ce qu'on va faire maintenant, ça commence par "b" et ça finit par "ilan des forces" (j'espère que vous allez trouver la réponse :-). Une fois un certain "b-ilan des forces" effectué on trouve magiquement

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_c - mg\sin\theta + F\cos\theta = ma_x = 0 \\ \sum F_y = N - mg\cos\theta - F\sin\theta = ma_y = 0 \end{cases}$$

où la force de frottement cinétique $f_c = \mu_c N$, l'accélération horizontale $a_x = 0$ car la vitesse est constante et $a_y = 0$ car la luge ne se déplace pas selon la verticale (pour un repère dont l'axe des x est aligné avec la pente bien évidemment). Avec la seconde

équation, on trouve $N = mg\cos\theta + F\sin\theta$ et la première équation se réécrit de la façon suivante,

$$\begin{aligned} -f_c - mg\sin\theta + F\cos\theta &= 0 \\ -\mu_c N - mg\sin\theta + F\cos\theta &= 0 \\ -\mu_c(mg\cos\theta + F\sin\theta) - mg\sin\theta + F\cos\theta &= 0 \\ mg\frac{\sin\theta + \mu_c\cos\theta}{\cos\theta - \mu_c\sin\theta} &= F. \end{aligned}$$

La dernière équation de trouver la valeur de F et en remplaçant dans l'équation de N, on obtient sa valeur

$$F = 51,73 \text{ N} \quad \text{et} \quad N = 76,84 \text{ N}.$$

a) Pour trouver le travail effectué par la force $\overrightarrow{F}$ on calcule directement

$$W_F = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = (F\cos\theta\hat{i} - F\sin\theta\hat{j}) \cdot S\hat{i} = FS\cos\theta = 179,19 \text{ J}. \tag{8.1}$$

b) Pour trouver le travail effectué par la force $\overrightarrow{P}$ on calcule directement

$$W_P = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{S} = (-mg\sin\theta\hat{i} - mg\cos\theta\hat{j}) \cdot S\hat{i} = -mgS\sin\theta = -117,72 \text{ J}. \tag{8.2}$$

c) Pour trouver le travail effectué par la force $\overrightarrow{f}_c$ on calcule directement

$$W_{f_c} = \overrightarrow{f}_c \cdot \overrightarrow{S} = -f_c\hat{i} \cdot S\hat{i} = -f_c S = -\mu_c NS = -61,47 \text{ J}. \tag{8.3}$$

d) On trouve alors le travail total

$$W_{tot} = \sum W = W_N + W_F + W_P + W_f = 0 + 179,19 - 117,72 - 61,47 = 0 \tag{8.4}$$

et on peut même vérifier ce résultat car on sait que $W_{tot} = \Delta K = 0$ car la vitesse est constante et donc $v_i = v_f$. Dans cet exercice, on vérifie bien que quand la somme des "travails" qui s'appliquent sur un objet est nulle, alors la vitesse de cet objet est constante.

E8.4 Un ressort comprimé par un méchant bloc

Les données du problème sont $m = 0,5$ kg la basse du bloc ; $L = 0,2$ m la longueur de compression du ressort ; $\mu_c = 0,4$ le coefficient de frottement cinétique et $k = 80 \text{ N m}^{-1}$ la constante de rappel du ressort.
Comme toujours on fait un petit bilan des forces qui s'appliquent sur le bloc,

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_c + F_{res} = ma_x \\ \sum F_y = N - mg = ma_y = 0. \end{cases}$$

a) Pour trouver le travail effectué par le ressort sur le bloc on utilise directement la formule démontrée dans l'exercice E7.6,

$$W_{res} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}kL^2 = 1,60 \text{ J} \tag{8.5}$$

où dans notre cas $x_f = 0$ et $x_i = -L$.

b) Pour trouver le travail effectué par la force de frottement $\overrightarrow{f}_c$ on calcule directement avec $f_c = \mu_c N$, $N = mg$ et $(x_f - x_i = L)$,

$$W_{f_c} = \overrightarrow{f}_c \cdot \overrightarrow{S} = -\mu_c N\hat{\imath} \cdot (x_f - x_i)\hat{\imath} = -\mu_c mgL = -0,392 \text{ J}. \tag{8.6}$$

c) On sait que le bloc quitte le ressort en $x = 0$ et pour trouver sa vitesse à ce moment là, on utilise le théorème de l'énergie cinétique

$$W_{tot} = \sum W = W_{res} + W_{f_c} + W_P + W_N = \Delta K = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

or $W_P = W_N = 0$ et initialement (avant que le ressort ne repousse le bloc) la vitesse du bloc est nulle, donc $v_i = 0$. On trouve alors

$$W_{res} + W_{f_c} = \frac{mv_f^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2(W_{res} + W_{f_c})}{m}} = 2,20 \text{ m s}^{-1}. \tag{8.7}$$

d) Pour calculer la distance finale il faut utiliser l'astuce suivante : lorsque le bloc s'est arrêté après avoir été poussé par le ressort sa vitesse est nulle, donc $v_f = 0$. Par le théorème de l'énergie cinétique on trouve directement

$$W_{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{res} + W_{f_c} = \frac{1}{2}kL^2 - \mu_c mgS = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{kL^2}{2\mu_c mg} = 0,816 \text{ m}. \tag{8.8}$$

E8.5 On pousse à la salle

Les données du problème sont $m = 25$ kg la masse de la caisse ; $v = cste$ la vitesse verticale de la caisse ; $\Delta x = 2$ m la distance parcourue pas la personne ; $\theta_i = 45°$ l'angle initial et $\theta_f = 30°$ l'angle final.
On remarque rapidement que l'angle θ va varier au cours du temps, il va donc falloir intégrer. Le bilan des forces nous apprend que $T = mg$, où T est la tension dans la corde. On trouve alors

$$F = T = mg \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F} = F\cos\theta\hat{\imath} - F\sin\theta\hat{\jmath} = mg(\cos\theta\hat{\imath} - \sin\theta\hat{\jmath}).$$

Puisque θ varie on va travailler avec la formule générale du travail où $x_f = x_i + \Delta x$

$$W_F = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \overrightarrow{F} \cdot dx\hat{\imath} = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} mg\cos\theta dx.$$

Ici, il faut être très prudent car θ dépend de la position x. On va donc utiliser la trigonométrie pour faire apparaître cette dépendance. Il vient $\cos\theta = \frac{x}{L}$ (c'est la définition du cos) où $L = \sqrt{x^2 + h^2}$ est la longueur de la corde (elle joue le rôle d'hypoténuse). h est la hauteur de la poulie et nous est inconnue (on sait seulement qu'elle ne dépend pas de la position x, on peut donc l'intégrer sans problème). Notre intégrale devient alors

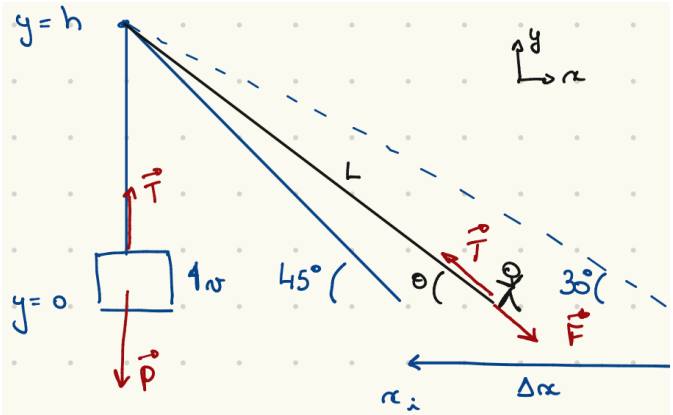


FIGURE 8.1 – Vue schématique.

$$W_F = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} mg\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}dx = mg\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}dx = mg\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+h^2}dx$$

et en utilisant le théorème fondamental de l'analyse on trouve

$$\begin{aligned} W_F = mg\left[\sqrt{x^2+h^2}\right]_{x_i}^{x_i+\Delta x} &= mg\left(\sqrt{(x_i+\Delta x)^2+h^2} - \sqrt{x_i^2+h^2}\right) \\ &= mg(L_f - L_i) \end{aligned}$$

où L_i et L_f sont respectivement la longueur de la corde initiale et finale. Pour les trouver, on va commencer par déterminer h la hauteur de la poulie. Pour ça on utilise les deux relations trigonométriques suivantes

$$\tan\theta_i = \frac{h}{x_i} \quad \text{et} \quad \tan\theta_f = \frac{h}{x_f} = \frac{h}{x_i+\Delta x}$$

et en isolant h dans chacune des équations on trouve

$$x_i\tan\theta_i = (x_i+\Delta x)\tan\theta_f \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{\Delta x\tan\theta_f}{\tan\theta_i - \tan\theta_f} = 2,73 \text{ m.}$$

En remplaçant l'expression de x_i dans la première relation trigonométrique (on pourrait choisir la seconde ça fonctionnerait tout autant) et on obtient

$$h = x_i\tan\theta_i = \frac{\Delta x\tan\theta_f\tan\theta_i}{\tan\theta_i - \tan\theta_f} = 2,73 \text{ m.}$$

Ce résultat nous permet de trouver les valeurs de L_i et L_f

$$L_i = \sqrt{x_i^2+h^2} = 3,86 \text{ m} \quad \text{et} L_f = \sqrt{(x_i+\Delta x)^2+h^2} = 5,46 \text{ m}$$

avec $L_i < L_f$ (on est content) et finalement on calcule la valeur de W_F

$$W_F = mg(L_f - L_i) = 392,5 \text{ J.} \tag{8.9}$$

E8.7 On lance des trucs

Les données du problème sont $m_p = 7,25$ kg et $m_j = 0,8$ kg les masses du poids et du javelot respectivement ; $\theta = 45°$ l'angle de lancer ; $x_p = 20$ m et $x_j = 90$ m les positions finales du poids et du javelot et $S_p = 1,5$ m et $S_j = 2,2$ m les distances parcourues par le poids et le javelot avant le lancement.
On va résoudre le problème en trois étapes : 1) trouver les vitesses initiales du poids et du javelot, 2) déterminer les temps durant lesquels les athlètes effectuent un travail et 3) utiliser le théorème de l'énergie cinétique et les temps pour déterminer la puissance moyenne.

1) Avec ce que nous dit l'énoncé, on sait qu'on est dans le cadre d'un tir balistique. On a donc un MRUA selon l'axe y (vertical) et un MRU selon l'axe x (horizontal)

$$x = x_0 + v_0 \cos(\theta)t \quad \text{et} \quad y = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

où on prend soin de projeter la vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ sur les axes x et y. On sait que les projectiles touchent le sol au même niveau que celui où ils ont été lancés, donc $y = y_0$. Avec l'équation selon x on trouve $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ et l'équation selon y donne

$$0 = v_0 \sin\theta - \frac{gt}{2} \quad \Rightarrow \quad 2v_0 \sin\theta = g\frac{x}{v_0 \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{x}{\cos\theta \sin\theta}}$$

et on trouve

$$v_{0p} = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{x_p}{\cos\theta \sin\theta}} = 14 \text{ m s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{0j} = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{x_j}{\cos\theta \sin\theta}} = 29,71 \text{ m s}^{-1}.$$

2) On réutilise les formules du MRUA mais ce n'est PAS le même qu'au point 1). Ici on calcule par rapport à l'accélération donnée par les athlètes ! On utilise la formule suivante

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$$

où $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$ et $v_x = v_0$, et on trouve l'expression du déplacement S

$$S = \frac{1}{2}v_0 \Delta t.$$

Il vient

$$\Delta t_p = \frac{2S_p}{v_{0p}} = 0,21 \text{ s} \quad \text{et} \quad \Delta t_j \frac{2S_j}{v_{0j}} = 0,15 \text{ s}.$$

3) Enfin, on calcule la puissance moyenne grâce à la formule

$$P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K_f - K_i}{\Delta t} = \frac{K_f - 0}{\Delta t} = \frac{\frac{mv_0^2}{2}}{\Delta t}$$

où ΔW est le travail mécanique total effectué sur l'objet. On trouve finalement

$$P_p = \frac{\Delta W_p}{\Delta t_p} = \frac{m_p v_{0p}^2}{2\Delta t_p} = 3320,74 \text{ W} \quad \text{et} \quad P_j = \frac{\Delta W_j}{\Delta t_j} = \frac{m_j v_{0j}^2}{2\Delta t_j} = 2384,92 \text{ W}. \tag{8.10}$$

TP 9

Je suis ton potentiel

9.1 Rappel théorique

9.1.1 Énergie potentielle

Définition : L'énergie potentielle est une énergie liée à l'interaction d'une particule avec son environnement et qui a la possibilité de se transformer en d'autres formes d'énergie (c'est-à-dire que le corps est capable de fournir un travail).
Il est possible d'associer un potentiel à toute force conservative via la relation suivante

$$W_c = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

ce qui donne en version infinitésimal $dW_c = -dU$ et en utilisant la définition du travail

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = -dU \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla} U$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ est un gradient. Si $U = U(x, y, z)$, alors

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

Dans l'expression $W_c = -(U_f - U_i)$, on remarque que le travail ne dépend que des positions finales et initiales et non du chemin parcouru.

Remarque : Puisque seules les variations d'énergie potentielle sont importantes, on dit que cette dernière est définie à une constante près (la constante d'intégration).

On peut donner deux exemples d'énergie potentielle

1. La gravité : $U_g = mgy \rightarrow W_g = -mg\Delta y$.
2. Le ressort : $U_{res} = \frac{k}{2}x^2 \rightarrow W_{res} = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$.

9.1.2 Conservation de l'énergie mécanique

On définit l'énergie mécanique E comme étant la somme de l'énergie cinétique K (engendrée par le mouvement) et de l'énergie potentielle U (engendrée par la position). On notera

$$E = K + U.$$

En sachant que $\Delta U = -\sum W_c$ et en utilisant le TEC (théorème de l'énergie cinétique) $\sum W = \Delta K$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum W &= \sum W_c + \sum W_{nc} \\
\Delta K &= -\Delta U + \sum W_{nc} \\
\Delta K + \Delta U &= \sum W_{nc} \\
\Delta E &= \sum W_{nc}
\end{aligned}$$

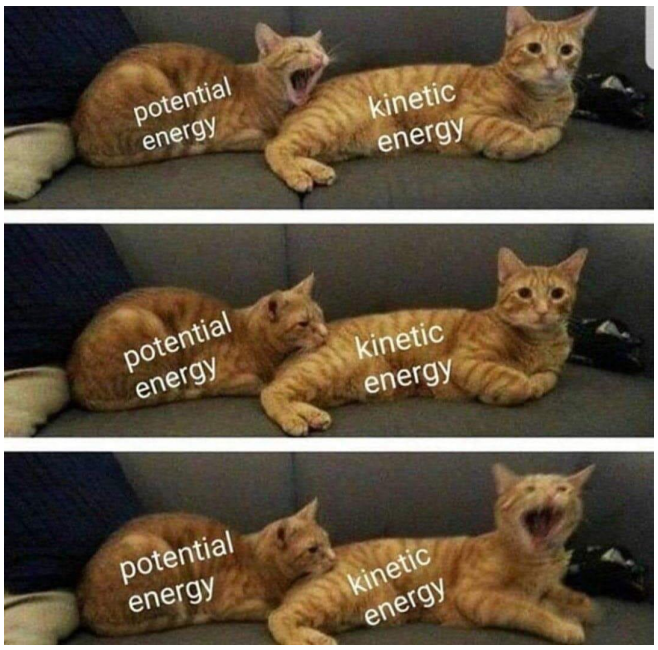
La variation d'énergie mécanique est égale au travail effectué par les forces non conservatives. Ces forces transforment E en un autre type d'énergie (souvent énergie thermique). Si un système est dit conservatif (présence d'aucune force non conservative), alors l'énergie mécanique est conservée et

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad K_i + U_i = K_f + U_f$$

Remarque : U et K sont des grandeurs extensives, c'est à dire qu'elle vérifient respectivement les relations

$$U = \sum_i U_i \quad \text{et} \quad K = \sum_i K_i$$

9.2 Exercices : E9.1, E9.4, E9.6 et E9.11



E9.1 Atwood est de retour avec sa machine

Les données du problème sont $m_1 = 5$ kg et $m_2 = 2$ kg les masses des blocs 1 et 2 et $\Delta h = 0,4$ m la distance parcourue par le bloc 1. On sait aussi que la poulie est sans frottement (donc conservation) et on pose arbitrairement $y_{1i} = d$ et $y_{2i} = 0$. On aurait pu prendre un autre choix de repère, car on rappelle que l'énergie potentielle est définie à une constante près.
Dans notre situation, on aura que $y_{1f} = d - \Delta h$ (le bloc 1 descend) et $y_{2f} = \Delta h$ (le bloc 2 monte). On applique ensuite le principe de conservation d'énergie mécanique $\Delta E = 0$ et on trouve

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ K_{i1} + K_{i2} + U_{i1} + U_{i2} &= K_{f1} + K_{f2} + U_{f1} + U_{f2} \\ \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} + m_1 g y_{1i} + m_2 g y_{2i} &= \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} + m_1 g y_{1f} + m_2 g y_{2f}. \end{aligned}$$

On connaît déjà l'expression des positions y_{1i}, y_{2i}, y_{1f} et y_{2f} et en réfléchissant un peu à la configuration du problème on trouve aussi $v_{1i} = 0 = v_{2i}$ (repos) et $v_{1f} = v_f = v_{2f}$ (corde indéformable). L'énooorme égalité se simplifie alors grandement

$$0 + 0 + m_1 g d + 0 = \frac{m_1 v_f^2}{2} + \frac{m_2 v_f^2}{2} + m_1 g (d - \Delta h) + m_2 g \Delta h$$

On isole alors v_f pour obtenir

$$g \Delta h (m_1 - m_2) = \frac{m_1 + m_2}{2} v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2 g \Delta h (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}} = 1,83 \text{ m s}^{-1}. \tag{9.1}$$

E9.4 Comme d'habitude un ingénieur a besoin d'aide

Les données du problème sont m la masse d'une particule ; H la hauteur d'où est lâchée la particule et R le rayon du cercle vertical. Puisqu'il n'y a aucun frottement, on a conservation de l'énergie mécanique $\Delta E = 0$.

a) Pour trouver H_{min}, on part de l'équation de conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ 0 + mgH &= \frac{m v_f^2}{2} + 2mgR \\ v_f^2 &= 2g(H - 2R) \end{aligned}$$

On commençait à s'ennuyer sans lui, mais heureusement il est de retour, c'est le BILAN DES FORCES (que l'on effectue dans la situation finale, particule en haut du cercle :-) et on a

$$\sum F_y = -N - mg = -m \frac{v^2}{R}$$

avec la force normale $\overrightarrow{N}$, la force du poids $\overrightarrow{P}$ et l'accélération centripète qui point vers les y négatifs (vers le bas). Mais comme la particule est à la limite de tomber (c'est la

cas quand on cherche H_{min}), on a $N = 0$ et il vient $v_f^2 = Rg$. En combinant les deux expressions de v_f^2, on trouve

$$2g(H_{min} - 2R) = Rg \quad \Rightarrow \quad H_{min} = \frac{5}{2}R \tag{9.2}$$

b) On lâche d'une hauteur $H = 2H_{min} = 5R$ et on trouve que la vitesse finale vaut

$$v_f^2 = 2g(H - 2R) = 6gR$$

et en remplaçant dans le bilan des forces, on trouve

$$v_f^2 = Rg + \frac{RN}{m} \quad \Rightarrow \quad N = 5mg \tag{9.3}$$

E9.6 Un ressort qui essaye de remonter la pente

Les données du problème sont $m = 2$ kg la masse du bloc ; $\theta = 37°$ l'angle de la pente ; $\Delta x = 4$ m la distance entre le ressort au repos et le bloc ; $k = 60$ N m^{-1} la constante de rappel du ressort ; $\mu_c = 0,5$ le coefficient de frottement cinétique ; $v_i = 0$ la vitesse initiale.
La première chose à noter est qu'on est en présence de frottement. Par conséquent, il s'agit d'un système non conservatif et l'énergie mécanique n'est pas conservée. Il vient

$$\Delta E = W_{nc} \quad \Rightarrow \quad E_f - E_i = W_{nc}$$

On va maintenant poser c_m la compression maximale du ressort (supposée positive). On va maintenant essayé de trouver E_i, E_f et W_{nc}. Au départ, la seule forme d'énergie qui s'applique est l'énergie potentielle gravitationnelle (car vitesse nulle), on a donc

$$E_i = K_i + U_i = 0 + mgh_i$$

où h_i est la hauteur initiale. L'origine du repère étant centrée sur le bloc lorsque le ressort est complètement compressé, on trouve $h_i = (4 + c_m)\sin\theta$. Pour E_f, on a

$$E_f = K_f + U_f = 0 + mgh_f + \frac{1}{2}kc_m^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kc_m^2.$$

Quand le ressort est compressé au maximum, la vitesse du bloc est nulle ($K_f = 0$) et avec notre choix de repère, on a aussi $h_f = 0$. Pour trouver W_{nc}, on se rappelle que la seule force non conservative en présence est f_c avec un déplacement de $S = 4 + c_m$

$$W_{nc} = \overrightarrow{f_c} \cdot \overrightarrow{S} = f_c S\cos(180°) = -\mu_c N(4 + c_m) = -\mu_c mg\cos\theta(4 + c_m).$$

On remplace tout ça dans l'équation de l'énergie mécanique et on obtient

$$\frac{1}{2}kc_m^2 - mg(4 + c_m)\sin\theta = -\mu_c mg\cos\theta(4 + c_m)$$

$$\frac{1}{2}kc_m^2 - mg(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)c_m - 4mg(\sin\theta - \mu_c\cos\theta) = 0$$

et en résolvant cette équation du second degré en c_m, on trouve finalement

$$c_m = 0,797 \text{ m}$$

car l'autre solution est négative, donc a rejeter.

E9.11 Un potentiel vraiment trivial

Il s'agit de l'énergie potentielle entre deux atomes dans l'approximation d'un gaz rare. Le premier terme est répulsif (> 0), c'est le principe d'exclusion de Pauli (les électrons au sein d'un même système ne peuvent pas se trouver simultanément dans le même état quantique). Le second terme est attractif (< 0), c'est l'interaction de Van der Waals (il s'agit d'une des hypothèses pour expliquer que nos amis les geckos arrivent à si bien adhérer aux surfaces). Tout ça est bien évidemment matière d'examen et vous devez être capable de démontrer le principe d'exclusion de Pauli, l'interaction de van der Waals (et expliquer le lien avec les geckos) et pourquoi le potentiel de Lennard-Jones est une fonction de ces deux expression (toute cette phrase est bien-sûr une blague, pour les 2-3 qui commenceraient à stresser :-). Bon on va tout doucement commencer l'exercice nous...

a) Pour savoir quand le potentiel s'annule, on résout

$$\frac{U(r)}{U_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_0}{r} = 2^{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{r_0}{2^{\frac{1}{6}}}$$

b) On cherche un extrême, donc on calcule

$$\frac{dU(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0\left(12\frac{r_0^6}{r^7} - 12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_0^6}{r^7} = \frac{r_0^{12}}{r^{13}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_0^6}{r^6} = 1$$

et on conclut que $r = r_0$. On évalue maintenant $U(r)$ en $r = r_0$ et on trouve

$$U(r = r_0) = -U_0 \quad \Rightarrow \quad CQFD$$

c) Par définition on sait que $F_r = -\frac{dU(r)}{dr}$ et comme $\frac{dU(r)}{dr} = 0$ en $r = r_0$, on conclut que $F_r = 0$ en $r = r_0$. Comme le potentiel est minimal, il s'agit d'un équilibre stable.

TP 10

La revanche des collisions

10.1 Rappel théorique

10.1.1 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ d'une particule est le produit de sa masse et de sa vitesse, donc c'est une quantité qui s'exprime en $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ et son expression est

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}.$$

Avec cette équation la seconde loi de Newton devient (c'est la vraie expression)

$$\sum \overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

qui permet de tenir compte de la variation temporelle de la masse car : $\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\overrightarrow{v} + m\overrightarrow{a}$. Pour un système de particules, on écrira $\overrightarrow{P} = \sum_i \overrightarrow{p}_i$ et

$$\sum \overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{F}_{ext} + \sum \overrightarrow{F}_{int} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

car les forces intérieures interviennent toujours par paire d'action réaction (troisième loi de Newton). Par conséquent, on aura conservation si $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0$ sur le système et alors

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P} = cste \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_i \overrightarrow{p}_i\right)_{initial} = \left(\sum_i \overrightarrow{p}_i\right)_{final}$$

et pour avoir des exemples, vous pouvez vous imaginez n'importe quelle type de collision (vous pouvez choisir tout ce que vous voulez, c'est la liberté :-)

10.1.2 Collisions

En parlant de collision, on distingue deux cas idéaux, le cas élastique et inélastique.

- Élastique : L'énergie cinétique totale est conservée, il n'y a pas de perte. Les équations pour deux particules en 1d sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{P}_f & \Leftrightarrow \quad m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \overrightarrow{K}_i = \overrightarrow{K}_f & \Leftrightarrow \quad \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \end{cases}$$

avec u la vitesse initiale et v la vitesse finale. On peut simplifier ce système et obtenir

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)$$

où la vitesse relative est identique mais change de sens. Le système est devient alors donné par

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2) \end{cases}$$

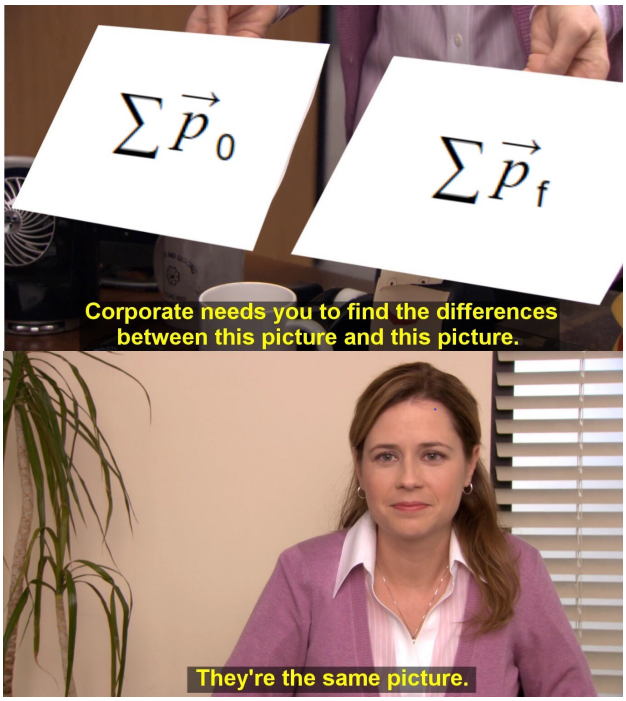
- Inélastique : La perte d'énergie cinétique est maximale et les deux objets collent ensemble (perte de la vitesse relative). L'équation de la quantité de mouvement est dans ce cas

$$\overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{P}_f \quad \Leftrightarrow \quad m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

car $v_1 = v_2 = v$.

Dans le cas d'une collision réelle on est entre ces deux cas idéaux, on a une perte de K mais celle-ci n'est pas forcément maximale.

10.2 Exercices : E10.2, E10.4 et E10.5



E10.2 Encore de la physique "élémentaire"

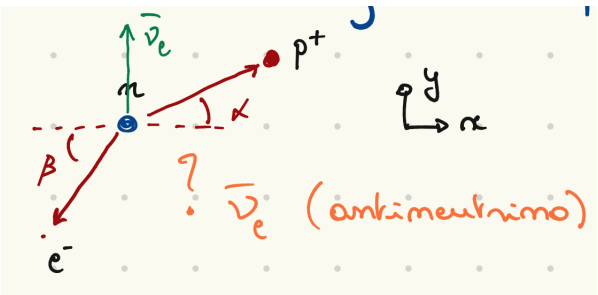


FIGURE 10.1 – Vue schématique.

Un neutron au repos se désintègre en un proton, un électron et un neutrino, c'est ce qu'on appelle la désintégration β^-, également notée $n^0 \to p^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ (c'est beau quand même).
Dans les faits, ce n'est pas très important et on va simplement se concentrer sur les données du problème où $p_p = 3\,.\,10^{-24}$ kg m s^{-1} est la norme de la quantité de mouvement du proton ; $p_e = 4\,.\,10^{-24}$ kg m s^{-1} est la norme de la quantité de mouvement de l'électron ; $\alpha = 37°$ l'angle que fait la quantité de mouvement du proton avec l'axe x et $\beta = 53°$ l'angle que fait la quantité de mouvement de l'électron avec l'axe x.
Grâce au magnifique rappel, on sait que

$$\overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{p}_n = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P}_f = \overrightarrow{p}_p + \overrightarrow{p}_e + \overrightarrow{p}_\nu$$

où $\overrightarrow{p}_n$ et $\overrightarrow{p}_\nu$ sont respectivement la quantité de mouvement du neutron et de l'antineutrino. Puisqu'il n'y a pas de force extérieure $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0$ il vient

$$\overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{P}_f \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \overrightarrow{p}_p + \overrightarrow{p}_e + \overrightarrow{p}_\nu$$

avec $\overrightarrow{p}_p = p_p(\cos\alpha\hat{\imath} + \sin\alpha\hat{\jmath})$, $\overrightarrow{p}_e = p_e(-\cos\beta\hat{\imath} - \sin\beta\hat{\jmath})$ et $\overrightarrow{p}_\nu = p_{\nu_x}\hat{\imath} + p_{\nu_y}\hat{\imath}$. En faisant le bilan des quantités de mouvement selon x et selon y, on trouve

$$\begin{cases} p_p\cos\alpha - p_e\cos\beta + p_{\nu_x} = 0 \\ p_p\sin\alpha - p_e\sin\beta + p_{\nu_y} = 0. \end{cases}$$

En isolant p_{ν_x} et p_{ν_y} dans leur équation respective, on obtient

$$p_{\nu_x} = 1,13\,.\,10^{-26}\ \text{kg m s}^{-1} \quad \text{et} \quad p_{\nu_y} = 1,39\,.\,10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}.$$

Pour trouver la valeur de p_ν, on utilise la norme

$$p_\nu = \sqrt{p_{\nu_x}^2 + p_{\nu_y}^2} = 1,39\,.\,10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1} \tag{10.1}$$

et pour trouver ω l'angle que fait la quantité de mouvement de l'antineutrino avec l'axe x, on calcule

$$\theta = \arctan\left(\frac{p_{\nu_y}}{p_{\nu_x}}\right) = 89,53°. \tag{10.2}$$

E10.4 Bloc + bloc + ressort + collision = FUN

Les données du problème sont $m_1 = 2$ kg la masse du bloc 1 ; $m_2 = 4$ kg la masse du bloc 2 ; $u_1 = 8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse du bloc 1 ; $u_2 = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse du bloc 2 et $k = 400\ \mathrm{N\,m^{-1}}$ la constante de rappel du ressort.

a) On sait qu'on a conservation de l'énergie mécanique E car il n'y a pas de force non conservative et conservation de la quantité de mouvement car il n'y a pas de force extérieure (tout ça est vrai car le frottement est absent). La conservation de E donne

$$E_f = E_i \quad \Leftrightarrow \quad K_{i1} + K_{i2} + U_i = K_{f1} + K_{f2} + U_f$$

où on a deux termes d'énergie cinétique car on a deux blocs et un terme d'énergie potentielle car on a un ressort. L'équation devient

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + 0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k c_m^2}{2}$$

avec u la vitesse initiale, v la vitesse finale et c_m la compression maximale du ressort. On sait que $u_2 = 0$ et comme on cherche la compression maximale, on a aussi $v_1 = v_2 = v$. Il est bon de ne pas confondre cette relation avec une collision inélastique ! L'équation devient

$$m_1 u_1^2 = (m_1 + m_2) v^2 + k c_m^2$$

D'un autre côté, la conservation de la quantité de mouvement donne

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 u_1 = (m_1 + m_2) v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1.$$

On remplace maintenant cette expression de v dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique et on trouve

$$m_1 u_1^2 = (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} u_1^2 + k c_m^2$$

et en isolant c_m, on obtient finalement

$$c_m = \sqrt{\frac{1}{k} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} u_1 = 0,462 \text{ m}. \tag{10.3}$$

b) On est dans le cas d'une collision parfaitement élastique car on a pas de frottement et le ressort rend toute l'énergie potentielle qu'il possède sous forme d'énergie cinétique, il n'y a aucune perte. Le système simplifié de la collusion élastique s'applique,

$$\begin{cases} m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2) \end{cases}$$

où u_1 est toujours nulle La seconde équation devient $u_1 = -(v_1 - v_2)$ et en remplaçant dans la première équation, on trouve

$$v_2 (m_1 + m_2) = 2 m_1 u_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{16}{3} = 5,33\ \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{10.4}$$

et en remplaçant l'expression $v_2 = v_1 + u_1$ dans la première équation du système on trouve cette fois-ci

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = -\frac{8}{3} = -2,66 \text{ m s}^{-1}. \tag{10.5}$$

E10.5 Deux pendules se rencontrent

Les données du problème sont $m_1 = m$ la masse du pendule 1 ; $m_2 = 2m$ la masse du pendule 2 ; $y_1 = H$ la hauteur initiale du pendule 1 et $y_2 = 0$ la hauteur initiale du pendule 2.

Remarque : De manière générale, on ne peut pas résoudre les équations d'une collision à 2 corps en 1 dimension car on ne connaît pas la vitesse de m_1. On doit utiliser les équations de conservation de l'énergie mécanique pour la trouver.
En utilisant la conservation de l'énergie mécanique (car pas de force de frottement et donc $\sum W_{nc} = 0$), on trouve que JUSTE avant la collision

$$E_{1i} = E_{1f} \quad \Leftrightarrow \quad K_{1i} + U_{1i} = K_{1f} + U_{1f} \quad \Leftrightarrow \quad 0 + U_{1i} = K_{1f} + 0$$

et en utilisant les forme explicites des énergie cinétique et potentielle, on se ramène à

$$m_1 g H = \frac{m u_1^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = \sqrt{2gH}$$

où u_1 est la vitesse du pendule 1 JUSTE avant la collision. Notons que cette expression de la vitesse ne dépend absolument pas du type de collision et est donc valable pour les points a) et b).

a) Pour une collision parfaitement inélastique, on sait que les vitesses finales des deux pendules sont identiques $v_1 = v_2 = v$ et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement devient

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v$$

mais comme $u_2 = 0$, on trouve

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{m}{m + 2m} \sqrt{2gH} = \frac{\sqrt{2gH}}{3}.$$

Pour trouver la hauteur finale des pendules (ils auront bien la même car ils ont la même vitesse), on utilise la conservation de l'énergie mécanique et on a

$$E_i = E_f \quad \Leftrightarrow \quad K_{1i} + K_{2i} + U_{1i} + U_{2i} = K_{1f} + K_{2f} + U_{1f} + U_{2f}$$

comme la hauteur est nulle initialement et que la vitesse est nulle lorsque les pendules atteignent leur hauteur maximale, on trouve

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + 0 + 0 = 0 + 0 + m_1 g h + m_2 g h$$

et en isolant h on obtient finalement

$$h = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{\sqrt{2gH}}{3}\right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{H}{9} \tag{10.6}$$

b) Dans le cas d'une collision parfaitement élastique, on sait que $v_1 \neq v_2$. On peut cependant appliqué le système simplifié d'une collision élastique

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2) \end{cases}$$

et comme $u_2 = 0$ la seconde équation donne $v_2 = u_1 + v_1$ et en remplaçant cette expression dans la première équation, on trouve

$$m_1u_1 = m_1v_1 + m_2(u_1 + v_1) \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 = \frac{m - 2m}{m + 2m}\sqrt{2gH} = -\frac{1}{3}\sqrt{2gH}$$

et en remplaçant l'expression de v_1 dans $v_2 = u_1 + v_1$, on trouve

$$v_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}.$$

Maintenant qu'on connaît les vitesses des deux pendules, on va à nouveau utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour trouver la hauteur maximales des pendules. On résout sur chaque pendule, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_{1i} = E_{1f} \quad &\text{et} \quad E_{2i} = E_{2f} \\ K_{1i} + U_{1i} = K_{1f} + U_{1f} \quad &\text{et} \quad K_{2i} + U_{2i} = K_{2f} + U_{2f} \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + 0 = 0 + m_1gh_1 \quad &\text{et} \quad \frac{m_2v_2^2}{2} + 0 = 0 + m_2gh_2. \end{aligned}$$

Finalement, en isolant respectivement h_1 et h_2, on trouve

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{H}{9} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{4H}{9}. \tag{10.7}$$

TP 11

L'attaque du centre de masse

11.1 Rappel théorique

11.1.1 Système de particules et centre de masse (CM)

Le centre de masse est la somme pondérée des vecteurs position

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\hat{i} + \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\hat{j}$$

et il n'appartient pas toujours à l'objet (ex : donuts). Pour un corps solide, la somme se transforme en intégrale et il vient

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\int \overrightarrow{r}\, dm}{\int dm}$$

avec $\int dm = M_{tot}$. Cette expression de la position du CM nous permet de trouver la vitesse

$$\overrightarrow{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\overrightarrow{P}_{tot}}{\sum m_i}$$

lorsque les masses sont constantes au cours du temps. On peut alors réécrire l'équation sous la forme

$$M\overrightarrow{v}_{CM} = \overrightarrow{P}_{tot} \quad \Rightarrow \quad M\overrightarrow{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{P}_{tot} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}.$$

Pour décrire le mouvement de translation d'un système, il est suffisant de supposer que les forces s'appliquent sur le CM et d'en déduire les équations du mouvement. Si $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0$ alors le CM continue son mouvement en MRU (ex : explosion d'un objet comme dans E11.6).

On prend alors l'habitude de décrire le mouvement en 2 parties : le mouvement du CM et le mouvement relatif de chacune des particule du système dans le référentiel du CM. Ce qui donne mathématiquement

$$\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}_{CM} + \overrightarrow{v}'_i$$

avec $\overrightarrow{v}_i$ la vitesse absolue, $\overrightarrow{v}_{CM}$ la vitesse du CM et $\overrightarrow{v}'_i$ la vitesse dans le repère CM. Par conséquent, l'énergie cinétique du système devient

$$\begin{aligned} K_i = \frac{m_i v_i^2}{2} &= \frac{m_i(\overrightarrow{v}_{CM} + \overrightarrow{v}'_i)^2}{2} \\ &= \frac{m_i}{2}(v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2\overrightarrow{v}_{CM} \cdot \overrightarrow{v}'_i) \end{aligned}$$

et l'énergie cinétique totale est donnée par

$$\begin{aligned} K_{tot} = \sum_i K_i &= \sum_i \left[\frac{m_i}{2}(v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2\overrightarrow{v}_{CM} \cdot \overrightarrow{v}'_i)\right] \\ &= \sum_i \frac{m_i v_{CM}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2} + 0 \end{aligned}$$

où $\sum_i m_i \overrightarrow{v}'_i = (\sum_i m_i)\overrightarrow{v}'_{CM} = 0$ car dans le repère du CM, le CM à une vitesse nulle. On peut donc séparer l'énergie cinétique totale en une contribution du CM et une contribution relative de telle sorte que

$$K_{tot} = K_{CM} + K_{rel}$$

avec $K_{CM} = \sum_i \frac{m_i v_{CM}^2}{2}$ et $K_{rel} = \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2}$.

11.1.2 Application à une collision

Lors d'une collision : $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta\overrightarrow{P}_{tot} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{a}_{CM} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{v}_{CM} = cste$. La différence d'énergie cinétique lors d'une collision est donnée par

$$\Delta K = \Delta K_{CM} + \Delta K_{rel}$$

or, on sait que

$$\Delta K_{CM} = \sum_i \frac{m_i}{2}(v_{CM}^2 - v_{CM}^2) = 0$$

car $\overrightarrow{v}_{CM} = cste$. Donc,

$$\Delta K_{tot} = \Delta K_{rel}$$

ce qui signifie que dans une collision, seule l'énergie cinétique relative peut être perdue. On fait alors la distinction entre les deux types de collisions considérées dans ce TP

- Inélastique : $\Delta K_{rel} = K_{rel,f} - K_{rel,i} = -K_{rel,i}$, car plus de vitesse relative à la fin (perte maximale d'énergie cinétique).
- Élastique : $\Delta K_{rel} = 0$ (conservation de l'énergie cinétique totale).

11.2 Exercices : E11.1, E11.6, E11.7 et E11.9

E11.1 Des petites molécules

a) Pour la molécule d'HCl, on a $d = 1,3\,.\,10^{-10}$ m la distance entre les deux atomes ; $m_H = 1u$ la masse de l'atome d'hydrogène et $m_{Cl} = 35u$ la masse de l'atome de chlore. Si on positionne notre repère sur l'atome d'hydrogène, on a $\overrightarrow{r}_H = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{r}_{Cl} = d\hat{\imath}$ et en utilisant la définition du CM, on trouve

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum m_i} = \frac{0 + m_{Cl} d\hat{\imath}}{m_H + m_{Cl}} = 1,236\,.\,10^{-10}\hat{\imath} \text{ m.} \tag{11.1}$$

b) Pour la molécule d'eau, on a $d = 10^{-10}$ m la distance entre les deux atomes ; $m_H = 1u$ la masse de l'atome d'hydrogène et $m_O = 16u$ la masse de l'atome d'oxygène. En positionnant notre repère sur l'atome d'oxygène, il vient

$$\overrightarrow{r}_{H1} = d\cos\frac{\theta}{2}\hat{\imath} + d\sin\frac{\theta}{2}\hat{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r}_{H2} = d\cos\frac{\theta}{2}\hat{\imath} - d\sin\frac{\theta}{2}\hat{\jmath}$$

et on trouve, avec $\overrightarrow{r}_O = 0$

$$\overrightarrow{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum m_i} = \frac{0 + m_H(\overrightarrow{r}_{H1} + \overrightarrow{r}_{H2})}{m_O + 2m_H} = 6,764\,.\,10^{-12}\hat{\imath} \text{ m.} \tag{11.2}$$

E11.6 Un exercice "trivial"

Les données du problème sont $m = 6$ kg la masse initial du projectile ; $m_1 = 4$ kg la masse du premier fragment du projectile après l'explosion ; $m_2 = 2$ kg la masse de second fragment du projectile après l'explosion ; $v_0 = 50$ m s^{-1} la vitesse initiale du projectile ; $\theta_0 = 53°$ l'angle initial du projectile ; $h = 100$ m la hauteur initial du projectile et $d_1 = 200$ m la distance finale du premier fragment du projectile. On sait également que m_1 et m_2 touchent le sol en même temps.

a) La première partie du problème est un cas classique de tir balistique, c'est-à-dire un MRUA selon l'axe vertical y et un MRU selon l'axe horizontal x. Les équations de la position au cours du temps sont donc données par

$$\begin{cases} y(t) = h + v_0 \sin\theta_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ x(t) = 0 + v_0 \cos\theta_0 t \end{cases}$$

Lors de l'explosion, on a

$$\sum \overrightarrow{F} = m_1 \overrightarrow{g} + m_2 \overrightarrow{g} + \sum \overrightarrow{F_{int}} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}_{CM}$$

où $\sum \overrightarrow{F}_{int} = 0$ car les forces internes s'annulent entre elles par la troisième loi de Newton (action-réaction). Ce que nous montre cette équation, c'est que le CM suit la trajectoire qu'aurait eu le projectile SANS explosion ! On calcule donc le temps pris au CM pour toucher le sol. On pose alors t_{CM} tel que $y(t_{CM}) = 0$ puis on résout l'équation du second degré en t_{CM}

$$h + v_0 \sin\theta_0 t_{CM} - \frac{gt_{CM}^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{CM} = \frac{-v_0 \sin\theta_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta_0 + 2gh}}{-g}$$

et on trouve $t_{CM} = 10,150$ s car l'autre solution est négative, on doit donc la rejeter. On est alors en mesure de déterminer la position du CM

$$x_{CM} = x(t_{CM}) = v \cos\theta_0 t_{CM} = 305,412 \text{ m.}$$

Comme m_1 et m_2 touchent le sol en même temps, on sait que pour tout temps t après l'explosion, l'altitude des deux fragments est identique $y_1(t) = y_2(t)$. Par conséquent, on peut appliquer le même raisonnement au CM (il se trouve à chaque fois à la même altitude que les deux fragments). Donc pour $t = t_{CM}$, on a $y_1(t_{CM}) = y_2(t_{CM})$. En reprenant la définition de la position du CM, on trouve

$$x_{CM} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad d_2 = \frac{m_1}{m_2}(x_{CM} - d_1) + x_{CM} = 516,236 \text{ m.} \tag{11.3}$$

b) Pour cette partie, on va à utiliser l'observation suivante, puisque les deux fragments touchent le sol en même temps, tous les changements engendrés par l'explosion auront lieu selon l'axe x. Il vient l'expression suivante

$$\sum F_{ext,x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{ix} = P_{fx}$$

qui peut se réécrire de la manière suivante dans le repère du CM

$$0 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \quad \Leftrightarrow \quad v'_{1x} = -\frac{m_2}{m_1} v'_{2x}.$$

Lors de l'explosion, $\Delta K = \Delta K_{rel} = W$ avec $W = 2\,.\,10^4$ J. Cette dernière relation dérive du fait qu'on a $\overrightarrow{v}_{CM} = cste$ durant l'explosion, car $\sum F_x = 0$ et qu'en y la variation de hauteur est négligeable. On peut donc écrire,

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \\
\Leftrightarrow 2W &= m_1 \left(\frac{-m_2 v_2'}{m_1} \right)^2 + m_2 v_2'^2 \\
\Leftrightarrow 2W &= v_2'^2 m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \\
\Leftrightarrow v_2' &= \sqrt{\frac{2W}{m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}} = 115,47 \text{ m s}^{-1} \\
\Rightarrow v_1' &= -\frac{m_2}{m_1} v_{2x}' = -57,735 \text{ m s}^{-1}.
\end{aligned}
$$

où v_1' et v_2' sont les vitesses relatives au CM des fragments 1 et 2 juste après l'explosion. Par rapport au CM, le premier fragment s'éloigne et sa position relative x_1' vaut

$$x_1'(t) = x_{CM}' + v_1' t = v_1' t$$

car la position relative du CM dans le repère du CM vaut toujours 0. Une fois arrivé au sol, la position relative est donnée par $x_1' = d_1 - x_{CM,sol}$ (ici on a bien une quantité négative égale à une quantité négative). En rassemblant les deux expressions de x_1', on trouve

$$t = \frac{d_1 - x_{CM}}{v_1'} = 1,826 \text{ s.}$$

On peut vérifier que $d_2 = x_{CM,sol} + v_2' t = 516,236$ m (ouf on est sauvé). On pose maintenant x_p, y_p et t_p les coordonnées spatio-temporelle de l'explosion. Le trajet du sommet de la falaise au sol a une durée totale de $t + t_p$ avec $t = 1,826$ s. Puisque qu'on connaît le temps total du trajet t_{CM}, on trouve

$$t_p = t_{CM} - t = 10,150 - 1,826 = 8,224 \text{ s.}$$

Finalement, pour trouver x_p et y_p, on remplace t_p dans les équations du tir balistique

$$\begin{cases} y_p = y(t_p) = h + v_0 \sin\theta_0 t_p - \frac{g t_p^2}{2} = 92,533 \text{ m} \\ x_p = x(t_p) = 0 + v_0 \cos\theta_0 t_p = 250,473 \text{ m.} \end{cases} \tag{11.4}$$

E11.7 Ça collisionne fort chez les particules

Les données du problème sont $m_A = 20u$ la masse d'un atome A et $m_p = 1u$ la masse d'un proton où $u = 1,661 \,.\, 10^{-27}$ kg.

a) L'énergie cinétique absolue possède une contribution du CM et une contribution relative. On va donc calculer ces deux contributions, en commençant par K_{CM}

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

avec $M = m_A + m_p$ et

$$\overrightarrow{v}_{CM} = \frac{1}{M}(m_A \overrightarrow{v}_A + m_p \overrightarrow{v}_p) = \frac{1}{M} m_p \overrightarrow{v}_p$$

où $\overrightarrow{v}_A = 0$ car l'atome A est initialement au repos. Il vient

$$K_{CM} = \frac{1}{2}(m_A + m_p)\frac{m_p^2 v_p^2}{(m_A + m_p)^2} = \frac{1}{2}\frac{m_p^2 v_p^2}{m_A + m_p}.$$

De plus, $K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_p v_p^2}{2}$ car A ne contribue pas. On trouve alors

$$K_{rel} = K - K_{CM} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \left(1 - \frac{m_p}{m_A + m_p}\right).$$

Si $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0$, seule K_{rel} peut être modifiée (perdue ou ajoutée) car pour ces conditions, on a $K_{CM} = cste \quad \Leftrightarrow \quad v_{CM} = cste$ (démontré dans le rappel). Soit E_{ex} l'énergie d'excitation de la réaction. La réaction va alors se produire dès lors que $E_{ex} \leq K_{rel}$, ce qui donne mathématiquement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m_p v_p^2 \left(1 - \frac{m_p}{m_A + m_p}\right) &\geq E_{ex} \\
v_p &\geq \sqrt{E_{ex}\left(1 - \frac{m_p}{m_A + m_p}\right)^{-1} \frac{2}{m_p}} \\
K = \frac{m_p v_p^2}{2} &\geq E_{ex}\left(1 - \frac{m_p}{m_A + m_p}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

et on trouve finalement

$$K \geq 8,4 \,.\, 10^{-19} \text{ J}. \tag{11.5}$$

b) Cette fois-ci, c'est l'atome A qui vient sur le proton. On aura donc simplement les changements suivants

$$K_{CM} = \frac{1}{2}\frac{m_A^2 v_A^2}{m_A + m_p} \quad \text{et} \quad K = \frac{m_A v_A^2}{2}$$

ce qui nous donne

$$K_{rel} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \left(1 - \frac{m_A}{m_A + m_p}\right)$$

et on trouve de la même manière

$$K \geq E_{ex}\left(1 - \frac{m_A}{m_A + m_p}\right)^{-1} = 1,68 \,.\, 10^{-17} \text{ J}. \tag{11.6}$$

E11.9 On termine par une petite démo

Notre objectif est de montrer que lors d'une collision inélastique, on a $K_u = \frac{m+M}{M}E$. Si la collision est parfaitement inélastique, alors on a

$$mu + M.0 = (m+M)v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{m}{m+M}u = v_{CM}.$$

De plus, dans une collision parfaitement inélastique, K_{rel} est totalement perdue : $\Delta K = -K_{rel} = -E$ (l'énergie est absorbée par le ressort). On a

$$K_i = K_u + K_M = K_u = \frac{mu^2}{2} \qquad \text{et} \qquad K_f = \frac{m+M}{2}v^2$$

où l'inconnue est K_u. De ces relations vient (on démarre de $K_f - K_i = -E$)

$$K_i = K_f + E = \frac{m+M}{2}v^2 + E = \frac{m^2}{m+M}\frac{u^2}{2} + E = \frac{m}{m+M}K_i + E$$

et on trouve

$$K_i\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = E \quad \Leftrightarrow \quad K_i\frac{M}{m+M} = E \quad \Leftrightarrow \quad K_i = \frac{m+M}{M}E \tag{11.7}$$

TP 12

Hello rotation !

12.1 Rappel théorique

12.1.1 Cinématique et dynamique de rotation d'un corps solide

Si un corps tourne autour d'un axe, l'angle qu'il a parcouru est $\Delta\theta$ appelé variation angulaire. On peut alors introduire les vitesses angulaires moyenne et instantanée

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \omega_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Remarque : Rigoureusement, $\overrightarrow{\omega}$ est un vecteur aligné avec l'axe de rotation, pointant selon la règle de la main droite et dont la norme est la vitesse angulaire exprimée en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ dans le SI.
Dans ce TP la rotation se fera le plus souvent dans le plan xy, donc $\omega_x = 0 = \omega_y$. C'est pourquoi on notera le plus souvent ω_z au lieu de $\overrightarrow{\omega}$. La dimension de ω est simplement T^{-1} (car le radian n'a pas de dimension). De la même manière on peut introduire les accélérations angulaires moyenne et instantanée

$$\alpha_{moy} = \frac{\Delta\overrightarrow{\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \alpha_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Il est également utile de rappeler les relations suivantes :

- Longueur d'arc : $S = R\theta$ avec θ exprimé en rad.
- Vitesse tangentielle : $v_t = \frac{ds}{dt} = R\omega_z$.
- Accélération tangentielle : $a_t = \frac{dv_t}{dt} = R\alpha_z$.
- Accélération radiale/centripète : $a_r = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R$

Pour la cinématique à accélération angulaire constante ($\alpha = cste$), on pourra utiliser les équations du mouvement suivantes

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \end{cases}$$

qui sont très très proche de ce qu'on retrouve pour un MRUA. On peut même parler de MRUA selon θ.
Pour arriver à décrire l'énergie cinétique d'un système en rotation, on va séparer le mouvement en 2 composantes indépendantes : une translationnelle et l'autre rotationnelle. On pourra alors écrire que l'énergie cinétique totale K varie comme

$$K = K_{trans} + K_{rot}$$

où K_{rot} n'a rien à voir avec un légume ! On aura $K_{trans} = \frac{Mv_{trans}^2}{2}$ avec M la masse totale du système et $\overrightarrow{v}_{trans}$ la vitesse de l'axe de rotation et $K_{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2$ avec $\overrightarrow{v}_i'^2$ la vitesse relative de m_i par rapport à l'axe de rotation. De plus, on a $v_i' = r_i\omega_i$, car le mouvement relatif n'est qu'une rotation et $\omega_i = \omega$, car le corps est solide. Il suit

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i(r_i\omega)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_i^2$$

où la somme $\sum m_i r_i^2$ est indépendante du mouvement et ne dépend que de la géométrie du système. On définit alors le moment d'inertie I par rapport à un axe de rotation

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{ou} \quad I = \int r^2 dm$$

où le choix de l'expression dépend si on est dans un cas discret (première) ou continu (seconde). Dans le cas discret, r_i est a distance entre la masse m_i et l'axe de rotation. On se ramène alors à

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{Mv_{trans}^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2}$$

mais si la rotation se fait autour du centre de masse (CM), l'équation de l'énergie cinétique devient

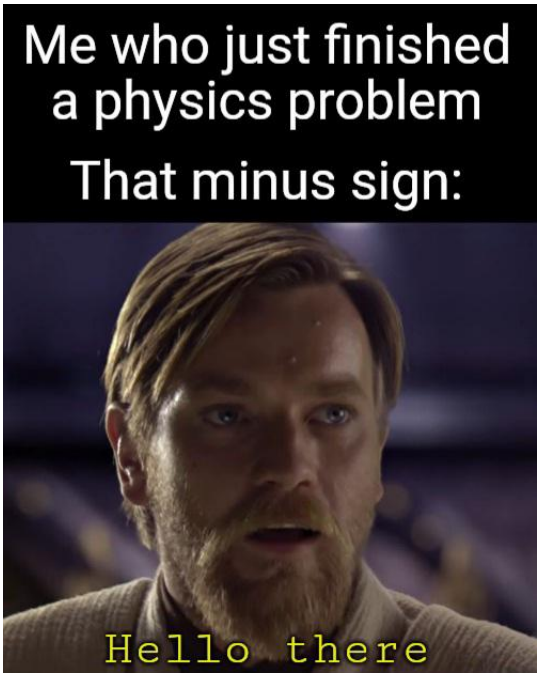
$$K = K_{CM} + K_{rel} = \frac{Mv_{CM}^2}{2} + I_{CM}\frac{\omega^2}{2}.$$

Les deux formes de l'équation de l'énergie cinétique sont bien différentes. En effet, on peut tout à fait concevoir un problème où l'axe de rotation ne passe PAS par le CM. Lorsqu'on se trouve dans cette situation il faut utiliser le théorème des axes parallèles pour trouver la relation entre I_{CM} et I

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

avec h la distance entre les axes.

Remarque : On peut dire que I est à la rotation ce que m est à la translation. Plus la masse d'un objet est grande, plus il est difficile de le déplacer. De manière similaire, plus le moment d'inerte d'un objet est important, moins il est facile de le mettre en rotation.



12.2 Exercices : E12.1, E12.4 et E13.1

E12.1 Wilbur le disque dur

Les données du problème sont $d = 0,03$ m le diamètre du disque dur ; $\omega_0 = 0$ la vitesse angulaire initiale ; $\Delta t = 0,02$ s le temps pour atteindre la fréquence $f = 3333$ tours par minute.

a) Pour déterminer l'accélération angulaire entre $t = 0$ et $t = \Delta t$ on calcule directement l'accélération angulaire moyenne

$$\alpha_z = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega_f}{\Delta t}$$

et pour trouver l'expression de ω_f on utilise la relation suivante

$$\omega_f = 2\pi f = 2\pi 3333(60)^{-1} = 349,03 \text{ rad s}^{-1}$$

où la fréquence doit être exprimée en tour (2π rad) et la fréquence en seconde. On trouve alors

$$\alpha_z = \frac{\omega_f}{\Delta t} = 17451,5 \text{ rad s}^{-2}. \tag{12.1}$$

b) On va commencer par déterminer le déplacement angulaire du disque pendant les 0,05 premières secondes. Pour ça on sépare le problème en deux régimes : un avant 0,02 s et l'autre après 0,02 s.

- De 0 à 0,02 s : $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha_z t^2}{2}$ et on obtient $\theta_1 = 3,49$ rad.
- De 0,02 à 0,05 s : $\theta_2 = \theta_0 + \omega_f t = 349,03 \,.\, 0,03 = 10,47$ rad.

et on trouve finalement que le nombre de tour effectués n vaut

$$n = \frac{\theta_{tot}}{2\pi} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi} = 2,22 \text{ tours.} \tag{12.2}$$

c) Quel est le temps nécessaire pour faire le premier tour ? Pour répondre à cette question on a directement du point b) que l'on parcourt 3,49 rad en 0,02 s. Il faut donc encore faire $\theta_{reste} = 2\pi - 3,49$ rad pour compléter le tour. On trouve que ce θ_{reste} est parcouru en

$$\theta_{reste} = \omega_f t_{reste} \quad \Leftrightarrow \quad t_{reste} = \frac{\theta_r este}{\omega_f} = 8,003 \,.\, 10^{-3} \text{ s.}$$

et le temps complet est donc

$$t = 0,02 + t_{reste} = 28,003 \,.\, 10^{-3} \text{ s.} \tag{12.3}$$

d) On veut calculer a_r et a_t en $t = 0,01$ s. On doit utiliser la relation suivante

$$a_t = \alpha_z r = \frac{d\omega}{dt} r = 261,77 \text{ m s}^{-2} \tag{12.4}$$

et il vient ensuite

$$a_r = \frac{v_t^2}{r} = \omega^2 r = (\omega_0 + \alpha_z t)^2 r = (\alpha_z t)^2 r = 456,98 \text{ m s}^{-2}. \tag{12.5}$$

e) On faire la même chose qu'au point d) mais en $t = 0,03$ s. Il faut donc bien faire attention qu'après $t = 0,02$ s, on a $\alpha = 0$. Donc, il suit

$$a_r = 0 \quad \text{et} \quad a_r = \omega^2 r = \omega_f^2 r = 349,05 \text{ m s}^{-2}. \tag{12.6}$$

E12.4 Du calcul à la chaîne

Les données du problème sont $m_1 = 1$; $m_2 = 2$; $m_3 = 3$ et $m_4 = 4$ kg le poids des particules 1, 2, 3 et 4 et $(x_1, y_1) = (3, 1)$; $(x_2, y_2) = (-2, 2)$; $(x_3, y_3) = (1, -1)$ et $(x_4, y_4) = (-2, -1)$ m les coordonnées des particules 1, 2, 3 et 4.

a) Pour trouver le moment d'inertie selon x on calcule la somme des distances par rapport à l'axe de rotation. Puisqu'on regarde selon l'axe x, la distance à l'axe est simplement donné par la composante y des coordonnées des particules et on trouve

$$I_x = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i y_i^2 = 1.1 + 2.4 + 3.1 + 4.1 = 16 \text{ kg m}^2. \tag{12.7}$$

b) Avec le même raisonnement qu'au point a) on trouve que la distance à l'axe y de chaque particule est donné par la composante x des coordonnées. On trouve

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i x_i^2 = 1.9 + 2.4 + 3.1 + 4.4 = 36 \text{ kg m}^2. \tag{12.8}$$

c) La distance à l'axe z revient à calculer la distance entre chaque particule et l'origine du repère. On obtient finalement

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_y + I_x = 52 \text{ kg m}^2. \tag{12.9}$$

E13.1 Vendredi j'ai plus d'inspi

Les données du problème sont $m_b = 4$ kg la masse du bloc ; $m_p = 2$ kg la masse de la poulie ; $R_p = 5\,.\,10^{-2}$ m le rayon de la poulie ; $k = 80$ N m^{-1} la constante de rappel du ressort et $\Delta h = 0,2$ m une distance verticale parcourue.

a) On peut déjà noter que $W_{nc} = 0$ car on a pas de frottement. Donc, l'énergie mécanique est conservée et il vient

$$\Delta E = 0 \quad E_i = E_f$$

où

$$E_i = K_{trans,b} + K_{rot,p} + U_{res} + U_g = 0$$

car le système est au repos et $y_i = 0$. Par conséquent, on trouve

$$0 = E_i = E_f = K_{trans,b} + K_{rot,p} + U_{res} + U_g = 0 + 0 + \frac{kA^2}{2} + m_b g(-A).$$

avec A l'allongement maximal et où $K_{trans,b} = 0$ car $v_f = 0$ et $K_{rot,p} = 0$ car $\omega_f = 0$ (le ressort est au max, donc plus de déplacement). Ce qui revient finalement à

$$A\left(\frac{kA}{2} - m_b g\right) = 0 \tag{12.10}$$

et donc soit $A = 0$ (mais a rejeter), soit $A = \frac{2m_b g}{k} = 0,981$ m qui est la bonne réponse.

b) Pour trouver le module de la vitesse après 20 cm on va calculer E_f pour cette distance

$$0 = E_i = E_f = K_{trans,b} + K_{rot,p} + U_{res} + U_g = \frac{m_b v_b^2}{2} + \frac{I_p \omega_p^2}{2} + \frac{k\Delta h^2}{2} + m_b g(-\Delta h).$$

qui devient avec $I_p = \frac{m_p R_p^2}{2}$ et $\omega_p = \frac{v_b}{R_p}$ (la poulie ne glisse pas) on trouve finalement

$$0 = v_b^2\left(\frac{m_b}{2} + \frac{m_p}{4}\right) + \frac{k\Delta h^2}{2} - m_b g\Delta h \quad \Leftrightarrow \quad v_b = \sqrt{\frac{\Delta h\left(m_b g - \frac{k\Delta h}{2}\right)}{\left(\frac{m_b}{2} + \frac{m_p}{4}\right)}} = 1,58 \text{ m s}^{-1}. \tag{12.11}$$

TP 13

Quand 900 moments de force comme moi tu auras calculé, moins en forme tu seras !

13.1 Rappel théorique

13.1.1 Moments de force

Le moment d'une force par rapport à un point traduit l'aptitude à faire tourner un système mécanique autour de ce point. Le moment d'une force est mathématiquement définit comme

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

et $[\tau] = \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}$. Ce sont les mêmes dimensions que pour une énergie mais attention à ne pas les confondre.
Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs, alors

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

est également un vecteur. Dans le cas particulier où $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$, alors

$$c = ab\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \Rightarrow \overrightarrow{c} = ab\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\hat{u}_a$$

où $\hat{u}_a$ est un vecteur aligné à l'axe de rotation et dont le sens est donné par la règle de la main droite. On comprend donc que dans ce cas précis, si $\overrightarrow{a} \,/\!/\, \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{c} = 0$ et si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{c} = ab$. On pourra également noter que le produit vectoriel est anticommutatif, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}.$$

Par exemple : les vecteurs directeurs vérifient les propriétés suivantes

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k} \quad \text{et} \quad \hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0.$$

En pratique, on décompose $\overrightarrow{r} = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath}$ et $\overrightarrow{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ puis on calcule

$$\overrightarrow{\tau} = (r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath}) \times (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}) = r_xF_y\hat{\imath} \times \hat{\jmath} + r_yF_x\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = (r_xF_y - r_yF_x)\hat{k} = \tau_z\hat{k}.$$

Dans ce TP, on aura souvent $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{F} \in \mathcal{O}_{xy} \Rightarrow \overrightarrow{\tau} \in \mathcal{O}_z$ et donc $\tau_x = 0 = \tau_y$. On se limitera donc à τ_z

$$\tau_z = \pm rF \sin\theta = r_x F_y - r_y F_x.$$

De manière générale, pour la dynamique du corps solide, on a deux cas possible :

- Translation : $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}$.
- Rotation : $\sum \tau_z = I\alpha_z$

où τ et I doivent être calculés par rapport au même axe de rotation ! Attention à ne pas mettre I_{CM} si τ n'est pas calculé au CM et inversement.

13.2 Exercices : E13.2, E13.6 et E13.8

E13.2 On dirait un pendule, mais quelque chose cloche...

Les données du problème sont $m_t = 1,2$ kg la masse de la tige ; $m_d = 0,4$ kg la masse du disque ; $L = 0,6$ m la longueur de la tige ; $R_d = 0,05$ m le rayon du disque et $\theta = 30°$ l'angle initial.

a) Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe donné est

$$I = \sum_i I_i = I_t + I_d$$

où pour trouver I on va simplement calculer les valeurs de I_t et I_d. Comme la tige n'est pas un objet ponctuel, son moment d'inertie varie le long du chemin et on doit passer par une intégrale (on intègre le long de la tige), ce qui donne

$$I_t = \int_0^L r^2 dm = \int_0^L r^2 \frac{m_t}{L} dr = \frac{m_t}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{m_t L^2}{3}$$

et on peut tout aussi bien regarder la table :-). Puisque l'axe ne passe pas par le contre de masse, on utilise le théorème des axes parallèles (formule de Steiner) sur le disque plein (formule dans la table)

$$I_d = I_{dCM} + m_d(L + R_d)^2 = \frac{m_d R_d^2}{2} + m_d(L + R_d)^2$$

et on trouve finalement

$$I = I_t + I_d = \frac{m_t L^2}{3} + \frac{m_d R_d^2}{2} + m_d(L + R_d)^2 = 0,3135 \text{ kg m}^2. \tag{13.1}$$

b) Le principe de conservation de l'énergie nous dit que

$$\sum W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0.$$

On a deux solutions ici, calculer $K = K_{CM} + K_{rel}$ avec $U_g = Mgy_{CM}$ OU calculer $K = K_{trans} + K_{rot}$ avec $U_g = U_t + U_d$. Ici notre axe de rotation est au sommet de la tige, donc la seconde solution est plus simple (car on a directement $K_{trans} = 0$ puisque le somment ne bouge pas :-). En utilisant la formule de l'énergie cinétique d'un corps rigide en rotation autour d'un axe fixe, on trouve

$$K_i = 0 \quad \text{et} \quad K_f = \frac{I\omega^2}{2} \Leftrightarrow \Delta K = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Pour trouver ΔU, on utilise la formule de l'énergie potentielle gravitationnelle pour le centre de masse de la tige et du disque. On a

$$\begin{aligned}\Delta U = U_f - U_i = 0 - U_i &= -m_t g \Delta y_{tCM} - m_d g \Delta y_{dCM} \\ &= -m_t g \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) - m_d g(L + R_d)(1 - \cos\theta).\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de conservation de l'énergie, on trouve

$$\frac{I\omega^2}{2} = -\Delta U \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{I}\left(m_t g \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) + m_d g(L + R_d)(1 - \cos\theta)\right)}.$$

On obtient finalement,

$$v_{bas} = (L + 2R_d)\omega = 1,596 \text{ m s}^{-1}. \tag{13.2}$$

E13.6 On soulève de la fonte ! Big muscles !

Les données du problème sont $m_1 = 40$ kg la masse du poids ; $L_1 = 0,4$ m la longueur de l'avant bras et $l_2 = 0,9$ m la longueur du bras.

a) Pour le coude, on calcule

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = L_1\hat{\imath} \times (-m_1 g\hat{\jmath}) = -m_1 g L_1 \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -m_1 g L_1 \hat{k} \tag{13.3}$$

avec $\vec{P} = -m_1 g\hat{\jmath}$ est la force du poids. Une deuxième solution consiste à calculer

$$\tau_{z1} = \pm r_1 P_1 \sin\theta = -m_1 g L_1 \tag{13.4}$$

avec $\theta = 90°$ et où on prend le signe négatif par convention. On est super content car le solutions correspondent (ouf la physique n'est pas cassée) !

b) Pour le bras, à nouveau on a deux solutions possible. On peut soit calculer

$$\overrightarrow{\tau}_2 = \overrightarrow{r}_2 \times \overrightarrow{P}_2 = L_2\hat{\imath} \times (-m_2 g\hat{\jmath}) = -m_2 g L_2 \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -m_2 g L_2 \hat{k}$$

ou soit

$$\tau_{z2} = \pm r_2 P_2 \sin\theta = -m_2 g L_2$$

et dans les deux cas, on trouve

$$\tau_{1z} = \tau_{2z} \Rightarrow m_1 g L_1 = m_2 g L_2 \Rightarrow m_2 = \frac{L_1}{L_2} m_1 = 17,78 \text{ kg.} \tag{13.5}$$

E13.8 Le problème BPP (Bloc plan poulie)

Les données du problème sont $M = 4$ kg la masse de la poulie ; $m = 2$ kg la masse du bloc ; $\theta = 53°$ l'angle de la pente ; $R = 0,5$ m le rayon de la poulie.
Comme la poulie peut être assimilée à un disque plein, on en déduit que son moment d'inertie est $I_p = \frac{MR^2}{2}$.

a) Les lois de Newton nous disent

$$\begin{cases} \sum \tau_z = I\alpha_z \\ \sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \end{cases}$$

où la première équation est valable sur la poulie (par rapport au centre) et la seconde sur le bloc. La première équation devient avec les données du problème

$$\sum \tau_z = \pm rF\sin\theta = -RT \Rightarrow -RT = I\alpha_z = \frac{MR^2}{2}\alpha_z \Rightarrow \alpha_z = \frac{-2T}{RM}$$

avec T le module de la tension dans la corde et α_z l'accélération angulaire de la poulie selon l'axe z. On va maintenant faire le bilan des forces sur le bloc en choisissant un repère d'axes aligné avec la pente. Puisqu'on a pas d'informations particulière sur la corde, on peut supposer qu'elle est indéformable et que $T = T'$. On a donc,

$$\begin{cases} \sum F_x = -T + mg\sin\theta = ma_x \\ \sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \end{cases}$$

où la seconde équation n'est pas très utile mais fournit un exemple supplémentaire de la méthodologie BDF (Bilan Des Forces :-).Puisque la corde ne glisse pas sur la poulie, on peut écrire $a_x = -R\alpha_z$. Attention au signe, car il dépend de la situation (mais ici on veut une quantité positive puisque a_x est aligné avec l'axe x positif). On trouve finalement

$$-T + mg\sin\theta = -mR\alpha_z \Rightarrow T = m(g\sin\theta + R\alpha_z) \Rightarrow \alpha_z = -\frac{2}{RM}m(g\sin\theta + R\alpha_z)$$

où on utilise simplement l'expression explicite de α_z pour se débarrasser de la dépendance en T (la seule autre inconnue de l'équation). Finalement, on isole α_z et on trouve a.s.a (after some algebra)

$$\alpha_z = \frac{-2mg\sin\theta}{R(M+2m)} = -7,89 \text{ rad}\,\text{s}^{-2}. \tag{13.6}$$

b) Si $\alpha_z = cste \Rightarrow a_x = -R\alpha_z = cste$. On utilise donc une formule du MRUA pour trouver la vitesse avec un déplacement $\Delta x = 1$ m

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow v = \sqrt{-2R\alpha_z\Delta x} = 2,8 \text{ m}\,\text{s}^{-2}. \tag{13.7}$$

TP 14

Les derniers moments

14.1 Rappel théorique

14.1.1 Moment cinétique

Le moment cinétique (ou moment angulaire) d'une particule est donné par l'équation suivante

$$\overrightarrow{l} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \quad \Rightarrow \quad l_z = \pm rp \sin\theta$$

avec $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ la quantité de mouvement. Pour un corps solide, il est donné par

$$\overrightarrow{l} = \int \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{dp} = I\overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad l_z = I\omega_z.$$

Avec l'expression du moment cinétique total $\overrightarrow{L} = \sum_i \overrightarrow{l}_i$, la loi de conservation du moment cinétique s'énonce de la manière suivante

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\overrightarrow{l}_i}{dt} = \sum_{particule} \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{p}_i) + \sum_{solide} \frac{d}{dt}(I_i\overrightarrow{\omega}_i)$$

et on va résoudre les contributions des particules et des solides séparément

1. $\sum_i \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{p}_i) = \sum_i(\overrightarrow{v}_i \times \overrightarrow{p}_i + \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i) = \sum_i(0 + \overrightarrow{\tau}_i) = \sum_i \overrightarrow{\tau}_i$
2. $\sum_i \frac{d}{dt}(I_i\overrightarrow{\omega}_i) = \sum_i I_i\frac{d\overrightarrow{\omega}_i}{dt} = \sum_i I_i\overrightarrow{\alpha}_i = \sum_i \overrightarrow{\tau}_i$

et il vient

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{\tau}_{ext}.$$

Si $\sum \overrightarrow{\tau}_{ext} = 0$, alors le moment cinétique total est conservé. On peut en déduire que la rotation est plane : gyroscope, système solaire... Enfin, on peut introduire les conditions d'équilibre dans le cas d'une rotation ou d'une translation. On aura respectivement

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dl_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \overrightarrow{F} = 0 \quad \text{et} \quad \sum \tau_z = 0.$$

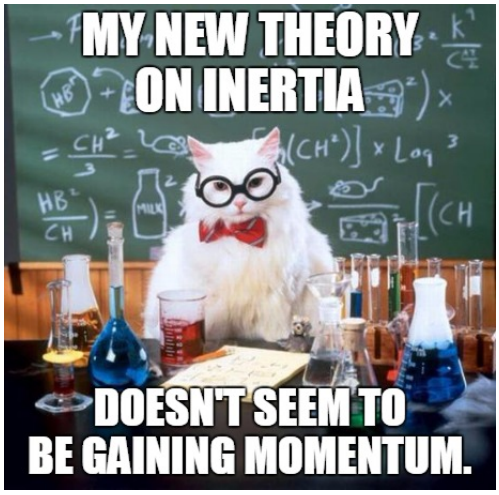
14.1.2 Différence translation et rotation

Pour un peu mieux s'y retrouver dans toutes ces rotations, le tableau comparatif 14.1 entre translation et rotation est proposé. Il sert à rappeler comment les différentes quantités interagissent entre elles. Ce tableau n'est pas exhaustif.

Translation	Rotation
m, v, a, F	I, ω, α, τ
$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$	$l_z = I\omega_z$
$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$	$\sum \tau_z = I\alpha_z$

Table 14.1 – Tableau comparatif.

14.2 Exercices : E14.3, E14.5, E14.7 et E14.11



E14.3 Une échelle sur un mur... quel doux souvenir

Ici, on ne donne que le coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,6$ et la longueur L de l'échelle. Par conséquent, on sait que la force qui s'oppose au mouvement $f \leq \mu_s N_1$, où N_1 est le module de la force normale qu'exerce le sol sur le bas de l'échelle. On aussi la présence de N_2 le module de la force normale qu'exerce le mur vertical sur le haut de l'échelle et P le module de la force résultant du poids de l'échelle.

a) Une façon d'imposer que l'échelle ne glisse pas est d'imposer la condition suivante

$$\sum \tau_z = 0$$

sur le sommet de l'échelle. Comme N_2 est issu du sommet de l'échelle, il ne contribue pas au moment de force totale, car la norme du vecteur déplacement est nulle. On a donc trois termes qui contribue au moment de force total

$$\sum \tau_z = -\frac{L}{2}P\sin\theta - Lf\sin(90^\circ - \theta) + LN_1\sin\theta = 0$$
$$-\frac{1}{2}P\sin\theta - f\cos\theta + N_1\sin\theta = 0$$

où on travaille à chaque fois dans le CM (centre de masse) et l'utilisation de la règle de la main droite permet de ne pas se tromper dans les signes des termes. On utilise ensuite l'équation de conservation pour la translation (celle du rappel), qui n'est rien d'autre que la seconde loi de Newton appliquée au cas statique (ce qui est le cas ici)

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_x = -P + N_1 = 0 \\ \sum \overrightarrow{F}_y = N_2 - f = 0. \end{cases}$$

De plus, lorsque $\theta = \theta_{max}$, on a $f = \mu_s N_1$. L'équation du moment de force devient alors,

$$-\frac{P}{2}\sin\theta - \mu_s P\cos\theta + P\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 2\mu_s\cos\theta$$

et on trouve finalement

$$\theta = \arctan(2\mu_s) = 50,2^\circ. \tag{14.1}$$

b) Pour trouver la proportion du poids, on combine simplement les équations $N_2 = f$, $f = \mu_s N_1$ et $N_1 = P$ et on trouve

$$N_2 = f = \mu_s N_1 = \mu_s P \quad \Rightarrow \quad \frac{N_2}{P} = \mu_s = 60\%. \tag{14.2}$$

E14.5 Un exercice INCONTOURNABLE de la physique

On doit montrer que le rayon change d'un facteur $2^{\frac{1}{3}}$. Pour ça, on va essayer de faire apparaître le terme $\frac{R_f}{R_i}$ qui donne la variation du rayon entre l'état final et initial.
Commençons par ce qu'on sait ! La masse m est en mouvement circulaire, c'est à dire qu'elle vérifie

$$\sum \overrightarrow{F} = -m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u}_r$$

or dans notre situation, la seule force en présence est la tension dans la corde T. Puisqu'on a pas de frottement, on a $T = T'$. Initialement, cette tension est de $T_i = 2Mg$ (car pas d'accélération verticale) et puis de $T_f = 1Mg$ lorsqu'on retire l'une des deux masses. On a alors de manière générale

$$T = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{RT}{m}$$

où les signes "-" se suppriment car la tension est dirigée vers les $\overrightarrow{u}_r$ négatifs (l'intérieur du cercle). Une autre manière de s'en apercevoir est que v^2 est forcément positif donc $\frac{RT}{m}$ doit l'être également (on ne peut pas avoir de signe "-" qui traîne :-). On va ensuite utiliser la condition d'équilibre pour une rotation

$$\frac{dl_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad cste = l_z = Rp = Rmv \quad \Rightarrow \quad cste = R^2m^2v^2 \quad \Rightarrow \quad cste = mTR^3$$

et puisque m est également constante, il suit que $TR^3 = cste$. On trouve finalement

$$T_iR_i^3 = T - fR_f^3 \quad \Rightarrow \quad 2MgR_i^3 = MgR_f^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_f}{R_i} = 2^{\frac{1}{3}}. \tag{14.3}$$

E14.7 Le retour du calcul à la chaîne

Pour chacun des cas il faudra utiliser la position et la vitesse de la masse. On aura le choix entre les formule suivantes

$$l_z = \pm rmv\sin\theta \quad \text{et} \quad l_z = m(r_xv_y - r_yv_x).$$

a) On démarre la machine (on utilisera la seconde formule ici)

1. $\vec{r}_1 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $m_1 = 2$ kg et $\vec{v}_1 = 3\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad l_{1z} = 2\,.\,3\,.\,3 = 18$ kg m^2 s^{-1}.
2. $\vec{r}_2 = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, $m_2 = 3$ kg et $\vec{v}_2 = \cos 60°\hat{\imath} - \sin 60°\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$
   $l_{2z} = 3(-2\sin 60° - 3\cos 60°) = -9,7$ kg m^2 s^{-1}.
3. $\vec{r}_3 = -3\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$, $m_3 = 4$ kg et $\vec{v}_3 = 2\sin 40°\hat{\imath} + 2\cos 40°\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$
   $l_{3z} = 4(-3\,.\,2\cos 40° - 2\sin 40°) = -23,53$ kg m^2 s^{-1}.
4. $\vec{r}_4 = -4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $m_4 = 5$ kg et $\vec{v}_4 = 1,5\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad l_{1z} = 5\,.\,1,5\,.\,2 = 15$ kg m^2 s^{-1}.

b) Le moment cinétique total est directement donné par

$$L_z = l_{1z} + l_{2z} + l_{3z} + l_{4z} = -0,23 \text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}. \tag{14.4}$$

E14.11 Puisque c'est simple, on se met des contraintes !

Les données du problème sont $M = 4$ kg la masse de la poulie ; $m = 2$ kg la masse du bloc et $R = 20$ cm le rayon de la poulie. On sait également que le système démarre du repos et qu'on doit utiliser l'équation suivante

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}.$$

Ici le choix est vôtre ! On peut soit étudier le mouvement de la poulie avec $\vec{L} = \vec{l}_P$ et en déduire le reste des informations (choix le plus simple) ou alors on peut étudier le système complet avec $\vec{L} = \vec{l}_P + \vec{l}_B$ mais le calcul des moments de force est plus complexe car il faut considérer les forces sur le bloc. Ici on suivra le chemin de la simplicité... On résout

$$\sum \tau_{ext,z} = RT$$

avec T la tension dans la corde. Puisque les frottement sont négligeables, on a $T = T'$ et en utilisant les bilan des forces sur le bloc, on espère trouver l'expression de T (spoiler, on va y arriver :-)

$$T' - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g+a) \quad \Rightarrow \quad \sum \tau_z = Rm(a+g).$$

À présent, on utilise l'expression du moment cinétique sur un corps solide (ici un disque plein, donc on connaît son moment d'inertie)

$$l_{Pz} = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad L_z = l_{Pz} = \frac{1}{2}mR^2\omega_z$$

avec $v_B = -R\omega_z$ la vitesse du bloc (car la vitesse du bloc va vers le bas) et on trouve

$$L_z = -\frac{1}{2}mRv_B \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = -\frac{1}{2}mRa.$$

avec a_B l'accélération du bloc. Finalement, on remplace dans l'équation du moment cinétique total et on obtient

$$Rm(a+g) = -\frac{1}{2}mRa \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{m}{m+\frac{M}{2}}g = 4,905 \text{ m s}^{-2}. \tag{14.5}$$

TP 15

Le flux de la peur mène au flux de la colère.

15.1 Rappel théorique

Pas de rappel

15.2 Exercices : E15.2, E15.3, E15.7 et E15.9

E15.2 Topologiqement parlant, un tube c'est un cylindre

Les donnée du problème sont $\rho_e = 10^3$ kg m^{-3} la densité de l'eau ; $\rho_{Hg} = 13,6 \,.\, 10^3$ kg m^{-3} la densité du mercure ; $V_e = 25$ mL le volume d'eau ajouté au mercure et $r = 4 \,.\, 10^{-3}$ m le rayon du tube en U.

Puisque le U est ouvert, la pression de surface est la même des deux côtés. On doit donc avoir

$$\rho_e V_e g = \rho_{Hg} V_{Hg} g \quad \Leftrightarrow \quad V_{Hg} = \frac{\rho_e}{\rho_{Hg}} V_e$$

Physiquement, la solution finale aura un côté du U avec un surplus de mercure et un autre côté avec un surplus d'eau (qui est plus haut que le surplus de mercure car la densité de l'eau est bien plus faible). On a donc

$$\Delta h = h_e - h_{Hg}$$

avec h_e la hauteur du surplus d'eau, h_{Hg} la hauteur du surplus de mercure et Δh la différence entre les deux. Or, on sait que $V = \pi r^2 h$, ce qui veut dire qu'on peut exprimer Δh comme une différence sur les volume

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2}(V_e - V_{Hg}) = \frac{1}{\pi r^2}(V_e - \frac{\rho_e}{\rho_{Hg}} V_e) = 0,461 \text{ m}. \tag{15.1}$$

E15.3 Trop chouette, un barrage !

On donne la hauteur H et la largeur L d'un barrage Dans un fluide, la pression (et donc la force qui est appliquée sur le barrage) varie avec la profondeur. Donc, ici la pression qu'exerce le fluide sur le barrage aura la forme

$$P(y) = \rho_e g y$$

avec ρ_e la densité de l'eau et y la profondeur (je prends un axe y dirigé vers le bas). Ici la pression atmosphérique n'influence pas la pression que subit le barrage. Pour s'en convaincre, on peut commencer par voir qu'en surface aucune pression n'est subie par le barrage. Comme la différence de pression entre deux couches d'un fluide ne dépend que de la profondeur (i.e. les termes P_{atm} s'annulent), on peut conclure que la pression atmosphérique n'intervient pas dans notre situation. Puisque la force varie avec la profondeur, et en utilisant la relation $P = \frac{dF}{dS} \quad \Leftrightarrow \quad dF = PdS = PLdy = \rho_e g y L dy$, on trouve

$$F_{tot} = \int_0^H dF(y) = \int_0^H \rho_e g L y dy = \rho_e g L \int_0^H y dy = \frac{\rho_e g L H^2}{2} \tag{15.2}$$

et pour $L = 200$ m, $H = 60$ m et $\rho_e = 10^3$ kg m^{-3} on obtient $F_{tot} = 3,53 \,.\, 10^9$ N.

E15.7 Je connais un raccourci

a) On va simplement utiliser la poussée d'Archimède qui n'est rien d'autre que le poids du volume de fluide déplacé. Mathématiquement, on a donc

$$F_A = \rho_f V_d g$$

où le volume déplacé correspond au volume immergé. On obtient donc

$$V_d = hlL = 1, 2.4, 8.38 = 218,88 \text{ m}^3.$$

Au niveau de la flotte, on a équilibre des forces en y : $\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_A - mg = 0$ et avec $\rho_f = 10^3$ kg m^{-3}, on trouve finalement

$$m = \frac{F_A}{g} = \rho_f V_d = 218,88 \,.\, 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \tag{15.3}$$

b) La densité de notre cargaison vaut $\rho_{carg} = 5,4 \,.\, 10^3$ kg m^{-3}. Pour déterminer le volume Maximax de cargaison qu'on peut mettre dans le bateau, on va calculer le volume Maximax qu'on peut déplacer

$$V_d = (1,2 + 0,8).4,8.38 = 364,8 \text{ m}^3.$$

A l'équilibre, on a de nouveau : $\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_A - (m + m_{carg})g = 0$. On isole m_{carg} et on remplace son expression dans l'équation suivante

$$V_{carg} = \frac{m_{carg}}{\rho_{carg}} = \frac{\rho_e V_d - m}{\rho_{carg}} = 27,02 \text{ m}^3. \tag{15.4}$$

E15.9 Une aiguille flotte sur de la flotte

On va devoir utiliser la tension superficielle qui se trouve toujours à l'interstice vers le fluide de norme $F = \gamma L$. Ici, on a $\gamma = 0,076$ N m^{-1} pour l'eau. Comme on est à l'équilibre, on a selon la verticale y

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha - mg = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\gamma L \cos\alpha = mg \end{aligned}$$

où α est l'angle entre la verticale et le force $\overrightarrow{F}$.

Remarque : Il n'y a pas de poussée d'Archimède car pas de volume immergé (l'eau se déforme).

On cherche le moment juste avant que l'aiguille ne coule, c'est-à-dire $\alpha = 0°$. On trouve donc $2\gamma L = mg$ et avec $m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} L$, avec $\rho = 7,6 \,.\, 10^3$ kg m^{-3} on obtient finalement

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} L \quad \Leftrightarrow \quad d = 2\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi \rho g}} = 1,61 \,.\, 10^{-3} \text{ m}. \tag{15.5}$$

TP 16

I have a bad feeling about fluids...

16.1 Rappel théorique

L'équation de continuité : $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ qui est un débit massique (en $\mathrm{kg\,s^{-1}}$). Dans le cas particulier où $\rho_1 = \rho_2$, on aura

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

qui est un débit volumique (en $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$). Lorsqu'un fluide es stationnaire, il obéit à l'équation suivante,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Théorème 16.1.1. *Le théorème de Bernouilli nous dit que pour un fluide IDÉAL, la densité d'énergie reste constante le long d'une ligne de courant. La densité d'énergie est donnée par*

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2$$

avec P la pression intérieure, $\rho g y$ la pression potentielle et $\frac{1}{2}\rho v^2$ la pression cinétique.

Démonstration. Puisque le fluide en question est supposé idéal, on peut considérer qu'il obéit à l'équation de continuité et que sa densité ρ est la même partout ($\rho_1 = \rho = \rho_2$). On peut donc écrire

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

On applique ensuite le théorème de la conservation de l'énergie mécanique (on ne considère pas la viscosité)

$$\Delta E = W \quad \Leftrightarrow \quad \Delta U + \Delta K = W$$

où ΔU est la variation d'énergie potentielle, ΔK la variation d'énergie cinétique et W le travail des forces de pressions. On sait que ces différentes quantités sont données par les expressions mathématiques suivantes

$$\Delta U = mg\Delta h = mg(h_2 - h_1), \quad \Delta K = \frac{m\Delta v^2}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} \quad \text{et} \quad W = P_1A_1h_1 - P_2A_2h_2.$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de la conservation de l'énergie mécanique on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + mgh_2 - mgh_1 &= P_1A_1h_1 - P_2A_2h_2 \\
\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + P_2A_2h_2 &= \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + P_1A_1h_1 \\
\frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{P_2A_2h_2}{m} &= \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{P_1A_1h_1}{m}
\end{aligned}$$

et on termine en utilisant les opérations suivantes : $V_i = A_ih_i$ et $\rho = \rho_i = \frac{m}{V_i} = \frac{m}{A_ih_i}$ et on se ramène alors à l'expression suivante

$$\frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{P_2}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{P_1}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = cste. \tag{16.1}$$

□

16.2 Exercices : E16.2, E16.4, E16.5 et E16.7

E16.2 L'arroseur arrosé

Les données du problème sont $v_1 = 2,4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse de l'eau ; $d_1 = 0,159\,.\,10^{-2}$ m le diamètre du tuyau et $r_2 = 6,4\,.\,10^{-3}$ m le diamètre du bec. Pour trouver la vitesse en sortie du bec on utilise l'équation de continuité

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{r_2^2} = 3,7 \text{ m s}^{-1}.$$

et pour trouver la hauteur on a deux possibilités

1. MRUA (chute libre) : $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gh \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{v_{yo}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} = 0,698$ m.
2. Bernouilli : $P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_h + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_h^2$. Mais comme $P_2 = P_{atm} = p_h$, $y_2 = 0$ et $v_h = 0$, on trouve finalement $h = \frac{v_2^2}{2g} = 0,698$ m.

E16.4 Ça aurait pu être un chouette exo de labo

a) Cet partie de l'exercice peut se ramener à un exercice de tir balistique où on suit le mouvement d'une particule. On a donc un MRUA selon l'axe vertical y et un MRU selon l'axe horizontal x. Les équations de la position au cours du temps sont donc données par

$$\begin{cases} x(t) = 0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Comme $\overrightarrow{v}_0$ est uniquement dirigé selon l'axe x, on a $v_{0y} = 0$. Soit t_{sol} le temps où la particule d'eau touche le sol ($y(t_{sol}) = 0$ et $x(t_{sol}) = R$) et on trouve

$$0 = h - \frac{g t_{sol}^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t_{sol} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Il ne reste plus qu'a trouver l'expression de v_0 et pour ça il faut bien qu'on fasse un peu de fluide :-). On utilise le théorème de Bernouilli

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2$$

avec $P_1 = P_{atm} = P_2$, $h_1 = H$, $h_2 = 0$, $v_1 = 0$ (car $H = cste$), $v_2 = v_0$ et $\rho_1 = \rho_2$. L'équation se simplifie alors énormément et on trouve

$$\rho g H = \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$$

et en injectant cette expression dans l'équation dérivée du tir balistique on obtient finalement

$$R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)} \tag{16.2}$$

b) On veut trouver h' tel que $R(h) = R(h')$. On résout alors l'équation suivante

$$\begin{aligned} 2\sqrt{h(H-h)} &= 2\sqrt{h'(H-h')} \\ h(H-h) &= h'(H-h') \\ h'^2 - Hh' + (Hh - h^2) &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré et on trouve les deux solutions suivantes

$$h' = \frac{H \pm \sqrt{(H-2h)^2}}{2}$$

mais la solution avec "-" donne un résultat trivial ($h' = h$) qu'on doit rejeter. Il reste alors l'autre solution

$$h' = H - h \tag{16.3}$$

E16.5 Attention aux éclaboussures

La vitesse limite est atteinte lorsque $a_y = 0$. Pour résoudre cet exercice, on va faire appel au super BDF (bilan des forces)

$$\sum F_y = F_R + F_A - mg = ma_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_R + F_A = mg$$

où $F_R = 6\pi\eta_f rv$ est la force de résistance pour un objet sphérique dans un fluide visqueux à basse viscosité dynamique avec η la viscosité du fluide, r le rayon de la sphère et v vitesse de la bille, $F_A = \rho_f V g$ la force de la poussée d'Archimède avec V le volume immergé et $m = \rho_b V$ avec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ le volume d'une sphère. On remplace et on trouve

$$6\pi\eta_f rv + \rho_f V g = \rho_b \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta_f}(\rho_b - \rho_f).$$

Il ne reste plus qu'a traiter les cas de l'eau et de l'huile.

a) $\rho_f = 10^3$ kg m^{-3} et $\eta_f = 0,001$ Pa s

$$v_{max} = 0,872 \text{ m s}^{-1}. \tag{16.4}$$

b) $\rho_f = 0,97 \,.\, 10^3$ kg m^{-3} et $\eta_f = 1,2$ Pa s

$$v_{max} = 7,403 \,.\, 10^{-4} \text{ m s}^{-1}. \tag{16.5}$$

E16.7 La der des der

Les données du dernier (trop triste c'est déjà fini) problème sont $d = 0,1$ m le diamètre du récipient cylindrique ; $R = \frac{0,5 \,.\, 10^{-3}}{2}$ m le rayon du capillaire ; $h = 0,25$ m la hauteur du récipient cylindrique et $L = 0,1$ m la longueur du capillaire.

a) On utilise la formule du gradient de pression et on rappelle qu'il s'agit d'une variation de la pression sur une longueur

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{recip} = \frac{P_2 - P_3}{h} = 9810 \text{ Pa m}^{-1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{cap} = \frac{P_2 - P_1}{L} = 24525 \text{ Pa m}^{-1}. \tag{16.6}$$

avec $P_1 = P_{atm} = P_3$ et $P_2 = \rho g h - P_{atm}$. Il suit $P_2 - P_3 = \rho g h = P_2 - P_1$.

b) On utilise la formule de Poiseuille avec $R = \frac{0,5 \,.\, 10^{-3}}{2}$ m et $\eta = 0,001$

$$D = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} = 3,76 \,.\, 10{-}8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}. \tag{16.7}$$

c) Si $N_R << 2000$ alors l'écoulement est laminaire

$$N_R = \frac{2\rho\overline{v}R}{\eta} = \frac{2\rho R}{\eta}\frac{D}{S} = \frac{2\rho R}{\eta}\frac{D}{\pi R^2} = 95,75 << 2000. \tag{16.8}$$

d) On reprend la formule du débit

$$\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} = D = vS \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta P}{L}\frac{1}{S} = \frac{\rho g R^4}{8\eta L r^2}h = 1,9\,.\,10^{-5}h. \tag{16.9}$$

FIGURE 16.1 – Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter bonne chance pour votre session d'examen et courage pour le blocus. Allez Chico on met la gomme vers la réussite !

Dernière volonté : Si vous voyez des erreurs de tout type (orthographe, physique, mathématique, typo, conseil, etc.) n'hésitez pas à me faire une petite liste et à m'envoyer tout ça sur mon adresse mail : justin.gerard@uclouvain.be pour que je puisse corriger tout ça :-). Merci d'avance et puisse la masse fois l'accélération être avec vous !