Enfoque intertemporal del consumo y del ahorro*

Jonathan Garita

Introducción

- La macroeconomía moderna es dinámica, y microfundada. Los agentes toman decisiones basados en la mejor información posible para programar sus decisiones. Los agentes son prospectivos, es decir, miran hacia adelante para tomar decisiones.

- En este tema nos enfocamos en las decisiones de consumo y ahorro. La idea es poder responder preguntas tales como:

1. ¿Cómo evoluciona el consumo y el ahorro a cambios en las tasas de interés y en el ingreso de las personas?

2. ¿Las personas ahorran lo suficiente para su jubilación/pensión?

3. ¿Bajo qué condiciones una reducción de impuestos estimula el consumo?

4. ¿Por qué el consumo es menos volátil que el ingreso?

5. ¿Cómo responde el consumo a políticas de estímulo?

6. ¿Qué determina el ahorro agregado de un país?

*Referencias: Capítulo 9 GLS, capítulo 4 Williamson.

- El consumo representa entre 60 y 70% del PIB de los países. Además, es uno de los componentes de la demanda interna menos volátiles.

Configuración del modelo

- Algunos supuestos:
  - Un hogar (consumidor) representativo[1]
  - Un modelo de dos periodos: presente y futuro (hoy y mañana)
  - No hay dinero: Las variables son expresadas en términos reales (unidades de bienes de consumo)
  - No hay incertidumbre. Las variables futuras se conocen con certeza.
- El ingreso de este consumidor es exógeno y conocido con certeza:
  - Recibe Y_t hoy
  - Recibe Y_{t+1} mañana
- Y_t y Y_{t+1} pueden pensarse como dotaciones. $\{Y_t, Y_{t+1}\}$ es el flujo (esperado en t) de dotaciones.
- Suponga que el precio de una unidad de consumo es 1. Esto quiere decir que el consumo es el numerario del modelo: la unidad de cuenta es una unidad de consumo. Así, una unidad de ingreso compra una unidad de consumo.
- El consumidor decide, en el periodo t, sus decisiones de consumo presente C_t y consumo futuro, C_{t+1}
- El hogar puede ahorrar y pedir prestado a una tasa de interés real r_t. Sea S_t el stock de ahorro neto[2]. S_t puede ser negativo, lo que denotaría un stock de deuda. El cambio en el stock de ahorro es el flujo de ahorro: $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$.

[1] En general, se habla de un hogar como el agente macroeconómico que toma decisiones de consumo privado, ahorro privado y oferta laboral.

[2] En macroeconomía, una variable stock se refiere a una cantidad acumulada en un momento determinado, mientras que una variable flujo se refiere a una cantidad que se mide durante un período de tiempo determinado. En este caso, el stock de ahorro S_t añade todas las decisiones de

- Suponga, por simplicidad, que el hogar hereda un stock de ahorro igual a cero del periodo anterior a t: $S_{t-1} = 0$. Por tanto, el stock de ahorro S_t es igual al flujo de ahorro en t: $\Delta S_t = S_t - S_{t-1} = S_t$. El flujo de ahorro en el periodo $t+1$ es $\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t$ e indicaría si el hogar aumento o disminuyó su ahorro neto.

Restricciones presupuestarias

- El hogar decide cuánto ahorrar y cuánto consumir en cada período. Pero está sujeto a una restricción presupuestaria en cada período:

$$C_t + S_t \leq Y_t$$

$$C_{t+1} + S_{t+1} \leq Y_{t+1} + (1 + r_t)\, S_t \tag{1}$$

- La presencia del ahorro conecta ambos periodos, lo que hace el problema dinámico. Mayor ahorro en t (es decir, menor consumo en t) se traduce en mayor ingreso disponible para consumo en $t+1$.

- Note que la restricción presupuestaria temporal (1) puede escribirse como:

$$C_{t+1} + \underbrace{S_{t+1} - S_t}_{\text{Flujo de ahorro}} \leq Y_{t+1} + \underbrace{r_t S_t}_{\text{retorno neto de ahorro}}$$

  Con $S_{t+1} - S_t$: el flujo de ahorro, es decir, si el hogar aumenta o disminuye su stock de ahorro.

- Suponga un hogar con preferencias monótonas (mayor consumo, mayor bienestar o utilidad). Entonces el hogar no va a desperdiciar recursos. Por tanto, las restricciones temporales se cumplen en igualdad.

ahorro o endeudamiento de los periodos anteriores. Por ejemplo, S_t>0 implica que el hogar acumuló activos financieros netos (ahorro neto) y termina con un saldo positivo, mientras que $S_t < 0$ que el hogar acumuló pasivos financieros netos (deuda neta). Por neto, se refiere a que un hogar puede tener, simultáneamente, activos y pasivos financieros, por lo que $S_t = Activos_t - Pasivos_t$. S_t por tanto, resume la posición financiera del hogar: si es un deudor (posición neta negativa) o un acreedor neto (posición neta positiva).

- Similarmente, las preferencias monótonas implican que el hogar no va a querer terminar $t+1$ con una posición financiera positiva, es decir, un stock de ahorro $S_{t+1} > 0$. Esto porque solo vive dos periodos y no tiene sentido dejar recursos ociosos que nadie va a usar.

- Sin embargo, el hogar si buscaría $S_{t+1} < 0$. Es decir, terminar su periodo de vida con deuda que no va a pagar. Vamos a asumir que el sector financiero prohibe al hogar programar decisiones de consumo y ahorro que impliquen una deuda que no va a pagar. Por tanto, se llega a la **condición terminal:**

$$S_{t+1} = 0$$

- Así, las restricciones presupuestarias pasan a ser:

$$\begin{aligned} C_t + S_t &= Y_t \\ C_{t+1} &= Y_{t+1} + (1+r_t)\, S_t \end{aligned}$$

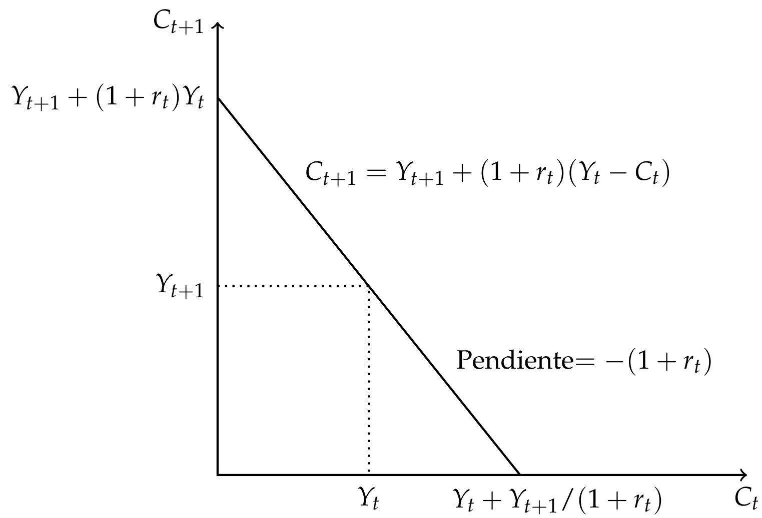
- Combinando ambas expresiones, se llega a una **restricción presupuestaria intertemporal:**

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

- Nos dice que el **valor presente** del flujo de gastos tiene que ser igual al valor presente del flujo de ingresos. Gráficamente, expresamos C_{t+1} en función de C_t :

$$C_{t+1} = (1+r_t)\, Y_t + Y_{t+1} - (1+r_t)\, C_t$$

Gráfico 1: Restricción presupuestaria intertemporal



- Bajo preferencias monótonas, el hogar va a elegir una cesta de consumo presente y futuro sobre la frontera de la restricción presupuestaria. El interior no es óptimo (implica desperdicio) y el exterior no es asequible.

- Note que la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal es $-(1 + r_t)$: el precio relativo de una unidad de consumo presente en términos de una unidad de consumo futuro.

- Además, note que el punto de dotación siempre es asequible. Es decir, el hogar puede decidir $C_t = Y_t$ y $C_{t+1} = Y_{t+1}$. En tal caso, el ahorro sería cero. Si $C_t > Y_t$, entonces el hogar estaría reduciendo su ahorro (es deficitario) y si $C_t < Y_t$ más bien estaría incrementando su stock de ahorro (es superavitario). ¿Qué determina si el hogar es superavitario o deficitario? Sus preferencias por el consumo, incluyendo qué tan impaciente es.

Preferencias del hogar

- ¿Qué punto de la restricción presupuestaria intertemporal elige el hogar? Depende de sus preferencias por consumo y ahorro.
- Vamos a resumir dichas preferencias en una función de utilidad, que mide la felicidad o bienestar que le genera al hogar el consumo presente y futuro:
$$U\left(C_t, C_{t+1}\right) = u\left(C_t\right) + \beta u\left(C_{t+1}\right)$$
- $U\left(C_t, C_{t+1}\right)$ es la función de utilidad total
  - Agrega la utilidad de las elecciones del consumidor a lo largo de su vida
- $u\left(C_t\right)$ es la función de utilidad instantánea
  - Nos da la utilidad de la elección del consumo en cada periodo
  - Es la misma función para todos los periodos
  - La utilidad marginal es positiva (preferencias monótonas) pero decreciente: $\frac{du(c)}{dc} = u_c(c) > 0$ y $\frac{d^2u(c)}{d^2c} = u_{cc}(c) < 0$
- $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento que utiliza el hogar para **descontar flujos de utilidad**
  - Como $\beta < 1$, entonces el hogar le pone menos peso a la utilidad devengada en $t+1$ que la generada en t
  - Es decir, es un factor de impaciencia: entre mayor sea β,mayor es la preferencia por el consumo presente.
  - En algunas ocasiones, el factor de descuento del hogar coincide con el factor de descuento de bienes, $\frac{1}{1+r_t}$. En ese caso, $\beta(1+r_t) = 1$.

La tasa marginal de sustitución intertemporal

- Suponga que el hogar elige una cesta de consumo $(C_{0,t}, C_{0,t+1})$, lo que genera un nivel de utilidad $U_0 = u(C_{0,t}) + \beta u(C_{0,t+1})$. Diferenciando totalmente dicha utilidad total alrededor de $(C_{0,t}, C_{0,t+1})$:

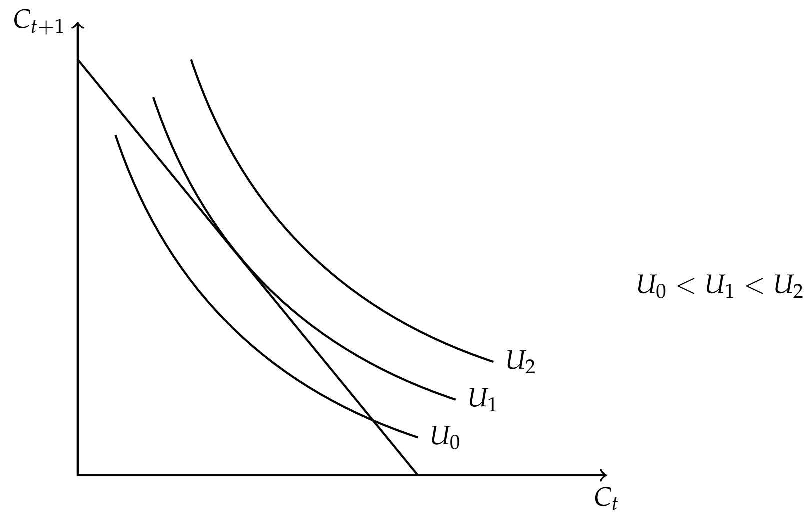
$$dU = u'(C_{0,t})\, dC_t + \beta u'(C_{0,t+1})\, dC_{t+1}$$

- Por definición, una curva de indiferencia son aquellas combinaciones de (C_t, C_{t+1}) que generan un mismo nivel de utilidad total. Por tanto, suponiendo que los cambios dC_t y dC_{t+1} se mantienen sobre una misma curva de indiferencia, entonces $dU = 0$. Así:

$$\frac{dC_{t+1}}{dC_t} = -\frac{u'(C_{0,t})}{\beta u'(C_{0,t+1})}$$

- Es decir, la pendiente de la curva de indiferencia $U = U_0$ en $(C_{0,t}, C_{0,t+1})$ es igual al negativo de la razón de utilidades marginales de consumo de los periodos t y $t+1$ consumption.
  - Como las utilidades marginales son positivas, la pendiente de la curva de indiferencia es negativa (Ver Gráfico 2).
  - Como las utilidades marginales son decrecientes, las curvas de indiferencia son convexas: Si C_t es muy pequeño, la utilidad marginal del consumo presente es relativamente alta y, dado que la utilidad total está fija, la utilidad marginal del período futuro es relativamente baja. Así, la razón de utilidades es alta, es decir, la pendiente es inclinada. Caso inverso para C_t muy alto o C_{t+1} muy bajo.

Gráfico 2: Curvas de indiferencia



Problema de optimización del hogar

- El problema del hogar se resume en escoger C_t y C_{t+1} en el periodo t que maximicen su utilidad total, sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\max_{C_t, C_{t+1}} U = u\left(C_t\right) + \beta u\left(C_{t+1}\right)$$

s.a.

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$$

- La restricción presupuestaria intertemporal se puede escribir como:

$$C_{t+1} = (1 + r_t)(Y_t - C_t) + Y_{t+1}$$

- Sustituyendo la ecuación anterior en la función de utilidad, el problema de optimización se simplifica a uno de una sola variable:

$$\max_{C_t} u(C_t) + \beta u\left((1 + r_t)(Y_t - C_t) + Y_{t+1}\right)$$

- La condición de primer orden con respecto a C_t es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial C_t} &= 0 \\
&\Rightarrow u'(C_t) - \beta u'\left((1 + r_t)(Y_t - C_t) + Y_{t+1}\right)(1 + r_t) = 0 \\
&\Rightarrow u'(C_t) = \beta (1 + r_t) u'\left(\underbrace{(1 + r_t)(Y_t - C_t) + Y_{t+1}}_{C_{t+1}}\right)
\end{aligned}$$

La Ecuación de Euler

- La condición de primer orden se llama **Ecuación de Euler:**

$$u'(C_t) = \beta (1 + r_t) u'(C_{t+1}) \tag{2}$$

- Resume la decisión de cómo gastar una unidad de ingreso: el hogar debe ser indiferente (en el margen) entre destinar una unidad de ingreso para el consumo presente o destinarla para el consumo futuro.
  - De lo contrario, su decisión de consumo intertemporal no es óptima: puede estar mejor intercambiando consumo entre periodos.

- Concretamente, el hogar tiene que decidir cómo utilizar una unidad de ingreso. Como ilustración, suponga que el hogar considera una cesta (C_t, C_{t+1}) que cumple la ecuación de Euler (2).
  - Si el hogar decide adquirir una unidad adicional consumo presente, C_t, debe renunciar a $1 + r_t$ unidades de consumo futuro C_{t+1} pues está sujeto a una restricción presupuestaria y gasta todo su ingreso..
  - El beneficio de una unidad extra de C_t, es utilidad extra en el periodo t de $u'(C_t)$
  - El costo de una unidad extra de C_t es renunciar a $1 + r_t$ unidades de consumo futuro C_{t+1}. Consumir una unidad menos de consumo futuro reduce la utilidad, valorada en el periodo t, en $\beta u'(C_{t+1})$. Así, el costo de utilidad asociado asociado a $1 + r_t$ unidades menos de consumo futuro consumo es $\beta(1 + r_t) u'(C_{t+1})$
- Si el beneficio de una unidad extra de C_t es mayor al costo asociado, entonces la cesta original (C_t, C_{t+1}) no es óptima: el hogar puede estar mejor. Así, si el beneficio se ve compensado totalmente por el costo, entonces la cesta (C_t, C_{t+1}) es óptima, el hogar no puede mejorar dado su restricción presupuestaria.

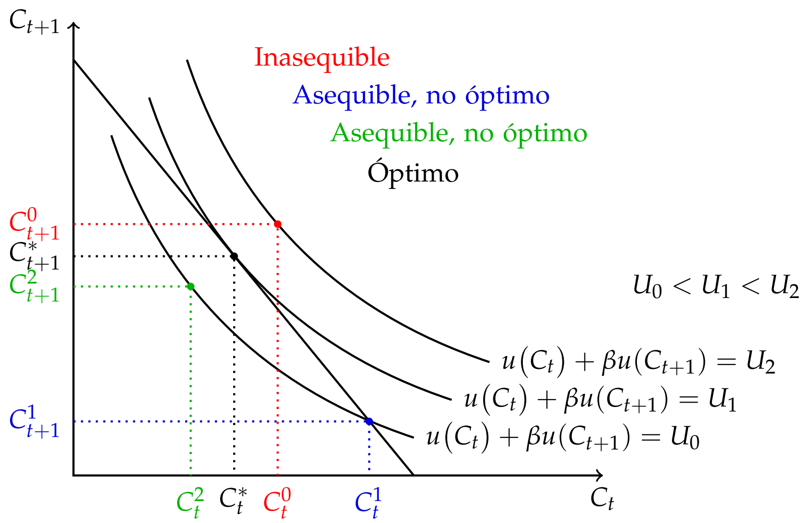
Visualización gráfica de la condición de optimalidad

- La Ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = 1 + r_t$$

- Note que el lado izquierdo es el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia, mientras que el lado derecho es el valor absoluto de la pendiente de la restricción presupuestaria. Es decir, en optimalidad, el hogar decide C_t y C_{t+1} tales que la curva de diferencia asociada a dicha cesta de consumo es tangente a la restricción presupuestaria intertemporal:

Gráfico 3: Condición de optimalidad



- Como muestra el gráfico 3, la cesta (C_t^0, C_{t+1}^0) no es asequible, mientras que la cesta (C_t^2, C_{t+1}^2) es asequible pero no óptima (hay desperdicio).

- La cesta (C_t^1, C_{t+1}^1) agota todos los recursos pero no es óptima: La pendiente de la curva de indiferencia asociada a dicha cesta es menor a la pendiente de la restricción presupuestaria, por lo que el consumidor puede incrementar su utilidad aumentado su consumo futuro y renunciando a consumo presente. El beneficio de tal decisión es mayor al respectivo costo, lo que le permitiría moverse a una curva de indiferencia (y por tanto, un nivel de bienestar) más alto.

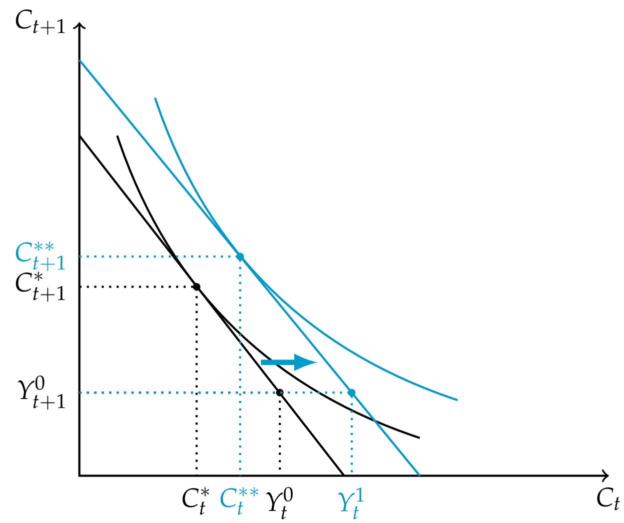
  – Esto implica desplazarse hacia la izquierda, hasta el óptimo en (C_t^*, C_{t+1}^*)

Choques de ingreso

Choque de ingreso presente Y_t

- Suponga un incremento transitorio en Y_t: $\Delta Y_t > 0, \Delta Y_{t+1} = 0$. Suponga que el punto inicial está denotado por (C_t^*, C_{t+1}^*).
- Esto desplaza la restricción presupuestaria intertemporal hacia la derecha. Esto porque aumentó el ingreso permanente del hogar.
  - La pendiente se mantiene, pues la tasa de interés r_t no ha cambiado.

Gráfico 4: Incremento en Y_t



- El nuevo equilibrio implica un aumento en el consumo presente, $\Delta C_t > 0$ pero también un incremento en el consumo futuro, $\Delta C_{t+1} > 0$. Es decir, el hogar transfiere parte de la mayor riqueza presente al mañana. ¿Cómo? Mediante más ahorro. Es decir, $\Delta S_t > 0$ ante $\Delta Y_t > 0$.

- **Prueba:** Sabemos que $S_t = Y_t - C_t$. Así, $\Delta S_t = \Delta Y_t - \Delta C_t$. Entonces, hay que probar que $\Delta Y_t > \Delta C_t$, es decir, que el consumo aumenta menos que el cambio en el ingreso presente. Suponga una función con utilidad marginal decreciente[3]
  - Suponga por contradicción que $\Delta C_t = \Delta Y_t$. Entonces, de la ecuación de Euler: $u'\left(C_t^* + \Delta Y_t\right) < \beta\left(1+r_t\right) u'\left(C_{t+1}^*\right)$, que no es condición de equilibrio.
  - Suponga por contradicción que $\Delta C_t > \Delta Y_t$. Entonces el hogar consume por encima de su ingreso, lo que quiere decir que está trayendo ingreso futuro al presente. Sea $\varepsilon > 0$ tal cantidad. Así, $u'\left(C_t^* + \Delta Y_t + \varepsilon/\left(1+r_t\right)\right) < \beta\left(1+r_t\right) u'\left(C_{t+1}^* - \varepsilon\right)$. Que no es condición de equilibrio.
  - Entonces, $\Delta Y_t > \Delta C_t$.
- **Ejemplo:** Bajo preferencias logarítmicas, se puede mostrar que:

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right]$$
$$S_t = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta Y_t - \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right]$$

  - Entonces, $\frac{\partial C_t}{\partial Y_t} = \frac{1}{1+\beta} < 1$ para $0 < \beta < 1$. Así, el consumo aumenta menos que uno a uno con el ingreso.
  - Similarmente, $\frac{\partial S_t}{\partial Y_t} = \frac{\beta}{1+\beta} > 0$.
- $\frac{\partial C_t}{\partial Y_t}$ se le denomina como **la propensión marginal del consumo (PMC).**
- En general, el hecho que los hogares distribuyan su mayor ingreso permanente entre los periodos revela una preferencia por el **suavizamiento del consumo.** La convexidad de las preferencias hace que los hogares prefieran un flujo de consumo relativamente constante. Entonces, para suavizar el choque de ingreso, recurren al ahorro o endeudamiento para que el choque no golpee exclusivamente un periodo.

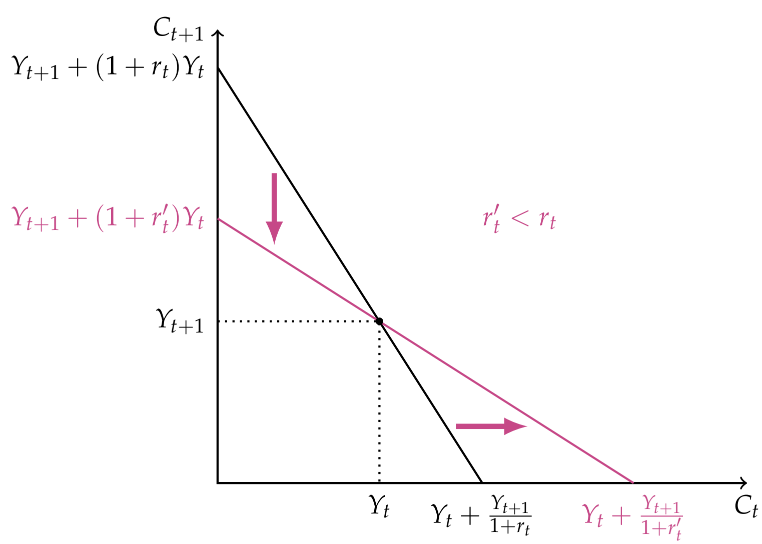
[3] Es decir, este resultado es general para toda función con utilidades marginales positivas y decrecientes.

- El caso de un **choque de ingreso futuro** Y_{t+1} es análogo: desplaza la restricción presupuestaria hacia afuera, incrementando el consumo presente y el consumo futuro. Es decir, el hogar distribuye el choque de ingreso futuro entre ambos periodos mediante el ahorro.

Choques de tasa de interés r_t

- Los cambios en la tasa de interés implica un cambio en la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal.
- Como el punto de dotación siempre es asequible, entonces gráficamente la restricción presupuestaria giraría alrededor de dicho punto de dotación. Es decir, una zona de consumo se vuelve asequible mientras que otra deja de serlo.
- Suponga una caída en la tasa de interés, con $r'_t < r_t$. ¿Qué pasa con el consumo?

Gráfico 5: Caída en r_t



- El cambio en la tasa de interés induce efectos ingreso y sustitución

– La caída en r_t implica que el consumo presente es relativamente más barato que el consumo futuro. Entonces el hogar va a sustituir consumo futuro por consumo presente, que es más barato. Esto es el **efecto sustitución:** $\downarrow r_t \Rightarrow \uparrow C_t, \downarrow C_{t+1}$

– La caída en r_t afecta el ingreso permanente de la persona. Si el hogar inicialmente es ahorrante, entonces $\downarrow r_t$ implica una caída en su ingreso permanente. Como el consumo en ambos períodos es un bien normal, entonces $\downarrow r_t \Rightarrow \uparrow C_t, \downarrow C_{t+1}$. Pero, si el hogar inicialmente es deudor, la caída en r_t implica un mayor ingreso permanente pues ahora debe pagar menos intereses por endeudarse. Así, $\downarrow r_t \Rightarrow \uparrow C_t, \downarrow C_{t+1}$. Esto es el **efecto ingreso.**

– Por tanto, el efecto final de r_t sobre el consumo depende de la posición financiera del hogar: si es ahorrante o deudor.

Cuadro 1: Efectos en consumos de un aumento en r_t

		Efecto sustitución	Efecto ingreso	Efecto total
C_t				
	Deudor	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	Ahorrante	$\downarrow$	$\uparrow$	?
C_{t+1}				
	Deudor	$\uparrow$	$\downarrow$	?
	Ahorrante	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

La función de consumo

- Empíricamente, el efecto sustitución pareciera ser el dominante. Entonces, vamos a asumir que el consumo está inversamente relacionado a la tasa de interés real.

- Al combinar la ecuación de Euler con la restricción presupuestaria intertemporal, llegamos a la función de consumo:

$$C_t = C_t\left(\underset{+}{Y_t}, \underset{+}{Y_{t+1}}, \underset{-}{r_t}\right) \tag{3}$$

- Esta es una función de consumo microfundada La derivada con respecto a Y_t puede interpretarse como la propensión marginal a consumir.

- Por ejemplo, con una función de utilidad logarítmica, la función de consumo está dada por:

$$C_t = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right]$$

  Con $\frac{\partial C_t}{\partial Y_t} > 0$, $\frac{\partial C_t}{\partial Y_{t+1}} > 0$ y $\frac{\partial C_t}{\partial r_t} < 0$, tal y como establece la forma general (3).

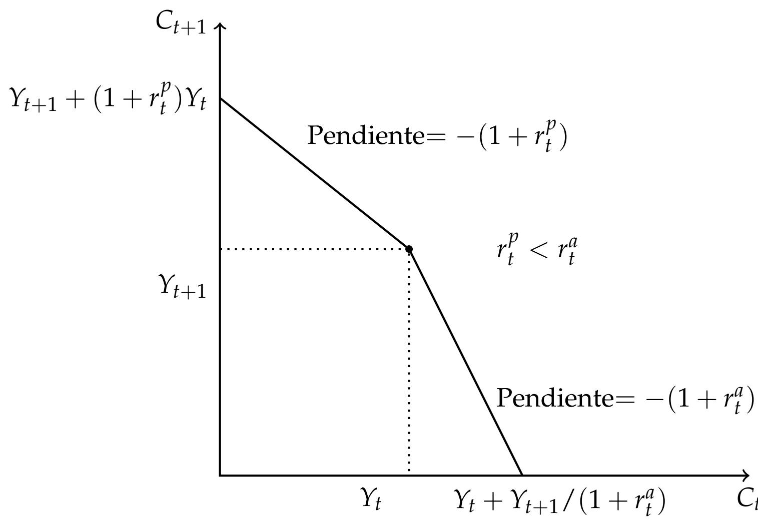
Restricciones crediticias

- En el modelo base, asumimos que los hogares pueden endeudarse libremente.
  - Sin embargo, existe amplia evidencia empírica que los hogares enfrentan restricciones de endeudamiento
- Con libre ahorro/endeudamiento, los hogares pueden suavizar su consumo perfectamente. Así, la propensión marginal al consumo puede ser baja.
  - Los hogares tienden a ahorrar los choques de ingreso transitorios y suavizar los choques adversos mediante el endeudamiento.
- ¿Cómo afectarían restricciones crediticias al modelo, en particular la propensión marginal al consumo? Dos formas de verlo:

- Diferencia en tasas de interés: Una tasa más alta si el hogar se endeuda (tasa activa vs. pasiva o un premio por riesgo).
- Barreras al endeudamiento: el hogar no puede adquirir un crédito para financiar su consumo.

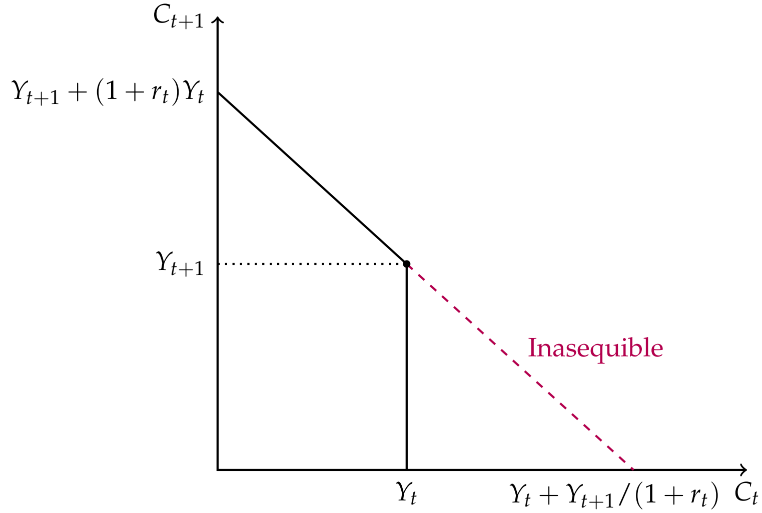
- Suponga que el hogar enfrenta una tasa de interés mayor si se endeuda. Es decir, una tasa activa r_t^a para el endeudamiento y una pasiva r_t^p para el ahorro. Entonces, la restricción presupuestaria estaría dada por:

Gráfico 6: Asimetría de tasas de interés



- En el caso de una restricción de endeudamiento, considere el caso extremo donde el hogar no puede pedir prestado del todo. Entonces, la restricción presupuestaria estaría dada por:

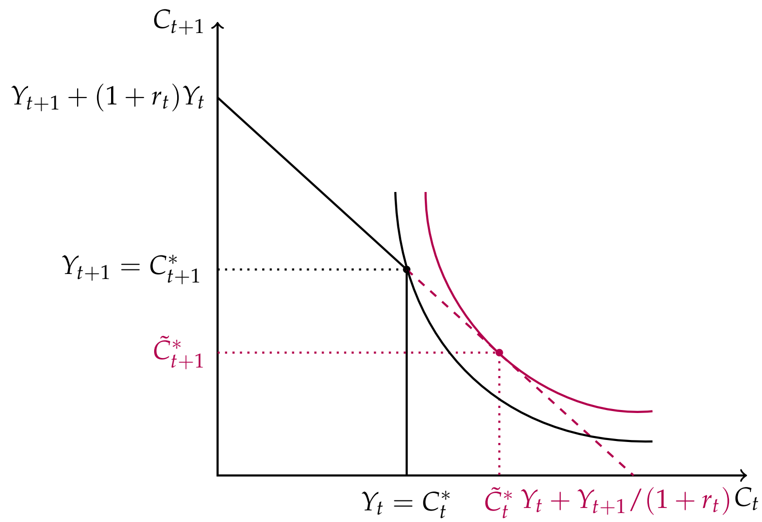
Gráfico 7: Restricción de endeudamiento



- Analicemos intuitivamente el efecto de las restricciones de endeudamiento sobre el consumo. El gráfico 8 muestra el caso de una restricción de endeudamiento vinculante[4]. En el caso sin restricción, el hogar decidiría la cesta $\left(\tilde{C}_t^*, \tilde{C}_{t+1}^*\right)$, que le permitiría un nivel de bienestar dado por la curva de indiferencia roja.
  - Sin embargo, esta decisión involucra $Y_t < C_t^*$, es decir, un endeudamiento que no cumple la restricción de endeudamiento $(Y_t \geq C_t)$. Entonces, este punto es inasequible.
  - Dado que el hogar quiere ser deficitario pero no puede, entonces su mejor decisión es un nivel de ahorro de cero, $Y_t = C_t^*$. Esta decisión cumple la restricción de endeudamiento y garantiza el bienestar más alto posible
  - Gráficamente, el consumo óptimo $\left(C_t^*, C_{t+1}^*\right)$ sería el punto de dotación, con la curva de indiferencia negra. Es decir, un menor bienestar.

[4]La restricción sería no vinculante si el hogar encontrara óptimo ahorrar en lugar de endeudarse. La restricción, en tal caso, no altera el comportamiento del agente, entonces es como si la restricción no existiera.

Gráfico 8: Restricción de endeudamiento vinculante

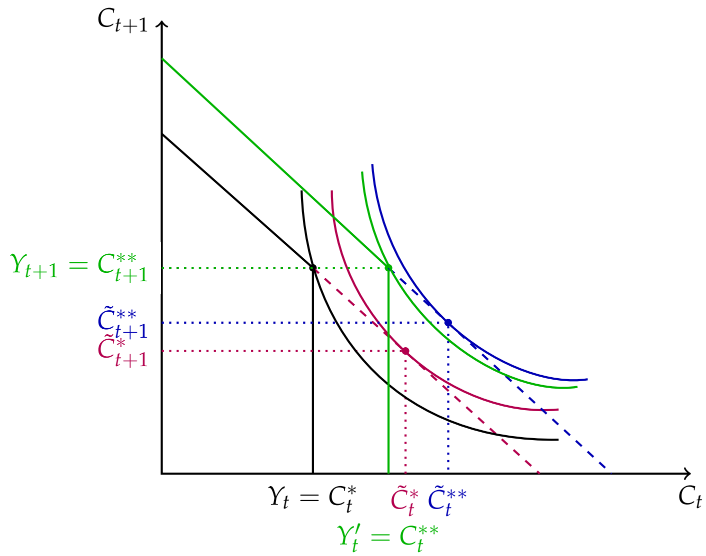


- Considere un incremento solamente en Y_t bajo una restricción de endeudamiento vinculante. El gráfico 9 muestra la estática comparativa
  - El aumento en Y_t desplaza la restricción presupuestaria paralalelamente hacia afuera
  - Sin restricción, el hogar escogería la cesta $\left(\tilde{C}^{**}_t, \tilde{C}^{**}_{t+1}\right)$, con un nivel de utilidad representado por la curva de indiferencia azul. Pero dicho punto no es asequible por la restricción de endeudamiento que estamos imponiendo[5]
  - Entonces, el óptimo es la solución de esquina $\left(C^{**}_t, C^{**}_{t+1}\right)$, con un nivel de utilidad representado por la curva de indiferencia verde. Aunque el choque aumentó el bienestar, la restricción de endeudamiento sigue siendo vinculante e impide alcanzar el bienestar más alto posible según su flujo de dotaciones.

[5] Acá estamos suponiendo que el choque o ΔY_t es lo suficientemente bajo para que el hogar siga siendo deficitario. Puede darse el caso que el choque sea tan grande, que el hogar ahora quiera ser superavitario, lo que hace que la restricción de endeudamiento deje de ser vinculante. Se deja como ejercicio realizar este caso.

- En este caso, la PMC es uno: antes del choque, $C_t^* = Y_t$ y después del choque, $C_t^{**} = Y_t' = Y_t + \Delta Y_t$, por lo que $\Delta C_t^* = \Delta Y_t$. Intuitivamente, el hogar quiere consumir más consumo presente, pero el sector financiero no le permite endeudarse. Entonces, el hogar va a consumir en su totalidad el choque de ingreso hoy pues no tiene incentivo alguno de ahorrar y desde antes del choque quería expandir su consumo presente.

Gráfico 9: Choque de ingreso bajo restricción de endeudamiento



Apéndice: Optimización con restricciones

- Sea $f(\mathbf{x})$ una función, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^i$ un vector. Sea $g(\mathbf{x})$ un vector de j restricciones. Queremos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeto a } g(\mathbf{x}) \leq b$$

- El Lagrangiano asociado es:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda'(b - g(x))$$

  Con λ un vector de dimensión j de multiplicadores de Lagrange

- La solución a este problema, denotada por (x^*, λ^*), está caracterizada por i condiciones de primer orden dadas por:

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i^*} = 0$$

  Además de condiciones de holgura para cada multiplicador de Lagrange j:

$$\begin{aligned}
&\lambda_j^* \geq 0 \\
&\frac{\partial L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial \lambda_j^*} \geq 0 \\
&\frac{\partial L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial \lambda_j^*} \lambda_j^* = 0
\end{aligned}$$

- En el caso del problema del hogar con restricciones de endeudamiento, el problema está dado por

$$\begin{aligned}
&\max_{C_t, C_{t+1}, S_t} \ln(C_t) + \beta \ln(C_{t+1}) \\
&\text{sujeto a} \\
&C_t + S_t = Y_t \\
&C_{t+1} = Y_{t+1} + (1 + r_t) S_t \\
&S_t \geq 0
\end{aligned}$$

- Es decir, tres variables $(i = 3)$ y tres restricciones $(j = 3)$. Pero podemos deshacernos de dos variables al incorporar las dos primeras restricciones dentro de la función de utilidad:

$$\begin{aligned}
&\max_{C_t, C_{t+1}, S_t} \ln(C_t) + \beta \ln(Y_{t+1} + (1 + r_t)(Y_t - C_t)) \\
&\text{sujeto a} \\
&Y_t \geq C_t
\end{aligned}$$

- El Lagrangiano viene dado por:

$$L = \ln(C_t) + \beta \ln(Y_{t+1} + (1 + r_t)(Y_t - C_t)) + \lambda (Y_t - C_t)$$

- La condición de primer orden para C_t viene dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \beta (1 + r_t) \frac{1}{Y_{t+1} + (1 + r_t)(Y_t - C_t)} - \lambda = 0$$

  Es decir:

$$\frac{1}{C_t} = \beta (1 + r_t) \frac{1}{C_{t+1}} + \lambda \tag{4}$$

Que es la misma ecuación de Euler más un término adicional: el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción crediticia.

- Las condiciones de holgura están dadas por:

$$\begin{aligned}
&\lambda \geq 0 \\
&Y_t \geq C_t \\
&(Y_t - C_t)\,\lambda = 0
\end{aligned}$$

- Entonces tenemos tres casos:

1. $\lambda = 0, \quad Y_t = C_t$: Este caso implica que el hogar ahorra cero y consume exactamente su dotación, pero por preferencias y dotaciones, no por la imposición de la restricción crediticia. Sustituyendo en la ecuación de Euler (4):

$$\frac{1}{Y_t} = \beta\,(1 + r_t)\,\frac{1}{Y_{t+1}}$$

   Es decir, este caso se da si y solo si $Y_{t+1} = \beta\,(1 + r_t)\,Y_t$[6]. Es decir, cuando el valor presente del ingreso futuro es igual al ingreso presente.

2. $\lambda = 0, \quad Y_t > C_t$: Este caso implica que el hogar ahorra. Es decir, que la restricción de endeudamiento no es vinculante. Sustituyendo en la ecuación de Euler (4):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_t} &= \beta\,(1 + r_t)\,\frac{1}{Y_{t+1} + (1 + r_t)\,(Y_t - C_t)} \\
\Rightarrow C_t &= \frac{1}{1 + \beta}\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1 + r_t}\right)
\end{aligned}$$

[6]Recuerde que todas estas variables son exógenas.

Este caso es únicamente factible cuando:

$$\begin{aligned} & Y_t > C_t \\ \Leftrightarrow\ & Y_t > \frac{1}{1+\beta}\left(Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) \end{aligned}$$

Es decir

$$Y_t > \frac{Y_{t+1}}{\beta\,(1+r_t)}$$

Alternativamente, cuando el ingreso presente es mayor que el valor presente que el ingreso futuro.

3. $\lambda > 0, \quad Y_t = C_t$: Este caso implica una solución de esquina (consumir su dotación) porque la restricción de endeudamiento es vinculante. Sustituyendo en la ecuación de Euler (4):

$$\frac{1}{Y_t} = \beta\,(1+r_t)\,\frac{1}{Y_{t+1}} + \lambda$$

Este caso es únicamente factible cuando:

$$\begin{aligned} \lambda &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Y_t} - \beta\,(1+r_t)\,\frac{1}{Y_{t+1}} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{Y_{t+1}}{\beta\,(1+r_t)} &> Y_t \end{aligned}$$

Es decir, cuando el valor presente del ingreso futuro sea mayor al valor del ingreso presente.