Le problème de couverture maximum

Gjini Jurgen

Université Libre de Bruxelles

Résumé Nous traiterons dans ce papier du problème de couverture maximum (Maximum coverage problem), une introduction générale aux problèmes de couverture sera faite puis s'en suivra une definition formelle de notre problème, ainsi qu'un exemple pour l'illustrer. Pour finir, nous discuterons des differentes heuristiques qui nous permettraient d'approximer une possible solution.

Introduction

Un des problèmes de couverture les plus connus en combinatoire est celui de la couverture par ensembles, qui pourrait être defini de la manière suivante : soit un ensemble fini $\mathcal{S} = \{a, b, c, d, ...\}$ et un ensemble fini $\mathcal{V} = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, ...\}$ où $\bigcup_{V_i \in \mathcal{V}} \mathcal{V}_i = \mathcal{S}$, il faut trouver l'ensemble $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$, tel que $\bigcup_{P_i \in \mathcal{P}} \mathcal{P}_i = \mathcal{S}$ et $|\mathcal{P}|$ minimisée.
Un exemple concret pour illustrer ce problème pourrait être le suivant : nous souhaitons rénover une maison en employant des ouvriers, la construction de la maison requiert un ensemble de compétences et chaque ouvrier possède une ou plusieurs compétence(s). Quels ouvriers choisir afin de couvrir toutes les compétences requises et de minimiser le nombre d'ouvriers ?

Mais ce problème ne tient pas compte de plusieurs paramètres qui pourtant sont souvent essentiels dans le monde réel. D'une part, le nombre d'éléments nécessaires pour couvrir tout l'ensemble est souvent bien trop grand, pour des raisons physiques / budgétaires, généralement nous auront un nombre fixe d'éléments que nous devront placer pour maximiser la taille de l'ensemble couvert. Et d'autre part, il se pourrait également que certains éléments aient un "poids" plus conséquent que d'autres et devraient donc être choisis prioritairement lors de la maximisation.
Pour palier à ces manques, nous introduisons donc le problème de couverture maximal, dans sa variante où chaque élément à couvrir possède un certain poids.

1 Définition formelle du problème

Soit une collection $\mathcal{S}$ d'ensembles où chaque ensemble correspond aux différents éléments à couvrir et k le nombre d'éléments de $\mathcal{S}$ a choisir, il faut alors selectionner $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, avec $|\mathcal{C}| \leq k$, où

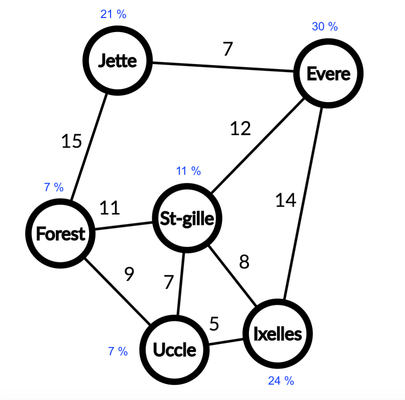
$$\mathcal{T} = \bigcup_{P_i \in \mathcal{P}} \mathcal{P}_i$$

pour

$$\sum_{T_i \in \mathcal{T}} \mathcal{T}_i$$

maximisée

2 Exemple pour illustrer : maximisation des potentiels clients



On souhaite ouvrir 2 boutiques à Bruxelles pour une certaine catégorie de biens, sachant que les pourcentages en bleu correspondent au pourcentage qu'occupe la commune sur ce même marché et qu'un client est en moyenne prêt à parcourir au maximum 7 km depuis sa commune d'origine pour consommer notre produit, où devons-nous placer nos 2 magasins afin de maximiser le segment clientèle potentiel ?

Ville	Villes couvertes	% des clients couverts
Jette	Jette , Evere	51 %
Evere	Evere, Jette	51 %
St-Gille	St-Gille, Uccle	18 %
Forest	Forest	7 %
Uccle	Uccle, Ixelles, St-Gille	41 %
Ixelles	Ixelles, Uccle	31 %

92 % de la clientèle serait donc couvert si nous ouvrons nos magasin à Evere et à Uccle, le couple {Evere, Uccle} est donc une solution à ce problème de couverture maximum.