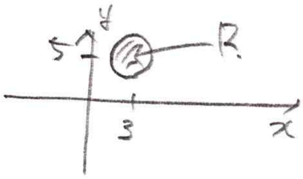
2008 수학

1. $\cos x \cos y = \cos 0 \cdot \cos\pi + \left(-\sin 0 \cos\pi\,(x-0)\right) + \left(-\cos 0 \sin\pi\,(y-\pi)\right)$

$+\frac{1}{2!}\left(-\cos 0 \cos\pi\,(x-0)^2\right) + 2\sin 0 \sin\pi\,(x-0)(y-\pi) + \left(-\cos 0 \cdot \cos\pi\,(y-\pi)^2\right)$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-\pi)^2 - 1$

2. $L = \frac{y}{x^2+y^2}$, $M = \frac{-x}{x^2+y^2}$,



$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0 \cdot dA = \underline{0}$

3. $s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{-18}{s^2+4}$

$s^2Y - s + Y = \frac{-18}{s^2+4}$, $Y(s)(s^2+1) = s - \frac{18}{s^2+4} = \frac{s^3+4s-18}{s^2+4}$

$Y(s) = \frac{s^3+4s-18}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$.

$As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2 + 4Cs + 4D = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (A+4C)s + (B+4D)$

$= s^3 + 4s - 18$.

$A+C=1$

$B+D=0$

$A+4C=4$

$B+4D=-18$

$C=1,\ A=0,\ D=-6,\ B=6$

$Y(s) = 3\cdot\frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1} - 6\cdot\frac{1}{s^2+1}$

$\therefore \underline{y(t) = (3\sin 2t + \cos t - 6\sin t)\,u_s(t)}$

4.

a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0.$

b) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$

$f'(0)=0$, $\lim_{x\to 0} f'(x)$: 존재 X.

$\therefore$ $f'(x)$는 $x=0$ 에서 not continuous

5. a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j2\pi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j2\pi} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j4\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$A^H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = -1\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $AA^H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

c) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \lambda^2 - 1 = 0.$ $\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$\therefore$ $|\lambda_i| = 1$ for $i=1,2$

6. (a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})e^{j\omega t}d\omega = \underline{e^{j\frac{2\pi}{T}kt}}$

(b) $a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}dt$

$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}dt = \underline{\frac{1}{T}}$

$\therefore \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi}{T}kt}}$

(c) $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$

$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$

$= \underline{\frac{1}{T}X(j\frac{2\pi k}{T})}$

$\therefore \underline{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j\frac{2\pi k}{T})e^{j\frac{2\pi}{T}kt}}$

2008 통신

1.

(a) $s_u(t) = \frac{A_c}{2} m(t)\cos 2\pi f_c t - \frac{A_c}{2}\hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$

(b) $s_u(t)\cos 2\pi f_c t = \frac{A_c}{4}m(t) + \frac{A_c}{4}m(t)\cos 4\pi f_c t - \frac{A_c}{4}\hat{m}(t)\sin 4\pi f_c t$

$\mathrm{LPF}\{s_u(t)\} = \frac{A_c}{4}m(t)$

2.

(a) BW = 50MHz

⇒ 50Msymbol/s, 2B1Q: 2bits/symbol.

∴ <u>100 Mbps</u>

(b) 8bit로 한 숫자를 표현하므로 $\frac{100}{8} = 12.5$MHz (sampling rate).

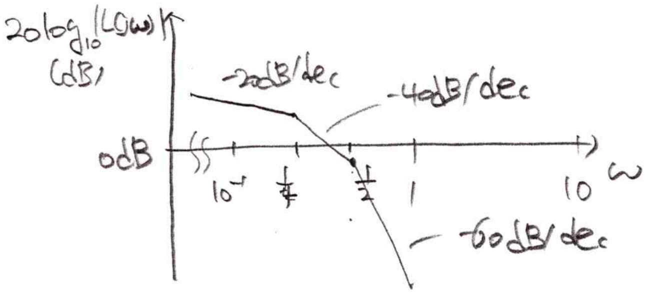
Nyquist sampling theorem에 의해 6.25MHz가 최대의 frequency component 이지만 roll off factor가 1인 raised cosine pulse 때문에 실제 signal의 highest freq. = <u>3.125MHz</u>

2008 제어

제어 필수

1.

a) $L(j\omega) = \dfrac{0.5}{j\omega(1+2j\omega)(1+4j\omega)} = \dfrac{0.5}{(-2\omega^2+j\omega)(1+4j\omega)} = \dfrac{0.5}{-2\omega^2-8j\omega^3+j\omega-4\omega^2}$



$= \dfrac{0.5}{-6\omega^2+j(\omega-8\omega^3)}$

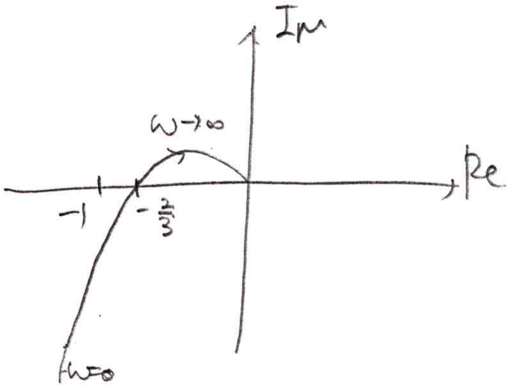
$Im\{L(j\omega)\}=0$ 이 되는 $\omega_p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$L(j\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \dfrac{0.5}{-\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$

Gain margin : $-20\log_{10}\frac{2}{3} = -20(0.3-0.48) = \underline{+3.6\ dB}$

b) $\omega \to 0$: $\angle L(j\omega) = -90°$, $|L(j\omega)| = \infty$

$\omega \to \infty$: $\angle L(j\omega) = -270°$, $|L(j\omega)| = 0$



c) Zero를 추가하면 phase margin에는 영향을 주지 않고 Gain margin을 높여준다.

d) $L'(s) = \dfrac{0.5(s+1)}{s(1+2s)(1+4s)} = \dfrac{0.5(1+j\omega)(1-j\omega)}{(-6\omega^2+j(\omega-8\omega^3))(1-j\omega)} = \dfrac{0.5(1+\omega^2)}{-6\omega^2+j6\omega^3+j(\omega-8\omega^3)+\omega(\omega-8\omega^3)}$

$Im\{L'(s)\}=0$ 이 되는 $\omega_p' = \sqrt{2}$.

$L'(j\sqrt{2}) = \dfrac{1.5}{-12+2-32} = -\dfrac{1.5}{42}$, $-20\log|L'(j\sqrt{2})| = \underline{12.9\ dB}$.

(기존의 gain margin 이었던 3.6dB 보다 증가하였다).

＊ 제어선택

1. a) controllability : state $x(t_0)$ 에서 $x(t_1)$ 으로 transfer 하는 input $u[t_0, t_1]$ 이 존재할 때 t_0 에서 controllable. (for finite $t_1 > t_0$)

observability : input $u[t_0, t_1]$ 와 output $y[t_0, t_1]$ 을 time interval $[t_0, t_1]$ 에서 아는 것으로 state $x(t_0)$ 를 결정하기에 충분할 때 t_0 에서 observable. (for finite $t_1 > t_0$).

b) $\bar{x} = P x$ 이므로

$$\dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x}(t) + Pb\,u(t), \quad y(t) = cP^{-1}\bar{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} cP^{-1} \\ cP^{-1}(PAP^{-1}) \\ cP^{-1}(PAP^{-1})^2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix} P^{-1},$$

P는 nonsingular square matrix 이므로 full rank. 따라서 $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \end{bmatrix}$ 가 full rank (observable) 이면 $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \end{bmatrix} P^{-1}$ 도 observable, 아닌 경우에도 해당되므로 observability는 같다.

c) Any Bounded input 에 대하여 bounded output 이 나오는 system 은 BIBO stable 하다.

d) transfer function $\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = C(sI-A)^{-1}B$,

$H(s)$ 의 pole 은 $\det(sI-A) = 0$ 에 해당된다.

① $\forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \Rightarrow$ BIBO stable

: $|sI-A| = 0$ 의 근 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ 이 negative real part 값이면 $H(s)$ 의 pole 이 complex plane 에서 LHS 에 존재하므로 stable.

② BIBO stable $\not\Rightarrow \forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

: matrix B 나 C 가 0 인 경우에 어느 input 에 대해서도 zero output 이 나오므로 BIBO stable 하지만, $\det(sI-A) = 0$ 의 모든 근이 negative real part 를 가지지 않아도 된다.