苏州大学 <u>数学模型与数学软件</u> 课程试卷 （A）卷 共 8 页

考试形式 <u>开 卷</u> 2013 年 6 月

院系____________ 年级____________ 专业____________

学号____________ 姓名____________ 成绩____________

1. (15 分) 铸铁厂要生产一种规格的铸件共 10 吨，其成分要求为：锰含量至少达到 0.45%，硅含量允许在 3.25%～5.5%，市场有充分的锰和三种不同型号的生铁可供作铸件的炉料使用，它们的价格是：锰：75 元/千克，A 种生铁：1700 元/吨，B 种生铁：1900 元/吨，C 种生铁：1400 元/吨。这三种生铁含锰和硅的成分百分比(%)如下表所示：

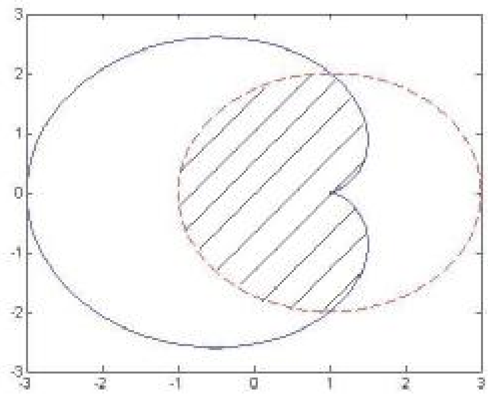
	A	B	C
锰	0.4	0.5	0.35
硅	4	1	0.5

若不计冶炼铸造过程中的损耗，问工厂怎样选择炉料能使成本最低？
（要求建立模型，并写出 MATLAB 或 LINDO 程序，不需求出数值解）

2. (15 分) 如下图, 心形线和圆方程分别为

$\begin{cases} x = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ x = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$ 其中 $t \in [0, 2\pi]$ 和 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos(t) \\ x = 2\sin(t) \end{cases}$ 其中 $t \in [0, 2\pi]$

采用适当的数值方法利用 Matlab 程序计算这两个图形相交部分(阴影部分)的面积(不需要求出最终结果)。



3. (15 分) 种群的数量(为方便起见以下指雌性)因繁殖而增加，因自然死亡和人工捕获而减少。记 $x_k(t)$ 为第 t 年初 k 岁(指满 $k-1$ 岁，未满 k 岁，下同)的种群数量，b_k 为 k 岁种群的繁殖率(1 年内每个个体繁殖的数量)，d_k 为 k 岁种群的死亡率(1 年内死亡数量占总量的比例)，h_k 为 k 岁种群的捕获量(1 年内的捕获量)。今设某种群最高年龄为 4 岁(不妨认为在年初将 4 岁个体全部捕获)，$b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.6$, $d_3 = 0.2$, $h_1 = 308$, $h_2 = 194$, $h_3 = 14$.

(1) 建立 $x_k(t+1)$ 与 $x_k(t)$ 的关系($k = 1,2,3,4; t = 0,1,\ldots$),如 $x_2(t+1) = x_1(t) - d_1 x_1(t) - h_1$. 为简单起见，繁殖量都按年初的种群数量 $x_k(t)$ 计算，不考虑死亡率。

(2) 用向量 $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ 表示 k 年初的种群数量，用 b_k 和 d_k 定义适当的矩阵 L，用 h_k 定义适当的向量 $\vec{h}$，将上述关系表成的 $\vec{x}(t+1) = L\vec{x}(t) - \vec{h}$ 形式。

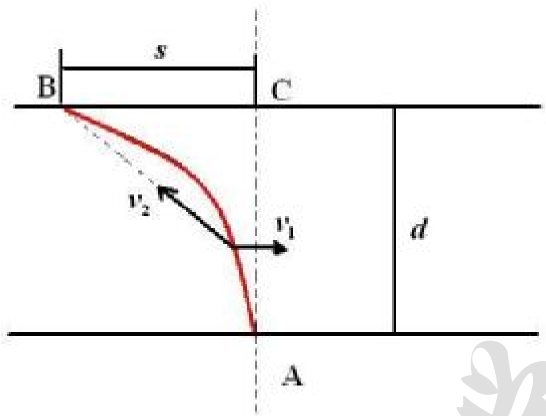
(3) 设 $t = 0$ 种群各年龄的数量均为 1000，求 $t = 1$ 种群各年龄的数量。又问设定的捕获量能持续几年。

(4) 已知当 $\vec{x}(t) = \vec{x}^* = (1240,560,30,10)^T$ 时，种群数量将不随时间 t 的改变而改变。现给 $\vec{x}^*$ 以小的扰动作为 $\vec{x}(0)$，发现随着 t 的增加，$\vec{x}(t)$ 不趋于 $\vec{x}^*$。由此你能得出什么样的结论么？你可以采用哪一个 Matlab 命令来验证你的结论？

4. (15 分) 道路上安装某品牌灯泡 K 只，假定灯泡寿命服从均值为 4000 小时的指数分布，每个灯泡的更换和安装价格为 80 元，管理部门对每个不亮的灯泡制定的惩罚费用为 0.02 元 / 小时，另外，对于更换时依然可用的灯泡，假定可按照 10 元/个的价格卖给回收站，求最佳更换周期 T。(建立一个数学模型，并写出数值求解时的 Matlab 命令。)

提示：指数分布的概率密度函数为：$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

5. (15 分) 一只小船从 A 点出发要渡过宽为 d 的河流(见下图)。最终目标是 B, A 的正对岸记作 C, B 与 C 的距离为 s . 已知河水流速 v_1 及船在静水中的速度 v_2 . 试建立描述小船航线的数学模型，并利用数值解法求任意时刻小船的位置(写出 Matlab 命令)。



6. (15 分) 某企业要为其产品制定价格。设单位产品的成本为常数 q。产品销售期为 T，设 T 均分成前后两个半期。设在销售的前后半期的单位产品价格分别取定为 p_1 和 p_2（$p_1 > p_2$）。在销售前半期，产品的单位时间销售量 x_1 是价格 p_1 的线性减函数，且单位价格的下降所引起的产品单位时间销售量的上升量为 b，(设 $x_1 = a - bp_1$，其中，按成本价卖时，市场是有正的需求量的：$a - bq > 0$)。在销售后半期，如果仍然采用价格 p_1 将不能卖出产品，单位时间销售量 x_2，且单位价格的下降所引起的产品单位时间销售量的上升量仍为 b ($x_2 = b(p_1 - p_2)$)。求使利润达到最大的价格 p_1 和 p_2。

7. (10 分) 假设工厂生产的产品重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，规定产品合格的标准是重量不低于 120 克。现从该厂随机抽得 5 件产品，测量其重量分别为

119, 120, 119.2, 119.7, 119.6

试判断产品是否符合规定要求。

(写出模型，程序，并写出如何根据程序结果进行判断)