

实验报告

实验名称 插值与数值积分 第 2 次实验

三、实验结果（包括所用命令、程序，运行结果等）

1. (教材 p.65: 3.4.4(1)) 对函数 $y = \frac{1}{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$, 用梯形、辛普森和 Gauss-Lobatto 方法计算积分。改变步长(对梯形), 改变精度要求(对辛普森和 Gauss-Lobatto), 进行比较分析。

解: 编写程序如下:

```
format long          % 以下结果显示为双精度格式
z = log(2)           % 积分的精确值

n = 100; h = 1/n;
x = linspace(0,1,n+1);
t1 = trapz(1./(1+x)) * h % 用梯形公式 函数计算
t1tol = t1 - z         % 梯形公式计算误差

n = 2*n; h = 1/n;
x = linspace(0,1,n+1);
t2 = trapz(1./(1+x)) * h % 加密一倍用梯形公式 函数计算
t2tol = t2 - z         % 加密一倍时梯形公式计算误差

t2n_tn = abs(t2-t1)    % 加密一倍时与原估计的差异 =~ 3*t2tol

s1 = quad('1./(1+x)', 0, 1) %辛普森公式
s1tol = s1 - z
s2 = quad('1./(1+x)', 0, 1, 1e-9) %辛普森公式, 指定计算精度
s2tol = s2 - z

g1 = quadl('1./(1+x)', 0, 1) % Gauss-Lobatto 公式
g1tol = g1 - z
g2 = quadl('1./(1+x)', 0, 1, 1e-9) % Gauss-Lobatto 公式, 指定计算精度
g2tol = g2 - z

运行结果:
z =          0.693147180559945
t1 =          0.693153430481824
t1tol =        6.249921879031284e-006
t2 =          0.693148743055063
t2tol =        1.562495117402030e-006
t2n_tn =        4.687426761629254e-006
t2n_tn_3 =        1.562475587209751e-006
s1 =          0.693147199862970
s1tol =        1.930302473418522e-008
```

$s2 = 0.693147180570772$
 $s2tol = 1.082633982463221e-011$
 $g1 = 0.693147186147186$
 $g1tol = 5.587240781146363e-009$
 $g2 = 0.693147180559946$
 $g2tol = 1.110223024625157e-015$

此积分的精确值是 0.693147180559945;

用梯形公式计算:

$n = 100$ 时 $T_n = 0.693153430481824$, 绝对误差是 $6.249921879031284e-006$;

加密一倍, $T_{2n} = 0.693148743055063$, 绝对误差是 $1.562495117402030e-006$;

$T_{2n} - T_n = 4.687426761629254e-006$, $(T_{2n} - T_n)/3 = 1.562475587209751e-006$, 非常接近 T_{2n} 的绝对误差(验证 p.56 公式(3.29));

用辛普森公式计算:

用默认精度计算时, $S = 0.693147199862970$, 绝对误差是 $1.930302473418522e-008$;

用 $1e-9$ 精度计算时, $S = 0.693147180570772$, 绝对误差是 $1.082633982463221e-011$;

实际精度均比指定的高;

用 Gauss-Lobatto 公式计算:

用默认精度计算时, $G = 0.693147186147186$, 绝对误差是 $5.587240781146363e-009$;

用 $1e-9$ 精度计算时, $G = 0.693147180559946$, 绝对误差是 $1.110223024625157e-015$;

实际精度均比指定的高很多。

2. (教材 p.65: 3.4.10) 下表给出的 x, y 数据位于机翼剖面的轮廓线上, y_1 和 y_2 分别对应轮廓的上下线。假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时的 y 坐标。试完成加工所需数据, 画出曲线, 求机翼剖面的面积。

x	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
y_1	0	1.8	2.2	2.7	3.0	3.1	2.9	2.5	2.0	1.6
y_2	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6

解: 程序如下:

%初值

$x0 = [0, 3:2:11, 12:15];$

$Y1 = [0, 1.8, 2.2, 2.7, 3.0, 3.1, 2.9, 2.5, 2.0, 1.6];$

$Y2 = [0, 1.2, 1.7, 2.0, 2.1, 2.0, 1.8, 1.2, 1.0, 1.6];$

%步长

$x = 0:0.1:15;$

%分段线性插值

$y1_in = \text{interp1}(x0, Y1, x);$

$y2_in = \text{interp1}(x0, Y2, x);$

%三次样条插值

$y1_sp = \text{spline}(x0, Y1, x);$

$y2_sp = \text{spline}(x0, Y2, x);$

$[x', y1_in', y1_sp', y2_in', y2_sp']$

$\text{subplot}(2, 1, 1), \text{plot}(x, y1_in, x, y2_in, 'b'), \text{title}('interp')$

$\text{subplot}(2, 1, 2), \text{plot}(x, y1_sp, x, y2_sp, 'b'), \text{title}('spline')$

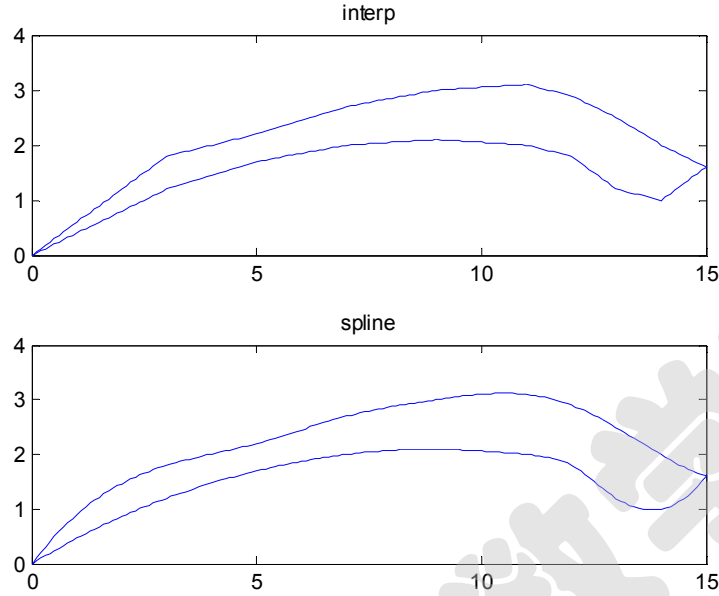
$\text{trapz}(x, y1_in) - \text{trapz}(x, y2_in)$ %分段线性插值积分值

trapz(x,y1_sp)-trapz(x,y2_sp) %三次样条插值积分值

结果如下：

所有数据见附表。

机翼断面曲线如下，上图是分段线性插值，下图是样条曲线插值。



机翼面积：分段线性插值，梯形积分公式： $S = 10.7500$ ；

三次样条插值，梯形积分公式： $S = 11.3444$ 。

结果分析：

由图形可见，三次样条插值出来的曲线要比分段线性插值更光滑，这样面积也就越准确。

附表：机翼端面轮廓线数据

x	Y1 (线性)	Y1 (样条)	Y2 (线性)	Y2 (样条)	x	Y1 (线性)	Y1 (样条)	Y2 (线性)	Y2 (样条)
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	7.6	2.7900	2.8130	2.0300	2.0525
0.1	0.0600	0.1089	0.0400	0.0499	7.7	2.8050	2.8291	2.0350	2.0595
0.2	0.1200	0.2134	0.0800	0.0990	7.8	2.8200	2.8446	2.0400	2.0660
0.3	0.1800	0.3137	0.1200	0.1474	7.9	2.8350	2.8595	2.0450	2.0719
0.4	0.2400	0.4097	0.1600	0.1951	8.0	2.8500	2.8739	2.0500	2.0773
0.5	0.3000	0.5018	0.2000	0.2421	8.1	2.8650	2.8878	2.0550	2.0822
0.6	0.3600	0.5898	0.2400	0.2884	8.2	2.8800	2.9013	2.0600	2.0865
0.7	0.4200	0.6740	0.2800	0.3340	8.3	2.8950	2.9144	2.0650	2.0902
0.8	0.4800	0.7545	0.3200	0.3788	8.4	2.9100	2.9272	2.0700	2.0933
0.9	0.5400	0.8314	0.3600	0.4230	8.5	2.9250	2.9397	2.0750	2.0959
1.0	0.6000	0.9047	0.4000	0.4665	8.6	2.9400	2.9520	2.0800	2.0979
1.1	0.6600	0.9747	0.4400	0.5094	8.7	2.9550	2.9641	2.0850	2.0994
1.2	0.7200	1.0413	0.4800	0.5515	8.8	2.9700	2.9761	2.0900	2.1002
1.3	0.7800	1.1047	0.5200	0.5930	8.9	2.9850	2.9881	2.0950	2.1004
1.4	0.8400	1.1651	0.5600	0.6338	9.0	3.0000	3.0000	2.1000	2.1000
1.5	0.9000	1.2225	0.6000	0.6739	9.1	3.0050	3.0119	2.0950	2.0990
1.6	0.9600	1.2770	0.6400	0.7134	9.2	3.0100	3.0238	2.0900	2.0974
1.7	1.0200	1.3287	0.6800	0.7523	9.3	3.0150	3.0355	2.0850	2.0952
1.8	1.0800	1.3778	0.7200	0.7904	9.4	3.0200	3.0469	2.0800	2.0925
1.9	1.1400	1.4244	0.7600	0.8280	9.5	3.0250	3.0578	2.0750	2.0893
2.0	1.2000	1.4685	0.8000	0.8649	9.6	3.0300	3.0683	2.0700	2.0857

2. 1	1. 2600	1. 5104	0. 8400	0. 9012	9. 7	3. 0350	3. 0782	2. 0650	2. 0815
2. 2	1. 3200	1. 5499	0. 8800	0. 9368	9. 8	3. 0400	3. 0873	2. 0600	2. 0770
2. 3	1. 3800	1. 5874	0. 9200	0. 9719	9. 9	3. 0450	3. 0956	2. 0550	2. 0721
2. 4	1. 4400	1. 6229	0. 9600	1. 0063	10. 0	3. 0500	3. 1029	2. 0500	2. 0668
2. 5	1. 5000	1. 6565	1. 0000	1. 0401	10. 1	3. 0550	3. 1092	2. 0450	2. 0611
2. 6	1. 5600	1. 6884	1. 0400	1. 0732	10. 2	3. 0600	3. 1143	2. 0400	2. 0552
2. 7	1. 6200	1. 7185	1. 0800	1. 1058	10. 3	3. 0650	3. 1181	2. 0350	2. 0490
2. 8	1. 6800	1. 7471	1. 1200	1. 1378	10. 4	3. 0700	3. 1206	2. 0300	2. 0425
2. 9	1. 7400	1. 7742	1. 1600	1. 1692	10. 5	3. 0750	3. 1215	2. 0250	2. 0358
3. 0	1. 8000	1. 8000	1. 2000	1. 2000	10. 6	3. 0800	3. 1209	2. 0200	2. 0289
3. 1	1. 8200	1. 8245	1. 2250	1. 2302	10. 7	3. 0850	3. 1185	2. 0150	2. 0219
3. 2	1. 8400	1. 8480	1. 2500	1. 2599	10. 8	3. 0900	3. 1143	2. 0100	2. 0147
3. 3	1. 8600	1. 8704	1. 2750	1. 2889	10. 9	3. 0950	3. 1082	2. 0050	2. 0074
3. 4	1. 8800	1. 8918	1. 3000	1. 3174	11. 0	3. 1000	3. 1000	2. 0000	2. 0000
3. 5	1. 9000	1. 9125	1. 3250	1. 3454	11. 1	3. 0800	3. 0897	1. 9800	1. 9924
3. 6	1. 9200	1. 9325	1. 3500	1. 3727	11. 2	3. 0600	3. 0772	1. 9600	1. 9841
3. 7	1. 9400	1. 9519	1. 3750	1. 3995	11. 3	3. 0400	3. 0626	1. 9400	1. 9742
3. 8	1. 9600	1. 9708	1. 4000	1. 4258	11. 4	3. 0200	3. 0459	1. 9200	1. 9621
3. 9	1. 9800	1. 9894	1. 4250	1. 4515	11. 5	3. 0000	3. 0269	1. 9000	1. 9469
4. 0	2. 0000	2. 0076	1. 4500	1. 4767	11. 6	2. 9800	3. 0059	1. 8800	1. 9280
4. 1	2. 0200	2. 0258	1. 4750	1. 5014	11. 7	2. 9600	2. 9826	1. 8600	1. 9046
4. 2	2. 0400	2. 0439	1. 5000	1. 5255	11. 8	2. 9400	2. 9573	1. 8400	1. 8759
4. 3	2. 0600	2. 0620	1. 5250	1. 5491	11. 9	2. 9200	2. 9297	1. 8200	1. 8413
4. 4	2. 0800	2. 0803	1. 5500	1. 5722	12. 0	2. 9000	2. 9000	1. 8000	1. 8000
4. 5	2. 1000	2. 0989	1. 5750	1. 5947	12. 1	2. 8600	2. 8682	1. 7400	1. 7516
4. 6	2. 1200	2. 1179	1. 6000	1. 6168	12. 2	2. 8200	2. 8342	1. 6800	1. 6970
4. 7	2. 1400	2. 1374	1. 6250	1. 6383	12. 3	2. 7800	2. 7984	1. 6200	1. 6377
4. 8	2. 1600	2. 1575	1. 6500	1. 6594	12. 4	2. 7400	2. 7606	1. 5600	1. 5749
4. 9	2. 1800	2. 1784	1. 6750	1. 6799	12. 5	2. 7000	2. 7211	1. 5000	1. 5099
5. 0	2. 2000	2. 2000	1. 7000	1. 7000	12. 6	2. 6600	2. 6798	1. 4400	1. 4442
5. 1	2. 2250	2. 2225	1. 7150	1. 7196	12. 7	2. 6200	2. 6370	1. 3800	1. 3790
5. 2	2. 2500	2. 2459	1. 7300	1. 7387	12. 8	2. 5800	2. 5927	1. 3200	1. 3157
5. 3	2. 2750	2. 2700	1. 7450	1. 7573	12. 9	2. 5400	2. 5470	1. 2600	1. 2556
5. 4	2. 3000	2. 2948	1. 7600	1. 7754	13. 0	2. 5000	2. 5000	1. 2000	1. 2000
5. 5	2. 3250	2. 3201	1. 7750	1. 7930	13. 1	2. 4500	2. 4518	1. 1800	1. 1501
5. 6	2. 3500	2. 3459	1. 7900	1. 8102	13. 2	2. 4000	2. 4026	1. 1600	1. 1063
5. 7	2. 3750	2. 3720	1. 8050	1. 8269	13. 3	2. 3500	2. 3527	1. 1400	1. 0687
5. 8	2. 4000	2. 3984	1. 8200	1. 8430	13. 4	2. 3000	2. 3021	1. 1200	1. 0377
5. 9	2. 4250	2. 4249	1. 8350	1. 8588	13. 5	2. 2500	2. 2513	1. 1000	1. 0134
6. 0	2. 4500	2. 4515	1. 8500	1. 8740	13. 6	2. 2000	2. 2004	1. 0800	0. 9960
6. 1	2. 4750	2. 4781	1. 8650	1. 8887	13. 7	2. 1500	2. 1496	1. 0600	0. 9857
6. 2	2. 5000	2. 5045	1. 8800	1. 9030	13. 8	2. 1000	2. 0991	1. 0400	0. 9828
6. 3	2. 5250	2. 5307	1. 8950	1. 9168	13. 9	2. 0500	2. 0491	1. 0200	0. 9875
6. 4	2. 5500	2. 5566	1. 9100	1. 9301	14. 0	2. 0000	2. 0000	1. 0000	1. 0000
6. 5	2. 5750	2. 5821	1. 9250	1. 9430	14. 1	1. 9600	1. 9519	1. 0600	1. 0205
6. 6	2. 6000	2. 6071	1. 9400	1. 9553	14. 2	1. 9200	1. 9049	1. 1200	1. 0492
6. 7	2. 6250	2. 6315	1. 9550	1. 9672	14. 3	1. 8800	1. 8594	1. 1800	1. 0863
6. 8	2. 6500	2. 6552	1. 9700	1. 9786	14. 4	1. 8400	1. 8156	1. 2400	1. 1320
6. 9	2. 6750	2. 6780	1. 9850	1. 9895	14. 5	1. 8000	1. 7737	1. 3000	1. 1866
7. 0	2. 7000	2. 7000	2. 0000	2. 0000	14. 6	1. 7600	1. 7339	1. 3600	1. 2503
7. 1	2. 7150	2. 7210	2. 0050	2. 0100	14. 7	1. 7200	1. 6963	1. 4200	1. 3233
7. 2	2. 7300	2. 7411	2. 0100	2. 0195	14. 8	1. 6800	1. 6614	1. 4800	1. 4057
7. 3	2. 7450	2. 7602	2. 0150	2. 0285	14. 9	1. 6400	1. 6292	1. 5400	1. 4979
7. 4	2. 7600	2. 7786	2. 0200	2. 0370	15. 0	1. 6000	1. 6000	1. 6000	1. 6000
7. 5	2. 7750	2. 7961	2. 0250	2. 0450	7. 5	2. 7750	2. 7961	2. 0250	2. 0450

3. (教材 p.66: 3.4.11) 图 3.13 是欧洲一个国家的地图, 为了算出它的国土面积, 首先对地图进行如下测量: 以由西向东方向为 x 轴, 由南向北方向为 y 轴, 选择方便的原点, 并将从最西边界点到最东边界点在 x 轴上的区间适当地划分为若干段, 在每个分点的 y 轴方向测出南边界点和北边界点的 y 坐标 y_1 和 y_2 , 这样就得到了表 3.8 的数据 (单位: mm)。

根据地图比例我们知道 18mm 相当于 40km, 试由测量数据计算该国国土的近似面积, 与它的精确面积 41288km^2 做比较。

x	7.0	10.5	13.0	17.5	34.0	40.5	44.5	48.0	56.0	61.0	68.5	76.5	80.5	91.0
y_1	44	45	47	50	50	38	30	30	34	36	34	41	45	46
y_2	44	59	70	72	93	100	110	110	110	117	118	116	118	118
x	96.0	101.0	104.0	106.5	111.5	118.0	123.5	136.5	142.0	146.0	150.0	157.0	158.0	
y_1	43	37	33	28	32	65	55	54	52	50	66	66	68	
y_2	121	124	121	121	121	122	116	83	81	82	86	85	68	

解:

本题可以直接对这些数据进行积分, 也可以先进行插值再进行积分, 最后把几种方法的结果进行比较分析。

插值时分别用分段线性插值和三次样条插值, 积分时用梯形公式和辛普森公式。

程序如下:

%初值

```
x0=[7.0 10.5 13.0 17.5 34.0 40.5 44.5 48.0 56.0 61.0 68.5 76.5 80.5 91.0 ...
    96.0 101.0 104.0 106.5 111.5 118.0 123.5 136.5 142.0 146.0 150.0 157.0 158.0];
Y1=[44 45 47 50 50 38 30 30 34 36 34 41 45 46 43 37 33 28 32 65 55 54 52 50 66 66 68];
Y2=[44 59 70 72 93 100 110 110 110 117 118 116 118 118 121 124 121 121 121 ...
    122 116 83 81 82 86 85 68];
```

%步长

```
x=7:1:158;
```

%分段线性插值

```
y1_in=interp1(x0,Y1,x);
```

```
y2_in=interp1(x0,Y2,x);
```

%三次样条插值

```
y1_sp=spline(x0,Y1,x);
```

```
y2_sp=spline(x0,Y2,x);
```

```
[x',y1_in',y1_sp',y2_in',y2_sp'] ;
```

```
subplot(1,2,1),plot(x,y1_in,x,y2_in,'b'),title('interp')
```

```
subplot(1,2,2),plot(x,y1_sp,x,y2_sp,'b'),title('spline')
```

```
format long g
```

```
z0 = (40/18)^2*(trapz(x0,Y2)-trapz(x0,Y1))
```

%直接用梯形法积分

```
z1 = (40/18)^2*(trapz(x,y2_in)-trapz(x,y1_in))
```

%分段线性插值梯形积分值

```
z2 = (40/18)^2*(trapz(x,y2_sp)-trapz(x,y1_sp))
```

%三次样条插值梯形积分值

```
funi1 = @(x)( interp1(x0,Y1,x) );
```

```
funi2 = @(x)( interp1(x0,Y2,x) );
```

```

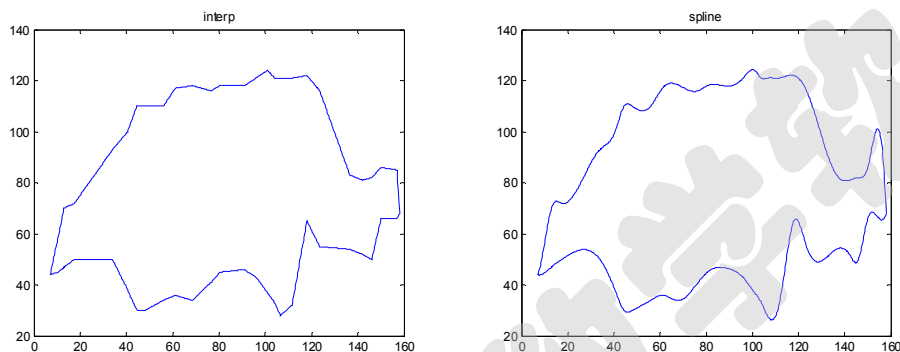
funs1 = @(x)( spline(x0,Y1,x) );
funs2 = @(x)( spline(x0,Y2,x) );
z3 = (40/18)^2*(quad(funi2,7,158)-quad(funi1,7,158))    %分段线性插值辛普森积分值
z4 = (40/18)^2*(quad(funs2,7,158)-quad(funs1,7,158))    %三次样条插值辛普森积分值
format short

% funi2 = inline('interp1(x0,Y2,x)', 'x');                % 不能用

```

结果如下：

图形：



没有插值，直接对原始数据，用梯形积分法进行积分，结果为

z0 = 42413.58

对间隔 h 时的分段线性插值数据，用梯形积分法进行积分，结果为

z1 = 42407.42(h=1), 42413.58(h=0.5), 42413.58(h=0.25), 42413.58(h=0.1)

对间隔 h 时的三次样条插值数据，用梯形积分法进行积分，结果为

z2 = 42457.66(h=1), 42465.69(h=0.5), 42467.69(h=0.25), 42468.25(h=0.1)

对分段线性插值数据，用辛普森积分法进行积分，结果为

z3 = 42413.58

对三次样条插值数据，用辛普森积分法进行积分，结果为

z4 = 42468.35

用辛普森积分法时，

分段线性插值数据的相对误差为 $\left| \frac{42413.58 - 41288}{41288} \right| \times 100\% = 2.73\%$ ，

三次样条插值数据的相对误差为 $\left| \frac{42468.35 - 41288}{41288} \right| \times 100\% = 2.86\%$ ，

误差都较小。

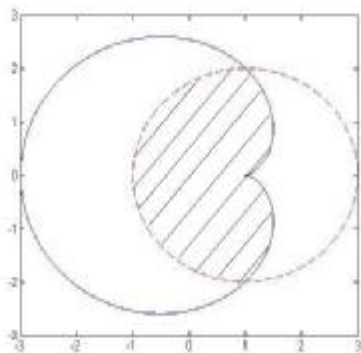
结果说明及分析：

按理说，进行了插值之后，由于更好地刻画了数据渐变的过程，最后得到积分结果应该更加准确。但本题中用分段线性插值数据用辛普森积分公式进行积分结果与没有插值直接对原始数据用梯形公式进行积分的结果是一样的，主要是因为梯形公式积分本身就是在每个小区间上进行线性近似，与先进行分段线性插值再积分（用辛普森积分公式）是等效的。这同时也说明分段线性插值是一种较粗略的插值方法。

4. 如下图, 心形线和圆方程分别为

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, \text{其中 } t \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \begin{cases} x = 1 + 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases}, \text{其中 } t \in [0, 2\pi].$$

采用适当的数值方法利用 Matlab 程序计算这两个图形相交部分(阴影部分)的面积(精确值是 $5\pi - 8$)。



解: 两条曲线的交点处 t 值由 $\begin{cases} x = 2 \cos(t) - \cos(2t) = 1 + 2 \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) - \sin(2t) = 2 \sin(t) \end{cases}$ 解出,

解得 $t = \pi/2, 3\pi/2$, 对应交点坐标为 $(1, 2), (1, -2)$

面积 $S = \text{半圆面积} + 2I = \pi \times 2^2/2 + 2I = 2\pi + 2I$

$$I = \int_0^2 (x(y) - 1) dy = \int_0^{\pi/2} (2 \cos t - \cos 2t - 1)(2 \cos t - 2 \cos 2t) dt$$

用数值积分法或随机模拟的方法计算 I 并最后求出 S :

```
fun1 = @(t)(2*cos(t)-cos(2*t)-1).*(2*cos(t)-2*cos(2*t)); %匿名函数
I = quad(fun1,0,pi/2)
S = 2*pi + 2*I
```

计算结果:

$I = 0.7123889783507191$

$S = 7.707963263881025$

注: I 的精确值是 $-4 + (3\pi)/2 = 0.7123889803846897$,

S 的精确值是 $5\pi - 8 = 7.707963267948966$.

上述匿名函数 `fun1` 也可以用 `inline` 函数写出, 结果相同

```
fun1 = inline('(2*cos(t)-cos(2*t)-1).*(2*cos(t)-2*cos(2*t))');
I = quad(fun1,0,pi/2)
S = 2*pi + 2*I
```

四、问题讨论 (实验心得与体会)