实 验 报 告

实验名称 规划问题 第 6 次实验

三、实验过程与结果（包括建立的模型、程序、运行结果、结果分析等）

1．(教材 p.197: 8.5.9) 一家糖果商店出售 3 种不同品牌的果仁糖，每个品牌含有不同比例的杏仁、核桃仁、腰果仁、胡桃仁。为了维护商店的兴誉，每个品牌中所含有的果仁的最大、最小比例是必须满足的，如下面的左表所示。下面的右表列出了供应商每周能够得到的每类果仁的最大数量和售价。

品牌	含量需求	售价/(美元/kg)
普通	腰果仁不超过 20%	0.89
	胡桃仁不低于 40%	
	核桃仁不超过 25%	
	杏仁没有限制	
豪华	腰果仁不超过 35%	1.10
	杏仁不低于 40%	
	核桃仁、胡桃仁没有限制	
蓝带	腰果仁含量位于 30%~50%之间	1.80
	杏仁不低于 40%	
	核桃仁、胡桃仁没有限制	

	售价/(美元/kg)	每周最大供应量/kg
杏仁	0.45	2000
核桃仁	0.55	4000
腰果仁	0.70	5000
胡桃仁	0.50	3000

商店希望确定每周购进杏仁、核桃仁、腰果仁、胡桃仁的数量，使周利润最大。建立数学模型，帮助该商店管理人员解决果仁混合的问题。

要求用两种 LINGO 编程方法求解此题

解：记 xi 是第 i 个品牌的产量(普通、豪华、蓝带分别对应 1, 2, 3);

xij 是第 i 个品牌中第 j 种果仁的数量(杏仁、核桃仁、腰果仁、胡桃仁对应 1234)

yj 是需要的第 j 种果仁的总数量;

LINGO 程序 A:

```
Max = 0.89*x1 + 1.1*x2 + 1.8*x3 - 0.45*y1 - 0.55*y2 - 0.7*y3 - 0.5*y4;
x11 + x12 + x13 + x14 = x1;
x21 + x22 + x23 + x24 = x2;
x31 + x32 + x33 + x34 = x3;
x11 + x21 + x31 = y1;
x12 + x22 + x32 = y2;
x13 + x23 + x33 = y3;
x14 + x24 + x34 = y4;

x12 - 0.25*x1 < 0;     !含量要求;
x13 - 0.20*x1 < 0;
x14 - 0.40*x1 > 0;
x21 - 0.40*x2 > 0;
x23 - 0.35*x2 < 0;
x31 - 0.30*x3 > 0;
x33 - 0.30*x3 > 0;
x33 - 0.50*x3 < 0;
```

```
    y1 < 2000;  !供应量限制;
    y2 < 4000;
    y3 < 5000;
    y4 < 3000;
```

LINGO 程序 B:

```
model:
sets:
  Brands/B1..B3/:z,zPrice;
  Pips/p1..p4/:y,yPrice,yMax;
  links(Brands,Pips):prop1,prop2,x;
endsets
data:
  zPrice= 0.89 1.10 1.80;
  yPrice= 0.45 0.55 0.70 0.50;
  yMax  = 2000 4000 5000 3000;
  prop1 = 0 0    0  0.4   0.4 0 0    0    0.3 0 0.3 0;
  prop2 = 1 0.25 0.2 1     1   1 0.35 1    1   1 0.5 1;
enddata
Max = @sum(Brands: zPrice*z) - @sum(Pips: yPrice*y);  !目标函数;
@for(Brands(i): @sum(Pips(j): x(i,j)) = z(i););  !每个品牌各果仁数量之和=品牌产量;
@for(Pips(j): @sum(Brands(i): x(i,j)) = y(j););  !每种果仁各品牌之和=果仁需求量;
@for(Brands(i): @for(Pips(j): x(i,j) > prop1(i,j)*z(i);));  !含量要求;
@for(Brands(i): @for(Pips(j): x(i,j) < prop2(i,j)*z(i);));
@for(Pips(j): y(j) < yMax(j););  !供应量限制;
end
```

程序 A 运行结果为（程序 B 类似）

Objective value: 10069.70
Total solver iterations: 6

Variable	Value	Reduced Cost
X1	5454.545	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	6666.667	0.000000
Y1	2000.000	0.000000
Y2	4000.000	0.000000
Y3	3121.212	0.000000
Y4	3000.000	0.000000
X11	0.000000	3.321212
X12	1363.636	0.000000
X13	1090.909	0.000000
X14	3000.000	0.000000
X21	0.000000	0.000000
X22	0.000000	1.777778
X23	0.000000	1.777778
X24	0.000000	2.123232
X31	2000.000	0.000000
X32	2636.364	0.000000
X33	2030.303	0.000000
X34	0.000000	0.3454545

即每周利润 = 10069.70 (元)

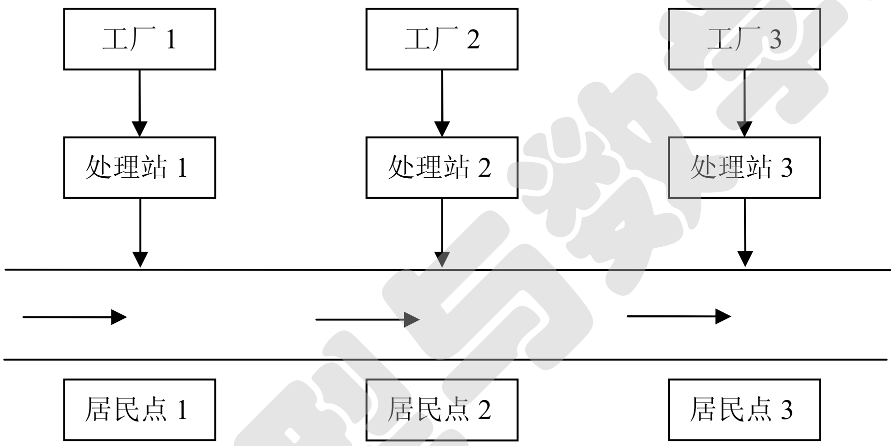
每周生产普通品牌 5454.545kg，豪华 0kg，蓝带品牌 6666.667kg；

每周购入杏仁 2000kg，核桃仁 4000kg，腰果仁 3121.212kg，胡桃仁 3000kg；

且普通品牌中使用杏仁 0kg，核桃仁 1363.636kg，腰果仁 1090.909kg，胡桃仁 3000kg；
蓝带品牌中使用杏仁 2000kg，核桃仁 2636.364kg，腰果仁 2030.303kg，胡桃仁 0kg；
利润 profit = 10070 (元)

注意：果仁糖中还有个主要成份——糖，则前 3 个约束中等式改为“<=”，结果改变了。当然，也可以理解为果仁为固定比例 A%，另外(100-A)%为糖，则不必改约束。

2．(教材 p.198：8.5.10) 如图 8.2 有若干工厂的排污口流入某江，各口有污水处理站，处理站对面是居民点。工厂 1 上游江水流量和污水浓度，国家标准规定的水的污染浓度，以及各个工厂的污水流量和污水浓度均已知道。设污水处理费用与污水处理前后的浓度差和污水流量成正比，使每单位流量的污水下降一个浓度单位需要的处理费用（称处理系数）为已知。处理后的污水与江水混合，流到下一个排污口之前，自然状态下的江水也会使污水浓度下降一个比例系数（称自净系数），该系数可以估计。试确定各污水处理站出口的污水浓度，使在符合国家标准规定的条件下总的处理费用最小。



先建立一般情况下的数学模型，再求解以下的具体问题：

设上游江水流量 为 1000 (10^{12}L/min),

污水浓度 为 0.8 (mg/L),

3 个工厂的污水流量均为 5 (10^{12}L/min),

3 个工厂的污水浓度（从上游至下游排列）分别为 100，60，50 (mg/L),

3 个工厂的处理系数均为 1 (万元/((10^{12}L/min)×(mg/L))=万元/(10^{12}mg/min)))

3 个工厂之间的两段江面的自净系数（从上游至下游排列）分别为 0.9 和 0.6.

国家标准规定水的污染浓度不能超过 1 (mg/L).

(1) 为了使江面上所有地段的水污染达到国家标准，最少需要化费多少费用.

(2) 如果只要求 3 个居民点上游的水污染达到国家标准，最少需要化费多少费用.

提示：可以进行适当的简化的近似，建立线性规划模型.

解：设 x1, x2, x3 为工厂 1, 2, 3 花费的钱（单位：万元）

第一问的模型为

```
min=x1+x2+x3;
    (1000*0.8+5*100-x1/1)/(1000+5)<=1;
    ((1000*0.8+5*100-x1/1)*0.9+5*60-x2/1)/(1000+5+5)<=1;
    (((1000*0.8+5*100-x1/1)*0.9+5*60-x2/1)*0.6+5*50-x3/1)/(1000+5+5+5)<=1;
```

第二问的模型为

min=x1+x2;

0.9*(1000*0.8+5*100-x1/1)/(1000+5)<=1;

0.6*((1000*0.8+5*100-x1/1)*0.9+5*60-x2/1)/(1000+5+5)<=1;

Lingo 程序为

(1)

```
min=x1+x2+x3;
x1>295;
0.9*x1+x2>460;
0.54*x1+0.6*x2+x3>117;
```

```
Global optimal solution found.
   Objective value:                              489.5000
   Total solver iterations:                             0
                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        295.0000            0.000000
                           X2        194.5000            0.000000
                           X3        0.000000            1.000000
                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        489.5000           -1.000000
                            2        0.000000          -0.1000000
                            3        0.000000           -1.000000
                            4        159.0000            0.000000
```

则最少花费489.5万元。

(2)

```
min=x1+x2;
0.9*x1>165;
0.54*x1+0.6*x2>-128;
```

```
Global optimal solution found.
   Objective value:                              183.3333
   Total solver iterations:                             0
                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        183.3333            0.000000
                           X2        0.000000            1.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        183.3333           -1.000000
                            2        0.000000           -1.111111
                            3        227.0000            0.000000
```

则最少花费183.3333万元。

3．(教材 p.220: 9.5.4) 某公司将 3 种不同含硫量的液体原料（分别记为甲、乙、丙）混合生产两种产品（分别记为 A、B)。按照生产工艺要求：原料甲、乙必须首先倒入混合池中混合，混合后的液体再分别与原料丙混合生产 A、B。已知：

原料	甲	乙	丙
含硫量(%)	3	1	2
进货价格(千元/吨)	6	16	10
最大供应量(吨)	500	500	500

产品	A	B

含硫量不能超过(%)	2.5	1.5
售价(千元/吨)	9	15
市场最大需求量(吨)	100	200

问 (1) 应如何安排生产可使利润最大？

(2) 如果产品 A 的最大市场需求量增长为 600 吨，就如何安排生产？

(3) 如果乙的进货价格下降为 13 千元/吨，应如何安排生产？分别对(1)、(2)两种情况进行讨论。

解法一：

设 y_1, z_1 分别是产品 A 中来自混合池和原料丙的吨数

y_2, z_2 分别是产品 B 中来自混合池和原料丙的吨数

x_1, x_2 是混合池中原料甲、乙的比例（ $x_1 + x_2 = 1$）

则 x_1y_1、x_2y_1、z_1 分别是产品 A 中原料甲、乙、丙的吨数

则 x_1y_2、x_2y_2、z_2 分别是产品 B 中原料甲、乙、丙的吨数

(3)中改为 13

优化目标是总利润最大:

Max $(9 - 6x_1 - \mathbf{16}x_2)y_1 + (15 - 6x_1 - \mathbf{16}x_2)y_2 + (9 - 10)z_1 + (15 - 10)z_2$

[[或 $9(y_1 + z_1) + 15(y_2 + z_2) - 6x_1(y_1 + y_2) - \mathbf{16}x_2(y_1 + y_2) - 10(z_1 + z_2)$

或 $9(y_1 + z_1) + 15(y_2 + z_2) - (6x_1 + \mathbf{16}x_2)(y_1 + y_2) - 10(z_1 + z_2)$]]

约束条件为:

1) 原料最大供应量限制 $x_1(y_1 + y_2) \le 500$，$x_2(y_1 + y_2) \le 500$，$z_1 + z_2 \le 500$

2) 产品最大需求量限制 $y_1 + z_1 \le \mathbf{100}$, $y_2 + z_2 \le 200$

(2)中改为 600

3) 产品最大含硫量限制

对产品 A: $\frac{(3x_1+x_2)y_1+2z_1}{y_1+z_1} \le 2.5$，即 $(3x_1 + x_2 - 2.5)y_1 - 0.5\, z_1 \le 0$

对产品 B: $\frac{(3x_1+x_2)y_2+2z_2}{y_2+z_2} \le 1.5$，即 $(3x_1 + x_2 + x_4 - 1.5)y_2 + 0.5\, z_2 \le 0$

4) 其它限制 $x_1 + x_2 = 1$, $x_1, x_2, y_1, z_1, y_2, z_2 \ge 0$

(1) LINGO 程序

```
!(1)(2)题的程序 ;
Model:
Max=(9-6*x1-16*x2)*y1+(15-6*x1-16*x2)*y2+(9-10)*z1+(15-10)*z2;
   x1*(y1+y2)<=500;   !供应量约束;
   x2*(y1+y2)<=500;
   z1+z2<=500;
   y1+z1<=100;          !需求约束 (1) 100, (2) 600;
   y2+z2<=200;
   (3*x1+x2-2.5)*y1-0.5*z1<=0;  !产品含含硫量限制;
   (3*x1+x2-1.5)*y2+0.5*z2<=0;
   x1+x2=1;
end
```

(1) (2)的解相同：$x_1 = 0, x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $y_2 = 100$, $z_2 = 100$,

目标函数最优值 400

即只生产 B 产品 200 吨, 用原料乙 100 吨, 丙 100 吨. 可获利 400 千元

(3)的两个解也相同：$x_1 = 0.25, x_2 = 0.75,\quad y_1 = 0,\quad z_1 = 0,\quad y_2 = 200,\quad z_2 = 0,$

目标函数最优值 750

即只生产 B 产品 200 吨, 用原料甲 50 吨, 乙 150 吨. 可获利 750 千元

解法二：

设 x_1, y_1, z_1 分别是产品 A 中来自原料甲、乙、丙的吨数　　混合池

x_2, y_2, z_2 分别是产品 B 中来自原料甲、乙、丙的吨数　　混合池和原料丙的吨数

优化目标是总利润最大:

Max $(9-6)x_1 + (15-6)x_2 + (9-\mathbf{16})y_1 + (15-\mathbf{16})y_1 + (9-10)z_1 + (15-10)z_2$

[[或 $9(x_1+y_1+z_1) + 15(x_2+y_2+z_2) - 6(x_1+x_2) - \mathbf{16}(y_1+y_2) - 10(z_1+z_2)$]]

约束条件为:

1) 原料最大供应量限制 $x_1 + x_2 \le 500$，$y_1 + y_2 \le 500$，$z_1 + z_2 \le 500$

2) 产品最大需求量限制 $x_1 + y_1 + z_1 \le \mathbf{100}$,　$x_2 + y_2 + z_2 \le 200$

(2)中改为 600

3) 产品最大含硫量限制

对产品 A: $\dfrac{3x_1+y_1+2z_1}{x_1+y_1+z_1} \le 2.5$，即 $0.5x_1 - 1.5y_1 - 0.5z_1 \le 0$

对产品 B: $\dfrac{3x_2+y_2+2z_2}{x_2+y_2+z_2} \le 1.5$，即 $1.5x_2 - 0.5y_2 + 0.5z_2 \le 0$

4) 混合池要求，即限制 A、B 产品中甲、乙比例相同：$x_1/x_2 = y_1/y_2$, 即 $x_1 y_2 = x_2 y_1$

5) 非负限制 $x_1, x_2, y_1, z_1, y_2, z_2 \ge 0$

(1)　LINGO 程序 $(9-6)x_1 + (15-6)x_2 + (9-\mathbf{16})y_1 + (15-\mathbf{16})y_1 + (9-10)z_1 + (15-10)z_2$

```
!(1)(2)题的程序 ;
Model:
Max=(9-6)*x1+(15-6)*x2+(9-16)*y1+(15-16)*y2+(9-10)*z1+(15-10)*z2;
   x1+x2<=500;     !供应量约束;
   y1+y2<=500;
   z1+z2<=500;
   x1+y1+z1<=100;  !需求约束 (1) 100, (2) 600;
   x2+y2+z2<=200;
   0.5*x1-1.5*y1-0.5*z1<=0;   !产品含含硫量限制;
   1.5*x2-0.5*y2+0.5*z2<=0;
   x1*y2=x2*y1;     !混料池限制;
end
```

四、问题讨论（实验心得与体会）