实 验 报 告

实验名称 <u>无约束优化</u> 第 <u>5</u> 次实验

三、实验过程与结果（包括建立的模型、程序、运行结果、结果分析等）

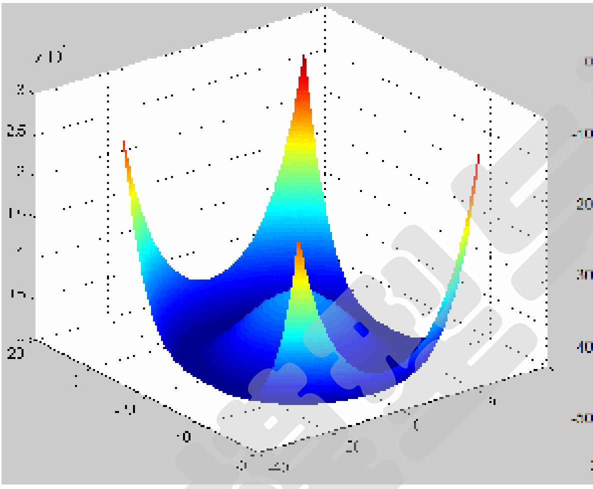
1．(教材 p.169: 7.5.1) 取不同的初值计算下列平方和形式的非线性规划，尽可能求出所有局部极小点，进而找出全局极小点，并对不同算法（搜索方向、搜索步长、数值梯度与分析梯度等）的结果进行比较。

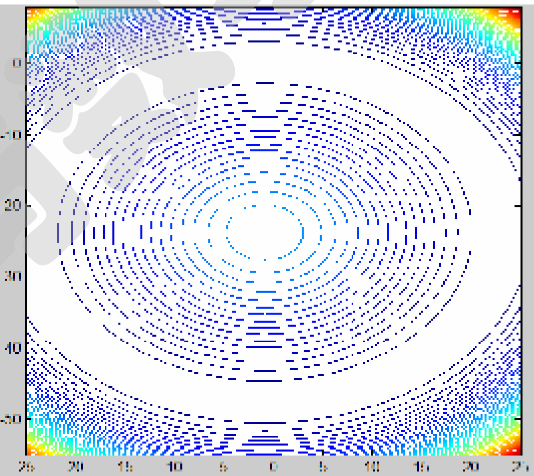
$$\min\ (x_1^2+12x_2-1)^2+(49x_1^2+49x_2^2+84x_1+2324x_2-681)^2$$

解：仿 p.164-167 例 7.5

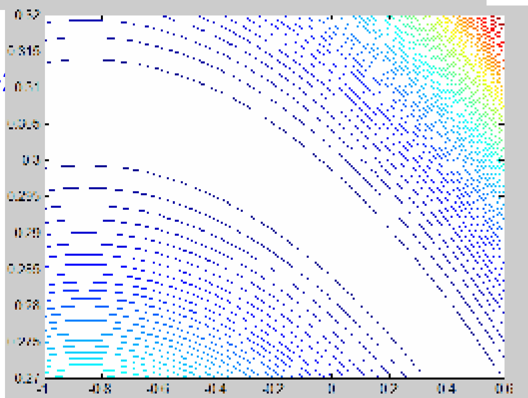
【MATLAB 程序】：

```
[ x, y ] = meshgrid( -25:0.1:25, -55:0.1:8 );               %作图
z = (x.*x+12*y-1).^2 + (49*x.*x+49*y.*y+84*x+2324*y-681).^2;
mesh(x, y, z)
figure(2)
contour( x, y, z, 60)
```





```
[ x, y ] = meshgrid( -1:0.01:0.6, 0.27:0.001:0.32 );
z = (x.*x+12*y-1).^2 + (49*x.*x+49*y.*y+84*x+
contour( x, y, z, 60)
```



```
clear
format short e
fun = @(x)( (x(1)*x(1)+12*x(2)-1)^2 + (49*x(1)*x(1)+49*x(2)*x(2)+84*x(1)+2324*x(2)-681)^2);
opt = optimset('fminunc');          %获取 fminunc 函数的缺省的控制参数值
opt = optimset(opt, 'tolx', 1e-10,'tolf',1e-10);    %设置 控制精度
x0 = [ 20, -25 ];
opt1=optimset(opt,'LargeScale', 'off', 'MaxFunEvals', 5000, 'MaxIter', 2000);
HessSet={'bfgs';'dfp';'steepdesc'};
```

```
    LineSet={'quadcubic';'cubicpoly'};
    for j=0:1, for i=1:3
      fopt=optimset(opt1,'HessUpdate',cell2mat(HessSet(i)),'LineSearchType', cell2mat(LineSet(j+1)));
      [xx, fv, exit, out] = fminunc(fun, x0, fopt);    %'ex746_5f'
      xset(i+j*3,:)=xx;fvset(i+j*3,1)=fv;exitset(i+j*3,1)=exit;
      outset(i+j*3,1:2)=[out.funcCount, out.iterations];
    end,end
    opt2=optimset(opt1,'Gradobj', 'on');      %设为分析梯度
    HessSet={'bfgs';'dfp';'steepdesc'};
    LineSet={'quadcubic';'cubicpoly'};
    for j=2:3, for i=1:3
      fopt=optimset(opt2,'HessUpdate',cell2mat(HessSet(i)),'LineSearchType', cell2mat(LineSet(j-1)));
      [xx, fv, exit, out] = fminunc('XT0701_2f', x0, fopt);
      xset(i+j*3,:)=xx;fvset(i+j*3,1)=fv;exitset(i+j*3,1)=exit;
      outset(i+j*3,1:2)=[out.funcCount, out.iterations];
    end,end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [ f, g ] = XT07012f(x)   %  建立计算含梯度的函数文件
f = (x(1)*x(1)+12*x(2)-1)^2 + (49*x(1)*x(1)+49*x(2)*x(2)+84*x(1)+2324*x(2)-681)^2; %  计算函数值
if nargout > 1            %  当函数有两个输出调用时
  g(1) = 2*(x(1)*x(1)+12*x(2)-1)*2*x(1) + 2*(49*x(1)*x(1)+49*x(2)*x(2)+84*x(1)+2324*x(2)-681)*(98*x(1)+84);
  g(2) = 2*(x(1)*x(1)+12*x(2)-1)*12 + 2*(49*x(1)*x(1)+49*x(2)*x(2)+84*x(1)+2324*x(2)-681)*(98*x(2)+2324);
end
```

【MATLAB 结果】：初值为[0,0]

搜索方向	步长搜索	数值梯度/分析梯度	最优解 x_1	最优解 x_2	最优值	退出标记	目标函数调用次数	迭代次数
bfgs	混合二、三次插值	数值梯度	0.28609	0.27931	5.92256	-2	147	30
dfp			0.03637	0.28982	6.19801	-2	4107	1297
steepdesc			0.01124	0.29083	6.20077	0	5001	215
bfgs	三次插值		0.28609	0.27931	5.92256	-2	147	30
dfp			0.03637	0.28982	6.19801	-2	4107	1297
steepdesc			0.01124	0.29083	6.20077	0	5001	215
bfgs	混合二、三次插值	分析梯度	0.28582	0.27933	5.92256	1	36	30
dfp			0.19321	0.28355	5.95427	0	2031	2001
steepdesc			0.03836	0.28983	6.14805	0	5000	627
bfgs	三次插值		0.28582	0.27933	5.92256	1	36	30
dfp			0.19321	0.28355	5.95427	0	2031	2001
steepdesc			0.03836	0.28983	6.14805	0	5000	627

【MATLAB 结果】：初值为[-25,-25]

搜索方向	步长搜索	数值梯度/分析梯度	最优解 x_1	最优解 x_2	最优值	退出标记	目标函数调用次数	迭代次数
bfgs	混合二、三	数值梯度	-21.0267	-36.7600	5.6620E-08	-2	204	34
dfp			-21.0267	-36.7600	1.8490E-06	-2	2715	843

steepdesc	次插值		-24.3384	-28.7667	6.0620E+04	0	5001	146
bfgs	三次插值		-21.0267	-36.7600	5.6620E-08	-2	204	34
dfp			-21.0267	-36.7600	1.8490E-06	-2	2715	843
steepdesc			-24.3384	-28.7667	6.0620E+04	0	5001	146
bfgs	混合二、三次插值	分析梯度	-21.0267	-36.7600	1.1938E-16	1	48	35
dfp			-21.0267	-36.7600	1.1031E-12	1	1168	1112
steepdesc			-23.2829	-32.3218	2.3480E+04	0	5000	452
bfgs	三次插值		-21.0267	-36.7600	1.1938E-16	1	48	35
dfp			-21.0267	-36.7600	1.1031E-12	1	1168	1112
steepdesc			-23.2829	-32.3218	2.3480E+04	0	5000	452

【MATLAB 结果】：初值为[0,-45],[20,-25]结果类似

搜索方向	步长搜索	数值梯度/分析梯度	最优解 x_1	最优解 x_2	最优值	退出标记	目标函数调用次数	迭代次数
bfgs	混合二、三次插值	数值梯度	20.4571	-34.7913	1.5501E-06	1	231	57
dfp			10.9202	-44.6771	1.7777E+05	0	5001	1593
steepdesc			14.5391	-42.1615	8.7639E+04	0	5001	147
bfgs	三次插值		20.4571	-34.7913	1.5501E-06	1	231	57
dfp			10.9202	-44.6771	1.7777E+05	0	5001	1593
steepdesc			14.5391	-42.1615	8.7639E+04	0	5001	147
bfgs	混合二、三次插值	分析梯度	20.4572	-34.7913	3.1559E-17	1	74	57
dfp			20.4572	-34.7913	1.8932E-14	1	349	301
steepdesc			-4.8843	-0.0335	5.0423E+02	0	5000	467
bfgs	三次插值		20.4572	-34.7913	3.1559E-17	1	74	57
dfp			20.4572	-34.7913	1.8932E-14	1	349	301
steepdesc			-4.8843	-0.0335	5.0423E+02	0	5000	467

【LINGO 程序】：

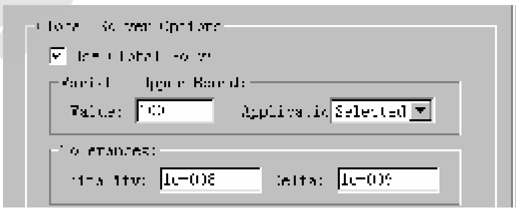
```
min = (x1*x1+12*x2-1)^2 + (49*x1*x1+49*x2*x2+84*x1+2324*x2-681)^2;
@free(x1); @free(x2);
```

【LINGO 结果】：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              0.8055146E-09
Extended solver steps:                                   14
Total solver iterations:                               1985

                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X1       -21.02665            0.000000
                        X2       -36.76001            0.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1            0.000000       -1.000000
```



【LINGO 程序】：

```
min = (x1*x1+12*x2-1)^2 + (49*x1*x1+49*x2*x2+84*x1+2324*x2-681)^2;
```

【LINGO 结果】：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              5.922563
Extended solver steps:                               2
Total solver iterations:                           696

                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X1       0.2858157        0.6317137E-08
                        X2       0.2793258        0.1296393E-06

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1        5.922563           -1.000000
```

2．(教材 p.169: 7.5.8) 经济学中著名的 Cobb-Douglas 生产函数的一般形式为：

$$Q(K,L)=aK^{\alpha}L^{\beta} \qquad 0<\alpha,\beta<1$$

其中 Q, K, L 分别表示产值、资金、劳动力，式中 α, β, a 要同步统计数据确定。现有《中国统计年鉴(2003)》给出的统计数据如下表，请分别用线性和非线性最小二乘拟合求出式中的 α, β, a，并解释 α, β 的含义。

解：(1) 建立模型：

① 线性最小二乘拟合：对 $Q=aK^{\alpha}L^{\beta}$ 两边取对数，

并令 $y=\ln Q, x1=\ln K, x2=\ln L, a0=\ln a$，得线性函数

$$y=a0+\alpha\,x1+\beta\,x2$$

现有观测值 $y_i, x1_i, x2_i,\quad i=1,2,\ldots,19$

最小二乘准则就是：求 $\alpha, \beta, a0$，使得 y 的计算值 $a0+\alpha\,x1_i+\beta\,x2_i$ 与观测值 y_i 的误差平方和最小，即

$$\min J(\alpha,\beta,a0)=\sum_{i=1}^{19}(y_i-(a0+\alpha\cdot x1_i+\beta\cdot x2_i))^2$$

② 非线性最小二乘拟合：对 $Q=aK^{\alpha}L^{\beta}$

现有观测值 $Q_i, K_i, L_i,\quad i=1,2,\ldots,19$

最小二乘准则就是：求 α, β, a，使得 Q 的计算值 $aK_i^{\alpha}L_i^{\beta}$ 与观测值 Q_i 的误差平方和最小，即

$$\min J(\alpha,\beta,a)=\sum_{i=1}^{19}(Q_i-aQ_i^{\alpha}L_i^{\beta})^2$$

(2) 模型求解：编写程序如下：

```
% x(1) -- a, x(2) -- alpha, x(3) -- beta
clear
format short
[A,B] = xlsread('dxsxsy2.xls', '7_X07');    %从 excel 文件中读取数据
Q = A(:, 2); K = A(:, 3);  L = A(:, 4);
% 线性最小二乘法：
X = [ones(19,1),log(K),log(L)];
beta = X\log(Q);
a_alpha_beta = [exp(beta(1)),beta(2:3)']
% 运行结果:   0.3148    0.6600    1.2677
% 非线性最小二乘法：
KL = A(:, 3:4);
x0 = [1 0.5 0.5];           % 也可取线性最小二乘的结果 a_alpha_beta;
fun1 = inline('x(1)*(KL(:,1).^x(2)).*(KL(:,2).^x(3))-Q','x','KL','Q')
```

```
[x1, norm1, res1, exit1, out1] = lsqnonlin(fun1, x0, [], [], [], KL,Q)

fun2 = inline('x(1)*(KL(:,1).^x(2)).*(KL(:,2).^x(3))','x','KL')
[x2, norm2, res2, exit2, out2] = lsqcurvefit(fun2, x0, KL,Q)
% 运行结果：0.8337    0.7735    0.7317
```

实验结果：

① 将模型线性化以后对参数作最小二乘估计，得 $a = 0.3148, \alpha = 0.6600, \beta = 1.2677,$

即 $Q = 0.3148K^{0.6600}L^{1.2677}$

② 对模型直接对参数作最小二乘估计，得 $a = 0.8337, \alpha = 0.7735, \beta = 0.7317,$

即 $Q = 0.8337K^{0.7735}L^{0.7317}$

参数 α 是产出对资本投入的弹性系数，度量在劳动投入保持不变时，资本投入增加 1% 时产出增加的百分比。

参数 β 是产出对劳动投入的弹性系数，度量在资本投入保持不变时，劳动投入增加 1% 时产出增加的百分比。

两个弹性系数之和 $\alpha + \beta$ 均表示规模报酬（Return to scale）。

$\alpha + \beta = 1$ 表示规模报酬不变，即 1 倍的投入带来 1 倍的产出；

$\alpha + \beta < 1$ 表示规模报酬递减，即 1 倍的投入带来少于 1 倍的产出；

$\alpha + \beta > 1$ 表示规模报酬递增，即 1 倍的投入带来大于 1 倍的产出。

四、问题讨论（实验心得与体会）