EC3201 Teoría Macroeconómica II
Decisiones de consumo y ahorro

Prof. Jonathan Garita*

17 de marzo de 2024

1. Introducción

El consumo de los hogares es un determinante clave del bienestar y, como resultado, desempeña un papel fundamental en muchas áreas de la macroeconomía, como el crecimiento, los ciclos económicos, la desigualdad, la tributación y la fijación de precios de activos. El crecimiento del consumo agregado con el tiempo es un claro indicador del aumento de la prosperidad de una sociedad. La estabilidad del consumo total es fundamental para el bienestar de la sociedad, por lo que tanto la política fiscal como la monetaria trabajan para mantenerlo estable, especialmente durante los ciclos económicos.

Debido a que sus fluctuaciones a lo largo del ciclo económico son costosas para los hogares, tanto la política fiscal como la monetaria hacen grandes esfuerzos para estabilizar los gastos de consumo agregados. La manera en que se distribuye el consumo entre la población es un indicador más confiable de la desigualdad en el nivel de vida entre los hogares que los ingresos. Ante ello, las políticas redistributivas y de seguridad social buscan garantizar un nivel mínimo de consumo por encima del umbral de pobreza para todos los hogares y mitigar el impacto de las pérdidas de ingresos en el gasto familiar (y, en consecuencia, en su bienestar). Finalmente, las elecciones de consumo de los ahorrantes determinan en buena medida los precios de activos en los mercados financieros.

La teoría y la práctica de las decisiones de consumo han captado la atención de los economistas debido a su importancia central. Deaton (1992) destaca cómo los esfuerzos por entender los patrones de ahorro y consumo han generado algunos de los avances más significativos en economía. La necesidad de fundamentar teorética y empíricamente la relación entre consumo e ingreso condujo a los primeros ejemplos de optimización dinámica prospectiva y ha enriquecido continuamente el marco de optimización. La disponibilidad

*Versión 2.0. Estas notas están en construcción. Para acceder a la versión más reciente, visite el sitio web del curso: https://jggarita.github.io/MacroIntermedia/Journal.html de nuevas fuentes de datos microeconómicos ha permitido la aplicación de técnicas avanzadas de econometría para probar modelos y medir variables clave. Estos avances han sido incorporados en modelos de equilibrio general que son fundamentales para estudiar ciclos económicos, desigualdad y políticas gubernamentales en macroeconomía.

Estas notas ofrecen una introducción básica a esta amplia literatura, destacando los avances teóricos y la relevancia práctica, con el objetivo de proporcionar una base sólida para aquellas personas estudiantes que inician su formación en un pregrado en economía.

2. Visión Keynesiana

Keynes (1936) hizo la siguiente observación sobre las decisiones de consumo:

"La ley psicológica fundamental, en la cual tenemos derecho a depender con gran confianza tanto a priori desde nuestro conocimiento de la naturaleza humana como de los hechos detallados de la experiencia, es que los hombres están dispuestos, por regla general y en promedio, a aumentar su consumo a medida que aumenta su ingreso, pero no en la misma medida que el aumento en el ingreso."

¿Qué significa esto? ¿Es esta teoría correcta? Primero traduzcamos esta teoría al lenguaje matemático y luego intentemos evaluarla. En primer lugar, está afirmando que cuánto consumen las personas depende de su ingreso, lo cual parece bastante razonable. Usemos C para denotar el consumo y Y para denotar el ingreso. Keynes dice que hay una función $c(\cdot)$ (a veces conocida como función de consumo) que relaciona el consumo con el ingreso:

$$C = c(Y) \tag{2.1}$$

Por ejemplo, se puede pensar en una forma: $c_t = \bar{c} + \gamma y_t$, con $\gamma < 1$. Este modelo dice que el consumo depende del ingreso de una manera específica. Dice que el hogar siempre consume una fracción exógena del ingreso presente y que:

$$c'(Y) < 1 \tag{2.2}$$

Entonces, cuando el ingreso aumenta en una unidad, el consumo aumenta pero en menos de una unidad. La cantidad $c'(Y)$ se conoce como la "propensión marginal al consumo". Mide cuánto de un dólar adicional de ingreso se destina al consumo.

El modelo Keynesiano está diciendo algo más: que si el ingreso aumenta 1 %, el consumo aumenta, pero en menos de 1 %, por lo que la elasticidad del consumo con respecto al ingreso es positiva pero menor que 1. Matemáticamente:

$$\frac{c'(Y)Y}{c(Y)} = \frac{\partial \log(c(Y))}{\partial \log(Y)} < 1 \tag{2.3}$$

3. Un modelo dinámico de dos períodos

Hay un único hogar representativo. Este hogar vive durante dos períodos, t (el presente) y $t+1$ (el futuro). El problema de consumo-ahorro es dinámico, así que es importante que haya algún período futuro. El hogar recibe un flujo exógeno de ingresos tanto en el presente como en el futuro, que denotamos como y_t y y_{t+1}. Para simplificar, suponga que el hogar entra en el período t sin riqueza alguna. En el período t, puede consumir, c_t, o ahorrar, S_t, su ingreso, con $S_t = y_t - c_t$. El ahorro podría ser positivo, cero o negativo (es decir, pedir prestado). Si el hogar lleva un saldo de S_t al período $t+1$, obtiene $(1+r_t)\,S_t$ unidades adicionales de ingreso (o, en caso de endeudarse, tiene que renunciar a $(1+r_t)\,S_t$ unidades de ingreso). r_t es la tasa de interés real. Todo aquí es "realz está denominado en unidades de bienes. Por ejemplo, piense en unidades de fruta o cocos.

El hogar enfrenta una secuencia de restricciones presupuestarias de flujo, una restricción para cada período. Las restricciones presupuestarias dicen que el gasto no puede superar el ingreso en cada período. Dado que el hogar vive durante dos períodos, enfrenta dos restricciones presupuestarias de flujo. Estas son:

$$\begin{aligned} c_t + S_t &\leq y_t \\ c_{t+1} + S_{t+1} &\leq y_{t+1} + (1+r_t)\,S_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

La restricción del período t, (3.1), establece que el consumo más el ahorro no puede exceder el ingreso. La restricción del período $t+1$ se puede reorganizar para obtener:

$$c_{t+1} + S_{t+1} - S_t \leq y_{t+1} + r_t S_t \tag{3.2}$$

S_t es el stock de ahorros que el hogar lleva del período t al $t+1$. El flujo de ahorro es el cambio en el stock de ahorros. Dado que hemos asumido que el hogar comienza la vida sin riqueza, en el período t no hay distinción entre ahorro y ahorros. Esto no es cierto en el período $t+1$. S_{t+1} es el stock de ahorros que el hogar lleva del $t+1$ al $t+2$. $S_{t+1} - S_t$ es su ahorro en el período $t+1$ — el cambio en el stock. Por lo tanto, (3.1) dice que el consumo más el ahorro $(c_{t+1} + S_{t+1} - S_t)$ no puede exceder el ingreso total. El ingreso total en el período $t+1$ tiene dos componentes: y_{t+1}, ingreso de flujo exógeno, e ingresos por intereses sobre el stock de ahorros traídos al período t, $r_t S_t$ (que podría ser negativo si el hogar se endeudó en el período t).

Podemos simplificar estas restricciones en dos dimensiones. Primero, las restricciones de desigualdad débil se cumplirán con igualdad bajo suposiciones convencionales sobre las preferencias; el hogar no dejará que los recursos se desperdicien. Segundo, sabemos que $S_{t+1} = 0$. Esto a veces se llama una condición terminal. ¿Por qué? S_{t+1} es el stock de ahorros que el hogar lleva al período $t+2$. Pero no hay un período $t+2$ pues el hogar no vive en el período $t+2$. El hogar no querría terminar con $S_{t+1} > 0$, porque esto significaría "morir"sin haber consumido todos los recursos disponibles. El hogar querría que $S_{t+1} < 0$ pues sería equivalente a morir endeudado. Esto sería deseable desde la perspectiva del hogar porque significaría pedir prestado para financiar más consumo mientras está vivo, sin tener que pagar la deuda. Suponemos que la institución financiera con la que el hogar toma prestado y ahorra sabe esto y no permitirá que el hogar muera endeudado. Por lo tanto, lo mejor que puede hacer el hogar es tener $S_{t+1} = 0$. Por lo tanto, podemos escribir las dos restricciones presupuestarias de flujo como:

$$\begin{aligned} c_t + S_t &= y_t \\ c_{t+1} &= y_{t+1} + (1 + r_t) S_t. \end{aligned}$$

La institución financiera con la que el hogar toma prestado y ahorra, reconociendo esta dinámica, no permitirá que el hogar termine endeudado al final de su vida. Por lo tanto, la opción óptima para el hogar es garantizar que $S_{t+1} = 0$. Con esta premisa, podemos expresar las dos restricciones presupuestarias de flujo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_t + S_t &= y_t \\ c_{t+1} &= y_{t+1} + (1 + r_t) S_t. \end{aligned}$$

La variable S_t aparece en ambas restricciones. Podemos resolver S_t a partir de la segunda restricción y luego sustituirlo en la primera. En particular, resolviendo la segunda ecuación para S_t:

$$S_t = \frac{c_{t+1}}{1 + r_t} - \frac{y_{t+1}}{1 + r_t}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación y reorganizando términos, obtenemos:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_t} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1 + r_t}.$$

Esta última ecuación es conocida como la restricción presupuestaria intertemporal. En palabras simples, establece que el valor presente del consumo debe igualar al valor presente del ingreso. Es decir, $\frac{c_{t+1}}{1+r_t}$ representa el valor presente del consumo en el período $t + 1$, y $\frac{y_{t+1}}{1+r_t}$ representa el valor presente del ingreso en el período $t + 1$. La restricción presupuestaria intertemporal implica que el consumo debe igualar al ingreso en términos de valor presente, aunque no necesariamente en cada período.

Habiendo discutido las restricciones presupuestarias del hogar, pasamos a considerar sus preferencias. Suponemos que la utilidad vitalicia, U, es una suma ponderada de la utilidad en cada período de la vida, expresada como:

$$U = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}), \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Aquí, U representa la utilidad vitalicia, medida en unidades de utilidad. La utilidad es un concepto ordinal, por lo que no es relevante su nivel absoluto. Lo que importa es que un valor más alto de U se considera "mejor"que uno más bajo. La función $u(\cdot)$ mapea el consumo en utilidad en cada período de vida.

El parámetro β representa el factor de descuento intertemporal. Es decir, $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, donde ρ es la tasa a la que el hogar descuenta los flujos de utilidad futuros. Suponemos que β es positivo pero menor que uno, lo que indica que el hogar valora menos la utilidad en el futuro en comparación con el presente. En esta configuración, β es el factor por el cual se descuentan los flujos de utilidad futuros, similar a cómo $\frac{1}{1+r_t}$ representa el factor de descuento para los flujos futuros de bienes. Además, asumimos que la función que mapea el consumo en utilidad de flujo es la misma en todos los períodos de la vida. Aunque esta suposición puede no ser válida en general, se hace por conveniencia en este contexto.

Note entonces que si $\beta(1+r_t) = 1$, entonces $\frac{1}{1+r_t} = \frac{1}{1+\rho_t}$. Es decir, el hogar descuenta a la misma tasa que el mercado. Entre menor sea $\beta(1+r_t) = 1$, entonces el hogar descuenta con mayor intensidad que el mercado.

Suponemos que la función de utilidad tiene las siguientes propiedades. En primer lugar, $u'(\cdot) > 0$. Nos referimos a $u'(\cdot)$ como la utilidad marginal del consumo. Suponer que esto es positivo solo significa que "más es mejor": más consumo produce más utilidad. En segundo lugar, asumimos que $u''(c_t) < 0$. Esto indica que hay una utilidad marginal decreciente. A medida que el consumo aumenta, la utilidad marginal adicional disminuye.

Problema de optimización

El hogar enfrenta un problema de optimización en el que busca elegir c_t y S_t en el período t para maximizar la utilidad vitalicia sujeta a las dos restricciones presupuestarias de flujo. Sabemos que S_t puede eliminarse combinando las dos restricciones presupuestarias de flujo en la restricción presupuestaria intertemporal. Por lo tanto, podemos considerar el problema como uno en el que el hogar elige c_t y c_{t+1} en el período t. Formalmente:

$$\begin{aligned} &\max_{c_t, c_{t+1}} U = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \\ &\text{sujeto a:} \\ &\qquad c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r_t} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r_t}. \end{aligned}$$

Este es un problema de optimización restringida, con una única restricción que enfrenta el hogar debido a la escasez. El hogar actúa como un tomador de precios y considera r_t como dado. Para resolver un problema de optimización restringida, podemos resolver la restricción para una de las dos variables de elección (no importa cuál). Resolviendo para c_{t+1}, obtenemos:

$$c_{t+1} = (1 + r_t)(y_t - c_t) + y_{t+1} \tag{3.3}$$

Ahora, sustituyamos (3.3) en la función de utilidad vitalicia para c_{t+1}. Esto convierte el problema del hogar en un problema de optimización no restringido que implica simplemente elegir c_t:

$$\max_{c_t} U = u(c_t) + \beta u((1 + r_t)(y_t - c_t) + y_{t+1}) \tag{3.4}$$

Para caracterizar el comportamiento óptimo, tomamos la derivada con respecto a c_t:

$$\frac{\partial U}{\partial c_t} = u'(c_t) + \beta u'((1 + r_t)(y_t - c_t) + y_{t+1}) \times -(1 + r_t). \tag{3.5}$$

En (3.4), $u'((1 + r_t)(y_t - c_t) + y_{t+1})$ es la derivada de la parte “exterior”, mientras que $-(1+r_t)$ es la derivada del “interiorçon respecto a c_t. El término dentro de $u'((1 + r_t)(y_t - c_t) + y_{t+1})$ es simplemente c_{t+1}. Haciendo esa sustitución y estableciendo la derivada igual a cero, obtenemos:

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_t)u'(c_{t+1}) \tag{3.6}$$

La expresión (3.6) se llama comúnmente la **ecuación de Euler de consumo**. En economía, a menudo llamamos ecuaciones de Euler a las condiciones de optimalidad de primer orden dinámicas. Esta condición es necesaria, aunque no suficiente, para el problema de optimización del hogar. Dice que, en un óptimo, el hogar debería elegir c_t y c_{t+1} de modo que la utilidad marginal del consumo del período t, $u'(c_t)$, sea igual a la utilidad marginal del consumo del período $t + 1$, $\beta u'(c_{t+1})$, multiplicada por la tasa de interés real bruta (es decir, uno más la tasa de interés real).

La intuición detrás de por qué esta condición debe cumplirse si el hogar está actuando de manera óptima radica en el equilibrio entre el beneficio marginal y el costo marginal de consumir más en el período t. Supongamos que el hogar decide consumir un poco más en el período t. El beneficio marginal de esto es la utilidad adicional derivada del consumo en el período t, $u'(c_t)$. ¿Cuál es el costo marginal de consumir un poco más en el período t? Si el hogar consume un poco más en t, está ahorrando un poco menos (o equivalente, endeudándose un poco más). Si ahorra un poco menos en el período t, significa que debe renunciar a $1 + r_t$ unidades de consumo en $t + 1$ (ya que tiene que pagar intereses más el principal). La pérdida de utilidad en el período $t + 1$ por consumir un poco menos es $\beta u'(c_{t+1})$. La pérdida total en utilidad es esto multiplicado por la disminución en el consumo, por lo que $\beta(1 + r_t)u'(c_{t+1})$ representa el costo marginal de consumir un poco más en el período t. En un óptimo, el beneficio marginal de consumir un poco más en el período t debe ser igual al costo marginal de hacerlo; si el beneficio marginal superara al costo marginal, el hogar podría aumentar la utilidad vitalicia consumiendo más en t; si el beneficio marginal fuera menor que el costo marginal, el hogar podría aumentar la utilidad vitalicia consumiendo un poco menos en el período t.

La ecuación de Euler, (3.6), se puede reorganizar de la siguiente manera:

$$\frac{u'\left(c_t\right)}{\beta u'\left(c_{t+1}\right)}=1+r_t \tag{3.7}$$

El lado izquierdo de (3.7) es lo que se llama la tasa marginal de sustitución (TMS) entre el consumo en los períodos t y $t+1$. La TMS es simplemente la razón de las utilidades marginales de c_t y c_{t+1}. El lado derecho es la razón de precios entre el consumo en los períodos t y $t+1$. En particular, obtener una unidad adicional de consumo en el período t requiere renunciar a $1+r_t$ unidades de consumo en $t+1$ (a través de la lógica expuesta anteriormente). En este sentido, a menudo nos referimos a la tasa de interés real como el precio intertemporal del consumo: r_t dice cuánto consumo futuro debe renunciar el hogar para obtener un poco más de consumo en el presente. En un óptimo, la TMS es igual a la razón de precios, lo cual debería ser un resultado familiar para cualquiera que haya tomado microeconomía intermedia.

Ejemplo paramétrico

La función de utilidad que estamos considerando es la siguiente:

$$u(c)=\frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

Aquí, σ se refiere a la "elasticidad intertemporal de sustitución (EIS)". A veces, $1/\sigma$ se denomina "coeficiente de aversión relativa al riesgo (RRA)", y la forma de la función de utilidad se conoce como "utilidad CRRA".

El término adicional "-1.[en] el numerador está presente para facilitar la toma del límite cuando σ tiende a 1. Por lo tanto, obtenemos:

$$u'(c)=c^{-1/\sigma} \tag{3.8}$$

La ecuación de Euler se presenta como:

$$u'\left(c_t\right)=\beta(1+r)u'\left(c_{t+1}\right) \quad \Rightarrow \quad c_t^{-1/\sigma}=\beta(1+r_t)c_{t+1}^{-1/\sigma} \tag{3.9}$$

o

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}=\left[\beta(1+r_t)\right]^{\sigma} \tag{3.10}$$

La EIS σ determina la capacidad de respuesta de la tasa de crecimiento del consumo c_{t+1}/c_t a los cambios en r y β. Por ejemplo:

$$\frac{\partial \log\left(c_{t+1}/c_t\right)}{\partial \log(1+r_t)}=\sigma \quad \Rightarrow \quad \text{de ahí el nombre EIS} \tag{3.11}$$

Una baja EIS σ implica que a los hogares no les gusta la sustitución intertemporal (quieren suavizar c), lo que resulta en una baja capacidad de respuesta de c_{t+1}/c_t a cambios en r y β.

La solución del consumo se puede expresar como:

$$c_t = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}W, \quad c_{t+1} = \frac{1+r}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}W \tag{3.12}$$

donde W representa el ingreso permanente del hogar:

$$W = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} \tag{3.13}$$

Consideremos un caso especial útil: $\beta(1+r)=1$. En este caso, obtenemos:

$$c_t = c_{t+1} = \frac{1+r}{2+r}W \tag{3.14}$$

Si además $r=0$, entonces $c_t = c_{t+1} = \frac{W}{2}$. Esto indica que el hogar distribuye en partes iguales su ingreso permanente en ambos períodos.

Algunas parametrizaciones razonables para los parámetros de este modelo son las siguientes:

1. $\beta(1+r)$ no debería estar muy alejado de 1, lo que equivale a que la tasa de descuento $\rho = 1/\beta - 1$ esté aproximadamente cerca de r. - Por ejemplo, $\rho = 0{,}05, r = 0{,}01$ sería razonable, pero no $\rho = 0{,}5, r = 0{,}01$ o $\rho = 0{,}05, r = 0{,}5$. - Esto indica que el mercado descuenta el futuro aproximadamente a la misma tasa que los individuos.

2. σ no debería ser demasiado grande. - Por ejemplo, $\sigma = 1/2$ sería adecuado, probablemente ≤ 1, pero definitivamente no $\sigma = 5$ o 10. - Evidencia empírica sugiere que las personas no sustituyen intertemporalmente masivamente, es decir, no aumentan masivamente el gasto cuando r disminuye.

3.1. Suavizamiento del consumo

Volvamos a la ecuación de Euler:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1+r_t) \tag{3.15}$$

El lado derecho, $\beta(1+r_t)$ combina dos fuerzas: la impaciencia del hogar y el premio que ofrece el mercado por postergar el consumo mediante el ahorro. Suponga que $\beta(1+r_t) = 1$. Entonces, usando el hecho que la utilidad marginal es estrictamente decreciente por suposición:

$$u'(c_t) = u'(c_{t+1}) \iff c_t = c_{t+1} \tag{3.16}$$

Es decir, el consumo en ambos períodos es idéntico. Esto se debe a que el beneficio consumir en el presente, resumido en $\beta < 1$ es totalmente compensado por el beneficio de consumir en el futuro, resumido en $(1 + r_t) = 1$.

Alternativamente, considere $\beta(1 + r_t) < 1$. Como $1 + r_t \geq 1 \forall r_t \geq 0$, entonces esto quiere decir que β es muy bajo. Es decir, que la impaciencia del hogar es más fuerte que el premio que otorga el mercado por ahorrar. Así:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + r_t) < 1 \tag{3.17}$$

$$\iff u'(c_t) < u'(c_t) \tag{3.18}$$

$$\iff c_t > c_{t+1} \tag{3.19}$$

Es decir, el consumo presente es relativamente mayor que el consumo futuro. En general, la concavidad de la función de utilidad implica que el hogar va a preferir un perfil de consumo en el tiempo que no sea una solución de esquina (por ejemplo, consumir hoy todo y no consumir mañana). Ante ello, la forma de la función de utilidad es importante si se quiere modelar un comportamiento donde el consumo de los hogares se mantiene relativamente estable en el tiempo.

3.2. Propensión marginal a consumir y choques de ingreso

Consideremos una versión analítica de la función de consumo:

$$c_t = C^d(y_t, y_{t+1}, r_t)$$

Diferenciemos completamente esto alrededor de algún punto:

$$dc_t = \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial y_t} dy_t + \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial y_{t+1}} dy_{t+1} + \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial r_t} dr_t \tag{3.20}$$

En palabras, (3.20) indica que el cambio total en el consumo es (aproximadamente) la suma de las derivadas parciales multiplicadas por el cambio en cada argumento. Consideremos mantener la tasa de interés real fija, entonces $dr_t = 0$. Ahora, consideremos lo que llamaremos un cambio transitorio en el ingreso, de modo que $dy_t > 0$ pero $dy_{t+1} = 0$. Es decir, el ingreso solo cambia en el período actual. Entonces, el cambio en el consumo dividido por el cambio en el ingreso es igual a la propensión marginal a consumir (PMC), $\frac{\partial C(\cdot)}{\partial y_t}$:

$$\frac{dc_t}{dy_t} = \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial y_t} \tag{3.21}$$

A continuación, consideremos lo que llamaremos un cambio permanente en el ingreso, donde $dy_t > 0$ y $dy_{t+1} = dy_t$. Es decir, el ingreso aumenta en la misma cantidad en ambos períodos. El cambio en el consumo dividido por el cambio en el ingreso en este caso está dado por la suma de las derivadas parciales de la función de consumo respecto a los dos primeros argumentos:

$$\frac{dc_t}{dy_t} = \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial y_t} + \frac{\partial C^d(\cdot)}{\partial y_{t+1}} \tag{3.22}$$

Dado que ambas derivadas parciales son positivas, (3.22) revela que el consumo reaccionará más a un cambio permanente en el ingreso que a un cambio transitorio en el ingreso. Esto significa que el ahorro aumentará menos ante un cambio permanente en el ingreso que ante un cambio transitorio en el ingreso. Este resultado es una consecuencia natural del deseo del hogar de suavizar el consumo en relación con el ingreso. Si el hogar recibe un aumento único en el ingreso en el período t, el ingreso es relativamente no suave a lo largo del tiempo. Para suavizar el consumo en relación con el ingreso, el hogar necesita aumentar su ahorro en el período t, para poder aumentar también el consumo en el futuro. Pero si el ingreso aumenta en ambos períodos, el hogar no necesita ajustar su ahorro tanto, porque tendrá ingresos adicionales en el futuro para respaldar un consumo adicional. Por lo tanto, el ahorro aumentará menos, y el consumo más, ante un cambio permanente en el ingreso.

Por ejemplo, considere la solución a la función con elasticidad de sustitución constante:

$$c_t = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}W, \quad c_{t+1} = \frac{1+r}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}W$$

con

$$W = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$$

La propensión marginal a consumir está dada por:

$$\frac{\partial c_t}{\partial y_t} = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)} < 1 \tag{3.23}$$

Es decir, cuánto sube el consumo presente cuando el ingreso del hogar aumenta en una unidad. Note que usamos derivadas parciales porque estamos asumiendo un cambio en y_t manteniendo todo lo demás constante. Es decir, asumiendo un choque de ingreso transitorio. Note además que la propensión marginal a consumir es menor a uno, lo que quiere decir que el hogar distribuye el choque de ingreso en el consumo de ambos periodos. Pero en este modelo, la PMC no es un parámetro fijo, depende de la impaciencia del hogar y de la tasa de interés, que es una variable endógena en un modelo de equilibrio general. Esto contrasta la teoría de consumo Keynesiana simple, donde la PMC es un parámetro fijo.

Por ejemplo, si $\beta(1 + r_t) = 1$, entonces la PMC es $\frac{\partial c_t}{\partial y_t} = \frac{1+r}{2+r}$. Si $r = 0$, entonces la PMC es igual a $1/2$: el hogar solo consume la mitad del ingreso presente extra. El resto lo ahorra.

Ahora, considere un choque permanente de ingreso. En particular, $dy_t = dy_{t+1}$. Entonces, de $W = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$,

$$dW = dy_t + \frac{dy_{t+1}}{1+r} = \frac{2+r}{1+r} dy_t$$

Además, de la ecuación de consumo, sabemos que:

$$dc_t = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1 + \left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)} dW \tag{3.24}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1 + \left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)} \frac{2+r}{1+r} dy_t \tag{3.25}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(2+r)}{1 + \left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)} dy_t \tag{3.26}$$

Por tanto,

$$\frac{dc_t}{dy_t} = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(2+r)}{1 + \left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)} \tag{3.27}$$

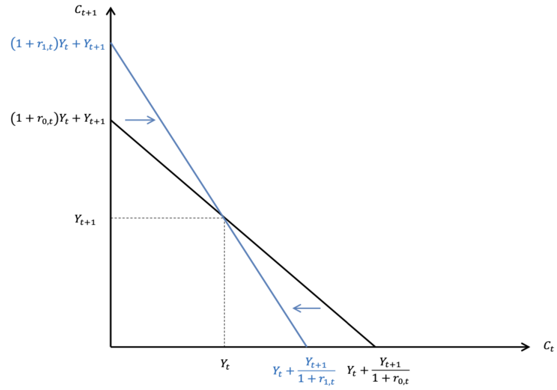
Para una parametrización razonable, la propensión marginal a consumir de este choque permanente es cercana a 1. De hecho, con $\beta(1 + r_t) = 1$ es exactamente 1. Así, se puede observar que la propensión marginal a consumir de un choque transitorio es menor que la de un choque permanente. Este comportamiento se desprende del comportamiento prospectivo de los hogares y su preferencia por suavizar el consumo. Generalmente, esto se conoce como la Hipótesis de Ingreso Permanente (HIP).

3.3. Efecto de choques de tasa de interés

Supongamos que las tasas de interés cambian. ¿Cómo afecta esto al consumo de los hogares? Esta cuestión desempeñará un papel crucial en algunos modelos macroeconómicos que examinaremos más adelante. Por ahora, analicemos esta pregunta de manera aislada, centrándonos en la respuesta de un hogar individual a un cambio exógeno en la tasa de interés. Concretamente, consideremos un aumento en la tasa de interés.

Gráficamente, un cambio en las tasas de interés se refleja en una modificación de la restricción presupuestaria, como se ilustra en la Figura 1. Aunque la nueva restricción presupuestaria sigue intersectando el punto (y_t, y_{t+1}), su pendiente es diferente: se vuelve más empinada con tasas de interés más altas. Este cambio de precios puede tener efectos tanto de ingreso como de sustitución.

Figura 1: Incremento en r_t rota la restricción presupuestaria

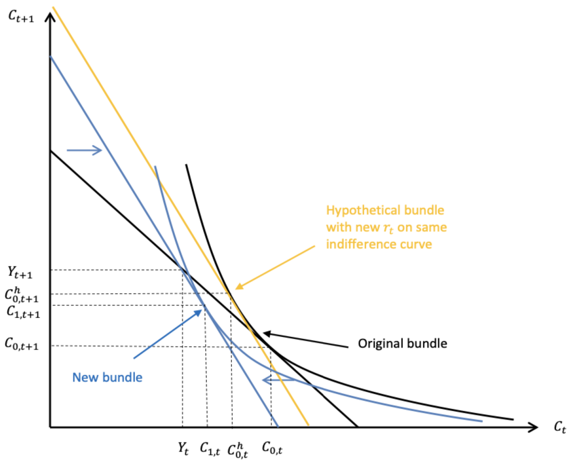


El efecto de sustitución es claro: una tasa de interés más alta implica que los bienes presentes son relativamente más costosos en comparación con los bienes futuros. Manteniendo todo lo demás constante, esto induciría al hogar a sustituir bienes presentes por bienes futuros, es decir, a ahorrar más y consumir menos.

El efecto de ingreso es más sutil. ¿Benefician o perjudican las tasas de interés más altas al hogar? Esto depende de si el hogar está ahorrando o endeudado inicialmente. Si está ahorrando, las tasas de interés más altas significan mayores ganancias en sus ahorros, lo que solo puede mejorar su bienestar. Este es el escenario representado en la Figura 6.2.3. Por el contrario, si el hogar está endeudado, tasas de interés más altas implican mayores pagos de intereses en sus préstamos, lo que les perjudica.

Por ejemplo, considere un hogar que es inicialmente un deudor. El aumento en r_t hace que la restricción presupuestaria rote en el punto de dotación, como se muestra en el diagrama en azul. Para analizar cómo esto afecta la cesta de consumo intertemporal, es útil considerar una restricción presupuestaria hipotética que tenga la misma pendiente que la nueva restricción presupuestaria (es decir, la pendiente dada por el nuevo r_t más alto), pero se ubique de manera que el hogar elija situarse en la curva de indiferencia original. La restricción presupuestaria se muestra en el diagrama en naranja. Dado que esta línea hipotética es más empinada, pero permite al hogar alcanzar la misma utilidad vitalicia, el hogar debe elegir una cesta de consumo hipotético con un consumo actual más bajo y un consumo futuro más alto. Esta cesta de consumo hipotético se etiqueta como $c^h_{0,t}$ y $c^h_{0,t+1}$. El movimiento a esta restricción presupuestaria hipotética representa lo que llamamos efecto de sustitución: muestra cómo cambiaría la cesta de consumo después de un cambio en la tasa de interés, donde el hogar recibe suficientes ingresos para dejar inalterada su utilidad vitalicia. El efecto de sustitución hace que el hogar sustituya el bien relativamente más caro (consumo del período t) por el bien relativamente más barato (consumo del período $t+1$).

Figura 2: Incremento en r_t sobre un hogar deudor



Sin embargo, este no es el único efecto a considerar. La restricción presupuestaria hipotética, que permitiría al hogar mantener el mismo nivel de utilidad vitalicia, es inalcanzable, ya que se encuentra en todas partes fuera de la nueva línea de presupuesto real, representada en azul. El efecto ingreso se produce cuando el hogar se mueve desde la cesta de consumo hipotética, con una tasa de interés r_t más alta pero con la misma utilidad vitalicia, hacia una nueva curva de indiferencia tangente a la nueva línea de presupuesto, ambas mostradas en azul. En este diagrama, el efecto ingreso se asemeja al que se observó anteriormente para un cambio en y_t o y_{t+1}: el hogar reduce, en relación con la cesta hipotética, el consumo en ambos períodos. El nuevo paquete de consumo se etiqueta como $(c_{1,t}, c_{1,t+1})$. Dado que tanto el efecto de sustitución como el efecto de ingreso reducen el consumo en el período t, c_t disminuye definitivamente cuando aumenta r_t. Aunque en la imagen se muestra que c_{t+1} aumenta, en principio este efecto es ambiguo: el efecto de sustitución sugiere aumentar c_{t+1}, mientras que el efecto de ingreso sugiere reducirlo. Qué efecto predomina no está claro en general.

En el caso de un hogar ahorrante neto, el efecto sustitución e ingreso se mueven en una misma dirección, por lo que un aumento en r_t reduce sin ambiguedad el consumo presente e incrementa el ahorro.

Por ejemplo, considere una función de utilidad:

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

Vimos que la ecuación de consumo presente viene dada por:

$$c_t = \frac{\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}{1+\left(\frac{1}{\beta(1+r)}\right)^{\sigma}(1+r)}W$$

con

$$W = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$$

Es decir:

$$c_t = \frac{1}{1+\beta^{\sigma}(1+r)^{\sigma-1}}\left(y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}\right)$$

La ecuación anterior ofrece una fórmula explícita que muestra cómo el consumo está influenciado por el ingreso presente, el ingreso futuro y la tasa de interés. En ella, el numerador representa el valor presente del ingreso, al cual el consumo es proporcional. Por otro lado, el denominador captura los efectos de la impaciencia del hogar, medida por β, el precio relativo del consumo en el período 1 $(1+r)$ y la disposición del hogar a intercambiar consumo entre períodos, medida por σ.

Note que si $\sigma = 1$ (el caso de una función de utilidad logarítmica), entonces la función de consumo sería:

$$c_t = \frac{1}{1+\beta}\left(y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}\right)$$

Y el efecto de un aumento en r_t sobre el consumo presente sería negativo sin ambiguedad. Es decir, bajo esta función de utilidad, el efecto sustitución siempre domina al efecto ingreso.

4. Activos financieros y decisiones de ahorro

Anteriormente, modelamos la decisión de ahorro mediante S_t de manera un tanto abstracta. Ahora, consideremos que las decisiones de ahorro y endeudamiento se realizan mediante activos financieros. En particular, analicemos el caso de un bono libre de riesgo de un período, B_t, que se negocia a un precio q_t y paga uno a uno en $t+1$. Los agentes son tomadores de precios.

La restricción presupuestaria que enfrenta un agente en el período t es:

$$c_t + q_t B_t \leq y_t \tag{4.1}$$

Observe que B_t es una variable de stock: indica cuánto (fruta) se lleva de t a $t+1$. $B_t > 0$ significa que un agente está ahorrando, mientras que $B_t < 0$ significa que está endeudándose. En principio, los agentes podrían llevar fruta de $t+1$ a $t+2$, pero esto se descarta como una condición terminal: los agentes no querrán morir con activos positivos y no se les permite morir en deuda. Por lo tanto, $B_{t+1} = 0$. La restricción presupuestaria de $t + 1$ es:

$$c_{t+1} \leq y_{t+1} + B_t \tag{4.2}$$

Los agentes tienen una función de utilidad de flujo dada por $u(\cdot)$, donde $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) \leq 0$. Los agentes descuentan los flujos de utilidad futura por $0 < \beta < 1$. La utilidad vitalicia es:

$$U = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \tag{4.3}$$

El problema de decisión de un agente es elegir una secuencia de consumo, c_t y c_{t+1}, y tenencias de bonos, B_t, para maximizar la utilidad vitalicia, sujeta a las dos restricciones presupuestarias:

$$\begin{aligned}
&\max_{c_t, c_{t+1}, B_t} u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \\
&\text{sujeto a:} \\
&c_t + q_t B_t \leq y_t \\
&c_{t+1} \leq y_{t+1} + B_t
\end{aligned} \tag{4.4}$$

El Lagrangiano estaría dado por:

$$\mathcal{L} = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) + \lambda_t (y_t - c_t - q_t B_t) + \lambda_{t+1} (y_{t+1} + B_t - c_{t+1})$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longleftrightarrow u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = 0 \Longleftrightarrow \beta u'(c_{t+1}) = \lambda_{t+1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = 0 \Longleftrightarrow q_t \lambda_t = \lambda_{t+1}$$

Combinando las expresiones de optimalidad, se llega a que:

$$q_t = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) es una versión típica de la ecuación de Euler de consumo. El término del lado derecho se conoce como el factor de descuento estocástico, que simplemente representa la tasa marginal de sustitución entre el consumo actual y el futuro. La ecuación (4.5) es un caso especial de una condición de fijación de precios de activos más general: el precio de un activo (en este caso, q_t), es igual al producto esperado del factor de descuento estocástico con el pago del activo. En este caso simple, el pago del activo es conocido y es igual a uno, y tampoco hay incertidumbre sobre el consumo futuro.

Nota sobre el tratamiento del activo financiero: Anteriormente, modelamos el instrumento de ahorro como un bono de descuento a un período: se paga q_t por él, y paga un valor facial fijo de uno en el futuro. Una forma alternativa es pensar que el bono B_t paga el principal más el interés, $1 + r_t$, donde r_t es la tasa de interés (neta) ($R_t = 1 + r_t$) es bruta). Las restricciones presupuestarias serían:

$$c_t + B_t \leq y_t \tag{4.6}$$

Nótese que B_t es una variable de stock: cuánta (fruta) uno lleva de t a $t+1$. $B_t > 0$ significa que un agente está ahorrando, y $B_t < 0$ significa que un agente está endeudado. En principio, los agentes podrían llevar fruta de $t+1$ a $t+2$, pero esto se prohíbe como condición terminal: los agentes no querrán morir con tenencias de activos positivas, y no se les permite morir endeudados. Por lo tanto, $B_{t+1} = 0$. La restricción presupuestaria para $t+1$ es:

$$c_{t+1} \leq y_{t+1} + (1 + r_t) B_t \tag{4.7}$$

Con esta formulación, las dos restricciones presupuestarias pueden combinarse en una sola restricción presupuestaria intertemporal:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r_t} \leq y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r_t} \tag{4.8}$$

Esto significa que el valor descontado en el presente del flujo de consumo no puede exceder el valor descontado en el presente del flujo de ingresos.

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) + \lambda_t (y_t - c_t - B_t) + \lambda_{t+1} (y_{t+1} + (1+r_t) B_t - c_{t+1}) \tag{4.9}$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= 0 \Longleftrightarrow u'(c_t) = \lambda_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} &= 0 \Longleftrightarrow \beta u'(c_{t+1}) = \lambda_{t+1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} &= 0 \Longleftrightarrow \lambda_t = \lambda_{t+1}(1+r_t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

La condición de optimalidad resultante es:

$$1 = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (1 + r_t) \tag{4.11}$$

Esto es exactamente lo mismo que arriba, donde $q_t = \frac{1}{1+r_t} = \frac{1}{R_t}$.

Modelo con endeudamiento y ahorro

Considere ahora el caso de dos instrumentos financieros: uno para el ahorro y otro para el endeudamiento. Sea d_t la deuda, es decir, cuánto el hogar toma prestado en el período t y devuelve en el período $t+1$ a la tasa de interés r_t. Dicho de otra manera, y para relacionarlo con nuestras notas de clase anteriores, d_t son tenencias de bonos negativas. Si $d_t < 0$, significa que los hogares ahorran/prestan. B_t continúa siendo el bono de ahorro que paga uno a uno y que se negocia a un precio q_t. Suponga que el hogar inicia con una tenencia de bonos en t de B_{t-1}[1]. Así, el problema del hogar viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{c_t, c_{t+1}, B_t, d_t} \quad & u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \quad \text{s.a.} \\ & c_t + q_t B_t = y_t + q_t B_{t-1} + d_t \\ & c_{t+1} + d_t(1+r_t) = y_{t+1} + B_t \end{aligned} \tag{4.12}$$

El equilibrio en este caso viene dado por las condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta(1+r_t)u'(c_{t+1}) \\ q_t &= \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.1. Fricciones financieras y bienestar

Considere una pequeña economía abierta poblada por muchos hogares idénticos. Los consumidores en nuestra pequeña economía abierta resuelven el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{c_t, c_{t+1}, d_t} \quad & u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) \quad \text{s.a.} \\ & c_t = y_t + d_t \\ & c_{t+1} + d_t(1+r_t) = y_{t+1} \\ & d_t \leq \kappa y_t, \quad \kappa \geq 0 \end{aligned}$$

Aquí, c_t y c_{t+1} son el consumo como de costumbre. y_t y y_{t+1} son ingresos en los dos períodos de tiempo. Para simplificar, el ingreso toma la forma de dotación exógena. La última ecuación es una restricción de endeudamiento. Dice que los consumidores solo pueden pedir prestado hasta una fracción κ de sus ingresos del primer período y_t (o hasta un múltiplo de su ingreso cuando $\kappa > 1$). Hay diferentes justificaciones para tal restricción de endeudamiento. Una es el *compromiso limitado*. Es decir, un hogar puede negarse a pagar su deuda en el que los acreedores pueden confiscar una fracción κ de su ingreso. κ por lo tanto parametriza la calidad de los mercados de crédito.

Si $\kappa = \infty$, la restricción nunca se aplica y los mercados de crédito son perfectos. Si $\kappa = 0$, los hogares no pueden pedir prestado en absoluto.

[1] Anteriormente suponíamos $B_{t-1} = 0$

Restricción de endeudamiento no vinculante

Supongamos por el momento que no hay restricción de endeudamiento (o equivalente, $\kappa = \infty$ para que nunca se aplique). En ese caso, el problema es exactamente el mismo que el caso sin restricción crediticia y sabemos cómo resolverlo. Primero combinamos las restricciones presupuestarias en una única restricción presupuestaria intertemporal:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r_t} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r_t} \equiv W \tag{4.14}$$

A continuación, tomamos las condiciones de primer orden, en particular derivamos la ecuación de Euler:

$$u'(c_t) = \beta (1+r_t) u'(c_{t+1}) \tag{4.15}$$

Suposición 1: La tasa de interés r_t satisface

$$\beta (1+r_t) = 1. \tag{4.16}$$

A partir de la ecuación de Euler (4.15), la Suposición 1 implica inmediatamente que los hogares eligen un perfil de consumo plano:

$$u'(c_t) = u'(c_{t+1}) \quad \Rightarrow \quad c_t = c_{t+1} \tag{4.17}$$

Sustituyendo de nuevo en la restricción presupuestaria (1) obtenemos

$$c_t^u = c_{t+1}^u = \frac{1+r_t}{2+r_t} W \tag{4.18}$$

donde los superíndices u representan "sin restricciones". Finalmente, podemos calcular la cantidad de endeudamiento necesaria para lograr esta asignación de consumo:

$$d_t^u = c_t^u - y_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{2+r_t}. \tag{4.19}$$

Como era de esperar, debido a que $\beta (1+r_t) = 1$, los hogares toman prestado siempre que $y_{t+1} > y_t$ y ahorran siempre que $y_{t+1} < y_t$ para cualquier $r_t > 0$. Utilizaremos $\left(c_t^u, c_{t+1}^u, d_t^u\right)$ como referencia en el caso con una restricción de endeudamiento. También observe que $\left(c_t^u, c_{t+1}^u, d_t^u\right)$ solo dependen de las variables (y_t, y_{t+1}, r_t).

Restricción de endeudamiento vinculante

Ahora consideremos el caso en el que la restricción de endeudamiento $d_t \leq \kappa y_t$ está presente (y donde $\kappa < \infty$). Hay dos casos:

1. **Caso 1:** $d_t^u \leq \kappa y_t$ (restricción laxa). El hogar puede obtener la asignación sin restricciones $\left(c_t^u, c_{t+1}^u, d_t^u\right)$ al pedir prestado menos de lo permitido por la restricción de endeudamiento. Por lo tanto, esta también será la elección óptima en presencia de la restricción y la restricción nunca se aplicará. Todo es como si no hubiera restricción en primer lugar.

2. **Caso 2:** $d_t^u > \kappa y_t$ (restricción vinculante). El hogar no puede obtener la asignación sin restricciones $\left(c_t^u, c_{t+1}^u, d_t^u\right)$. Esto se debe a que tomar prestado sería más de lo permitido por la restricción de endeudamiento. Dado esto, el hogar tomará prestado tanto como pueda $d_t = \kappa y_t$ y su elección de consumo será:

$$c_t = (1+\kappa)y_t, \quad c_{t+1} = y_{t+1} - \kappa y_t \left(1 + r_t\right) \tag{4.20}$$

Observe que $c_t < c_t^u = c_{t+1}^u < c_{t+1}$. Es decir, los hogares ya no pueden suavizar el consumo perfectamente. Esto implica que la restricción de endeudamiento los hace estrictamente peor. Más precisamente, su bienestar satisface:

$$\mathcal{B} = u\left(c_t\right) + \beta u\left(c_t\right) < u\left(c_t^u\right) + \beta u\left(c_{t+1}^u\right) = \mathcal{B}^u. \tag{4.21}$$

Un crunch crediticio:

Consideremos un “choque crediticioçomo un endurecimiento exógeno de la restricción de endeudamiento, capturado por una disminución en el parámetro κ. Esto resulta en una disminución en el consumo del primer período c_t y un aumento en el consumo del segundo período c_{t+1}. El hogar es inequívocamente peor, es decir, el bienestar $\mathcal{B}$ disminuye, porque puede suavizar el consumo aún menos que antes.

5. Consumo, ahorro, tasa de interés y valoración de activos en equilibrio general

Hasta el momento, hemos modelado parcialmente esta economía, porque la tasa de interés r_t y el precio del bono q_t son exógenos para el hogar. Sin embargo, estos son precios que deben determinarse de acuerdo a un concepto de equilibrio. Entonces, para cerrar el modelo, vamos a imponer condiciones de aclaramiento o vaciado (*market clearing condition*).

Considere nuevamente el problema del hogar que elige entre el consumo en cada período y un bono que se transa a un precio q_t y paga un dividendo D en el período $t+1$. Es decir, D es el flujo de efectivo o cupón que recibe el propietario del activo (por ejemplo, los ingresos por alquiler de la casa). Anteriormente habíamos supuesto que $D=1$.

$$\begin{aligned} \text{máx}_{c_t, c_{t+1}, B_t, d_t} \quad & u\left(c_t\right)+\beta u\left(c_{t+1}\right) \qquad \text{s.a.} \\ & c_t+q_t B_t=y_t+q_t B_{t-1} \\ & c_{t+1}=y_{t+1}+D \cdot B_t \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aquí, el hogar nace con algunos activos B_{t-1} (quizás heredados de sus padres). Luego puede optar por comprar algunos activos adicionales $B_t - B_{t-1}$ a precio q_t. La cantidad total de activos que lleva al período $t+1$, B_t, paga el dividendo (flujo de efectivo) D. El dividendo y los ingresos de dotación constituyen el consumo. Note que hemos asumido que el activo no paga dividendos en el primer período. Esto realmente no afecta la generalidad porque siempre podemos incluir los dividendos del primer período en los ingresos del primer período. Además, el activo no puede venderse en el segundo período (no hay término $q_{t+1}B_{t+1}$ en la restricción presupuestaria del segundo período). Esto se debe a que nuestro modelo es de dos períodos: el mundo termina después del período dos, por lo que nadie querría comprar el activo.

El modelo se puede resolver como de costumbre. Establezca el Lagrangiano y tome las condiciones de primer orden.

$$q_t u'\left(c_t\right)=\beta D u'\left(c_{t+1}\right) D$$

Esto da lugar a una condición de primer orden que se puede escribir como:

$$q_t=\frac{\beta u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)} \tag{5.2}$$

Intuitivamente, el lado izquierdo es el costo marginal y el lado derecho es el beneficio marginal de comprar el activo: una unidad adicional del activo (un metro cuadrado adicional de la casa) cuesta $\$q_t$, lo que resulta en una pérdida de utilidad de $\$q_t u'\left(c_t\right)$;

por otro lado, el activo paga $\$D$ mañana, lo que resulta en una ganancia de utilidad de $\$Du'(c_{t+1})$ descontada a una tasa β. Alternativamente, también podemos definir el rendimiento del activo $R = D/q_t$ y escribir esta ecuación como $u'(c_t) = \beta R u'(c_{t+1})$. Esta forma de escribir las cosas deja en claro que esta es simplemente una ecuación de Euler estándar.

Suponga que la oferta de este bono está fija y es igual a uno y se creó antes de t. Es decir, $B_{t-1}^{Oferta} = B_t^{Oferta} = 1$. En equilibrio, oferta es igual a demanda, por lo que $B_{t-1} = B_t = 1$. Por lo tanto, de la restricción presupuestaria del hogar, $c_t^e = y_t, c_{t+1}^e = y_{t+1} + D$ (los superíndices "e"denotan "equilibrio"). Consecuentemente, el precio del activo debe satisfacer:

$$q_t = \frac{\beta u'\left(c_{t+1}^e\right)}{u'\left(c_t^e\right)} D = \frac{\beta u'\left(y_{t+1} + D\right)}{u'\left(y_t\right)} D \tag{5.3}$$

Esto responde a nuestra pregunta sobre el precio de equilibrio del activo. Por lo tanto, nos referiremos a la ecuación (5.3) como **la ecuación de fijación de precios del activo**. Es importante notar que este enfoque es contrario al experimento mental habitual. En lugar de preguntar "dado los precios, ¿cuál es el consumo?", preguntamos "dado el consumo, ¿cuál es el precio?".

Ejemplo: Utilidad logarítmica, $u(c) = \log c$. En este caso:

$$q_t = \frac{\beta c_t^e}{c_{t+1}^e} D$$

El precio del activo intuitivamente aumenta con un dividendo alto D. Sin embargo, de manera menos obvia, también depende del consumo en ambos períodos. Esto se debe a que el hogar utiliza el activo para obtener el dividendo D, sino también para suavizar el consumo, ya que no hay otras oportunidades de ahorro en esta economía. Por ejemplo, si el ingreso en el período t, y_t, es bajo y, por ende, lo es el consumo c_t, el precio del activo q_t también será bajo. En este caso, los hogares prefieren pedir prestado en lugar de ahorrar en el activo, lo que reduce la demanda y, por ende, su precio.

Este vínculo entre la asignación de consumo y los precios de los activos es característico de las teorías de fijación de precios de activos basadas en el consumo, conocidas como el "Modelo de Valoración de Activos de Lucas"desarrollado por Robert E. Lucas Jr. (1978). La relación entre un bajo consumo en el primer período y una disminución en el precio del activo será una característica clave de nuestro modelo de amplificación, que se examinará en la última sección de este capítulo y del curso.

5.1. Tasa de interés y curva IS

Considere, para simplicidad, el caso de un hogar con un bono B_t que paga el principal más el interés, $1 + r_t$. Si $B_t < 0$, entonces el hogar se está endeudando. r_t es la tasa de interés (neta) ($R_t = 1 + r_t$ es bruta). Las restricciones presupuestarias sería:

$$\max_{c_t, c_{t+1}, B_t} u(c_t) + \beta\, u(c_{t+1})$$

s.a.

$$c_t + B_t \leq y_t$$
$$c_t \leq y_{t+1} + (1 + r_t)\, B_t$$

La condición de optimalidad es la ecuación de Euler estándar:

$$1 = \frac{\beta u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)} \left(1 + r_t\right) \tag{5.4}$$

En este caso, el equilibrio implica que la tasa r_t debe igualar la cantidad que un hogar desea ahorrar con la cantidad que otro hogar desea endeudarse. Esto garantiza que no haya ni exceso de oferta ni de demanda en el mercado de fondos prestables. Dado que solo hay un hogar en este caso, en equilibrio no puede haber $B_t > 0$, ya que indicaría un deseo de ahorrar sin recursos disponibles para hacerlo. De manera similar, tampoco puede haber $B_t < 0$, ya que implicaría un deseo de endeudarse sin oferta de fondos prestables disponibles. Por lo tanto, la condición de aclaramiento en este caso se resume en r_t de tal manera que:

$$B_t = 0 \tag{5.5}$$

Esto implica, usando las restricción presupuestaria del hogar en el período t que:

$$c_t = y_t \tag{5.6}$$
$$c_{t+1} = y_{t+1} \tag{5.7}$$

Imponiendo la condición de aclaramiento anterior en la ecuación de Euler, se tiene que:

$$\left(1 + r_t\right) = \frac{\beta u'\left(y_{t+1}\right)}{u'\left(y_t\right)} \tag{5.8}$$

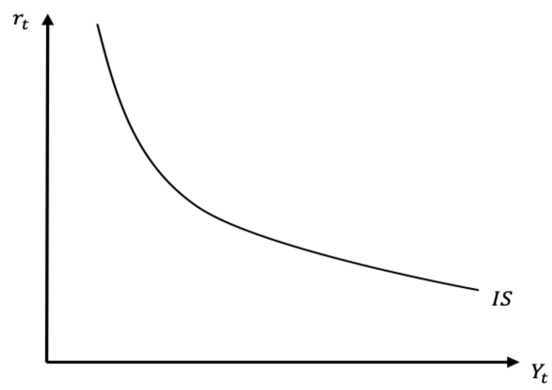
Dado que r_t está expresada únicamente en función de variables exógenas del modelo, entonces hemos determinado la tasa de interés de equilibrio en esta economía.

Considere, por ejemplo, el caso de una función de utilidad logarítimica. Entonces, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$y_t = \frac{y_{t+1}}{\beta\left(1 + r_t\right)} \tag{5.9}$$

La ecuación (5.9) es básicamente una “curva IS”(IS: inversión igual a ahorro). Muestra cuánta fruta se demanda en el presente como función de la dotación futura, y_{t+1}, la tasa

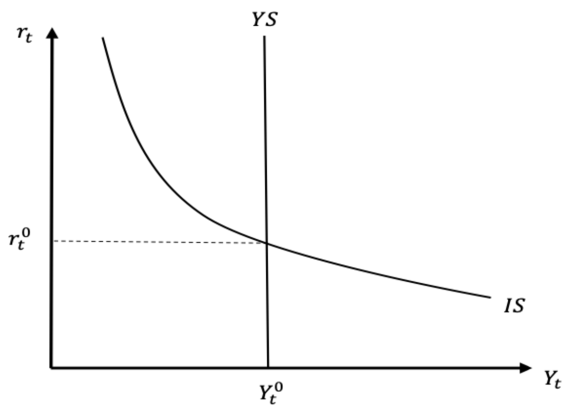
Figura 3: Curva IS



de interés real, r_t, y un parámetro de preferencia que rige la impaciencia, β.

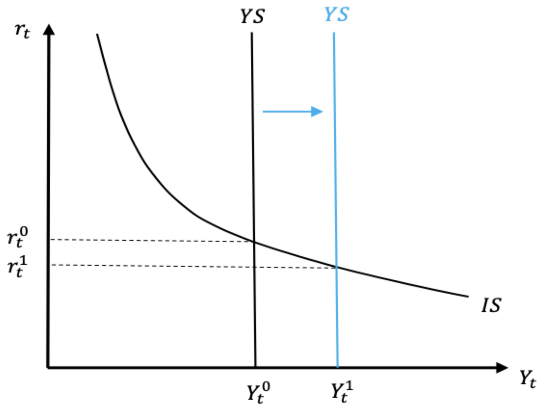
La curva IS se desplaza hacia la derecha si y_{t+1} es mayor (o hacia la izquierda si es menor). Se desplaza hacia abajo (equivalentemente hacia la izquierda) si β aumenta (es decir, si hay un aumento en la paciencia). Para representar gráficamente la tasa de interés de equilibrio, se puede combinar esta relación de demanda con una relación de oferta. La oferta en esta economía es muy directa: es exógena (inelástica). Llamemos a esto la curva YS, dada a algún nivel exógeno de la dotación actual. Esto se muestra a continuación:

Figura 4: Representación gráfica del equilibrio



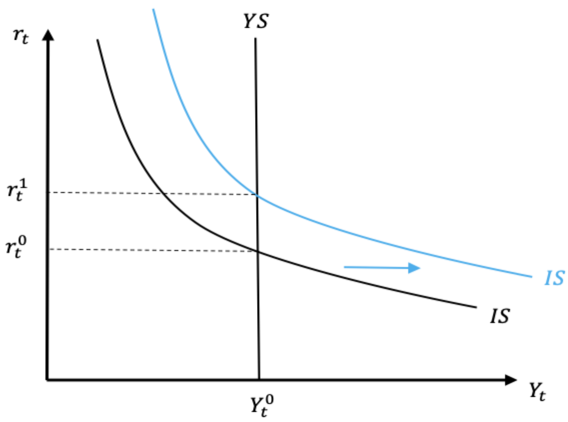
Supongamos un aumento en la dotación agregada actual, de y_t^0 a y_t^1 y llamémoslo un choque de oferta. Observe que la tasa de interés real de equilibrio debe disminuir cuando la dotación actual aumente. ¿Por qué? Manteniendo constante la tasa de interés, nuestro análisis previo del consumo indica que los agentes desearían aumentar el ahorro para suavizar su consumo en relación con sus ingresos. Sin embargo, en una economía de dotación como esta, el ahorro no puede incrementarse. La tasa de interés real debe caer lo suficiente para hacer menos atractivo el ahorro. En equilibrio, el hogar representativo simplemente consumirá la dotación adicional hoy, a pesar de que, dada una tasa de interés, preferiría suavizarlo.

Figura 5: Choque de oferta



Ahora consideremos un “shock de demanda”. En particular, supongamos que el hogar representativo sabe que su dotación futura, y_{t+1}, será mayor. Manteniendo fija la tasa de interés, esto hace que el hogar desee consumir más en el presente (equivalentemente, ahorrar menos o pedir prestado más). En otras palabras, la demanda agregada aumenta (la curva IS se desplaza hacia afuera). Pero, en equilibrio, el hogar no puede ahorrar menos, simplemente tiene que consumir su dotación actual, que no ha cambiado. Para que el hogar esté satisfecho con esto, la tasa de interés real debe aumentar. Podemos ver esto en el gráfico a continuación:

Figura 6: Choque de demanda



Como observación, un cambio en las preferencias, como una reducción en β (una disminución en la paciencia), produciría cualitativamente los mismos efectos que se muestran arriba. El hogar querría consumir más (ahorrar menos) en el presente, pero dado que esto no es posible, la tasa de interés real tendría que subir para que el hogar esté contento con simplemente consumir su (inmutable) dotación actual.

Hay un punto clave aquí que se hace evidente en un modelo de consumo-ahorro de dos períodos. Básicamente, el equilibrio general "deshace.[el] suavizamiento del consumo deseado por los hogares. Esto nos indica que la tasa de interés real de equilibrio revela la relación entre la abundancia presente y futura. Según el problema de decisión del hogar, los agentes prefieren ahorrar cuando el presente es abundante y pedir prestado cuando se espera que el futuro sea relativamente próspero. La tasa de interés real contrarresta este efecto: cae cuando el presente es abundante y sube cuando el futuro lo es. Este mecanismo básico opera incluso en modelos de equilibrio más complejos.

5.2. Equilibrio con restricciones de endeudamiento y colaterales

Consideremos una economía donde existe un activo B_t, como casas, en el cual los hogares pueden invertir. Un hogar puede adquirir el activo a un precio q_t en el período t, y este activo paga un dividendo D en el período $t+1$, es decir, representa el flujo de efectivo que recibe el propietario del activo (por ejemplo, los ingresos por alquiler de la casa). Es importante destacar que el activo tiene una oferta fija: $B_{t-1}^{oferta} = B_t^{oferta} = 1$. La pregunta que intentaremos responder es: ¿cómo se valora el activo en equilibrio en un mercado financiero con fricciones? Es importante notar que esta pregunta es opuesta a la habitual que hacemos, que sería: ¿cuánto del activo se negocia en equilibrio? Aquí, ya sabemos que $B_{t-1} = B_t = 1$ en equilibrio, pero la pregunta es cuál es el precio del activo.

En lugar de plantear la restricción de endeudamiento en función del ingreso del hogar, vamos a suponer que depende del valor de sus activos. Hay dos formas de escribir esta restricción de endeudamiento que son ligeramente diferentes. La primera es:

$$d_t \leq \kappa q_t B_{t-1}. \tag{5.10}$$

Nos referiremos a esta formulación como la "formulación de las casas como cajeros automáticos". La idea es que el hogar utiliza el valor de sus activos existentes B_{t-1} como garantía. Es decir, puede utilizar su casa como garantía para obtener un préstamo y financiar su consumo, de ahí el término "casas como cajeros automáticos".

La segunda formulación es:

$$d_t \leq \kappa q_t B_t. \tag{5.11}$$

Nos referiremos a esta formulación como la "formulación de hipoteca". La idea es que ahora el hogar puede utilizar como garantía el valor de sus activos futuros B_t, es decir, activos que en realidad no posee en el momento en que obtiene el préstamo. O dicho de otra manera, el hogar financia parte del activo con un préstamo y luego utiliza el activo como garantía para garantizar que lo devolverá. Esto es similar a una hipoteca: usted compra una casa que le cuesta $q_t B_t$, y puede pedir prestado hasta una fracción κ del precio de compra; el resto $(1-\kappa)q_t B_t$ es su pago inicial.

Ambas formulaciones son similares y conducen a efectos de amplificación financiera, pero existen algunas diferencias sutiles. Considere la primera formulación[2]. Los hogares resuelven:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{c_t, c_{t+1}, B_t, d_t} \quad & u\left(c_t\right) + \beta u\left(c_{t+1}\right) \quad \text{s.a.} \\ & c_t + q_t B_t = y_t + q_t B_{t-1} + d_t \\ & c_{t+1} + d_t\left(1 + r_t\right) = y_{t+1} + D B_t \\ & d_t \leq \kappa q_t B_{t-1} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Y el activo sigue estando en oferta fija: $B_{t-1}^s = B_t^s = 1$. Primero consideremos el caso donde no hay restricción de endeudamiento. Para simplificar el análisis, suponga que la tasa de interés es exógena: $r_t = r^*$. Una forma de racionalizarlo es pensar en una economía pequeña y abierta que puede ahorrar y endeudarse con el resto del mundo en cualquier cantidad deseada a una tasa de interés exógena[3].

Sin restricción de endeudamiento, el equilibrio está caracterizado por una ecuación de Euler y una ecuación de fijación de precios de activos

$$\begin{aligned} u'\left(c_t\right) &= \beta\left(1 + r_t\right) u'\left(c_{t+1}\right) \\ q_t &= \frac{\beta u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)} D \end{aligned} \tag{5.13}$$

Supongamos que $\beta\left(1 + r_t\right) = 1$. Entonces la solución es

$$c_t = c_{t+1}, \quad q_t = \beta D$$

Nuevamente, para referencia, denotemos por c_t^u, c_{t+1}^u, d_t^u y q_t^u el consumo, deuda y precio de activo de equilibrio "sin restricciones".

[2] En cuanto a la segunda formulación, el problema del hogar viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{c_t, c_{t+1}, B_t, d_t} \quad & u\left(c_t\right) + \beta u\left(c_{t+1}\right) \quad \text{s.t.} \\ & c_t + q_t B_t = y_t + q_t B_{t-1} + d_t \\ & c_{t+1} + d_t\left(1 + r_t\right) = y_{t+1} + D B_t \\ & d_t \leq \kappa q_t B_t \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio resolver las asignaciones de equilibrio de esta economía.

[3] Esto es para quitarnos de encima el equilibrio de la tasa de interés real y pensar solamente en el precio del activo y el canal de amplificación financiera.

En cuanto a la restricción de endeudamiento, de nuevo hay dos casos. También hay que notar que el límite de endeudamiento de equilibrio es $\kappa q_t B_{t-1} = \kappa q_t$, donde usamos que $B_{t-1} = 1$ en equilibrio.

Caso 1: $d_t^u \leq \kappa q_t^u$ (restricción laxa). Como antes, el resultado de equilibrio es el mismo que si la restricción no estuviera presente.

Caso 2: $d_t^u > \kappa q_t^u$ (restricción vinculante). Ahora las cosas son más complicadas. Como en la sección 1, los hogares piden prestado hasta el límite de la restricción. Por lo tanto, su deuda es $d_t = \kappa q_t$ y a partir de la restricción presupuestaria, el consumo de equilibrio es

$$\begin{aligned} c_t &= y_t + \kappa q_t, \\ c_{t+1} &= y_{t+1} + D - \kappa q_t \left(1 + r_t\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Sustituyendo en la ecuación de fijación de precios de activos (5.13), q_t se determina por la ecuación

$$q_t = \frac{\beta u' \left(y_{t+1} + D - \kappa q_t \left(1 + r_t\right)\right)}{u' \left(y_t + \kappa q_t\right)} D. \tag{5.15}$$

Esta ecuación determina implícitamente el precio q_t. En general, esta es una ecuación un poco complicada. La razón es que q_t aparece en tres lugares. Con utilidad logarítmica, $u(c) = \log c$, obtenemos

$$q_t = \frac{\beta \left(y_t + \kappa q_t\right)}{y_{t+1} + D - \kappa q_t \left(1 + r_t\right)} D, \tag{5.16}$$

que es una cuadrática en q_t. Esto se puede resolver, pero vamos a utilizar los siguientes supuestos para facilitar el álgebra:

Supuesto 2 (utilidad log-lineal): Las funciones de utilidad por período son diferentes en el primer y segundo períodos. En particular, la utilidad es logarítmica en el primer período y lineal en el segundo período:

$$u_t \left(c_t\right) + \beta u_{t+1} \left(c_{t+1}\right), \quad u_t \left(c_t\right) = \log c_t, \quad u_{t+1} \left(c_{t+1}\right) = c_{t+1} \tag{5.17}$$

Supuesto 3: $\kappa \beta D < 1$.

Es fácil demostrar que con la función de utilidad bajo el Supuesto 2, la ecuación de fijación de precios de activos (5.13) se convierte en:

$$q_t = \frac{\beta u'_{t+1} \left(c_{t+1}\right)}{u'_t \left(c_t\right)} D = \beta D c_t \tag{5.18}$$

Usando que $c_t = y_t + \kappa q_t$, podemos resolver para el precio de activos de equilibrio

$$q_t = \frac{\beta D y_t}{1 - \beta D \kappa} \tag{5.19}$$

y el consumo de equilibrio

$$c_t = \frac{y_t}{1 - \beta D \kappa} \tag{5.20}$$

Ahora hemos terminado. Nótese que el Supuesto 3 asegura que el c_t y q_t de equilibrio son finitos y positivos. Más sobre esto en breve. Es importante destacar que el consumo y el precio de los activos presentan amplificación financiera. Para ver esto, consideremos un shock exógeno negativo al ingreso del primer período. El impacto de este shock en el consumo es

$$\frac{\partial c_t}{\partial y_t} = \frac{1}{1-\beta D\kappa} > 1. \tag{5.21}$$

Contrastemos esto con una economía de autarquía financiera completa, donde $c_t = y_t$, es decir, sin ahorro ni endeudamiento. En tal caso, el consumo siempre se movería de manera idéntica al ingreso (uno a uno). Sin embargo, en nuestra economía con amplificación financiera, no solo los hogares no suavizan el consumo, ¡sino que su consumo es aún más volátil que el ingreso!

La razón de esto radica en la presencia de un ciclo que genera una amplificación financiera. Las dos ecuaciones clave para entender esto son la expresión de consumo de la restricción presupuestaria y la ecuación que establece el precio del activo en función del consumo:

$$c_t = y_t + \kappa q_t \tag{5.22}$$

$$q_t = \beta D c_t \tag{5.23}$$

Consideremos ahora un choque negativo que provoca una disminución de 1 unidad en y_t. Esto tiene un efecto directo en el consumo, reduciéndolo en la misma cantidad según (5.22). Esta disminución en c_t a su vez afecta el precio del activo, reduciendo q_t en βD unidades según (5.23). Sin amplificación financiera, esto marcaría el fin del proceso. Pero no es así, ya que hay un ciclo de retroalimentación a través de la restricción de colateral: la capacidad de endeudamiento de los hogares depende del precio del activo, y dado que este precio ha disminuido, el endeudamiento y, por ende, el consumo se reducen aún más en un total de $\kappa\beta D$ unidades (ver (5.22)). Esto, a su vez, provoca una nueva caída en el precio del activo, lo que lleva a más reducciones en el consumo, y así sucesivamente.

Matemáticamente, podemos denotar cada iteración en este bucle como $n = 0, 1, 2\ldots$ y escribir

$$\begin{aligned} c_t^n &= y_t + \kappa q_t^n \\ q_t^n &= \beta D c_t^{n+1} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, tenemos

$$c_t^n = y_t + \kappa\beta D c_t^{n+1} \tag{5.25}$$

Resolviendo hacia adelante, tenemos

$$c_t^0 = y_t \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa\beta D)^n = \frac{1}{1-\kappa\beta D} y_t \tag{5.26}$$

Note que el supuesto 3 ($\kappa\beta D < 1$) garantiza que este proceso no "explote". ¡Si la suposición se violara, la amplificación financiera sería tan poderosa que un equilibrio dejaría de existir!

Además, otros choques pueden desencadenar este "ciclo diabólico". Por ejemplo, considere un choque a los flujos de efectivo futuros D. Tenemos que

$$\frac{\partial c_t}{\partial D} = \frac{\kappa\beta y_t}{(1-\kappa\beta D)^2} \tag{5.27}$$

Observe que, como $\kappa\beta D < 1, (1-\kappa\beta D)^2$ es un número realmente pequeño. Por tanto, $\kappa\beta y_t/(1-\kappa\beta D)^2$ es un número enorme. Entonces, la amplificación financiera es aún más extrema en este caso.

6. Un modelo multitemporal de consumo y ahorro

En esta sección, extendemos el modelo de consumo de dos períodos a múltiples períodos. La intuición básica del modelo de dos períodos sigue siendo válida, pero ahora podemos distinguir mejor entre cambios permanentes y transitorios en el ingreso. Además, podemos analizar el comportamiento de ahorro y consumo a lo largo del ciclo de vida.

6.1. Generalización del modelo

Supongamos que el hogar vive desde el período actual, t, hasta T períodos subsiguientes, hasta el período $t+T$. Esto implica un total de $T+1$ períodos: el actual más T adicionales. Supongamos sin pérdida de generalidad que no hay incertidumbre y que el hogar comienza sin riqueza. Cada período está asociado con una tasa de interés potencialmente distinta, r_{t+j}, para $j=0,\ldots,T-1$, que determina el rendimiento del ahorro desde el período $t+j$ hasta $t+j+1$. El hogar enfrenta una secuencia de restricciones presupuestarias de flujo, una en cada período, dadas por:

$$\begin{aligned} c_t + S_t &\leq y_t \\ c_{t+1} + S_{t+1} &\leq y_{t+1} + (1+r_t)\, S_t \\ c_{t+2} + S_{t+2} &\leq y_{t+2} + (1+r_{t+1})\, S_{t+1} \\ &\vdots \\ c_{t+T} + S_{t+T} &\leq y_{t+T} + (1+r_{t+T-1})\, S_{t+T-1} \end{aligned} \tag{6.1}$$

En el marco de múltiples períodos, la distinción entre el stock de ahorros y el ahorro de flujo es más clara que en el modelo de dos períodos. En las restricciones presupuestarias de flujo, S_{t+j}, para $j=0,\ldots,T$, denota el stock de ahorros que el hogar lleva del período $t+j$ al período $t+j+1$. El ahorro de flujo en cada período es la diferencia en el stock de ahorros, o $S_{t+j}-S_{t+j-1}$ en el período $t+j$. Solo cuando $j=0$ (es decir, el primer período), el ahorro de flujo y el stock de ahorros que el hogar lleva al próximo período son iguales.

Al igual que en el modelo de dos períodos, S_{t+T} denota el stock de ahorros que el hogar lleva del período $t+T$ al $t+T+1$. Dado que el hogar no está presente en el período $t+T+1$, y ningún prestamista permitirá que el hogar muera en deuda, debe ser el caso que $S_{t+T}=0$. Esta es una condición terminal, similar a la idea de que $S_{t+1}=0$ en el modelo de dos períodos. Para simplificar, asumamos que $r_{t+j}=r$ para todos $j=0,\ldots,T-1$. En otras palabras, supongamos que la tasa de interés es constante en el tiempo. Esto simplifica el análisis al colapsar la secuencia de restricciones presupuestarias de flujo en una restricción presupuestaria intertemporal, pero no afecta fundamentalmente el análisis.

Haciendo uso de nuestra condición terminal, $S_{t+T} = 0$, y la suposición de que la restricción presupuestaria de cada período se cumple con igualdad, podemos eliminar iterativamente los términos de ahorro de las restricciones presupuestarias de flujo, comenzando desde el final de la vida del hogar. Esto es conceptualmente similar a lo que hicimos en el modelo de dos períodos. Por ejemplo, uno puede resolver para $S_{t+T-1} = \frac{c_{t+T}}{1+r} - \frac{y_{t+T}}{1+r}$ en el último período. Luego se puede sustituir esto en la restricción presupuestaria $t + T - 1$, y luego resolver para S_{t+T-2}. Uno puede continuar de esta manera hasta llegar a una restricción presupuestaria intertemporal generalizada, dada por:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} + \frac{c_{t+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c_{t+T}}{(1+r)^T} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} + \frac{y_{t+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{y_{t+T}}{(1+r)^T}$$

Es decir:

$$\sum_{j=0}^{T} \frac{c_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} \tag{6.2}$$

En palabras, el valor presente descontado del consumo debe igualar al valor presente descontado del ingreso. Para descontar un valor futuro al período t, se multiplica por $\frac{1}{(1+r)^j}$ para un valor j períodos después, representando cuánto valor presente necesitarías para obtener un valor futuro equivalente con una tasa de interés fija de r. La expresión (6.2) generaliza directamente la restricción presupuestaria intertemporal del modelo de dos períodos.

Las preferencias del hogar son:

$$U = \sum_{j=0}^{T} \beta^j u\left(c_{t+j}\right) \tag{6.3}$$

Es decir, una extensión del caso de dos períodos, donde la utilidad vitalicia se define como una suma ponderada de los flujos de utilidad en cada período futuro, utilizando un factor de descuento geométrico β. Esto significa que el peso relativo en la utilidad de los períodos futuros en relación con el período actual disminuye exponencialmente con el tiempo. Si T es lo suficientemente grande y dado que $\beta < 1$, el peso relativo en la utilidad del último período en comparación con el primero puede ser bastante bajo.

El problema del hogar se puede plantear como la elección de una secuencia de consumo, $c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \ldots, c_{t+T}$, para maximizar la utilidad vitalicia sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal:

$$\max_{c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+T}} U = \sum_{j=0}^{T} \beta^j u\left(c_{t+j}\right)$$
$$\text{s.a.} \tag{6.4}$$
$$\sum_{j=0}^{T} \frac{c_{t+j}}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{T} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

Se pueden encontrar las condiciones de optimalidad de primer orden para este problema de manera análoga al caso de dos períodos: uno resuelve uno de los valores de consumo de la restricción presupuestaria intertemporal en términos de los otros niveles de consumo (por ejemplo, resolver para c_{t+T} en la restricción presupuestaria intertemporal), enchufa esto en la función objetivo, y esto convierte el problema en un problema no restringido de elección de los otros valores de consumo. Debido a que esto es algo laborioso, no trabajaremos en la optimización, aunque lo haremos en el ejemplo a continuación para la utilidad logarítmica con un total de tres períodos. Las condiciones de optimalidad son una secuencia de T ecuaciones de Euler para cada dos períodos adyacentes. Estas se pueden escribir:

$$\begin{aligned} u'\left(c_t\right) &= \beta(1+r)u'\left(c_{t+1}\right) \\ u'\left(c_{t+1}\right) &= \beta(1+r)u'\left(c_{t+2}\right) \\ u'\left(c_{t+2}\right) &= \beta(1+r)u'\left(c_{t+3}\right) \\ &\vdots \\ u'\left(c_{t+T-1}\right) &= \beta(1+r)u'\left(c_{t+T}\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Estas ecuaciones de Euler se parecen exactamente a la ecuación de Euler para el problema de dos períodos. Dado que hay un total de $T+1$ períodos, hay T conjuntos de períodos adyacentes, y por lo tanto T ecuaciones de Euler. Es importante notar que se pueden escribir las ecuaciones de Euler de diferentes maneras. Por ejemplo, se podría enchufar la condición para $t+1$ en la de $t+2$ para obtener: $u'\left(c_t\right) = \beta^2(1+r)^2 u'\left(c_{t+2}\right)$.

La intuición de por qué estas ecuaciones de Euler deben cumplirse en un óptimo es exactamente la misma que en un modelo de dos períodos. Considere aumentar c_{t+1} en una pequeña cantidad. El beneficio marginal de esto es la utilidad marginal del consumo en el período $t+1$, que es $\beta u'\left(c_{t+1}\right)$ (se multiplica por β para descontar este flujo de utilidad de vuelta al período t). El costo marginal de hacer esto es ahorrar una unidad menos en el período t, lo que significa reducir el consumo en el próximo período en $1+r$ unidades. El costo marginal es, por lo tanto, $\beta^2(1+r)u'\left(c_{t+2}\right)$. Igualar el beneficio marginal al costo marginal da como resultado la ecuación de Euler. Se puede pensar en la existencia de un diagrama de curvas de indiferencia/línea presupuestaria separado para cada par de períodos adyacentes en el tiempo.

6.2. Suavizamiento del consumo

Suponga que $\beta(1+r)=1$. Entonces, la secuencia de ecuaciones de Euler implica que:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= u'(c_{t+1}) \\ u'(c_{t+1}) &= u'(c_{t+2}) \\ u'(c_{t+2}) &= u'(c_{t+3}) \\ &\vdots \\ u'(c_{t+T-1}) &= u'(c_{t+T}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Es decir, $u'(c_t) = u'(c_{t+1}) = \cdots = u'(c_{t+T-1})$. Dado que la función de utilidad es estrictamente cóncava, entonces $\bar{C} = c_t = c_{t+1} = \cdots = c_{t+T}$. Por tanto, el consumo es constante en el tiempo a un valor $c_{t+j} = \bar{C} \quad \forall j = 0, \cdots, T$. Intuitivamente, dado que $\beta < 1$, el hogar prefiere el consumo presente sobre el futuro, lo que implica que el hogar va a querer consumir cada vez menos en el tiempo. Como $r > 0$, el hogar tiene incentivos para reducir su consumo presente para ahorrar y tener más consumo futuro, lo que va en contra de esta preferencia inicial. Si $\beta(1+r) > 1$, el hogar desearía que su utilidad marginal del consumo cayera en el tiempo, es decir, que el consumo crezca en el tiempo. Esto indica que los beneficios de diferir el consumo presente (determinado por r) son mayores que los costos de hacerlo (determinado por β). Por otro lado, si $\beta(1+r) < 1$ ocurre lo opuesto: el hogar es impaciente y la tasa de interés no compensa tal impaciencia, por lo que el hogar preferiría que el consumo se reduzca en el tiempo. Finalmente, si $\beta(1+r) = 1$, la impaciencia y el retorno del ahorro se compensan entre sí, por lo que el hogar prefiere una senda de consumo constante en el tiempo.

Si el consumo es constante en $\bar{C}$, entonces la restricción presupuestaria, que debe cumplirse en el óptimo, se simplifica a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{T} \frac{c_{t+j}}{(1+r)^j} &= \sum_{j=0}^{T} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} \\ \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{T} \frac{\bar{C}}{(1+r)^j} &= \sum_{j=0}^{T} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} \\ \Leftrightarrow \bar{C} \sum_{j=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^j} &= \sum_{j=0}^{T} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Como asumimos que $\beta(1+r)=1$, entonces $\frac{1}{1+r} = \beta$. Así:

$$\begin{aligned} \bar{C} \sum_{j=0}^{T} \beta^j &= \sum_{j=0}^{T} \beta^j y_{t+j} \\ \Leftrightarrow \bar{C} \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} &= \sum_{j=0}^{T} \beta^j y_{t+j} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Así,

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \left(\sum_{j=0}^{T} \beta^j y_{t+j} \right) \tag{6.9}$$

Es decir, el consumo $\bar{C}$ es una fracción $\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} < 1$[4] del valor presente descontado del flujo de ingresos del hogar (el ingreso permanente).

Por ejemplo, para un hogar que viva tres periodos, su función de consumo estaría dada por:

$$c_t = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} + \frac{y_{t+2}}{(1+r)^2} \right] \tag{6.10}$$

Con los supuestos anteriormente discutidos, tenemos que:

$$\bar{C} = \frac{1}{\beta^2+\beta+1} \left(y_t + \beta y_{t+1} + \beta^2 y_{t+2} \right) \tag{6.11}$$

6.3. Propensión marginal a consumir

Suponga que $\beta(1+r) = 1$, tal que la ecuación de consumo está dada por (6.9). Entonces, la propensión marginal al consumo, definida como $\frac{\partial \bar{C}}{\partial y_t}$, está dada por:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial y_t} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \tag{6.12}$$

Así, la PMC es positiva pero menor que uno, dado que $\beta^{T+1} < \beta$. Además, la PMC es decreciente en T: a medida que el hogar vive más períodos, menor será su PMC. Esto tiene implicaciones interesantes si consideramos el comportamiento de hogares con distintas edades. Por ejemplo, implica que las personas jóvenes (con un alto T) tienen una PMC menor que los hogares de mayor edad. Intuitivamente, esto se debe a que si el hogar quiere suavizar su consumo, debe aumentar su ahorro en períodos de ingresos altos para financiar el consumo en períodos de ingresos bajos. A medida que el hogar vive más períodos, aumenta la necesidad de ahorrar en períodos de ingresos altos.

La derivada parcial del consumo constante con respecto al ingreso recibido j períodos adelante es:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial y_{t+j}} = \beta^j \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \tag{6.13}$$

Cuando $j = 0$, esto se reduce a (6.12). A medida que j aumenta, β^j disminuye. En (6.9), el consumo en cada período es una fracción del valor presente descontado de la

[4] Por ejemplo, para el modelo de dos periodos ($T = 1$), esta fórmula implica que $\bar{C} = \frac{1}{1+\beta}(y_t + \beta y_{t+1}) = \frac{1}{1+\beta}\left(y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}\right)$

utilidad del flujo. A medida que el ingreso adicional se genera en el futuro más lejano, su efecto sobre el valor presente descontado del flujo de ingresos disminuye, ya que $\beta < 1$. Esto implica que el hogar ajusta su consumo menos ante un cambio anticipado en el ingreso futuro cuanto más lejano en el futuro sea ese cambio anticipado.

Si T es suficientemente grande (es decir, si el hogar vive durante un período de tiempo suficientemente largo), entonces $\beta^{T+1} \approx 0$, y podemos aproximar la PMC como $1 - \beta$. Si β es grande (es decir, relativamente cercano a 1), entonces la PMC puede ser bastante pequeña. Por ejemplo, si $\beta = 0{,}95$ y T es suficientemente grande, entonces la PMC es solo 0.05. En otras palabras, cuando el hogar vive durante muchos períodos, la PMC no solo es menor que 1, sino que debería estar bastante cerca de 0. Por lo tanto, el hogar debería ahorrar la mayoría de cualquier ingreso adicional en el período t, lo cual es necesario para financiar un consumo más alto en el futuro.

6.4. Choques transitorios y permanentes de ingreso

Para entender la diferencia entre cambios permanentes y transitorios en el ingreso, podemos derivar total de la función de consumo (6.9):

$$d\bar{C} = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta}\left[dy_t + \beta dy_{t+1} + \beta^2 dy_{t+2} + \cdots + \beta^T dy_{t+T}\right] \tag{6.14}$$

Para un cambio transitorio en el ingreso, donde $dy_t > 0$ y $dy_{t+j} = 0$ para $j > 0$, el efecto en el consumo fijo es simplemente la PMC:

$$\frac{d\bar{C}}{dy_t} = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} \tag{6.15}$$

Por otro lado, para un cambio permanente en el ingreso, donde $dy_t > 0$ y $dy_{t+j} = dy_t$ para $j > 0$, podemos factorizarlo para obtener:

$$d\bar{C} = \frac{1-\beta^{T+1}}{1-\beta} dy_t \left[1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^T\right] \tag{6.16}$$

Dado que $\frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}$ se cancela con el primer término, resulta:

$$\frac{d\bar{C}}{dy_t} = 1 \tag{6.17}$$

Es decir, si $\beta(1+r) = 1$, entonces el hogar debería gastar todo el cambio permanente en el ingreso sin ajustar su ahorro. En resumen, si el ingreso aumenta por la misma cantidad en todos los períodos, el hogar simplemente puede aumentar su consumo en todos los períodos por la misma cantidad sin cambiar su comportamiento de ahorro.

El análisis resalta la diferencia entre cambios transitorios y permanentes en el ingreso en el modelo de dos períodos. Mientras que el MPC de un cambio transitorio es mínimo, el consumo responde de manera directa a un cambio permanente en el ingreso. Esta distinción se aclara aún más si suponemos $\beta = 1$ y $r = 0$, lo que implica un deseo constante de consumo. En este caso, la restricción presupuestaria simplemente se reduce a igualar la suma del consumo con la suma del ingreso. Por lo tanto, la función de consumo se simplifica a

$$\bar{C} = \frac{1}{T+1}\left[y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \dots y_{t+T}\right]$$

Así, en este contexto, el consumo es simplemente igual al ingreso promedio a lo largo de la vida, donde T es el número de períodos que vive el hogar. Si T es suficientemente grande, un cambio transitorio en el ingreso tiene un efecto mínimo en el ingreso promedio a lo largo de la vida, y por lo tanto, el consumo tiene una respuesta limitada. Sin embargo, ante un cambio permanente en el ingreso, el ingreso promedio aumenta y el hogar consume todo el ingreso adicional. Por ejemplo, si el hogar vive 45 años (vida laboral promedio), la PMC es de $\frac{1}{46} \approx 0{,}022$, una PMC casi cercana a cero.

7. Ciclo de vida

Podemos utilizar nuestro análisis basado en la suposición de que $\beta(1+r) = 1$, que da lugar a un consumo constante a lo largo del tiempo dado por (6.9), para reflexionar sobre el comportamiento de consumo y ahorro a lo largo del ciclo de vida.

Supongamos que un hogar inicia su vida laboral en el período t. Se prevé que se jubile después del período $t+R$ (R es la fecha de jubilación) y que fallezca después del período $t+T$ (T es la fecha de fallecimiento). Siendo y_t el ingreso inicial del hogar, se anticipa que su ingreso crezca cada período hasta la jubilación con una tasa bruta de crecimiento $G_Y \geq 0$. En términos de la tasa de crecimiento neta, se expresa como $G_Y = 1 + g_Y$, donde $G_Y = 1$ representa un perfil de ingresos plano. Después de $t+R$, se estima que el hogar reciba un ingreso fijo Y^R, considerado como un beneficio de jubilación, que se mantiene constante durante toda la jubilación.

Bajo estas suposiciones, podemos resolver para el nivel constante de consumo a lo largo del tiempo, $\bar{C}$, de la siguiente manera:

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}}\left[y_t + \beta G_Y y_t + \beta^2 G_Y^2 y_t + \dots + \beta^R G_Y^R y_t + \beta^{R+1} Y^R + \beta^{R+2} Y^R + \dots + \beta^T Y^R\right]$$

Simplificando

$$\begin{aligned}\bar{C} =& \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} y_t \left[1 + \beta G_Y + (\beta G_Y)^2 + \dots + (\beta G_Y)^R\right] + \\ & \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \beta^{R+1} Y^R \left[1 + \beta + \dots + \beta^{T-R-1}\right]\end{aligned}$$

Esto se puede simplificar aún más al notar que:

$$1 + \beta G_Y + (\beta G_Y)^2 + \cdots + (\beta G_Y)^R = \frac{1 - (\beta G_Y)^{R+1}}{1 - \beta G_Y}$$
$$1 + \beta + \cdots + \beta^{T-R-1} = \frac{1 - \beta^{T-R}}{1 - \beta}$$

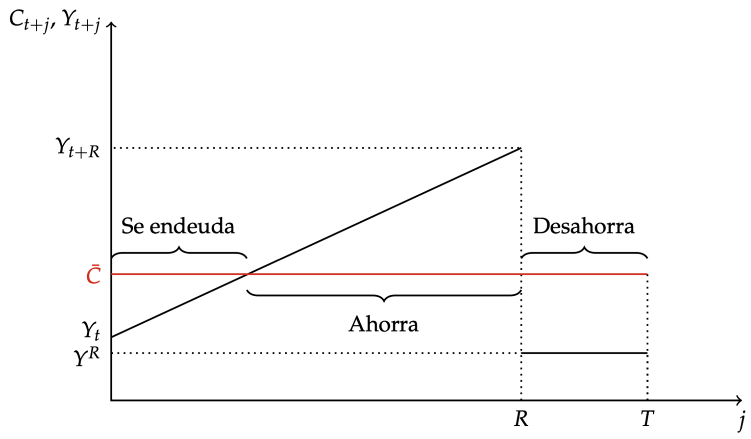
Podemos sustituir estas expresiones para obtener:

$$\bar{C} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \frac{1 - (\beta G_Y)^{R+1}}{1 - \beta G_Y} y_t + \frac{1-\beta}{1-\beta^{T+1}} \beta^{R+1} \frac{1-\beta^{T-R}}{1-\beta} Y^R \tag{7.1}$$

La ecuación (7.1) representa la función de consumo. Observe que si $T = R$ (es decir, si el hogar se jubila en el mismo período en que muere, de modo que no hay un período de jubilación), entonces $\beta^{T-R} = \beta^0 = 1$, por lo que el último término desaparece. Podemos ver que el consumo aumenta claramente con (i) el ingreso inicial, y_t, y (ii) el beneficio de jubilación, Y^R. No es tan evidente verlo, pero el consumo también aumenta con la tasa de crecimiento del ingreso durante los años laborales, g_Y. Si el beneficio de jubilación no es demasiado grande en relación con el ingreso durante toda la vida (es decir, si Y^R no es demasiado grande), el consumo aumentará con R (es decir, un hogar consumirá más cuanto más tiempo planee trabajar).

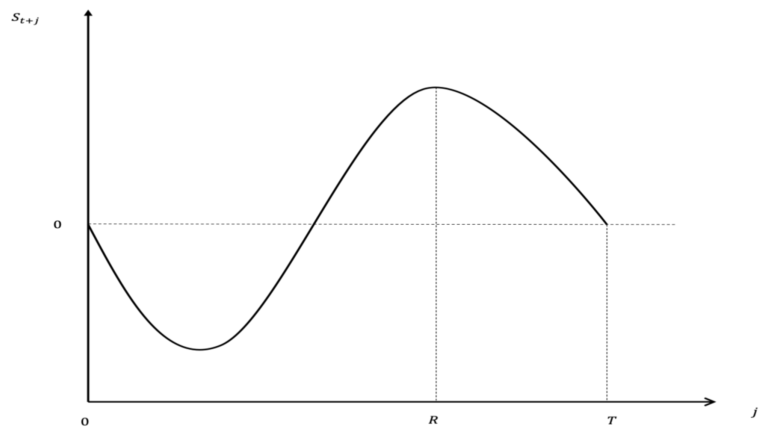
La Figura 7 traza trayectorias de tiempo hipotéticas para el consumo y el ingreso a lo largo del ciclo de vida. Suponemos que el ingreso comienza siendo bajo, pero luego crece constantemente hasta la fecha de jubilación. El ingreso cae sustancialmente en la jubilación a Y^R. El perfil de consumo es constante en el tiempo, lo cual es una consecuencia de la suposición de que $\beta(1 + r) = 1$.

Figura 7: Ciclo de Vida



¿Cómo se comporta el stock de ahorro? El gráfico 8 muestra el stock de ahorro predicho por el modelo. El stock empieza en cero, dado que supusimos un hogar sin riqueza inicial. El stock empieza a crecer negativamente (es decir, el hogar acumula deuda o pasivos) hasta un punto de inflexión, donde el hogar revierte la tendencia y empieza a acumular activos hasta su fecha de retiro o pensión. Posterior al retiro, el hogar empieza a desacumular gradualmente su stock de ahorros hasta agotarlo completamente. Esta es la hipótesis del ciclo de vida de Modigliani y Brumberg (1954)[5]

Figura 8: Stock de ahorro durante el ciclo de vida



Evidencia Empírica: El modelo básico del ciclo de vida expuesto anteriormente predice que el consumo no debería disminuir en la jubilación. Esta es una implicación de la HIP que estudiamos a lo largo de estas clases. La jubilación es (más o menos) predecible, y por lo tanto, los planes de consumo deberían incorporar la caída predecible en el ingreso en la jubilación con bastante anticipación. Esta predicción no depende de la suposición de que $\beta(1+r) = 1$ y de que el perfil de consumo sea plano. Podría ser que $\beta(1+r) > 1$, en cuyo caso el consumo aumentaría constantemente con el tiempo, o $\beta(1+r) < 1$, en cuyo caso el consumo disminuiría con el tiempo. En relación con su tendencia (plana, creciente o decreciente), el consumo no debería reaccionar a un cambio predecible en el ingreso, como en la jubilación.

El llamado "puzzle del consumo en la jubilación"documenta que el gasto en consumo disminuye significativamente en la jubilación. Esto no es consistente con las implicaciones de la teoría básica. Aguiar y Hurst (2005)[6] señalan que existe una distinción potencialmente importante entre consumo y gasto. En los datos, medimos el gasto total en dólares en bienes. Normalmente llamamos a esto consumo. Pero parece plausible que las personas que son consumidores más eficientes (por ejemplo, encuentran mejores ofertas en las tiendas) podrían tener un gasto menor que un consumidor menos eficiente, incluso si el consumo es el mismo.

[5]Modigliani, F. & Brumberg, R. (1954). Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. Franco Modigliani, 1(1), 388-436.

[6]Aguiar, Mark and Erik Hurst. 2005. Çonsumption vs. Expenditure."Journal of Political Economy 113 (5):919-948.

En la jubilación, el costo de oportunidad del tiempo de uno disminuye significativamente. En comparación con aquellos que trabajan activamente, las personas jubiladas pasan más tiempo haciendo compras (por ejemplo, recortando cupones, buscando mejores ofertas), cocinan más comidas en casa en lugar de comer fuera, etc. Todo esto sugiere que su gasto probablemente disminuya en relación con su consumo real. Aguiar y Hurst (2005) utilizan un conjunto de datos novedoso para medir la ingesta calórica de las personas, y encuentran que no hay una disminución en la ingesta calórica en la jubilación, aunque el gasto en alimentos disminuye. Interpretan esta evidencia como consistente con las predicciones del modelo del ciclo de vida.

Referencias

- Garín, Lester & Sims (2020) Intermediate Macroeconomics [GLS]*
- Kurlat, Pablo (2022) A Course in Modern Macroeconomics [K]*
- Moll, Benjamin (2023) Lecture 9: Financial Frictions and Amplification.