Repaso matemático

Teoría Macroeconómica II

1. Exprese las siguientes expresiones como un polinomio log-lineal
   (a) $Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$
   (b) $Z = ce^{rt}\beta^{K}$
2. Muestre que la tasa de crecimiento de una variable x, g_x, puede aproximarse como la diferencia de los logarítmos de la variable. Es decir:
$$g_x = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \approx \ln X_t - \ln X_{t-1}$$
3. Calcule la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:
   (a) $f(c) = \ln c$
   (b) $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$
   (c) $h(w) = \left(-6w^3 + 17w - 4\right)^{\beta} - \ln\left(\theta w^{\beta}\right)$
4. Resuelva el siguiente problema de optimización (i) usando un lagrangiano y (ii) simplificando el problema a uno de una sola variable:
$$\max_{\{x,y\}} U = \ln x + \ln y$$
$$\text{s.a.}$$
$$x + y = m$$
5. Encuentre el valor de θ y ω en este sistema de ecuaciones:
$$4\theta - 6\omega = -4$$
$$8\theta + 2\omega = 48$$

6. Combine las siguientes dos ecuaciones en una sola elimando s_t:

$$c_t + s_t = y_t$$
$$c_{t+1} = y_{t+1} + s_t(1+r)$$

7. Evalúe:

   (a) $\sum_{j=0}^{3} 2^j$

   (b) $\sum_{j=0}^{3} j^2$

   (c) $\sum_{j=1}^{5}(2j-3)$

   (d) $\sum_{j=1}^{1000} 5$

8. Escriba las siguientes expresiones utilizando una expresión sigma $\sum$ de sumatoria:

   (a) $x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + \cdots + x_{t+T}$

   (b) $\mathrm{x}_t + \beta x_{t+1} + \beta^2 x_{t+2} + \cdots + \beta^T x_{t+T}$

   (c) $x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \cdots + \beta^T x_T$

9. Muestre que

   (a) $\frac{\sum_i (X_i+Y_i)+\sum_i X_i - \sum_i Y_i}{\sum_i X_i} = 2.$

   (b) $\frac{\sum_i \left(X_i^2+2X_iY_i+Y_i^2\right) - \sum_i \left(X_i^2-2X_iY_i+Y_i^2\right)}{\sum_i 8X_iY_i} = \frac{1}{2}.$

10. **Midiendo la economía:** En los años 1 y 2 , existen dos productos producidos en la economía: computadoras y café. En el año 1, se producen 50 computadoras y se venden a \$2.200 cada una, mientras que en el año 2, 80 computadoras se venden a \$3.700 cada una. En el año 1, 23.000 cafés se venden a \$2 cada uno, y en el año 2, 27.400 cafés se venden a \$2,34.

    (a) Calculel el PIB nominal en cada año.

    (b) Calcule el PIB real en cada año utilizando el año 1 como base. Infiera el valor del deflator implítico para ambos años. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la producción real y los precios (inflación)?

    (c) Ahora, calcule el PIB real en ambos años utilizando el año 2 como base. Infiera el valor del deflator implícito en ambos años. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la producción real y los precios (inflación)?

    (d) ¿Son distintas sus respuestas en (b) y (c)? ¿Por qué?

11. **Transformaciones monotónicas:** Sea $u(x, y)$ una función de utilidad y (x, y) bienes de consumo. La utilidad marginal es positiva pero decreciente en ambos argumentos. Sea f una función estrictamente creciente.

    (a) Demuestre que si (x^*, y^*) maximiza la función $f(u(x, y))$, es decir

    $$(x^*, y^*) = \arg\max_{\{x,y\}} f(u(x, y))$$

    Entonces (x^*, y^*) también maximiza la función de utilidad original $u(x, y)$.

    (b) Utilice el argumento anterior para demostrar que una función de utilidad Cobb-Douglas $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ puede transformarse a $\tilde{u}(x, y) = \ln x + \theta \ln y$. ¿Cuál sería el valor de θ?

12. Considere el siguiente problema de optimización con una desigualdad:

    $$\max_{C_t, C_{t+1}, S_t} \ln(C_t) + \beta \ln(C_{t+1})$$

    sujeto a

    $$\begin{aligned} &C_t + S_t = Y_t \\ &C_{t+1} = Y_{t+1} + (1 + r_t) S_t \\ &S_t \geq 0 \end{aligned}$$

    Con Y_t, Y_{t+1} variables dadas.

    (a) Simplifique el problema incorporando las restricciones de igualdad dentro de la función que se optimiza. Es decir, que solo aparezca la desigualdad y las variables C_t y C_{t+1}

    (b) Plantee el Lagrangiano y obtenga las condiciones de primer orden y las condiciones de holgura.

    (c) Establezca los tres casos que definen la solución al problema.