Modelo multiperiodo del consumo y el ahorro[*]

Jonathan Garita

Introducción

- Anteriormente, analizamos el caso de un hogar que vive dos periodos.
- Este supuesto puede ser muy estricto si se busca modelar decisiones de retiro o para entender la volatilidad del consumo a choques de ingreso.
- Vamos a considerar un modelo multiperiodo de consumo y ahorro.
- El principal resultado de la teoría del consumo sin incertidumbre es el **suavizamiento del consumo**. Las personas tratan de lograr un perfil de consumo lo más uniforme posible, eligiendo un nivel de consumo que sea consistente con sus recursos intertemporales y ahorrando y tomando préstamos en el camino para suavizar la volatilidad en las trayectorias de ingresos.

Configuración del modelo

- Considere un hogar que vive en el periodo actual, denotado por t, y T[1] periodos futuros.

[*]Referencias: Capítulo 10 GLS.
[1]En el modelo de dos periodos, $T = 2$.

- Es decir, el hogar vive $T+1$ periodos.

- Asuma que no hay incertidumbre y que el hogar inicia sin riqueza.

- Cada periodo se determina una tasa de interés real r_{t+j}, para $j = 0, \ldots T-1$ que determina el retorno del ahorro llevado del periodo $t+j$ al periodo $t+j+1$.

- El hogar enfrenta las siguientes restricciones presupuestarias secuenciales (una en cada periodo):

$$\begin{aligned}
C_t + S_t &\leq Y_t \\
C_{t+1} + S_{t+1} &\leq Y_{t+1} + (1 + r_t)\, S_t \\
C_{t+2} + S_{t+2} &\leq Y_{t+2} + (1 + r_{t+1})\, S_{t+1} \\
&\vdots \\
C_{t+T} + S_{t+T} &\leq Y_{t+T} + (1 + r_{t+T-1})\, S_{t+T-1}
\end{aligned}$$

- En este caso, S_{t+j} denota el stock de ahorro que el hogar transfiere del periodo $t+j$ a $t+j+1$. El flujo de ahorro es el cambio en el stock de ahorro, o $S_{t+j} - S_{t+j-1}$. Solamente para $j = 0$, el primer periodo, el stock es igual al flujo de ahorro.

- Sea S_{t+T} el stock de ahorro que el hogar transfiere del periodo $t+T$ al periodo $t+T+1$. Como el hogar ya no vive en $t+T+1$ y ningún acreedor financiero va a permitir que el hogar programe decisiones de consumo que impliquen no saldar nunca su deuda, debe darse que $S_{t+T} = 0$. Es decir, la **condición terminal** de este modelo es:

$$S_{t+T} = 0$$

- Para simplificar el modelo, asuma que la tasa de interés real es constante: $r_{t+j} = r$ para todo $j = 0, \ldots, T-1$.

- Al igual que el modelo de dos periodos, utilizando la condición terminal se pueden iterar la secuencia de restricciones presupuestarias.
  - Por ejemplo, para el periodo final se tiene que $S_{t+T-1} = \frac{C_{t+T}}{1+r} - \frac{Y_{t+T}}{1+r}$. Esta ecuación se puede incorporar a la restricción presupuestaria del periodo previo, tal que $S_{t+T-2} = \frac{C_{t+T-1}}{(1+r)} + \frac{C_{t+T}}{(1+r)^2} - \frac{Y_{t+T-1}}{(1+r)} - \frac{Y_{t+T}}{(1+r)^2}$. Luego, repetir con la restricción presupuestaria previa hasta alcanzar el primer periodo.

- Así, se llega a una restricción presupuestaria intertemporal:

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} + \frac{C_{t+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_{t+T}}{(1+r)^T} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r} + \frac{Y_{t+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{Y_{t+T}}{(1+r)^T}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{T} \frac{C_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

- Por tanto, el valor presente descontado del flujo de consumo, $\left\{C_{t+j}\right\}_{j=0}^{T}$, debe ser igual al valor presente descontado del flujo de dotaciones, $\left\{Y_{t+j}\right\}_{j=0}^{T}$

- Las preferencias del hogar son una extensión del modelo de dos periodos:

$$\begin{aligned} U &= u\left(C_t\right) + \beta u\left(C_{t+1}\right) + \beta^2 u\left(C_{t+2}\right) + \beta^3 u\left(C_{t+3}\right) + \ldots \beta^T u\left(C_{t+T}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{T} \beta^j u(C_{t+j}) \end{aligned}$$

Problema de optimización

- El problema de optimización del hogar se reduce a escoger, en t, una secuencia de consumo $\{C_{t+j}\}_{j=0,\cdots,T} = C_t, C_{t+1}, C_{t+2}, \ldots, C_{t+T}$ que maximicen su utilidad total de vida, sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\max_{\{C_{t+j}\}_{j=0,\cdots,T}} \quad U = \sum_{j=0}^{T} \beta^j u(C_{t+j})$$

$$\text{s.a.}$$

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{C_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

- Análogo al caso de dos periodos, es posible obtener una sucesión de Ecuaciones de Euler como parte de las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} u'(C_t) &= \beta(1+r)u'(C_{t+1}) \\ u'(C_{t+1}) &= \beta(1+r)u'(C_{t+2}) \\ u'(C_{t+2}) &= \beta(1+r)u'(C_{t+3}) \\ &\vdots \\ u'(C_{t+T-1}) &= \beta(1+r)u'(C_{t+T}) \end{aligned}$$

- Note que cada ecuación de Euler denota la decisión de consumo intertemporal para periodos adyacentes. Como hay $T+1$ periodos en total, entonces hay T ecuaciones de Euler.

- Además, es posible anidar las ecuaciones de Euler. Por ejemplo, combinando la ecuación de Euler para t y $t+1$, se tiene que $u'(C_t) = \beta^2(1+r)^2 u'(C_{t+2})$.

- En general, existen métodos que simplifican resolver este tipo de problemas. Por el momento, vamos a imponer unos supuestos para desarrollar algunos conceptos económicos.

Suavizamiento del consumo

- Suponga que $\beta(1+r)=1$[2]. Entonces, la secuencia de ecuaciones de Euler implica que:

$$\begin{aligned} u'(C_t) &= u'(C_{t+1}) \\ u'(C_{t+1}) &= u'(C_{t+2}) \\ u'(C_{t+2}) &= u'(C_{t+3}) \\ &\vdots \\ u'(C_{t+T-1}) &= u'(C_{t+T}) \end{aligned}$$

- Es decir, $u'(C_t) = u'(C_{t+1}) = \cdots = u'(C_{t+T-1})$. Dado que la función de utilidad es estrictamente cóncava, entonces $\bar{C} = C_t = C_{t+1} = \cdots = C_{t+T}$. Por tanto, el consumo es constante en el tiempo a un valor $C_{t+j} = \bar{C} \quad \forall j = 0, \cdots, T$.

- **Intuición:** Dado que $\beta < 1$, el hogar prefiere el consumo presente sobre el futuro. Este factor de descuento implica que el hogar va a querer consumir cada vez menos en el tiempo.
  - Como $r > 0$, el hogar tiene incentivos a reducir su consumo presente para ahorrar y tener más consumo futuro (la fuerza contraria).
  - Si $\beta(1+r) > 1$, el hogar querría que su utilidad marginal del consumo caiga en el tiempo. Es decir, que el consumo crezca en el tiempo. Los beneficios de diferir el consumo presente (determinado por r) son mayores que los costos de hacerlo (determinado por β).
  - Si $\beta(1+r) < 1$ ocurre lo opuesto: el hogar es impaciente y la tasa de interés no compensa tal impaciencia, por lo que el hogar le gustaría que el consumo se reduzca en el tiempo.
  - Si $\beta(1+r) = 1$, la impaciencia y el retorno del ahorro se compensan entre sí, por lo que el hogar prefiere una senda de consumo constante en el tiempo.

[2] Esto también quiere decir que el hogar descuenta la utilidad con el mismo factor de descuento de bienes o de mercado: $\beta = \frac{1}{1+r}$

- Si el consumo es constante en $\bar{C}$, entonces la restricción presupuestaria, que debe cumplirse en el óptimo, se simplifica a:

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{C_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{T} \frac{\bar{C}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$
$$\Leftrightarrow \bar{C} \sum_{j=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{Y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

  Como asumimos que $\beta(1+r) = 1$, entonces $\frac{1}{1+r} = \beta$. Así:

$$\bar{C} \sum_{j=0}^{T} \beta^j = \sum_{j=0}^{T} \beta^j Y_{t+j}$$
$$\Leftrightarrow \bar{C} \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} = \sum_{j=0}^{T} \beta^j Y_{t+j}$$
$$\Leftrightarrow \bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \left(\sum_{j=0}^{T} \beta^j Y_{t+j} \right) \tag{1}$$

- Es decir, el consumo $\bar{C}$ es una fracción $\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} < 1$ del valor presente descontado del flujo de ingresos del hogar[3].

[3] Por ejemplo, para el modelo de dos periodos $(T = 1)$,esta fórmula implica que $\bar{C} = \frac{1}{1+\beta} (Y_t + \beta Y_{t+1})$

La propensión marginal al consumo

- Suponga que $\beta(1+r) = 1$, tal que la ecuación de consumo está dada por (1). Entonces, la propensión marginal al consumo, definida como $\frac{\partial \bar{C}}{\partial Y_t}$, está dada por:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial Y_t} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}$$

- Así, la PMC es positiva pero menor que uno, dado que $\beta^{T+1} < \beta$[4]
- Además, la PMC es decreciente en T: entre más periodos viva el hogar, menor será su PMC.
  - Esto tiene implicaciones interesantes si se piensa en el comportamiento de hogares con distintas edades. Por ejemplo, esto implica que las personas jóvenes (alto T) tienen una PMC menor que los hogares de mayor edad.
  - Intuitivamente, esto es porque si el hogar quiere suavizar su consumo, debe incrementar su ahorro en periodos de ingreso alto para financiar el consumo en periodos de ingreso bajo. Entre más periodo viva, mayor es la necesidad de ahorrar en periodos de ingreso alto.

Cambios permanentes vs. transitorios de ingreso

- Considere un cambio en el ingreso Y_t. Entonces, como vimos, la PMC es

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial Y_t} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \tag{2}$$

- Con PMC<1 y decreciente en T. Similarmente, para un cambio en el ingreso esperado en el periodo $t+j$, Y_{t+j}, la PMC es

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial Y_{t+j}} = \beta^j \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}$$

[4] Claramente, para $T = 0$, la PMC es igual a uno. Pero este es el caso trivial de un hogar que solo vive un periodo.

- Es decir, entre mayor sea j, o más alejado en el futuro sea el choque, menor es el impacto en el consumo presente, dado que $\beta < 1$
  - Es decir, el hogar ajusta mucho menos su consumo a cambios anticipados de ingreso futuro, en especial aquellos que son muy al futuro
- Por ejemplo, suponga que $T \to \infty$, es decir, el hogar vive un periodo muy extenso de tiempo. Así, $\beta^{T+1} \to 0$. Por tanto, la PMC (2) se reduce a $1-\beta$. Si β es cercano a uno, entonces la PMC tendería a cero.
  - Por ejemplo, $\beta = 0.95$ implica una PMC de 0.05
  - Es decir, el hogar ahorrar casi la totalidad del ingreso extra para distribuirlo en un horizonte amplio de vida
- Ahora, pensemos en choques transitorios vs persistentes. Derivando totalmente la función de consumo (1):

$$d\bar{C} = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta}\left[dY_t + \beta dY_{t+1} + \beta^2 dY_{t+2} + \cdots + \beta^T dY_{t+T}\right]$$

- Suponga un choque transitorio: $dY_t > 0$ y $dY_{t+j} = 0$, para $j > 0$. Entonces:

$$\frac{d\bar{C}}{dY_t} = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta}$$

- Suponga un choque permanente de ingreso, con $dY_t > 0$ y $dY_{t+j} = dY_t$ para $j > 0$. Así,

$$\begin{aligned} d\bar{C} &= \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} dY_t \left[1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^T\right] \\ &= \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta}\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} dY_t \\ &= dY_t \end{aligned}$$

- Es decir, la PMC es uno, $\frac{d\bar{C}}{dY_t} = 1$.
- **Por tanto:** los movimientos en el consumo están mayoritariamente explicados por choques de ingreso permanente: La PMC es muy baja para choques transitorios, pero alta para choques persistentes.
  - Esto es lo que se conoce como la **Hipótesis del Ingreso Permanente**[5]
  - Este modelo se diferencia a la visión Keynesiana $C = C_0 + cY$, con $c < 1$. Bajo esta visión, el consumo responde con cualquier choque en el ingreso presente, sin importar la naturaleza del choque o su persitencia. Además, el consumo es independiente de la tasa de interés y el futuro no es relevante.
  - La visión Keynesiana tiene implicaciones de política muy fuertes que son opuestas a la Hipótesis del Ingreso Permanente. Por ejemplo, recortes tributarios transitorios tendrían un fuerte efecto en el consumo bajo la perspectiva keynesiana, pero un impacto muy limitado bajo la HIP.

Ciclo de vida

- Suponga que un hogar empieza su adultez en el periodo t, espera pensionarse en el periodo $t + R$ (R es la fecha del retiro) y espera estar muerto a partir del periodo $t + T$ (T es la fecha de la muerte). Suponga que el hogar inicia con Y_t unidades de consumo
- Previo a su fecha de retiro, el ingreso crece a una tasa bruta de $G_y = 1 + g_y$, con g_y la tasa de crecimiento neta. Así, si $G_y = 1$, el ingreso permanece constante en $Y_t \quad \forall t$.
- Después del periodo $t + R$,el ingreso se mantiene constante en Y^R, que puede pensarse como la pensión.

[5]Friedman, M. (1957). The permanent income hypothesis. A theory of the consumption function (pp. 2037). Princeton University Press.Friedman (1957)

- ¿Cómo se comporta el consumo óptimo de este hogar? De la ecuación (1):

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\left[Y_t + \beta G_Y Y_t + \beta^2 G_Y^2 Y_t + \cdots + \beta^R G_Y^R Y_t + \beta^{R+1} Y^R + \beta^{R+2} Y^R + \cdots + \beta^T Y^R\right]$$

Separando las sumas:

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} Y_t \left[1 + \beta G_Y + (\beta G_Y)^2 + \cdots + (\beta G_Y)^R\right] +$$
$$\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \beta^{R+1} Y^R \left[1 + \beta + \cdots + \beta^{T-R-1}\right]$$

Utilizando el hecho de que

$$1 + \beta G_Y + (\beta G_Y)^2 + \cdots + (\beta G_Y)^R = \frac{1-(\beta G_Y)^{R+1}}{1-\beta G_Y}$$
$$1 + \beta + \cdots + \beta^{T-R-1} = \frac{1-\beta^{T-R}}{1-\beta}$$

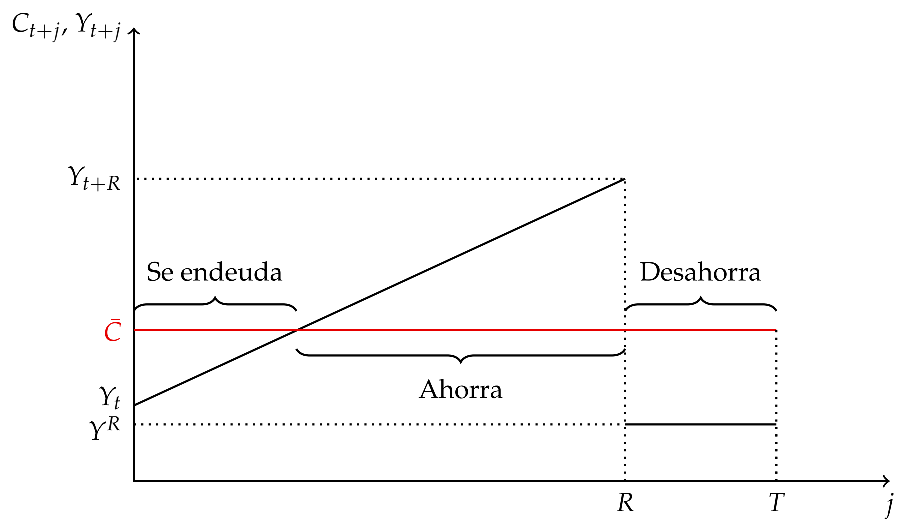
Entonces, la función de consumo viene dada por:

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \frac{1-(\beta G_Y)^{R+1}}{1-\beta G_Y} Y_t + \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \beta^{R+1} \frac{1-\beta^{T-R}}{1-\beta} Y^R$$

- Note que:
  - Si $T = R$ (el hogar se pensiona el mismo periodo en el que muere), entonces el segundo término de la ecuación anterior desaparece
  - El consumo es creciente en Y_t y en Y^R. Además, es creciente en g_Y
  - Si la pensión Y^R no es muy alta, entonces el consumo es creciente en R (es decir, el hogar decidirá consumir más entre más periodos planee trabajar)

- El gráfico 1 resume el comportamiento del flujo de ingresos, de consumo y ahorro bajo los supuestos dados. Como vimos, el hogar que inicia con un stock de ahorro de cero inicia con un periodo de endeudamiento, para después iniciar una acumulación de recursos hasta terminar con un stock de ahorro en el periodo R que le permita financiar su retiro, donde su ingreso se reduce a Y^R.

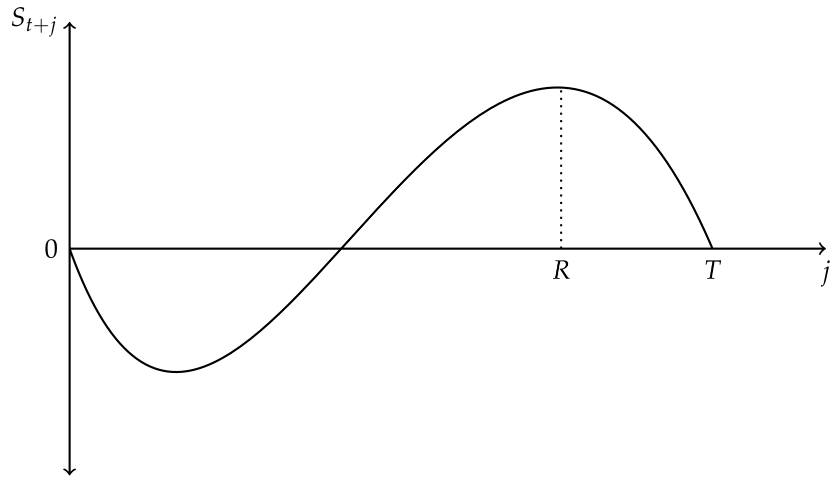
Gráfico 1: Ciclo de vida



- ¿Cómo se comporta el stock de ahorro? El gráfico 2 muestra el stock de ahorro predicho por el modelo. El stock empieza en cero, dado que supusimos un hogar sin riqueza inicial. El stock empieza a crecer negativamente (es decir, el hogar acumula deuda o pasivos) hasta un punto de inflexión, donde el hogar revierte la tendencia y empieza a acumular activos hasta su fecha de retiro o pensión. Posterior al retiro, el hogar empieza a desacumular gradualmente su stock de ahorros hasta agotarlo completamente.
  - Esta es la hipótesis del ciclo de vida de Modigliani y Brumberg (1954)[6]

[6]Modigliani, F. & Brumberg, R. (1954). Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. Franco Modigliani, 1(1), 388-436.

Gráfico 2: El stock de ahorro a lo largo del ciclo de vida



- La hipótesis del ciclo de vida es bastante intuitiva, dado que de una forma u otra, todos planeamos nuestra jubilación (o confiamos en que el gobierno lo haga).
  - Scholz et al. (2006)[7] demuestran que el 80% de los hogares mayores de 50 años habían acumulado al menos tanta riqueza como prescribe un modelo de ciclo de vida, y que el déficit de riqueza del 20% restante es relativamente pequeño, lo que apoya el modelo.
  - Por otro lado, muchos estudios también han encontrado que el consumo disminuye en la jubilación. Por ejemplo, Bernheim et al. (2001)[8] muestran que hay una caída en el consumo en la jubilación y que es mayor en las familias con menores tasas de reemplazo de los beneficios de la Seguridad Social y de pensiones. Esta predicción es contraria a la hipótesis del ciclo de vida.

[7] Scholz, J. K., Seshadri, A., & Khitatrakun, S. (2006). Are Americans saving "optimally" for retirement? Journal of Political Economy, 114(4), 607-643.

[8] Bernheim, B. D., Skinner, J., & Weinberg, S. (2001). What accounts for the variation in retirement wealth among U.S. households? American Economic Review, 91(4), 832-857.