

血管的三维重建

013 李卓遥 李世旺 王辰光

摘要

随着现代医学的发展,科学对人类疾病的研究不再局限于表面病理现象,在实际研究中利用断面可了解生物组织、器官等的形态和结构,从而可大大提高人类对某些疾病的预防和治疗。假设某些血管可视为一类特殊的管道,该管道的表面是由球心沿着某一曲线(称为中轴线)的球滚动包络而成。题中给出该血管的相继 100 张平行切片图象,记录了管道与切片的交。由假设可知,每一张切片都有唯一的最大内切圆,且由切片图像可得,血管的中轴线与每张切片有且只有一个交点,而此圆正是以这个交点为圆心的球的最大圆面,交点即是切片最大内切圆的圆心。由此即把求管道半径的问题,转化为求解每张切片最大内切圆半径的问题。

首先,建立含约束非线性优化模型(模型一),以每张切片骨架(中轴线)上的像素点为圆心,到切片轮廓上的像素点为半径,固定圆心,搜索半径最小者,得到圆心在骨架上的所有内切圆,其中的最大圆即为该切片的最大内切圆。对 100 张切片重复此算法,最终得到 100 组圆心坐标和半径,对所有半径取平均值作为管道的半径。

其次,建立一元多项式回归模型(模型二),对上述 100 组圆心坐标做多项式拟合,最终得出血管中轴线的方程,并画出了拟合出的中轴线的三维图像、血管的立体图像以及拟合中轴线再 XY、YZ、ZX 平面的投影图。

最后,通过分析模型一的可行性,并对模型二做回归分析,对比各次数的多项式的拟合度,从而说明 7 次多项式拟合的最优性,两个模型得到了检验,并提出了一定的模型改进的想法。

关键字: 等径 最大内切圆 骨架 轮廓 优化 回归

一、问题重述

1.1 背景

断面可用于了解生物组织、器官等的形态。例如，将样本染色后切成厚约 1mm 的切片，在显微镜下观察该横断面的组织形态结构。如果用切片机连续不断地将样本切成数十、成百的平行切片，可依次逐片观察。根据拍照并采样得到的平行切片数字图象，运用计算机可重建组织、器官等准确的三维形态。

1.2 目标

假设某些血管可视为一类特殊的管道，该管道的表面是由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成。例如圆柱就是这样一种管道，其中轴线为直线，由半径固定的球滚动包络形成。现有某管道的相继 100 张平行切片图象，记录了管道与切片的交。取坐标系的 Z 轴垂直于切片，第 1 张切片为平面 $Z=0$ ，第 100 张切片为平面 $Z=99$ 。 $Z=z$ 切片图象中象素的坐标依它们在文件中出现的前后次序为 $(-256, -256, z)$, $(-256, -255, z)$, \dots $(-256, 255, z)$, $(-255, -256, z)$, $(-255, -255, z)$, \dots $(-255, 255, z)$, $\dots\dots$ $(255, -256, z)$, $(255, -255, z)$, \dots $(255, 255, z)$ 。要求根据所给的切片，解决以下问题，并要求给出具体算法：

- (1) 计算管道的半径；
- (2) 求出管道的中轴线；
- (3) 绘制中轴线在 XY 、 YZ 、 ZX 平面的投影图。

二、问题分析

题中假设血管的表面是由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成，题中给出了它的相继 100 张平行切片图象。由假设可知，每一张切片都有唯一的最大内切圆，且由切片图像可得，血管的中轴线与每张切片有且只有一个交点，而此圆正是以这个交点为圆心的球的最大圆面。由于题中血管等径，所有切片的最大内切圆的半径相同。据此讨论以下三个问题：

问题一：

管道和每一张切片的交是该切片的最大内切圆，圆心是管道中轴线与此切片的交点，也是球滚动到此的球心，半径则为该圆心到切片边界线的最短距离，也是管道的半径。考虑到若已知切片的最大内切圆的圆心必在该切片的中轴线上，故可先找出每一张切片的中轴线，并以此轴线上的点为圆心，建立模型找到该切片的最大内切圆，确定此圆半径，对所有切片的最大内切圆的半径取均值，即可得到误差较小的管道半径。

问题二：

连接所有切片最大内切圆的圆心，所得曲线即为管道的中轴线。用 MATLAB 对 100 个圆心坐标做多项式拟合，即可得到管道中轴线方程，并绘出其三维图。

问题三：

用 MATLAB 对问题二中所求得的中轴线三维图做投影，从而得出在模型中建立的坐标系下，中轴线在 XY 、 YZ 、 ZX 平面的投影图。

三、模型假设与符号说明

3.1 模型假设

- a. 血管视为一类特殊的等径管道，即其表面是由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成，且此生成球的半径固定；
- b. 管道中轴线与每张切片有且只有一个交点，且此交点在该切片的中轴线上；
- c. 切片间距以及图像像素的尺寸均为 1；

3.2 模型猜想与可行性分析

根据问题分析，我们采用分布的方法，先对管道与切片之间的关系做剖析，得出切片的最大内切圆的圆心是管道中轴线与切片交点，从而把求管道半径的问题，转化为求解每张切片最大内切圆半径的问题。

根据题目假设，切片部分必有唯一一个最大的内切圆，故我们对解决问题的模型有以下猜想：

想法一：

用切线来找血管直径。该内切圆是球的大圆，该大圆相对的两个切点连线过圆心且两处切线平行。

做法：

（1）若不对切片的轮廓线拟合，而要求轮廓的切线斜率，则需找两个点来计算：

如果两点过于密集（相距像素格点 ≤ 1 ），斜率为 0 或 1 或 -1 或无穷；
如果两点过远，则不准确。

（2）若对切片的轮廓线进行拟合，则用什么类型的曲线拟合，多项式的话次数是多少，都要商榷。

（3）若求出了斜率，由于题中给出的切片图像有像素限制，有的切片可能根本不存在两条完全平行的切线（斜率相等），此时，需求斜率最相近的两直线，这样就使得计算冗杂和判断方式无普遍性，且有一定的误差范围。

由以上分析知，想法一算法复杂，且误差较大。

想法二：

对切片上所有点逐一取定为圆心，半径也在一定集合内逐一取定，保留满足条件的最大半径及圆心位置、切片编号。

做法：

每张切片有 512×512 个像素点作为待定圆心，相应内切圆的搜索范围庞大，且 100 张切片形状各异，内切圆的搜索方式各不相同，此方法下的计算量不可想象，可行性很低。

想法三：

经过查阅资料，我们发现，MATLAB 有对图像提取骨架（中轴线）的 `bwmorph` 函数，以及提取边界轮廓的函数 `edge`，而切片的最大内切圆半径就在骨架和轮廓的某个连线上，可以建立非线性优化模型，用含约束的非线性规划把它找出来。

通过初步判断，这种找取切片最大内切圆的方式避免了盲目搜索的弊端，有较强的可行性。

3.3 符号说明

P_i	每张切片的最大内切圆骨架上的第 i 个像素点坐标
Q_j	每张切片的最大内切圆骨架上的第 j 个像素点坐标
D_{ij}	骨架上第 i 个像素点到轮廓上第 j 个像素点的距离
x	切片最大内切圆圆心（血管中轴线与相应切片的交点）的横坐标
y	切片最大内切圆圆心（血管中轴线与相应切片的交点）的竖坐标
z	切片最大内切圆圆心（血管中轴线与相应切片的交点）的纵坐标
r	每个切片最大内切圆的半径

四、模型建立与模型求解

由题意可知，题设建立了 $O-xyz$ 坐标系，其中，每张切片图像左上角在该坐标系中的坐标为 $(-256,-256,z)$ ，右下角为 $(255,255,z)$ 。为了方便运算与 MATLAB 构图，我们平移所有切片，建立新的坐标系 $O'-xyz$ ，使得左上角在新的坐标系中的坐标为 $(1,1,z)$ ，右下角为 $(512,512,z)$ 。我们将在得出最终结果后，还原坐标系。

● 问题一：

1.1 模型一：含约束非线性优化模型

由问题分析可知，欲求问题一中管道的半径，即求切片最大内切圆的半径。为找取各切片的最大内切圆，我们建立含约束非线性优化模型，从各个切片的所有内切圆中找出最大者，确定其半径和圆心坐标。

已知管道的 100 张切片图，用 MATLAB 的 `bwmorph` 命令求出切片部分的骨架——切片的中轴线，即切片内部的点到切片两侧轮廓距离相等的点的集合（以 49.bmp 图为例，见图 1a），以骨架上的像素点作为集合逐一取定为圆心；用 `edge` 命令求出切片轮廓所形成的像素点集合（同上例，见图 1b）。

对于任意取定的圆心，计算该圆心到轮廓上每一点距离，从而得到其中的最小距离和此时圆心在骨架上的位置。由于圆心分布在骨架上的某一点处，这样，与边界距离最小的线段正是与轮廓内切的圆的半径。在骨架上所有点所得的内切圆中，取半径最大者，即为该切片最大内切圆的半径。

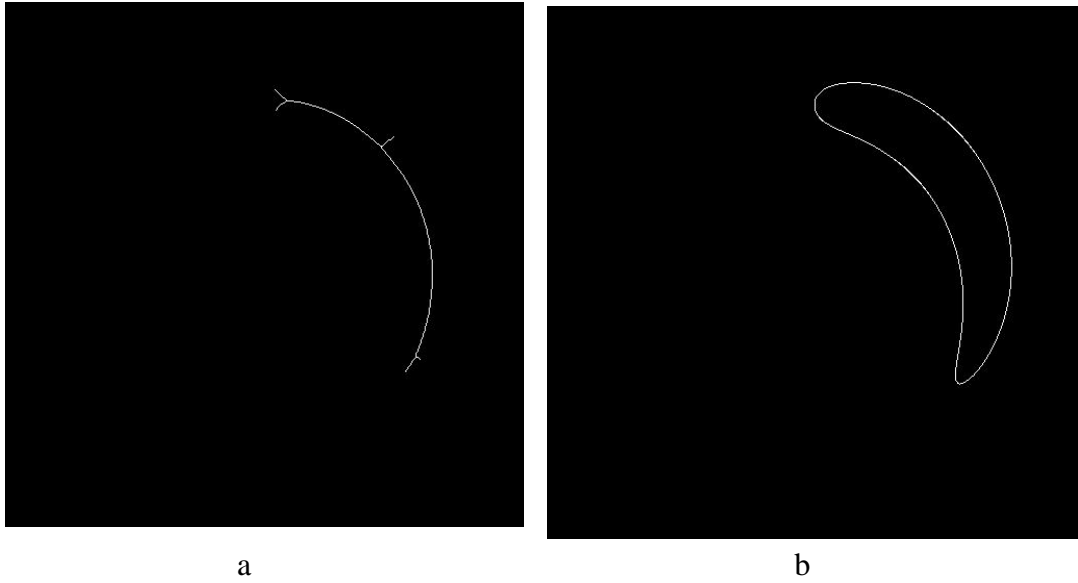


图 1: 49.bmp 图的骨架和轮廓

- **Step1:** 用 MATLAB 中的 find 函数找骨架和轮廓上的像素点，并排成矩阵。
 - (1) 找取骨架上的点 $P_1 \cdots P_m$ ，并排成一个 $m \times 2$ 的矩阵,两列分别为各点的横纵坐标。
 - (2) 找取轮廓上的点 $Q_1 \cdots Q_n$ ，并排成一个 $n \times 2$ 的矩阵,两列分别为各点的横纵坐标。
- **Step2:** 用距离公式计算 P_i 和 Q_j 的距离 D_{ij} 。

$$D_{ij} = \sqrt{(P_i(1) - Q_j(1))^2 + (P_i(2) - Q_j(2))^2}$$

其中 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。

由此可得到如下模型:

$$\begin{aligned} & \max_i \min_j D_{ij} \\ & s.t. \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

用 MATLAB 编程进行模型求解，程序见附录 1。

1.2 求所有切片最大内切圆半径的均值

通过上述模型的求解，得到 100 张切片的圆心坐标 (x, y, z) 和半径 r 。所求得数据见附录 2，其中部分数据如表 1 所示：

x	y	z	r	x	y	z	r
-160	1	1	29.069	-114	117	51	29.698
-160	0	2	28.284	-114	117	52	29.698
-160	2	3	29.017	-113	118	53	29.698
-160	2	4	29.069	-112	119	54	29.698
-160	2	5	29.069	-111	120	55	29.682
-160	2	6	29.069	-111	120	56	29.206
-160	1	7	29	-63	151	57	29.411
-160	4	8	29.017	-75	145	58	29.53
-160	1	9	29	-81	142	59	29.53
-160	1	10	28.862	-51	156	60	29.547
-160	7	11	28.862	-51	156	61	29.547
-160	8	12	28.862	-31	162	62	29.614

表 1：部分切片的圆心坐标和半径

对所得的所有半径求平均值

$$r = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} r_i$$

计算可得，所有切片最大内切圆的平均半径为 29.41662，即血管的半径为 29.41662。

问题二：

模型二：一元多项式回归模型

通过问题一中的模型求解，我们得到了血管的中轴线与 100 张切片的交点坐标 (x, y, z) （最大内切圆的圆心坐标），故可画出中轴线的散点图（见图 4）：

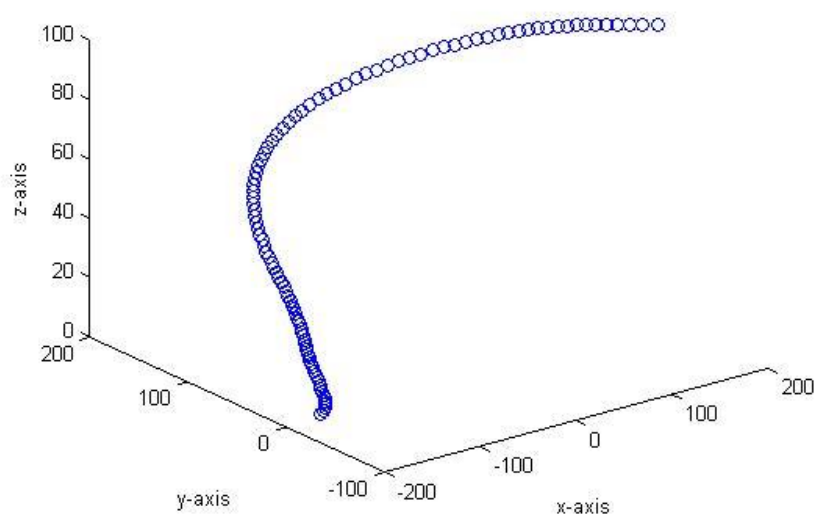


图 4：血管中轴线的散点图

现对轴线参数化，取 $z = t$ ，然后用分别拟合出 $y(t)$ 和 $x(t)$ 。用 MATLAB 经过多次拟合，发现用七次多项式拟合的结果比较好，所以建立如下的多元线性回归模型：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6 + \beta_7 x^7 + \varepsilon$$

用 MATLAB 编程求解，程序见附录 1，轴线的参数方程如下：

画出拟合的血管中轴线的三维图（见图 5）和血管的立体图（见图 6）。

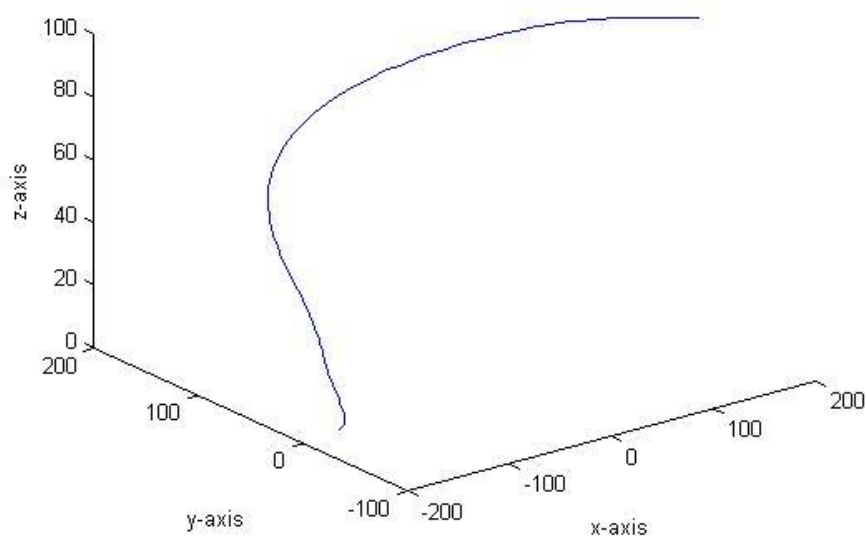


图 5：拟合的血管中轴线的三维图

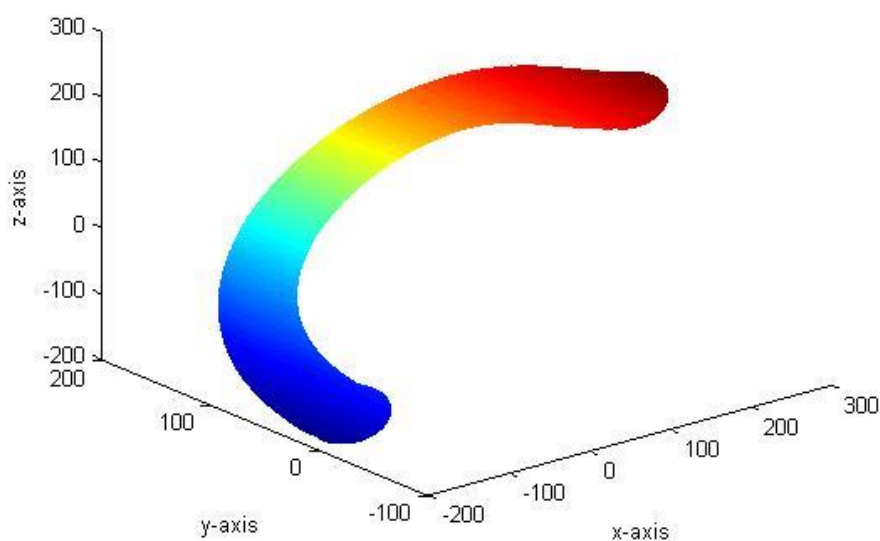


图 6：血管的立体图

问题三:

用 MATLAB 绘制出拟合后的血管中轴线在 XY、YZ、ZX 平面的投影图，分别见图 7、8、9。

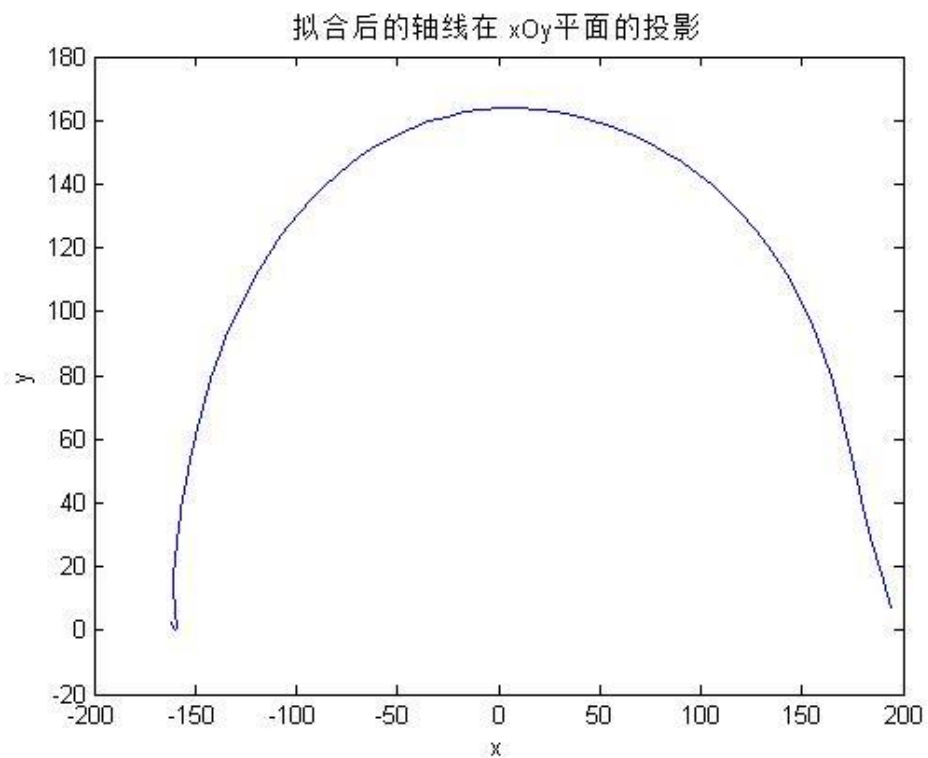


图 7: 轴线在 xOy 平面的投影

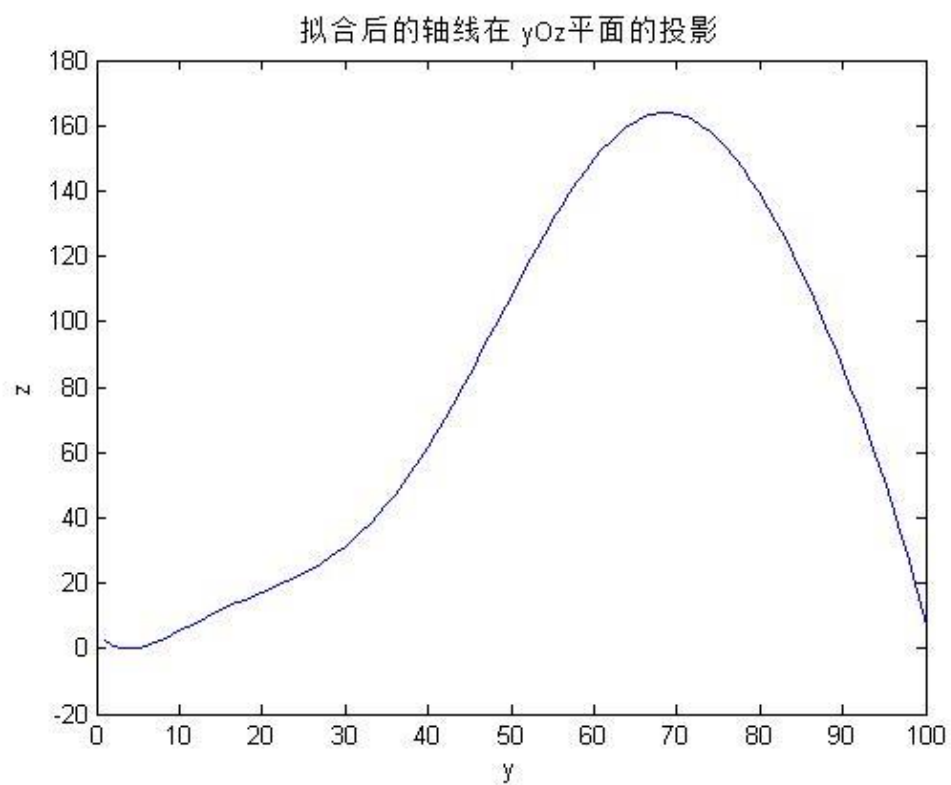


图 8: 轴线在 yOz 平面的投影

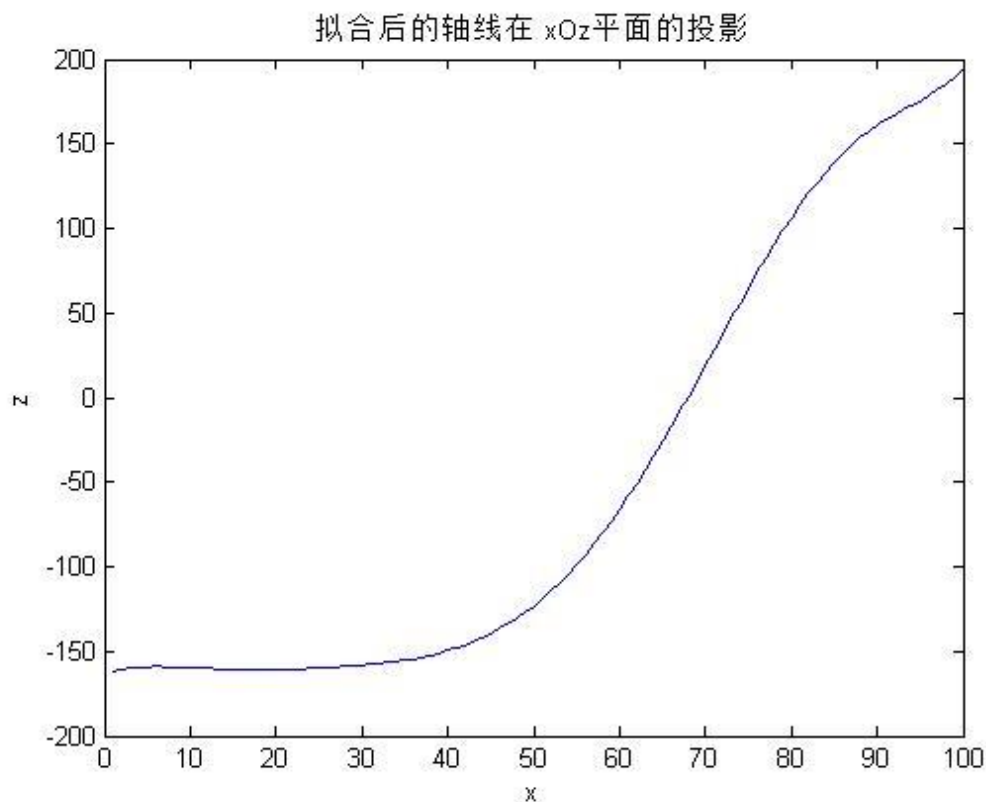


图 9：轴线在 xOz 平面的投影

五、模型分析与模型检验

以下主要对模型二进行分析和检验：

为了检验我们建立的回归模型，需衡量所求管道轴线的拟合度。为说明模型中选择的 7 次多项式拟合度相对较好且便于操作，我们首先求出 1~10 次多项式拟合的残差，见表 2。

拟合多项式次数	xOy 平面	yOz 平面	xOz 平面
1	515.8078	439.596	483.6977
2	147.6518	299.7439	186.0957
3	138.1141	72.453	157.9127
4	79.1281	70.058	46.8148
5	74.3622	25.4723	42.5005
6	66.1146	24.1316	22.8714
7	61.2999	1.0151e-10	8.4207e-10
8	60.8226	9.7782e-11	5.7081e-11
9	58.6169	9.5084e-11	9.4373e-11
10	58.6131	9.2375e-11	5.882e-11

表 2：1~10 次多项式拟合的残差

表 2 中数据的折线图如图 10 所示：

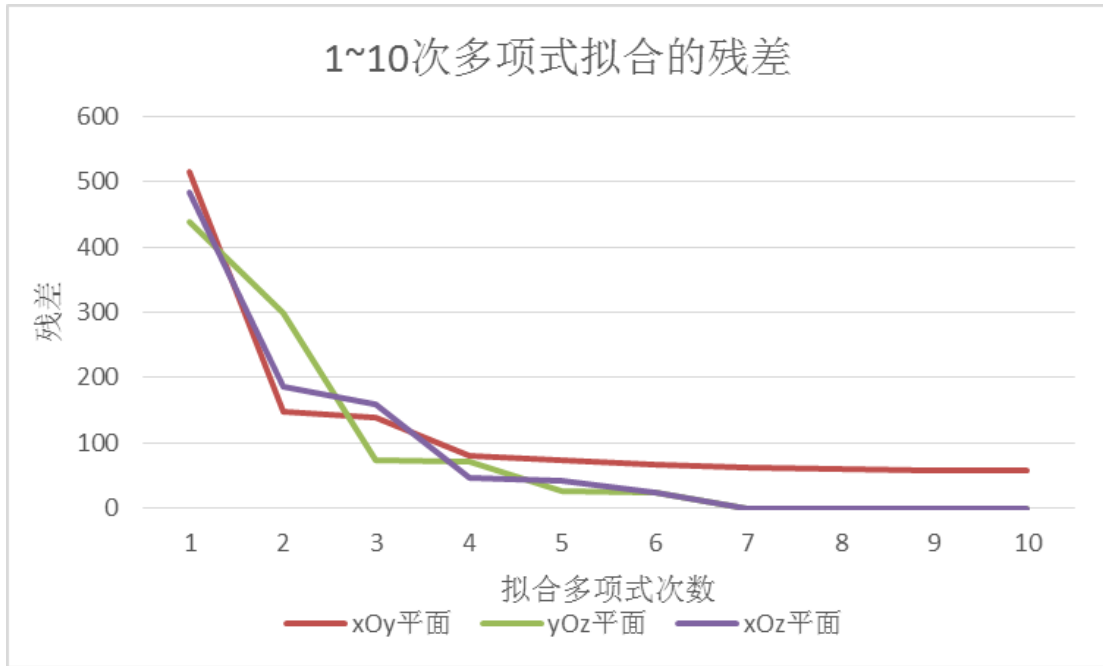


图 10：三个平面在 1~10 次多项式拟合下的残差变化折线图

图 10 显示，拟合多项式的次数越高，残差越小，但在数据处理的过程中，多项式回归次数越高，数据越繁杂，越难于处理，故我们需要找到一个兼顾残差较小，且便于处理的多项式，从而达到最佳的拟合效果。由表中数据可知，xOy 平面投影的拟合残差较大，从 7 次多项式拟合开始，残差达到 61.2999，且逐渐趋于稳定；yOz 平面投影的拟合残差从 7 次多项式以后，已经小至 $1e-10$ 及以下数量级且逐渐趋于稳定，达到了很高的拟合度；xOz 平面同 yOz 平面的情况类似。综上所述，我们选择 7 次多项式回归来确定血管的中轴线。

下面以 7 次多项式回归为例，画出 XY、YZ、XZ 三平面投影的散点和拟合曲线，并做出回归分析。

(1) xOy 平面的投影

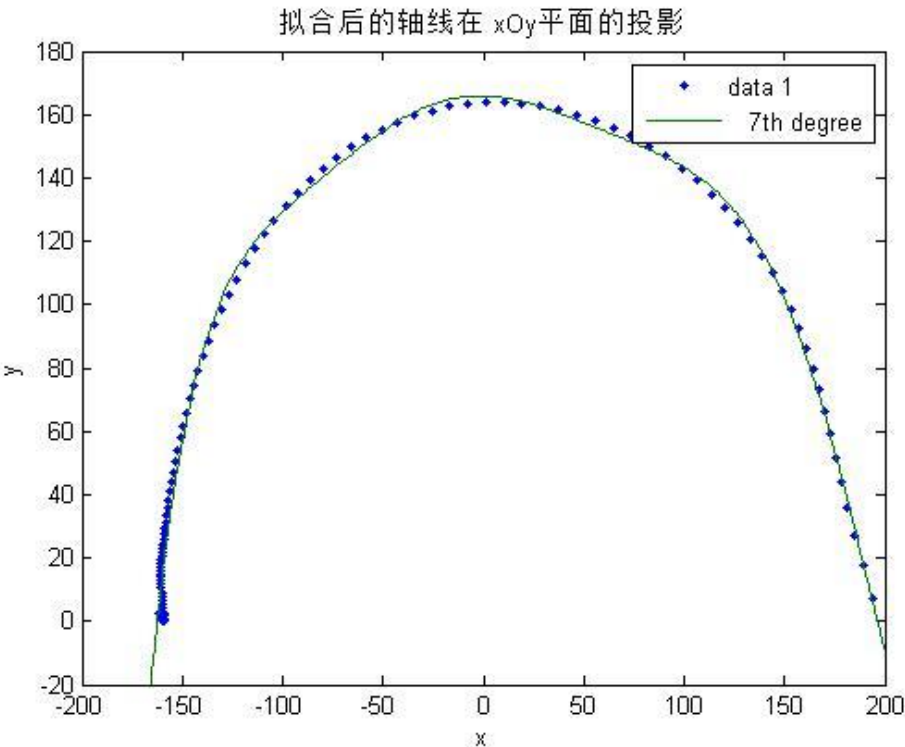


图 11: 拟合后的轴线在 xOy 平面的投影

回归系数	置信区间	残差
-0.0367	[-0.1773 0.1039]	61.2999

表 3: xOy 平面的投影的拟合数据分析

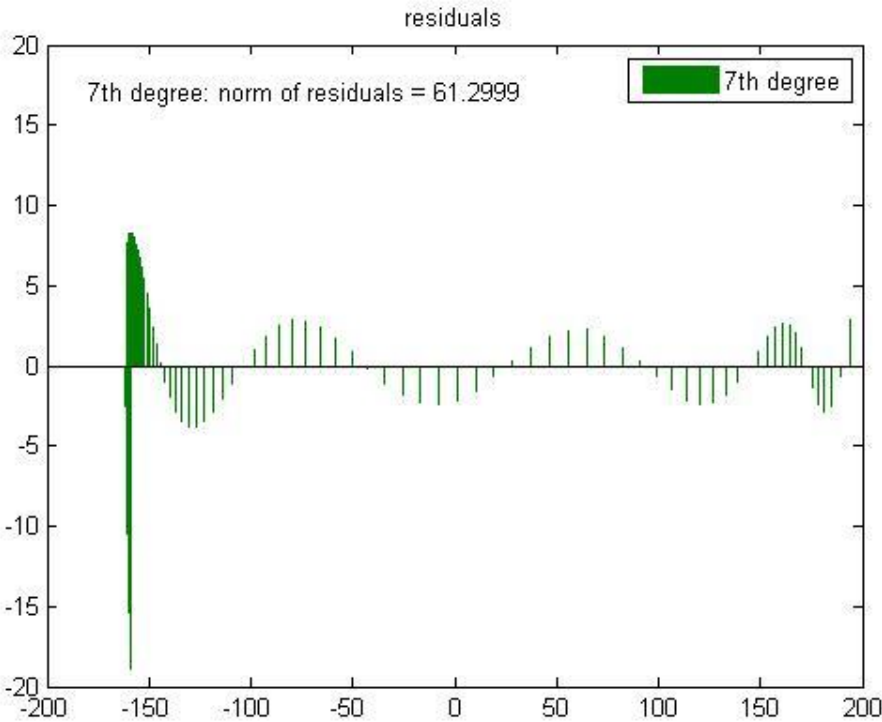


图 12: 拟合曲线在 xOy 平面的投影的拟合残差图

(2) yOz 平面的投影

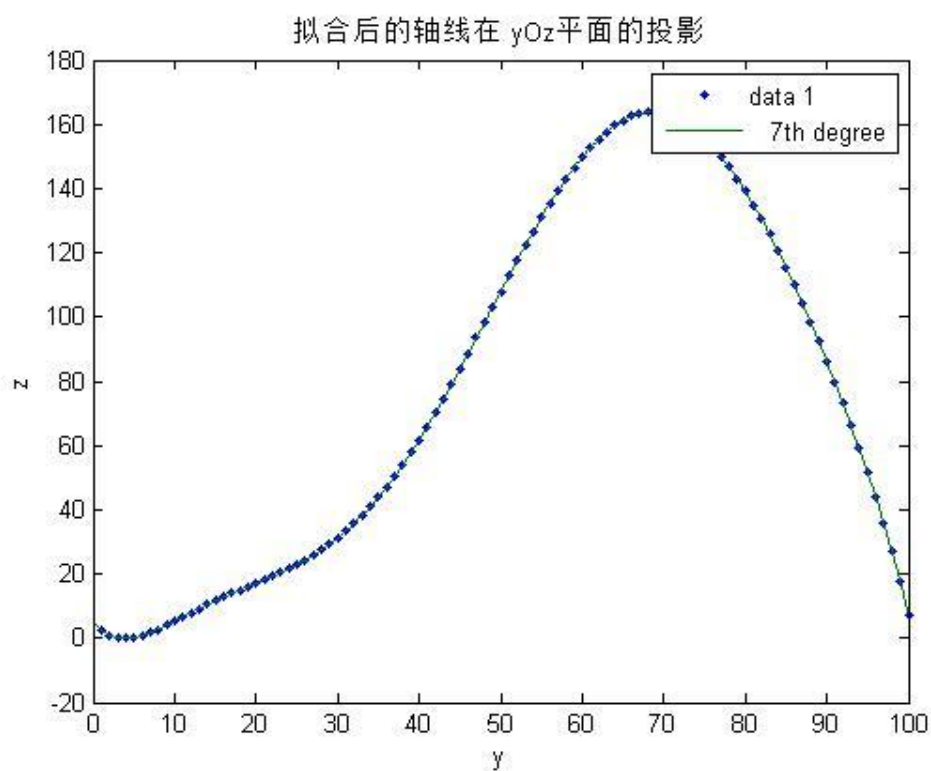


图 13: 拟合后的轴线在 yOz 平面的投影

回归系数	置信区间	残差
0.5323	[0.4764 0.5881]	1.0151e-10

表 4: yOz 平面的投影的拟合数据分析

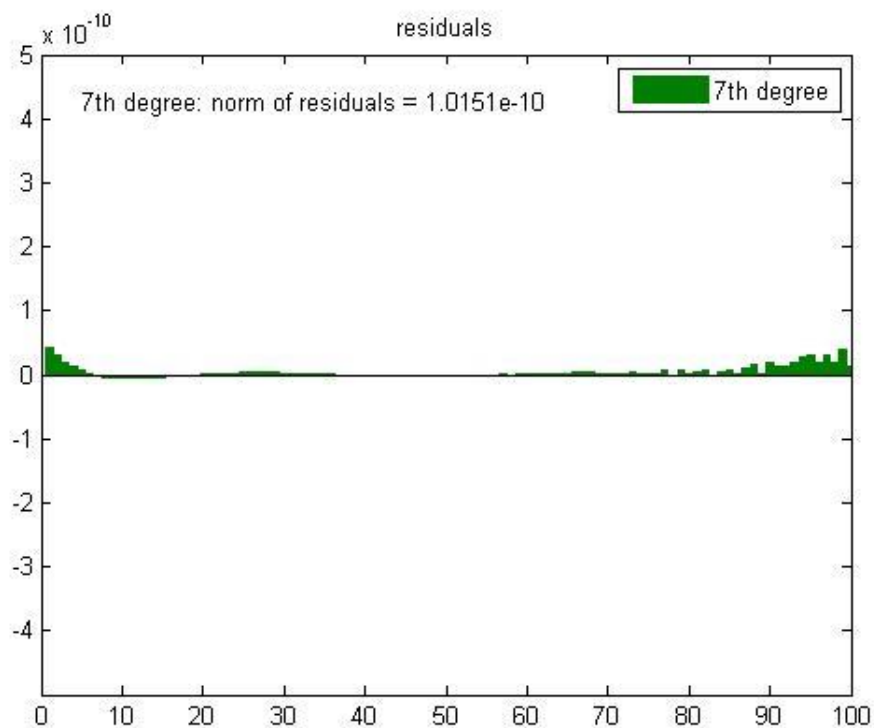


图 14: 拟合曲线在 yOz 平面的投影的拟合残差图

(2) yOz 平面的投影

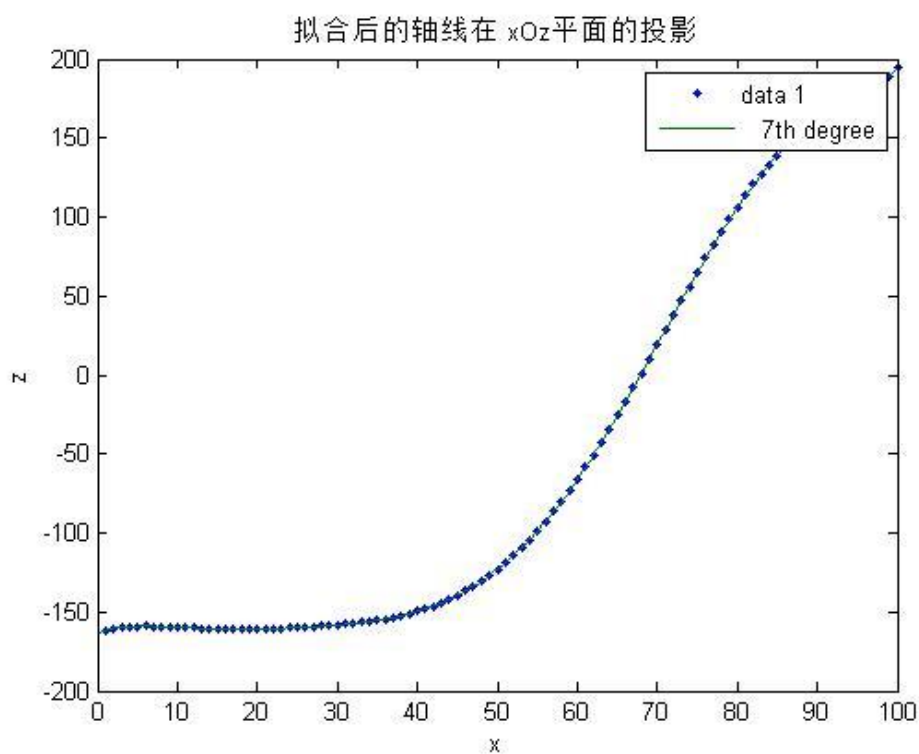


图 15: 拟合后的轴线在 xOz 平面的投影

回归系数	置信区间	残差
0.0462	[-0.0380 0.1304]	8.4207e-11

表 5: xOz 平面的投影的拟合数据分析

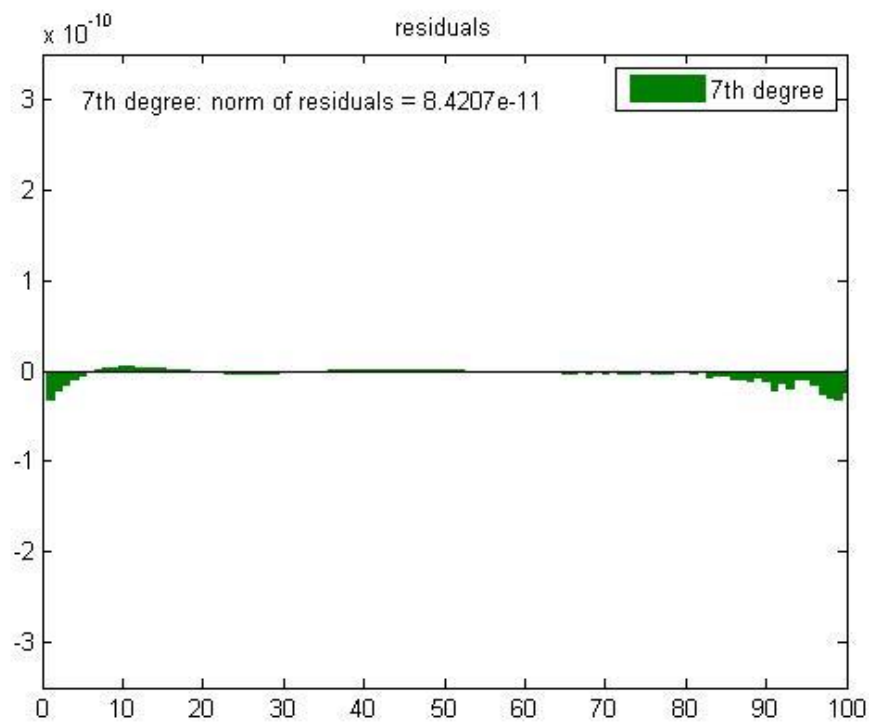


图 16: 拟合曲线在 xOz 平面的投影的拟合残差图

六、模型优缺点分析

模型一：

优点：用 `edge` 和 `bwmorph` 函数找出它的轮廓和骨架，在此基础上用含约束的非线性规划来求出最大内切圆半径，可行性较高，兼顾了准确性和效率。

缺点：若切片数充分大时，计算最大内切圆的程序循环次数充分大，运行时间会很长或结果出现错误。

模型二：

优点：用一元多项式进行拟合，大部分数据拟合得当，效果较好。

缺点：从图上看，当 z 比较大时，拟合显得粗糙。

模型假设的优缺点分析：

对于此问题的解答，我们假设血管是固定半径的球滚动包络而成的，实际上血管的粗细会随分布情况而变化。

优点：对于血管的一小段，我们可以认为血管粗细变化不明显，此时我们的模型适用；缺点：对于一条长的血管，由于粗细变化范围较大，此时，直接运用上述模型可能会造成较大的误差。

模型改进：

若将血管化为若干个小段，运用微积分的思想和相关知识，我们可以将模型进行一定的修正，使其应用更为广泛。

七、参考文献

[1]姜启源,谢金星,邢文训,张立平.大学数学实验.清华大学出版社,2010,(2).

[2]楼天顺,于卫.基于 MATLAB 软件的系统分析与设计.西安电子科技大学出版社.119981

[3]汪国昭,陈凌钧.血管三维重建的问题[J].工程数学学报(建模专辑),Vol.19, No.5,2002:54-58.

[4]中国知网 www.cnki.net

[5]中国大学生数学建模竞赛, <http://mcm.edu.cn/mcm01/problems.htm>.

附录 1

相关程序：

`banjing.txt`(计算半径并把 100 组数据导出到 `banjing.xls`)

`zhouxian.txt`(画出中轴线以及血管的三维图)

`touying.txt`(画出三面投影图)

附：“matlab 程序”文件夹内为上述程序同名 `m` 文件，可直接运行。

附录 2:

第0~99张切片的圆心坐标 (x, y, z) 和半径r							
x	y	z	r	x	y	z	r
-160	1	1	29.069	-114	117	51	29.698
-160	0	2	28.284	-114	117	52	29.698
-160	2	3	29.017	-113	118	53	29.698
-160	2	4	29.069	-112	119	54	29.698
-160	2	5	29.069	-111	120	55	29.682
-160	2	6	29.069	-111	120	56	29.206
-160	1	7	29	-63	151	57	29.411
-160	4	8	29.017	-75	145	58	29.53
-160	1	9	29	-81	142	59	29.53
-160	1	10	28.862	-51	156	60	29.547
-160	7	11	28.862	-51	156	61	29.547
-160	8	12	28.862	-31	162	62	29.614
-160	9	13	28.862	-31	162	63	29.614
-160	10	14	29.017	-31	162	64	29.614
-160	12	15	29.017	-35	161	65	29.614
-160	13	16	29.017	-35	161	66	29.614
-160	14	17	29.017	-26	163	67	29.428
-160	16	18	29.017	-35	161	68	29.411
-160	17	19	29.017	-26	163	69	29.275
-160	18	20	29.017	46	163	70	29.428
-160	19	21	29.017	46	163	71	29.614
-160	20	22	29.017	46	163	72	29.614
-160	21	23	29.017	46	163	73	29.614
-160	22	24	29.017	65	158	74	29.614
-160	21	25	29.069	68	157	75	29.732
-160	21	26	29.069	65	158	76	29.732
-160	21	27	29.069	81	152	77	29.547
-159	30	28	29.155	81	152	78	29.53
-159	30	29	29.275	81	152	79	29.53
-159	29	30	29.275	135	118	80	29.411
-158	35	31	29.428	136	117	81	29.698
-157	40	32	29.614	136	117	82	29.698
-157	40	33	29.614	137	116	83	29.698
-157	40	34	29.614	138	115	84	29.698
-156	44	35	29.614	138	115	85	29.698
-153	55	36	29.732	139	114	86	29.698
-153	55	37	29.732	139	114	87	29.698
-153	55	38	29.732	139	114	88	29.698
-152	58	39	29.732	140	113	89	29.698
-152	58	40	29.614	140	113	90	29.682
-150	63	41	29.547	172	67	91	29.53
-149	66	42	29.547	172	67	92	29.53
-148	68	43	29.53	172	67	93	29.53
-148	68	44	29.53	172	67	94	29.53
-143	78	45	29.53	182	43	95	29.732
-137	88	46	29.411	187	24	96	29.614
-137	88	47	29.411	187	24	97	29.614
-116	115	48	29.698	187	24	98	29.614
-115	116	49	29.698	187	24	99	29.614
-115	116	50	29.698	188	18	100	29.428