\*\*Introduction\*\*

기원전 500년에 Elea에서 활동했던 Zeno의 유명한 paradoxe들

Zeno: Parmenides의 충실한 제자

Parmenides: reality consisted of one undifferentiated, unchanging motionless whole which was devoid of any parts

-> 운동, 변화 그리고 대부분(Move, change and plurality)은 한낱 환상에 불가하다고 생각함

-> 그는 운동, 변화 그리고 대부분이 큰 모순을 가지고 있다고

Two main categories: paradoxes of motion and paradoxes of plurality

**\*\*The paradoxes of motion**

1. Achiles and the Tortoise (아킬레스와 거북이)

아킬레스와 거북이가 달리기 경주를 함

거북이 먼저 출발

-> 아킬레스는 절대 거북이를 잡지 못한다. (아킬레스가 아무리 빨라도)

#읽기자료 그림 이용해서 설명

2. The Dichotomy (이분법)

-This paradox comes in two forms, progressive(순행) and regressive(역행)

첫번째 paradox를 생각했을때, 이분법에 의하면 아킬레스는 거북이의 첫번쨰 시작 지점조차도 도달하지 못한다.

#읽기자료 그림 이용해서 설명

3. The Arrow (화살)

날아가고 있는 화살은 항상 멈춰있다. (an arrow in flight is always at rest.)

순간(instant)은 minimal and indivisible element of time

화살이 순간동안 움직였다는 것은 한 지점에서 다른 지점으로 순간동안 이동한 것이다

그러기 위해서는 순간동안 이동한 space가 그것보다 (itself) 커야 한다. 즉, 움직일 공간이 존재하지 않는다. (?)

Russell이 말하길 "화살은 절대 움직이지 않지만, 어떠한 기적적인 방법으로 위치의변화가 순간동안 (언제라도 상관없이) 일어난다."

4. The Stadium (경주장)

object A, B, C를 생각

A는 고정, B는 왼쪽에서 오른쪽, C는 오른쪽에서 왼쪽으로 서로 반대 방향으로 운동

이 과정에서 C는 A를 지나친 횟수보다 2배 많이 B를 지나치게 된다.

제노는 "두배의 시간은 절반과 같다'는 결론을 내렸다.

-> C가 B를 두번 지나치는 시간과 C가 A를 한번 지나치는 시간이 같다는 것으로부터

-> 하지만 이 가정은 명백히 거짓이다.

-> Zeno가 상대속력에 대한 이해가 없었기 때문이다. => 이것이 paradox를 해결하는 것이 었다면 큰 관심을 가지지 않았을 것이다

Suppose, as people occasionally do, that space and time are atomistic in character, being composed of space-atoms and time-atoms of non-zero size, rather than being composed of points and instants whose size is zero.

움직이는 순간들을 생각해보자

C1은 B3를 만나고 다음 instant에서는 B1을 만난다. 그렇다는 것은 B2와 만날 instant가 없다는 것을 의미한다.

-> 그것은 절대 있을 수 없는 일이다.

#읽기자료 그림 이용해서 설명

아킬레스와 거북이, 이분법은 시간과 공간이 continuous 하다는 생각을 반박하기 위해 만들어졌다.

화살과 경주장 역설은 시간과 공간이 atomic structure라는 것을 반박하기 위해 만들어졌다.

제논은 공간, 시간 그리고 운동 모두 실제가 아니니 환상이라고 주장하려고 한다.

코시가 함수, 극한, 시쿼스와 시리즈의 수렴, 미분, 적분에 대한 원리적인 개념을 명확히 했다. 데데킨트가 실수 체계와 그것의 미분과의 연관성을 분석하였다.

**\*The sum of an infinite series**

Achilles must traverse an infinite number of distances, each greater than zero, in order to catch up with the tortoise, he can never do so, for such a process would take an infinite amount time.

아킬레스가 거북이를 쫓는 동안 time span non zero interval들로 무한히 나뉠 수 있다. 따라서 아킬레스는 무한의 시간동안 무한의 공간을 움직여야 한다.

여전히 질문으로 남아있는 것: 무한히 많은 시간 또는 공간 interval들이 어떻게 무한보다 적은 개수들의 것과 더해질 수 있나?

- The first concept we need is the limit of an infinite sequence

무한 수열은 {S\_n}의 순서집합이다.

{S\_n}: correspond in a one-to-one fashion with the positive integers

Limit: there is some number L(the limit) such that the terms of the sequences become and remain arbitrarily close to that value as we run through the successive terms.

이 개념을 사용하여 the sum of an infinite series를 정의할 수 있다.

The sequence of partial sums를 생각하여, 이 sequence의 limit이 존재하면 series sum의 limit이 존재하는 것

Infinite series의 limit 값은 충분한 개수의 유한한 term들의 합으로 근사할 수 있다.

아킬레스와 이분법 역설은 무한 급수로 나타낼 수 있다.

19세기에 이에 대한 이론이 완성되었고 역설이 해결되었다.

**\*Instantaneous velocity**

Perhaps Zeno did feel that the only way for an arrow to be at a particular place was to be at rest.

19세기 수학으로 이 가정 중 하나가 틀렸다는 것을 보였다.

-> This derivative is defined as the limit of the average velocity during decreasing non-zero intervals of time.

If Zeno felt that the only intelligible instantaneous velocity is zero, nineteenth-century mathematics proved him wrong.

Berkeley leveled his broadside in *The Analyst*, characterizing infinitesimals as “ghosts of recently departed quantities.”

- Questions that Zeno and his fellow Greeks could not answer, and to which modern calculus prior to Cauchy had no satisfactory answer either.

How much space does an arrow occupy during an infinitesimal time?

Is it just as large as the arrow, or is it a wee big larger?

If it is larger, then how does the arrow get from one part of that space to another?

And if not, then how can the arrow be moving at all?

And how long is an infinitesimal time span?

Does it have parts or not?

If so, how can we characterize motion during its parts?

If not, how can motion occur during this infinitesimal time?

**\*Mathematical functions**

We have seen how such a concept can be defined intelligibly, but this definition makes essential reference to what is happening at neighboring instants.

Bergson conclude that the Arrow paradox proves that the standard mathematical characterization of motion must be wrong.

현대 물리에서 운동은 공간 지점과 시간 순간의 함수적 관계로 논의한다.

The situation was dramatically improved when Cauchy defined a function as simply a pairing of numbers from one set with numbers from another set.

By occupying the intervening positions at suitable times.

-> appropriately dubbed “the at-at theory of motion”