

## 고급광학 [PHYS690], 19년 1학기 - 과제1 해답

---

[2] 1. Calculate FSR of a cavity with length of 1 meter. Compare it with a cavity with length of 1 mm.

FSR (Free spectral range,  $\Delta f$ )는 resonator의 standing wave mode를 이용하여 계산할 수 있다. 공기(n=1) 중에서 길이가 L인 resonator의 mode frequency는  $f_m = \frac{mc}{2L}$  를 만족하므로, mode frequency간의 간격  $\Delta f = \frac{c}{2L}$  이다.

1 m cavity의 FSR  $\approx 149.9$  MHz, 1 mm cavity의 FSR  $\approx 149.9$  GHz 이므로, frequency domain 에서 1 mm cavity가 1 m cavity에 비해 1000 배 넓다.

[2] 2. I just bought a distributed feedback laser (DFB) with a linewidth of 2 MHz at 1550 nm. What is its coherence length?

Linewidth( $\Delta\nu$ )가 2 MHz 인 laser의 coherence time는  $\frac{1}{2\pi\Delta\nu}$  이므로, 공기 중에서 coherence length는  $\frac{c}{2\pi\Delta\nu} \approx 23.86$  m 이다.

[2] 3. What does LASER stand for? State three main elements of laser.

LASER: Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation (유도 방출에 의한 빛 증폭)

레이저를 만들기 위해서는 resonator, laser medium와 laser medium을 upper state로 전이할 pumping source가 필요하다.

[2] 4. What is the difference between Finesse and Q-factor?

$$\text{Finesse} \approx \frac{\nu_{FSR}}{\delta\nu}, \quad Q - \text{factor} = \frac{\nu_0}{\delta\nu}.$$

Finesse는 resonance mode의 free spectral range 대비 spectral width가 얼마나 좁은 지를 나타낸다. Q-factor은 resonance mode의 frequency 대비 spectral width가 얼마나 좁은 지를 나타낸다.

[2] 5. What is the difference between spontaneous emission and stimulated emission?

Spontaneous emission은 외부영향없이 야기 상태의 전자가 바닥 상태로 전이하는 현상이다. 생성된 광자의 위상과 방향은 임의이다.

Stimulated emission은 외부 광자에 의해 여기 상태의 전자가 바닥 상태로 전이하는 현상이다.

Spontaneous emission에 비해 전이 확률이 크게 높으며, 생성된 광자는 외부 광자와 같은 위상과 방향성을 갖는다.

[2] 6. What does population inversion mean?

Population inversion은 바닥 상태보다 여기 상태의 전자수가 많은 현상이다.

[1] 7. What is the FSR of a cavity with 1-m length?

1. 문제와 마찬가지로 계산하면, 약 149.9 MHz 이다.

[2] 8. If the reflectance of the cavity mirrors is 99%, what is its Q-factor at 1  $\mu\text{m}$ ?

Quality factor Q를 알기 위해서는 resonator의 spectral width  $\delta\nu$ 를 알아야 한다.

$$\delta\nu \approx \frac{\nu_{\text{FSR}}}{F} = \nu_{\text{FSR}} \times \frac{1-|r|}{\pi\sqrt{|r|}} \approx 959.1 \text{ kHz (F: finesse, } |r| : \text{round trip attenuation factor)}$$

$$Q = \frac{\nu_0}{\delta\nu} = \frac{c}{1 \mu\text{m} \times \delta\nu} \approx 3.126 \times 10^8$$

[2] 9. What is its photon life time in the cavity?

$$\tau_p = \frac{1}{2\pi\delta\nu} \approx 165.9 \text{ ns}$$

[5] 10. Assume a HeNe laser at 632.8 nm. The left mirror has a R1 (radius of curvature) of 2 m and reflectance of 100%. The right mirror has a R2 of infinity and a reflectance of  $\neq 100\%$ . The distance between two mirrors is  $L = 1 \text{ m}$ . The beam waist in the laser cavity is at the plane mirror (R2).

- Determine the spot size  $W_0$  at the beam waist.
- Determine the laser-beam spot size  $W$  on the rear laser mirror.
- Determine the complex radius of curvature  $q(z)$  at  $z = 1 \text{ m}$  and  $z = 0 \text{ m}$ .
- What is the half-angle beam divergence for this laser in the far field?

왼쪽 거울의 위치를  $z = 0 \text{ m}$ , 오른쪽 거울의 위치를  $z = 1 \text{ m}$  이라 가정하자.  $z = 1 \text{ m}$  위치에 반사횟수와 관계없이 plane mirror에 같은 지점, 크기로 beam waist가 생성될 조건을 찾아보

자.  $z = 1 \text{ m}$ 에서 waist 가 생성되므로,  $q(1 \text{ m}) = iz_0$  ( $z_0$ : Rayleigh range) 이고,  $q(0 \text{ m}) = -1 \text{ m} + iz_0$  이다. 왼쪽 거울에 의해서 반사된 빛이  $z = 1 \text{ m}$  인 위치에서 beam waist가 형성되기 위해서는 반사 이전과 반사 후의 q-parameter 값이 같아야 한다.

Curvature가  $2 \text{ m}$  인 거울의 ABCD matrix는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/m & 1 \end{bmatrix}$$

반사 이전 q-parameter 와 반사 이후 q-parameter 값이 같기 위해서는 다음을 만족해야 한다.

$$\frac{-1 \text{ m} + iz_0}{+1 - iz_0/m + 1} = -1 \text{ m} + iz_0, \quad \therefore z_0 = 1 \text{ m}.$$

따라서,  $W_0$ 와 왼쪽 거울에서  $W$ 는 다음과 같다.

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \approx 0.449 \text{ mm}, \quad W = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = 0.635 \text{ mm}.$$

$$q(0 \text{ m}) = -1 \text{ m} + i \times 1 \text{ m}, \quad q(1 \text{ m}) = i \times 1 \text{ m}.$$

Far field에서 Half angle divergence  $\theta$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{W}{z}\right) \approx W_0 \sqrt{\left(\frac{1}{z_0}\right)^2} = \frac{W_0}{z_0} \approx 0.000449.$$

- [5] 9. When  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $W_0 = 10 \text{ } \mu\text{m}$ , and  $z_0 = 1 \text{ mm}$ , what is the q-parameter at the focal point? If there is a lens with  $f = 2 \text{ cm}$  at  $z = 2 \text{ cm}$  and  $z = 4 \text{ cm}$ , what is the size and location of the second waist? Use ABCD law.

q-parameter  $q(z) = z + iz_0$  이다. beam waist가 생기는 focal point에서  $z = 0 \text{ mm}$  이므로,  $q(0 \text{ mm}) = 1i \times 1 \text{ mm}$  이다. Free space를 진행하는 ABCD matrix와 Thin lens의 ABCD matrix는 아래와 같다.

$$\text{Propagation in free space: } \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d: \text{distance})$$

$$\text{Thin lens: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}, \quad (f: \text{focal length})$$

두번째 렌즈 위치에서 ABCD matrix 값을 구해보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -0.05 & -1 \end{bmatrix}$$

따라서  $q(40 \text{ mm})$ 는 다음과 같다.

$$q(40 \text{ mm}) = \frac{Aq(0 \text{ mm}) + B}{Cq(0 \text{ mm}) + D} = \frac{20}{-0.05 \times 1i - 1} \text{ mm} \approx -19.95 \text{ mm} + 1i \times 0.9975 \text{ mm}$$

따라서, 렌즈 2개를 통과한 후 beam waist는  $W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \approx 12.6 \mu\text{m}$  이며, incident beam의 waist를 기준으로 59.95 mm 떨어진 지점에 생성된다.

- [3] 10. We would like to couple light ( $\lambda = 1550 \text{ nm}$ ) into a single mode fiber (Corning, SMF-28e). Find an optimum condition. If you need a parameter, google it.

효율적인 fiber coupling을 위해서 lens의 NA는 fiber의 NA보다 작아야 하며, fiber의 mode field diameter (MFD)와 Gaussian beam의 focused spot diameter가 일치해야 한다. Corning SMF-28e의 NA는 0.14 이고, MFD는  $10.4 \mu\text{m}$  이다. Focusing 하기 전 input beam diameter를  $D_{00}$  라고 가정하자. NA값이 0.14 보다 작으면서,  $f = \frac{\pi \times D_{00} \times 10.4 \mu\text{m}}{4 \times 1550 \text{ nm}}$  를 만족하는 렌즈를 사용할 때 최적이다.

[참고: Newport, Technical note: fiber optic coupling]