实 验 报 告

实验名称 <u>常微分方程数值解</u> 第 <u>3</u> 次实验

三、实验结果（包括所用命令、程序，运行结果等）

1．(教材 p.85: 4.6.2) 用欧拉方法和龙格-库塔方法求下列微分方程初值问题的数值解，画出解的图形，对结果进行分析比较。

(3) $\begin{cases} x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, & \text{（贝塞尔方程，令 } n=0.5\text{）} \\ y(\pi/2)=2,\ y'(\pi/2)=-2/\pi, & \text{（精确解 } y=\sqrt{2\pi/x}\ \sin x\text{）} \end{cases}$

解：首先将此二阶微分方程改写成一阶微分方程组

$$\begin{cases} y'=z \\ z'=-x^{-1}z-(1-n^2x^{-2})y, \\ y(\pi/2)=2,\ z(\pi/2)=-2/\pi. \end{cases}$$

【编写程序】:

```
clc;clear;
fun = inline('[y(2); -y(2)./x - (1 - 0.25./(x.*x)).*y(1)]', 'x', 'y'); %定义微分方程函数
y0 = [2,-2/pi];                          %赋初值
N = 100;
a = pi/2; b = 6*pi; h = (b-a)/N;        %求解区间
xs = a:h:b;
[x1,y_r]=ode45(fun, xs, y0);           %调用龙格库塔求解函数求解数值解；
y_e(1,:) = y0;    h=(b-a)/N;            %以下利用向前 Euler 方法求解
x = (a:h:b)';
for i=1:N
    y_e(i+1,:) = y_e(i,:)+h*fun(x(i),y_e(i,:))' ;
end
y= sin(x).*sqrt(2*pi./x);               %真解
figure(1)
plot(x1,y_r(:,1),'r*', x,y_e(:,1),'b+', x,y,'k-');%数值解与真解图
title('数值解与真解图');    legend('RK45','Euler','真解');
xlabel('x');ylabel('y');
figure(2)
plot(x1,abs(y_r(:,1)-y),'k-');           %龙格库塔方法的误差
title('龙格库塔方法的误差')
xlabel('x');ylabel('Error');
figure(3)
plot(x,abs(y_e(:,1)-y),'r-')            %Euler 方法的误差
title('Euler 方法的误差');
xlabel('x');ylabel('Error');
```

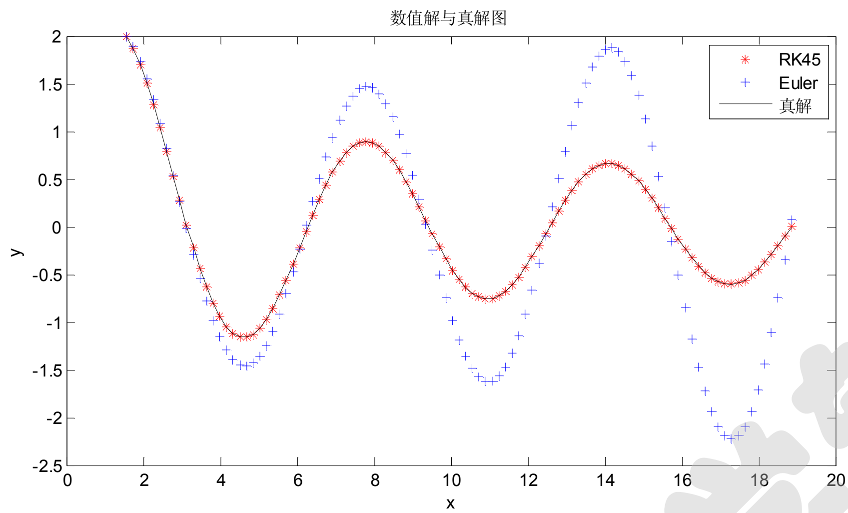
【运行结果】如下

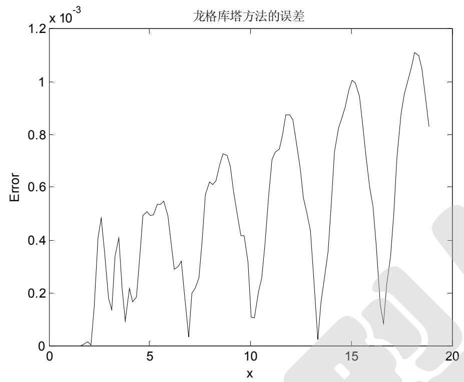
龙格库塔方法得到的 y 值在向量 y_r(:,1)中，

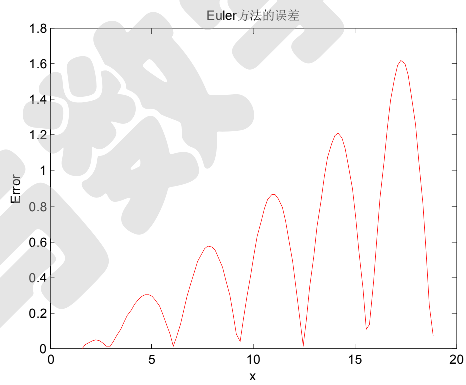
向前欧拉方法得到的 y 值在向量 y_e(:,1)中，

精确值的 y 值在向量 y 中，具体数值略。

图形结果如下：







【结果分析】：

龙格库塔方法和 Euler 方法求解常微分方程都能获得比较好的数值解，相比较而言龙格库塔方法的数值解的精度远远要比 Euler 方法的数值解的精度高。

2．(教材 p.86: 4.6.6，有改动) 一只小船渡过宽为 d 的河流(见教材图 4.7)，目标是起点 A 正对着的另一岸 B 点。已知河水流速 v_1 与船在静水中的速度 v_2 之比为 k.

(1) 建立描述小船航线的数学模型(先建立坐标系)；

(2) 设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，用数值解法求渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图。

(3) 若河水流速 $v_1 = 0, 0.5, 1.5, 2$(m/s)，结果如何？

以下两小题为选做题：

(4) 有能力的同学可求出解析解，并把数值运算结果与解析解的结果比较。

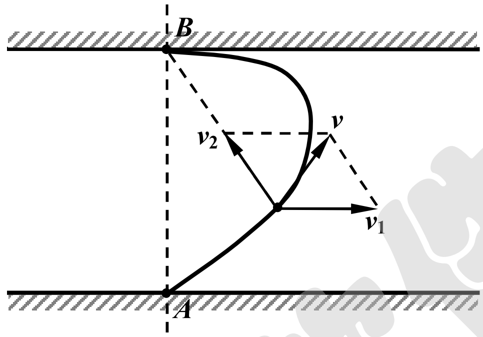
(5) 如果目标在下游 50m 的 C 点（即 B 点右边 50m），建立描述小船航线的数学模型，并设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，用数值解法求渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图。

3．(教材 p.86: 4.6.6，有改动) 一只小船渡过宽为 d 的河流(见教材图 4.7)，目标是起点 A 正对着的另一岸 B 点。已知河水流速 v_1 与船在静水中的速度 v_2 之比为 k.

(1) 建立描述小船航线的数学模型(先建立坐标系)；

(2) 设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，用数值解法求渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图。

(3) 若河水流速 $v_1 = 0, 0.5, 1.5, 2$(m/s)，结果如何？



选做题：

(4) 有能力的同学可求出解析解，并把数值运算结果与解析解的结果比较。

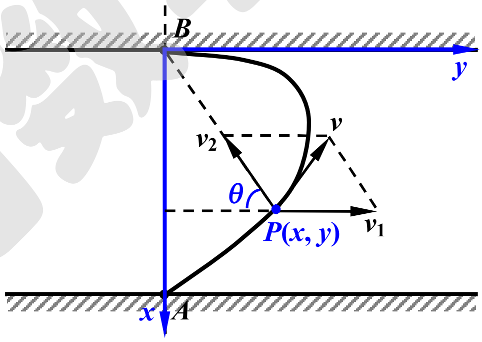
(5) 如果目标在下游 50m 的 C 点（即 B 点右边 50m），建立描述小船航线的数学模型，并设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，用数值解法求渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图。

解：(1) 建立描述小船航线的数学模型：

以 B 为原点建立如右图坐标系

则此问题的数学模型(微分方程组)为

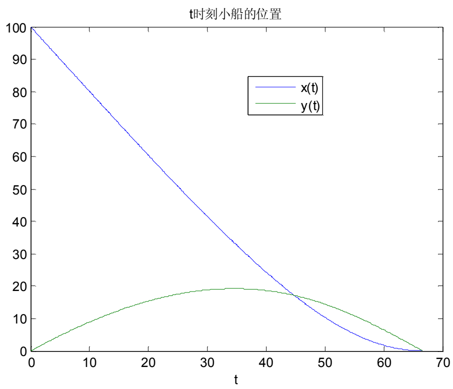
$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = -v_2\sin\theta = -\dfrac{v_2 x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = v_y = v_1 - v_2\cos\theta = v_1 - \dfrac{v_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ x(0) = d, y(0) = 0. \end{cases}$$

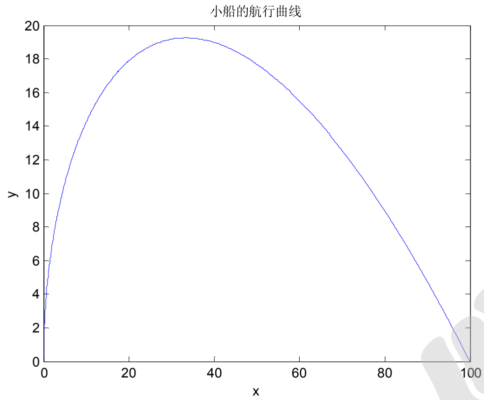


(2) 设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，以下的程序用数值解法求解了渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线：

```
d = 100; v1 = 1; v2 = 2;
dx = @(t,x)[-v2*x(1)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)); v1-v2*x(2)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2))];
t1 = 66.6;        % t1 取 100,80,70 时计算极慢，后选 60,65,67,66,66.5,66.7,66.6
t = 0:0.1:t1;
x0 = [d,0];     %初始在 A 点，坐标为(100,0)
[tt1, x1] = ode45(dx,t,x0);
figure(1);
plot(tt1,x1(:,1),tt1,x1(:,2)); title('t 时刻小船的位置');
legend('x(t)','y(t)'); xlabel('t');
figure(2);
plot(x1(:,1),x1(:,2)); title('小船的航行曲线');
xlabel('x'); ylabel('y');
```

tt1 中是时刻 t(向量)，x(:,1) 中是对应 tt1 的 x 坐标，x(:,2) 中是对应 tt1 的 y 坐标，数据略，图形如下：

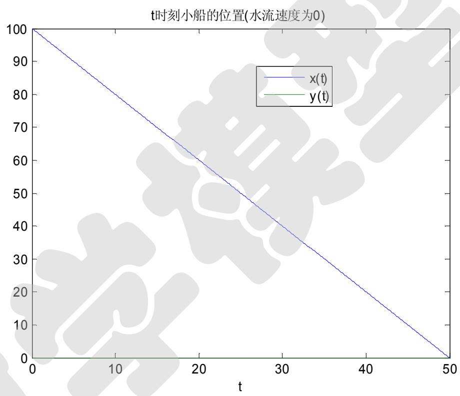


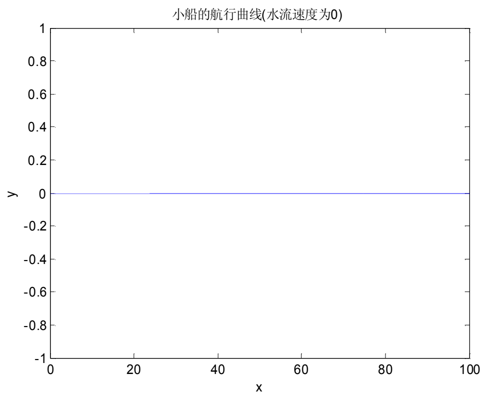


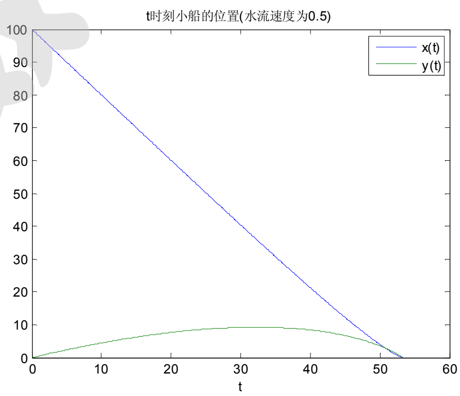
(3) 若河水流速 v_1 = 0, 0.5, 1.5, 2(m/s)，程序改为

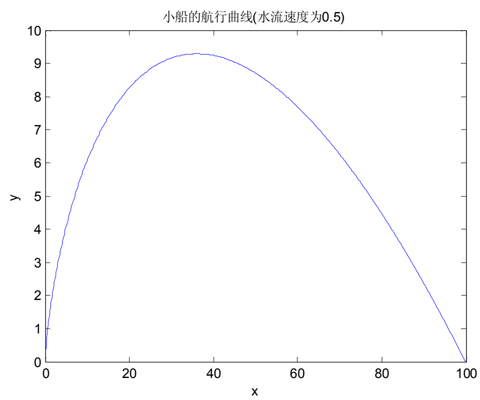
```
d = 100; v1 = 0.5; v2 = 2;       % v1 取 0, 0.5,
dx = @(t,x)[-v2*x(1)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)); v1-v2*x(2)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2))];
t1 = 53.4;          % t1 取 50 , 53.3,    110
t = 0:0.1:t1;
x0 = [d,0];     %初始在 A 点，坐标为(100,0)
[tt1, x1] = ode45(dx,t,x0);
figure(1);
plot(tt1,x1(:,1),tt1,x1(:,2)); title(['t 时刻小船的位置(水流速度为',num2str(v1),')']);
legend('x(t)','y(t)'); xlabel('t');
figure(2);
plot(x1(:,1),x1(:,2)); title(['小船的航行曲线(水流速度为',num2str(v1),')']);
xlabel('x'); ylabel('y');
```

图形结果如下：

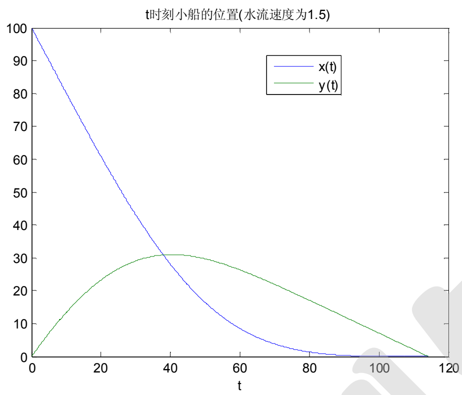


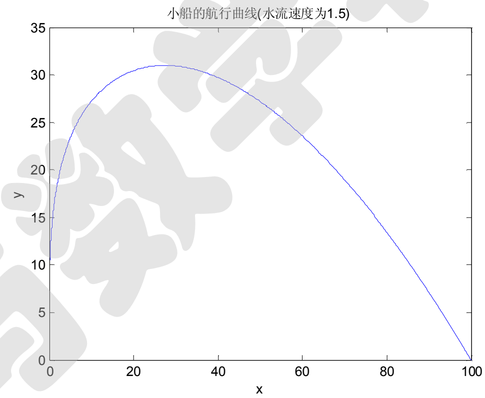


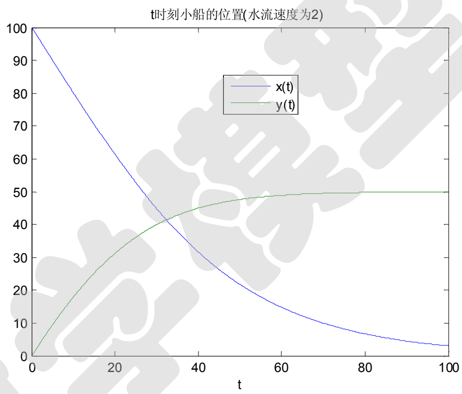


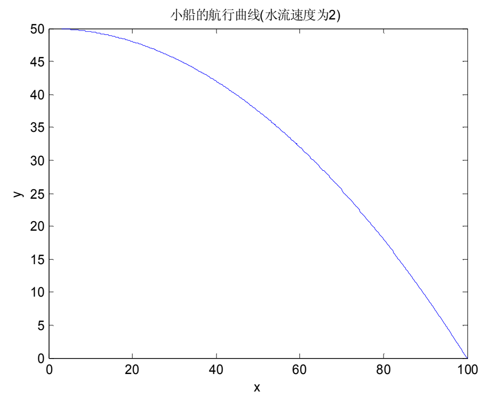


```
d = 100; v1 = 2; v2 = 2;      % v1 取 1.5, 2.0
dx = @(t,x)[-v2*x(1)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)); v1-v2*x(2)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2))];
t1 = 200;          % t1 取 114.2
t = 0:0.1:t1;
x0 = [d,0];     %初始在 A 点，坐标为(100,0)
opt=odeset('RelTol',1e-6, 'AbsTol',1e-9); %设置 ode45 的运行精度
[tt1, x1] = ode45(dx,t,x0,opt);
figure(1);
plot(tt1,x1(:,1),tt1,x1(:,2)); title(['t 时刻小船的位置(水流速度为',num2str(v1),')']);
legend('x(t)','y(t)'); xlabel('t');
figure(2);
plot(x1(:,1),x1(:,2)); title(['小船的航行曲线(水流速度为',num2str(v1),')']);
xlabel('x'); ylabel('y');
```

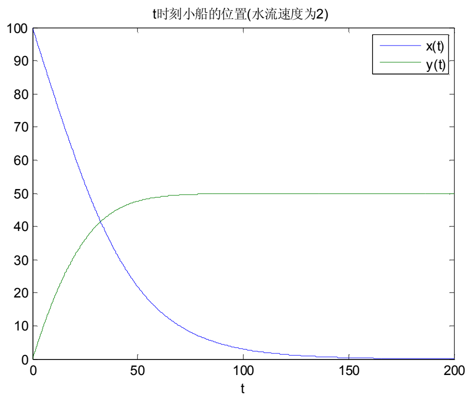


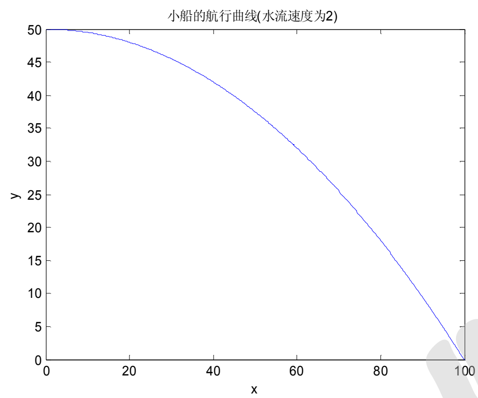






水流速度为 2 时不能接近 B 点(0,0)，时间延长后可接近对岸离 B50 米处(0,50).





(4) 有能力的同学可求出解析解，并把数值运算结果与解析解的结果比较。

对微分方程组（$x, y \ge 0$）

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = -v_2\sin\theta = -\dfrac{v_2 x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & ① \\ \dot{y} = v_y = v_1 - v_2\cos\theta = v_1 - \dfrac{v_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & ② \\ x(0) = d,\ y(0) = 0. & ③ \end{cases}$$

② ÷ ①，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{v_1}{v_2}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}$，　④

记 $k = v_2/v_1$，又令 $u = y/x$，即 $y = ux$，则 $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x$，代入④式，得

$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -\dfrac{1}{k}\sqrt{1+u^2} + u$，即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\dfrac{1}{k}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分，得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = -\dfrac{1}{k}\ln|x| + C_1$，即 $u + \sqrt{1+u^2} = C_2 x^{-1/k}$　（x, y 均大于 0）

代入初值 $x(0) = d,\ u(0) = y(0)/x(0) = 0$，得 $C_2 = d^{1/k}$，

所以，$\sqrt{1+u^2} = \left(\dfrac{d}{x}\right)^{1/k} - u$，将 $u = y/x$ 回代入此方程，得 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \left(\dfrac{d}{x}\right)^{1/k} - \dfrac{y}{x}$

即 $\sqrt{x^2+y^2} = d^{1/k}x^{1-1/k} - y$，两边平方，得 $x^2 + y^2 = d^{2/k}x^{2-2/k} - 2yd^{1/k}x^{1-1/k} + y^2$，

即 $x^2 = d^{2/k}x^{2-2/k} - 2yd^{1/k}x^{1-1/k}$，所以 $y = \dfrac{d^{2/k}x^{2-2/k} - x^2}{2d^{1/k}x^{1-1/k}} = \dfrac{x(d^{2/k} - x^{2/k})}{2(dx)^{1/k}}$，

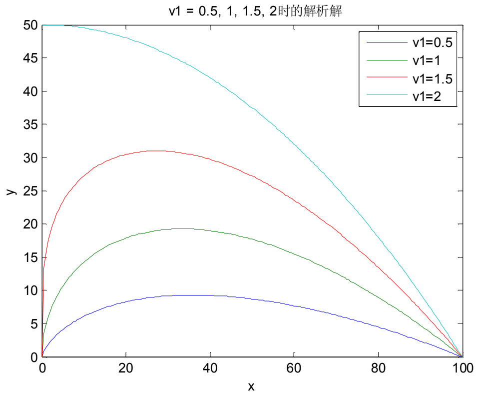
当 $d = 100$ 时，$y = \dfrac{x^{1-1/k}(100^{2/k} - x^{2/k})}{2(100)^{1/k}}$

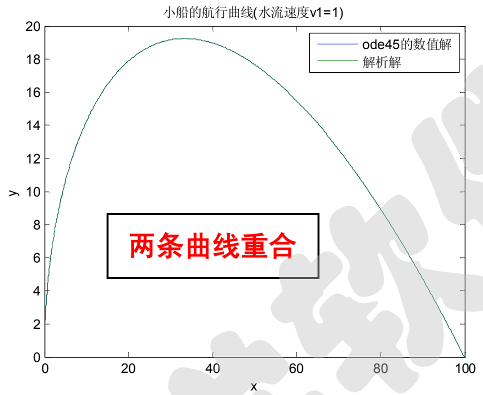
当 $v_1 = 0.5, 1, 1.5, 2$ 时，$k = 4, 2, 4/3, 1$，y 的解析解分别为

$$y = \frac{\sqrt[4]{x^3}(10-\sqrt{x})}{2\sqrt{10}},\quad y = \frac{\sqrt{x}(100-x)}{20},\quad y = \frac{\sqrt[4]{x}(1000-x\sqrt{x})}{20\sqrt{10}},\quad y = \frac{10000-x^2}{200}$$

```
x = (0:0.5:100)';
y = [x.^0.75.*(10 - sqrt(x))/2/sqrt(10), sqrt(x).*(100 - x)/20, x.^0.25.*(1000 - x.*sqrt(x))/20/sqrt(10), (10000 - x.*x)/200];
figure(1);
plot(x,y);    title('v1 = 0.5, 1, 1.5, 2 时的解析解');
```

```
legend('v1=0.5','v1=1','v1=1.5','v1=2'); xlabel('x');ylabel('y');
%计算 v1 = 1 时的解析解 x1，合并作图
figure(2); x = x1(:,1); y = sqrt(x).*(100 - x)/20;
plot(x,x1(:,2), x, y); title('小船的航行曲线(水流速度 v1=1)');
legend('ode45 的数值解','解析解'); xlabel('x'); ylabel('y');
```



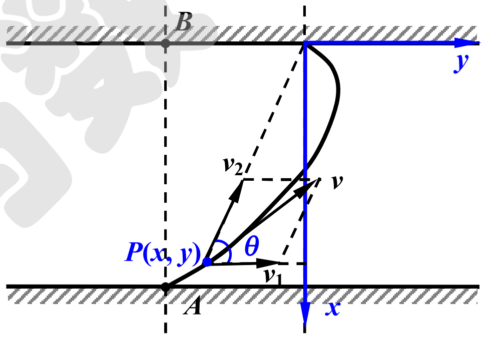


(5) 如果目标在下游 50m 的 C 点（即 B 点右边 50m），建立描述小船航线的数学模型，并设 $d = 100$m，$v_1 = 1$m/s，$v_2 = 2$m/s，用数值解法求渡河所需的时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图。

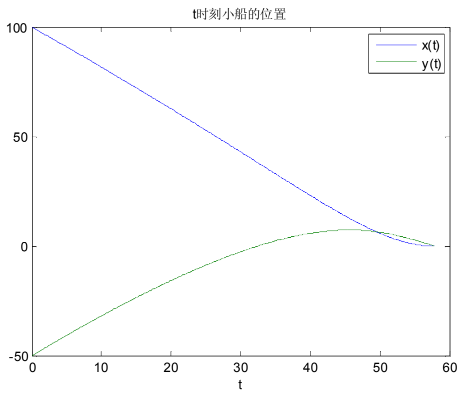
以 C 为原点建立如右图坐标系

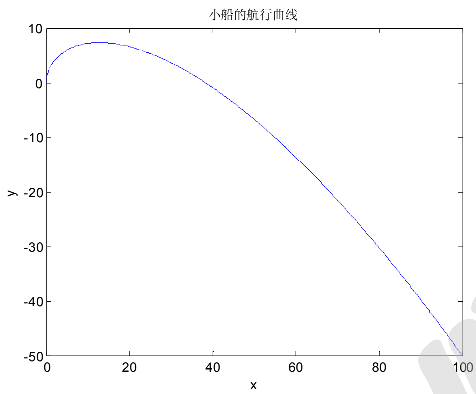
则此问题的数学模型(微分方程组)为

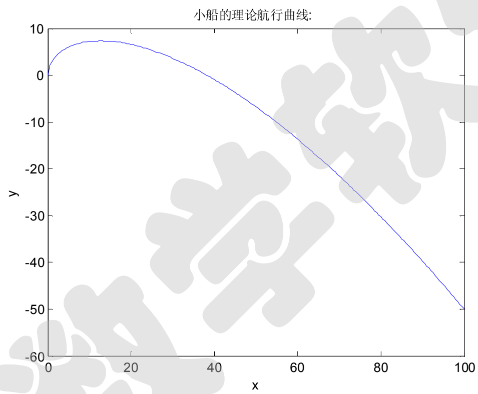
$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = -v_2\sin\theta = -\dfrac{v_2 x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dot{y} = v_y = v_1 - v_2\cos\theta = v_1 - \dfrac{v_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ x(0) = d,\ y(0) = -50. \end{cases}$$




```
d = 100; v1 = 1; v2 = 2;
dx = @(t,x)[-v2*x(1)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)); v1-v2*x(2)/sqrt(x(1)*x(1)+x(2)*x(2))];
t1 = 57.8;
t = 0:0.1:t1;
x0 = [d,-50];  %初始在 A 点，坐标为(100,-50)
[tt1, x1] = ode45(dx,t,x0);
figure(1);
plot(tt1,x1(:,1),tt1,x1(:,2)); title('t 时刻小船的位置');
legend('x(t)','y(t)'); xlabel('t');
figure(2);
plot(x1(:,1),x1(:,2)); title('小船的航行曲线');
xlabel('x'); ylabel('y');
```







注：$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_2 x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_1 - \dfrac{v_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ x(0)=d, y(0)=s \end{cases}$ 的解析解

两式相除，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{v_1\sqrt{x^2+y^2}}{v_2 x} + \dfrac{y}{x}$

记 $k = v_2/v_1$, 令 $u = y/x$, 即 $y = ux$, 故 $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x$, 代入上式，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = -\frac{1}{k}\sqrt{u^2+1} + u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = -\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = -\dfrac{1}{k}\ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad u + \sqrt{u^2+1} = C \cdot x^{-1/k}$

代入初值 $x(0)=d, y(0)=s$, 有

$$(s+\sqrt{s^2+d^2})\big/d = C \cdot d^{-1/k} \quad \Rightarrow \quad C = d^{1/k-1}(s+\sqrt{s^2+d^2})$$

所以 $\sqrt{u^2+1} = C \cdot x^{-1/k} - u$，回代 $u = x/y$ 得 $\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot x^{1-1/k} - y$

两边平方 $\quad x^2+y^2 = C^2 \cdot x^{2-2/k} - 2C \cdot yx^{1-1/k} + y^2$

整理得 $\quad y = (C^2 \cdot x^{2-2/k} - x^2)\big/(2C \cdot x^{1-1/k}) = (C^2 \cdot x^{1-1/k} - x^{1+1/k})\big/(2C)$

$k=2$ 时， $y = \sqrt{x}(C^2 - x)\big/(2C)$，其中 $C = (s+\sqrt{s^2+d^2})\big/\sqrt{d}$

```
x = (0:0.5:100)';
s = -50;d = 100; C = (s+sqrt(s*s+d*d))/sqrt(d);
```

```
y = sqrt(x).*(C*C - x)./(2*C);
plot(x,y); title('小船的理论航行曲线: ');
xlabel('x'); ylabel('y');
```

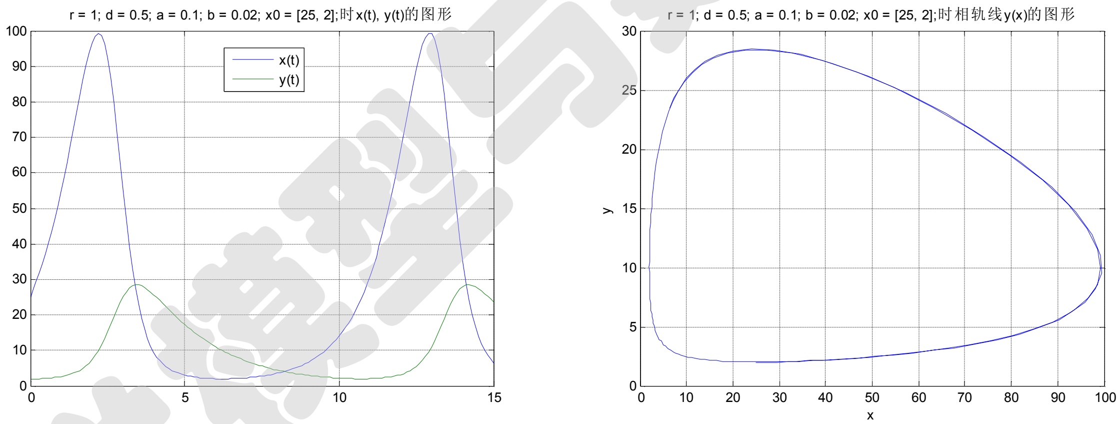
4. (教材 p.87: 4.6.8) 适当改变 4.1.2 节弱肉强食中的参数 r, d, a, b, x_0, y_0，讨论它们对周期的影响。

解：4.1.2 节中取 r = 1; d = 0.5; a = 0.1; b = 0.02; [x0, y0] = [25, 2]

```
xdot = @(t,x,r,d,a,b)[(r-a*x(2)).*x(1); (-d+b*x(1)).*x(2)]; %以向量形式表示方程(3)p70
ts=0:0.1:15;
%   先画出 4.1.2 节参数给出的图形
r = 1; d = 0.5; a = 0.1; b = 0.02; x0 = [25, 2];
txtp = 'r = 1; d = 0.5; a = 0.1; b = 0.02; x0 = [25, 2];'
[t,x] = ode45(xdot, ts, x0, [], r, d, a, b);
subplot(1,2,1);plot(t,x),grid,title([txtp, '时 x(t), y(t)的图形']); legend('x(t)','y(t)');
subplot(1,2,2);plot(x(:,1),x(:,2)),title([txtp, '时相轨线 y(x)的图形']),grid,
xlabel('x'),ylabel('y')
xbar_ybar = [d/b,r/a]
```

运行结果：

```
xbar_ybar =       25      10
```

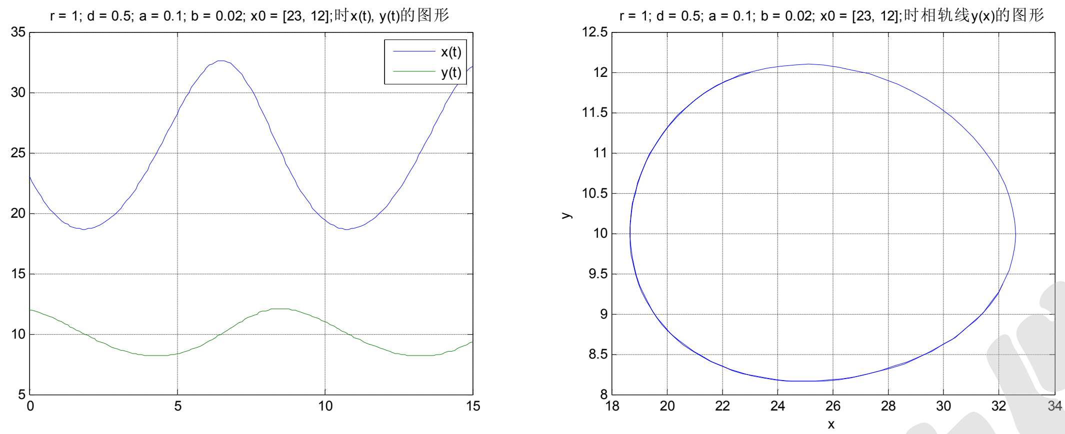


改变初值：

```
r = 1; d = 0.5; a = 0.1; b = 0.02; x0 = [23, 12];
txtp = 'r = 1; d = 0.5; a = 0.1; b = 0.02; x0 = [23, 12];'
[t,x] = ode45(xdot, ts, x0, [], r, d, a, b);
subplot(1,2,1);plot(t,x),grid,title([txtp, '时 x(t), y(t)的图形']); legend('x(t)','y(t)');
subplot(1,2,2);plot(x(:,1),x(:,2)),title([txtp, '时相轨线 y(x)的图形']),grid,
xlabel('x'),ylabel('y')
xbar_ybar = [d/b,r/a]
```

运行结果：

```
xbar_ybar =       25      10
```



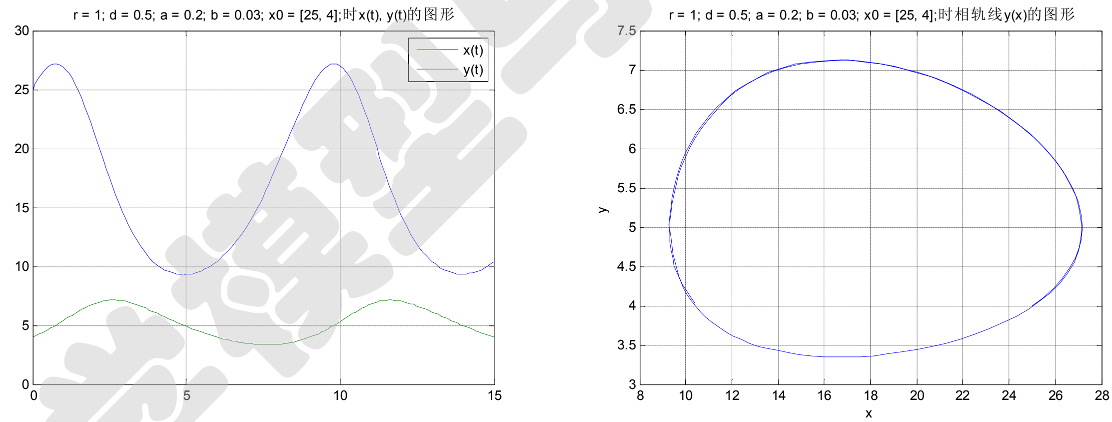
结果分析：当初值越接近均值，x,y 的波动越小

改变参数：

```
r = 1; d = 0.5; a = 0.2; b = 0.03; x0 = [25, 4];
txtp = ' r = 1; d = 0.5; a = 0.2; b = 0.03; x0 = [25, 4];'
[t,x] = ode45(xdot, ts, x0, [], r, d, a, b);
subplot(1,2,1);plot(t,x),grid,title([txtp, '时 x(t), y(t)的图形']); legend('x(t)','y(t)');
subplot(1,2,2);plot(x(:,1),x(:,2)),title([txtp, '时相轨线 y(x)的图形']),grid,
xlabel('x'),ylabel('y')
xbar_ybar = [d/b,r/a]
```

运行结果：

```
xbar_ybar =        16.6667       5.0000
```



四、问题讨论（实验心得与体会）