Introdução à Análise de dados em FAE **(Data: 13/10/20)**

Solução dos Exercícios

Professores: Sandro Fonseca, Sheila Amaral, Eliza Melo. *Name:* Matheus Macedo (`github:teteumac`).

Introdução

De posse dos conhecimentos adquiridos durante as duas aulas de teoria da estatística do professor Sandro Fonseca, foram resolvidos os exercícios propostos com base no livro Métodos Estatísticos em Física Experimental do professor Vitor Oguri e Estimativas e Erros em Experimentos de Física do mesmo autor. Em algumas questões (as últimas) eu construi alguns algoritmos em python para facilitar e enriquecer as soluções. Os plots foram feitos com o *ROOT* e *Matplotlib*.
Criei um repositório no Github público com os códigos aqui apresentados
https://github.com/teteumac/Analise-em-FAE

Problema 1:

Mostre que, dada uma função geral $u = f(x, y)$, o erro-padrão em u, dadas as incertezas em x e y, é dado por:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\bigg|_{(\overline{x},\overline{y})} \sigma_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\bigg|_{(\overline{x},\overline{y})} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(\overline{x},\overline{y})}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{(\overline{x},\overline{y})} \sigma_{xy} \tag{0.1}$$

A função $u = f(x, y)$ é tal que as medidas de x e y se distribuem em torno do ponto médio $(\overline{x}, \overline{y})$. Desta forma, podemos expandir a função $u = f(x, y)$ em Série de Taylor em torno de $(\overline{x}, \overline{y})$ e considerar que, nas imediações desse ponto, podemos considerar apenas os primeiros termos. A expansão de $u = f(x, y)$ em Série de Taylor, em torno do ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ é dados pela Equação 0.2.

$$u = f(x, y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x - \overline{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y - \overline{y}) \tag{0.2}$$

Vamos determinar o valor esperado de $u = f(x, y)$ com base na Equação 0.2, considerando o somatório sob as N estimativas $u_i = f(x_i, y_i)$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i = \overline{u} = \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} f(\overline{x}, \overline{y})}_{=Nf(\overline{x},\overline{y})} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})}_{=\overline{x}-\overline{x}=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})}_{=\overline{y}-\overline{y}=0} = f(\overline{x}, \overline{y})$$

Portanto, a estimativa de u, dado que $u = f(x, y)$, será dado pela Equação 0.3.

$$\overline{u} = f(\overline{x}, \overline{y}) \tag{0.3}$$

O erro associado a cada medida indireta de u pode ser calculado pela expressão do desvio-padrão:

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2$$

O valor de $\overline{u}^2$ pode ser obtido simplesmente elevando a Equação 0.3 ao quadrado, ou seja:

$$\overline{u}^2 = f^2(\overline{x}, \overline{y})$$

Para calcular $\overline{u^2}$, vamos utilizar a Equação 0.2 e calcular sua média quadrática:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 = \overline{u^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f(\overline{x}, \overline{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y_i - \overline{y})\right]^2$$

Sabemos que o quadrado da soma de 3 termos é dado por:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Portanto:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f^2(\overline{x},\overline{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y})^2 + 2f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x}) + \right.$$
$$\left. +2f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y}) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y})\right]$$

Fazendo termo a termo, separadamente, teremos:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^2(\overline{x},\overline{y}) = f^2(\overline{x},\overline{y})$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2}_{\sigma_x^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_x^2$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2}_{\sigma_y^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_y^2$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x}) = 2f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})}_{=0} = 0$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y}) = 2f(\overline{x},\overline{y})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\frac{1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})}_{=0} = 0$$

$$2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(x_i-\overline{x})\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}(y_i-\overline{y}) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}_{=\sigma_{xy}} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_{xy}$$

Em que $\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ é a média dos produtos de desvios de (x_i, y_i) em relação a suas respectivas médias, denominada **covariância**. Juntando os resultados na expressão de $\overline{u^2}$, teremos:

$$\overline{u^2} = f^2(\overline{x},\overline{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_{xy}$$

Mas:

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \overline{u}^2 = f^2(\overline{x},\overline{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_{xy} - f^2(\overline{x},\overline{y})$$

Portanto:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\sigma_{xy} \tag{0.4}$$

Sabemos que o erro da média é dado por:

$$\sigma_{\overline{u}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{N}}$$

Portanto:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{N}}_{\sigma_{\overline{x}}^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \underbrace{\frac{\sigma_y^2}{N}}_{=\sigma_{\overline{y}}^2} + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy}$$

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} \sigma_{xy} \tag{0.5}$$

Problema 2:

Com base na Equação 0.1, mostre que o erro-padrão das funções $u(x,y)$ serão dados por:

i) $u = x \pm y \Rightarrow \sigma_{\overline{u}} = \sqrt{\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_{\overline{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\overline{x}}\sigma_{\overline{y}}}$

Como $u = f(x,y) = x \pm y$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \pm y) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \pm y) = \pm 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = \pm 1$$

Substituindo na Equação 0.5:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=1} \sigma_{\overline{x}}^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=1} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=1}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\pm 1} \sigma_{xy}$$

Podemos também reescrever a covariância em função do coeficiente de correlação de Pearson r:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \Rightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$$

Portanto:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_{\overline{y}}^2 \pm 2r\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_y}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{\overline{u}} = \sqrt{\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_{\overline{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\overline{x}}\sigma_{\overline{y}}} \tag{0.6}$$

ii) $u = xy$ ou $u = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\sigma_{\overline{u}}}{|\overline{u}|} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\dfrac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)\left(\dfrac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)}$

Primeiramente, vamos considerar $u = f(x,y) = xy$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = \overline{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = \overline{x}$$

Substituindo na Equação 0.5:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\overline{y}^2} \sigma_{\overline{x}}^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\overline{x}^2} \sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\overline{y}}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\overline{x}} \sigma_{xy} = \overline{y}^2\sigma_{\overline{x}}^2 + \overline{x}^2\sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\overline{y}\,\overline{x}\sigma_{xy}$$

Colocando $(\overline{x}\,\overline{y})^2$ em evidência e se lembrando que $\overline{u} = f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}\,\overline{y}$, teremos:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = (\overline{x}\,\overline{y})^2\left[\frac{\sigma_{\overline{x}}^2}{\overline{x}^2} + \frac{\sigma_{\overline{y}}^2}{\overline{y}^2} + \frac{2}{N}\frac{\sigma_{xy}}{\overline{x}\,\overline{y}}\right] \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{\overline{u}}}{\overline{u}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 + \frac{2}{N}\frac{\sigma_{xy}}{\overline{x}\,\overline{y}}$$

Reescrevendo novamente a covariância em função do coeficiente de Pearson e escrevendo em função do erro da média, teremos:

$$\frac{\sigma_{\overline{u}}}{|\overline{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 + 2r\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)} \tag{0.7}$$

Agora, vamos considerar $u = f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = \frac{1}{\overline{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}} = -\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2}$$

Substituindo na Equação 0.5:

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=1/\overline{y}^2}\sigma_{\overline{x}}^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\overline{x},\overline{y}}}_{=\overline{x}^2/\overline{y}^4}\sigma_{\overline{y}}^2 + \frac{2}{N}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=1/\overline{y}}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\overline{x},\overline{y}}}_{=-\overline{x}/\overline{y}^2}\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}}^2}{\overline{y}^2} + \frac{\overline{x}^2\sigma_{\overline{y}}^2}{\overline{y}^4} - \frac{2}{N}\frac{\overline{x}}{\overline{y}^3}\,\sigma_{xy}$$

Colocando $\left(\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\right)^2$ em evidência e lembrando que $\overline{u} = f(\overline{x},\overline{y}) = \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}$

$$\sigma_{\overline{u}}^2 = \left(\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right)^2\left[\frac{\sigma_{\overline{x}}^2}{\overline{x}^2} + \frac{\sigma_{\overline{y}}^2}{\overline{y}^2} - \frac{2}{N}\frac{1}{\overline{x}\;\overline{y}}\,\sigma_{xy}\right]$$

Reescrevendo, mais uma vez, a covariância em função do coeficiente de Pearson e escrevendo em função do erro da média, teremos:

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{u}}}{\overline{u}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 - 2r\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}\overline{x}}\right)\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{N}\overline{y}}\right)$$

$$\frac{\sigma_{\overline{u}}}{|\overline{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 - 2r\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)} \tag{0.8}$$

Podemos juntar as equações 0.7 e 0.8 e dizer que, quando temos $u = f(x,y) = xy^{\pm 1}$, o erro propagado $\sigma_{\overline{u}}$ será:

$$\frac{\sigma_{\overline{u}}}{|\overline{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)} \tag{0.9}$$

Problema 3:

Mostre que, a partir da combinação de resultados compatíveis, encontramos a seguinte estimativa do valor esperado e erro padrão:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\frac{1}{\sigma_{\overline{x}}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Considere que realizamos N experimentos para estimar uma dada grandeza física e que cada experimento nos resultou uma estimativa x_i. Suponha que obtivemos o conjunto $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$ de estimativas para o valor da grandeza e o conjunto $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_N\}$ com seus respectivos erros associados. Suponha ainda que as medidas são compatíveis entre si, ou seja, a discrepância das medidas, duas a duas, é sempre menor que o dobro do erro somado em quadratura[1]. O que queremos é combinar estas estimativas independentes num

[1]Para mais informações a respeito da compatibilidade entre medidas de um valor esperado, veja OGURI, et. al., Estimativas e Erros em Experimentos de Física, 3ª Ed. 2013, EdUERJ, seção 3.6.2.

novo valor de referência (tanto do valor esperado quanto do erro-padrão). Espera-se que a combinação seja tal que as estimativas com menores erros ("melhores") contribuam mais que as de maior erro ("piores").

O método utilizado para a combinação de resultados compatíveis é idêntica ao método dos mínimos quadrados. A tarefa é minimizar a quantidade $S(a)$, dada pela Equação 0.10, ou seja, determinar o valor da constante a que minimiza $S(a)$. Em outras palavras, procuramos a média a que minimiza a função $S(a)$, que representa o desvio padrão relativo entre as estimativas obtidas e a média combinada a.

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x_i - a)}{\sigma_i} \right]^2 \tag{0.10}$$

Para determinar o ponto de mínimo, derivamos $S(a)$ em relação a a e igualamos a zero:

$$\frac{dS(a)}{da} = -2\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - a)}{\sigma_i^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - a)}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} - a\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Ou seja, o valor da média combinada $\overline{x}$ que tem menor desvio padrão relativo com as estimativas do conjunto x será:

$$\overline{x} = a = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Para garantir que encontramos um valor de mínimo, e não de máximo ou de inflexão, vamos desenvolver a Equação 0.10:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x_i - a)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i^2 - 2x_i a + a^2}{\sigma_i^2} \right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - 2a\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} + a^2\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} > 0$$

A função $S(a)$ é uma função quadrática em a e sempre positiva, dado que é definida como a soma de quadrados de números reais, que são sempre positivos. Portanto, $S(a)$ é uma parábola de concavidade para cima, o que impõe apenas um ponto de mínimo.

Para encontrar o desvio-padrão das amostras combinadas, vamos definir as seguintes variáveis:

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{0.11}$$

$$\omega_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 \tag{0.12}$$

Na fórmula da média, teremos:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2 x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i$$

O que simplifica bastate a expressão para a média. Vamos propagar o erro, utilizando as equações demonstradas anteriomente nas questões desta Lista de Exercícios. Teremos:

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} \right)^2}_{=\omega_i^2} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^4 \sigma_i^2 = \sigma^4 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}_{=1/\sigma^2} = \sigma^2$$

Portanto:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Note que, ao combinar as estimativas, o erro resultante é, como o esperado, menor que os erros parciais. Combinar resultados equivale a aumentar o número de dados envolvidos na estimativa, ou seja, a aumentar a amostra. Além disso, conforme queríamos, a média combinada pode ser vista como uma média ponderada das estimativas, em que aquelas de menor erro contribuem menos que as de maior erro.

Além disso, resolva os seguintes problemas da refência Estimativas e Erros em Experimentos de Física, Oguri et al (2013) capítulo 3:

i) De um conjunto de medidas de uma grandeza, a média e o desvio-padrão são, respectivamente, 16 e 2. Que frações percentuais de leitura são esperadas nos seguintes intervalos:

a) (14,18)
R.: (16 - 2, 16 + 2) $\rightarrow$ (16 - σ, 16 + σ).
Nível de confiança de 68.3%.

b) (12,16)
R.: (16 - 4, 16 + 0) $\rightarrow$ (16 - 2σ, 16 + 0σ).
Nível de confiança de $\frac{95,5\%}{2} = 47,75\%$ correspondendo à netade do intervalo de (16-2σ,16+2σ)

c) (18,20)
R.: Nível de confiança de $95.5\%/2 - 68.3\%/2 = 13.6\%$ correspondendo ao intervalo de (16+1σ,16+2σ)

ii) O conjunto abaixo representa cinco medidas da aceleração da gravidade g em m/s^2.

$$\{9,90; 9,68; 9,57; 9,72; 9,80\}$$

Quais são a melhor estimativa e a respectiva incerteza para seu valor esperado, isto é, qual a estimativa-padrão para a aceleração da gravidade?
R.:
- Média: 9.73
- Erro Padrão: 0.05564
- Estimativa Padrão: $(9.73 \pm 0.06) m/s^2$

iii) O conjunto abaixo representa cinco medidas para a f.e.m., em volts (V), de uma pilha:

$$\{1,62; 1,71; 1,80; 1,76; 1,68\}$$

Qual a estimativa-padrão para a f.e.m. da pilha?
R.:
- Média: 1.714 V
- Erro Padrão: 0.031241
- Estimativa Padrão: $(1.71 \pm 0.02) V$

iv) Após deterinar a velocidade do som em várias baterias de medidas, a dispersão em cada uma das baterias, caracterizada pelo desvio-padrão, foi da ordem de $\sigma_v = 10$ m/s. Quantas medidas são necessárias, em uma bateria, para que a incerteza na estimativa-padrão da velocidade seja da ordem de 3 m/s?

R.:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 \sim 11$$

Istó é, aproximadamente 11 medidas

v) Três grupos de estudantes determinam a carga do elétron, com nível de confiança de 68%, como

$$\begin{cases} e_1 = (1,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ e_1 = (1,75 \pm 0,07) \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ e_1 = (1,62 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C} \end{cases}$$

Se o valor de referência para a carga do elétrons é $1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$ C, quais as estimativas são satisfatórias?
R.:

$$e_1 \rightarrow |1.72 - 1.60217733| \cdot 10^{-19}C = 0.12 \cdot 10^{-19}C \rightarrow |e_1 - e_{ref}| \sim 3\sigma(\sigma = 0.04 \cdot 10^{-19}C)$$

$$e_2 \rightarrow |1.75 - 1.60217733| \cdot 10^{-19}C = 0.15 \cdot 10^{-19}C \rightarrow |e_2 - e_{ref}| < 2\sigma(\sigma = 0.07 \cdot 10^{-19}C)$$
$$e_3 \rightarrow |1.62 - 1.60217733| \cdot 10^{-19}C = 0.02 \cdot 10^{-19}C \rightarrow |e_3 - e_{ref}| < 1\sigma(\sigma = 0.03 \cdot 10^{-19}C)$$

O intervalo de confiança de 1σ para o e_3 mostra a estimativa mais satisfatória entre as 3

vi) Dois experimentos em Física de Altas Energias anunciam a descoberta de uma nova partícula. As massas apresentadas, com nível de confiança de 68% são:

$$\begin{cases} m_1 = (7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ m_2 = (7,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{cases}$$

Podem esses valores representar a massa de uma mesma partícula?
R.:
• Erro associado entre m_1 e $m_2 \rightarrow \sigma = 0.4 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ $\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}})$
• Discrepância entre m_1 e $m_2 \rightarrow |7.8 - 7.0| \cdot 10^{-27}kg = 0.8 \cdot 10^{-27}kg$
$\Rightarrow |m_1 - m_2 = 2\sigma \Rightarrow$ Discrepância no nível de 2σ. Podemos dizer o experimento é inconclusivo

vii) As medidas da densidade de um líquido, em g/cm^3, são:

$$\{1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,9\}$$

a) Qual a estimativa-padrão para a densidade do líquido?

R.:
• Média: 1.9 V
• Erro Padrão: 0.070
• Estimativa Padrão: $(1.900 \pm 0.070)V$
b) Se o valor de referência para a densidade do líquido é $1,8524(4)$ g/cm^3, analise a discrepância entre a estimativa e esse valor de referência.

viii) Ao se estudar uma reação nuclear, as energias no início (E_i) e no final (E_f) do processo são:

$$\begin{cases} E_1 = (75 \pm 3) \text{ MeV} \\ E_2 = (60 \pm 9) \text{ MeV} \end{cases}$$

A discrepância é significativa?
R.:
Se consideramos o nível de confiança de 95%, isto é, duas vezes o erro de ambos (2σ), então podemos sim considerar que a discrepância é significativa

ix) Os dois únicos experimentos (D0 e CDF) que mediram a massa do *quark top* encontraram, respectivamente, os seguintes valores:

$$\begin{cases} m_t(\text{D0}) = (179,0 \pm 5,1) \text{ GeV/c}^2 \\ m_t(\text{CDF}) = (176,1 \pm 6,6) \text{ GeV/c}^2 \end{cases}$$

Determine o resultado combinado dos dois experimentos para a massa do *top*.
R.:
Vamos compor o erro:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{1}{\frac{1}{5,1^2} + \frac{1}{6,6^2}} \Rightarrow \sigma \sim 4,0$$

A média combinada será:

$$\overline{m}_t = \left(\frac{4,0}{5,1}\right)^2 179,0 + \left(\frac{4,0}{6,6}\right)^2 176,1 = 177,8$$

O resultado combinado dos dois experimentos será:

$$m_t = 177,8 \pm 4,0 \text{ GeV/c}^2$$

x) Um estudante apresenta como estimativa-padrão da aceleração local da gravidade o resultado $(9,5 \pm 0,1)$ m/s^2. Se o valor de referência local é $9,78791660(15)$ m/s^2, analise esse resultado.
R.: Podemos analisar usando a compatibilidade.

$$|\bar{x} - x_{ref}| < 2\sigma$$

$$|9.78 - 9.5| = 0.28 > 2 * 0.1$$

Como o valor encontrado é maior que o 2σ, podemos relatar que o mesmo não é compatível com o valor de referência.

xi) A partir de 40 medidas da f.e.m. de uma pilha, um estudante determina que a média ($\overline{x}_1$) e o desvio-padrão (σ_{x_1}) são, respectivamente, $\overline{x}_1 = 1,022$ V e $\sigma_{x_1} = 0,01$ V. Em seguida, utilizando outro voltímetro, obtém 10 novas medidas e encontra uma média $\overline{x}_2$ igual a $1,018$ V e a dispersão reduzida por um fator $2,5$ ($\sigma_{x_2} = 0,004$ V).

Qual a estimativa para a f.e.m. da pilha resultante da combinação das duas amostras?
R.:
O erro combinado será:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{0,01^2} + \dfrac{1}{0,004^2}} = \frac{1}{10.000 + 62.500} = \frac{1}{72.500} \Rightarrow \sigma \sim 0,004$$

A média combinada será:

$$x = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^2 \overline{x}_1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^2 \overline{x}_2 = \frac{10.000}{72.500} 1,022 + \frac{10.000}{0,16 \times 72.500} 1,018 \sim 1,018$$

Portanto a estimativa-padrão combinada será:

$$1,018 \pm 0,004 \text{ V}$$

Problema 4:

Utilizando as fórmulas anteriores, eleja 5 partículas do Particle Data Group (PDG) e combine os resultados para suas massas.
R.:
Para responder essa questão, eu usei um pacote no python chamado *particles* que tem catalogado todas as partículas do PDG. Foram escolhidas as seguintes parículas:

- Bárion $\Lambda = (1115.683 \pm 0.006)$MeV
- Bárion $\Omega^- = (1672.5 \pm 0.3)$MeV
- Lépton $\tau^- = (1776.86 \pm 0.12)$MeV
- Méson $D^+ = (1869.65 \pm 0.05)$MeV
- Méson $B = (1869.65 \pm 0.12)$MeV

```python
## codigo referente ao problema 4 ##

from particle import Particle

Barion_Lambda = Particle.findall('Lambda')[0]
Barion_Omega_minus = Particle.findall('Omega')[0]
Lepton_tau_minus = Particle.findall('t')[2]
Meson_D_plus = Particle.findall('D')[0]
```

```
Meson_B_neutral = Particle.findall('B')[0]

sigma_Barion_Lambda = 0.006
sigma_Barion_Omega_minus = 0.3
sigma_Lepton_tau_minus = 0.12
sigma_Meson_D_plus = 0.05
sigma_Meson_B_neutral = 0.12

sigma = ( 1 ) / ( (1/sigma_Barion_Lambda**2) +
(1/sigma_Barion_Omega_minus**2) +
(1/sigma_Lepton_tau_minus**2) +
(1/sigma_Meson_D_plus**2) +
(1/sigma_Meson_B_neutral**2) )

mass_media = ( (sigma/sigma_Barion_Lambda)**2) * Barion_Lambda.mass + ( (sigma/sigma_Barion_Omega_minus)**2) * Barion_Omega_minus.mass + ( (sigma/sigma_Lepton_tau_minus)**2) * Lepton_tau_minus.mass + ( (sigma/sigma_Meson_D_plus)**2) * Meson_D_plus.mass + ( (sigma/sigma_Meson_B_neutral)**2) * Meson_B_neutral.mass
```

Ao executar o código, obtemos o seguinte resultado para os valores combinados.

$$\mathcal{M}_{\Lambda\Omega^-\tau^-D^+B} = (0.040185 \pm 0.000353)\text{MeV}$$

Problema 5:

Mostre quais são as estimativas dos parâmetros e as incertezas, o ajuste linear **com peso**, partindo da função $S(a,b)$ abaixo.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Suponha um conjunto de pares de medidas (x_i, y_i) e que a incerteza relativa associada às medidas em x são bem menores que as associadas a y. Suponha também que desejamos ajustar uma reta $y(x) = ax + b$. Para isso, devemos determinar os parâmetros a e b. Consideraremos aqui que os erros em y são distintos, dados por σ_i. O método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos $(y_i - y(x_i))$, ou seja, minimizar a soma abaixo:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

Precisamos entender o comportamento da curva $S(a,b)$ tanto pra variável a quanto pra variável b. Desta forma, poderemos assegurar que os valores encontrados em breve realmente são mínimos e não máximos, ou pontos de inflexão. Teremos:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2}{\sigma_i} \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{2ax_iy_i}{\sigma_i^2} - \frac{2by_i}{\sigma_i^2} + \frac{a^2x_i^2}{\sigma_i^2} + \frac{b^2}{\sigma_i^2} + \frac{2abx_i}{\sigma_i^2} \right] =$$

Vamos definifir $\dfrac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ e multiplicando em cima e embaixo por esta variável, teremos:

$$= \frac{1}{\sigma^2} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 y_i^2}_{=\overline{y^2}} - 2a \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_iy_i}_{=\overline{xy}} - 2b \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 y_i}_{=\overline{y}} + a^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i^2}_{=\overline{x^2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 b^2}_{=b^2} + 2ab \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2 x_i}_{=\overline{x}} \right] =$$

$$S(a,b) = \frac{1}{\sigma^2} (\overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + a^2\overline{x^2} + b^2 + 2ab\overline{x})$$

Todas as médias (quadrátricas ou normais) são ponderadas com peso $\omega_i = \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_i} \right)^2$.

Por isso o termo de normalização N não aparece neste caso.

Fixando b, temos que a Função $S(a, b = cte)$ é uma parábola de concavidade para cima devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha a^2. Da mesma forma, fixando a, temos que $S(a = cte, b)$ é uma parábola com a concavidade para cima, devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha b^2. Portanto, nos asseguramos que derivando $S(a, b)$ e igualando a zero encontraremos valores de a e b que minimizam $S(a, b)$.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\overline{xy} + 2a\overline{x^2} + 2b\overline{x} = 0 \Rightarrow a = \frac{\overline{xy} - b\overline{x}}{\overline{x^2}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\overline{y} + 2b + 2a\overline{x} = 0 \Rightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Substituindo b em a, teremos:

$$a = \frac{\overline{xy} - b\overline{x}}{\overline{x^2}} = a = \frac{\overline{xy} - \overline{y}\ \overline{x} + a\overline{x}^2}{\overline{x^2}} = a\,\underbrace{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}_{=\sigma_x^2} = \underbrace{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}_{=\sigma_{xy}} \Rightarrow a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Teremos então b:

$$b = \overline{y} - \frac{\overline{x}\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Lembre-se que desde o princípio consideramos os erros em x pequenos o suficiente quando comparados aos de y. Para determinar a incerteza nos parâmetros a e b, vamos partir do que encontramos e fazer a propagação de erro, conforme determinado no exercício anterior:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

De a, abrindo o somatório em y_i, lembrando dos pesos $\omega_i = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2$, temos:

$$a = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2(x_i y_i - \overline{x} y_i)}{\sigma_i^2 \sigma_x^2} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}) y_i}{\sigma_i^2}$$

Em b, teremos:

$$b = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i - a\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 y_i - \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}) y_i}{\sigma_i^2}\overline{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 \frac{(x_i - \overline{x})\overline{x}}{\sigma_x^2}\right] y_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \overline{x})\overline{x}}{\sigma_x^2}\right] y_i$$

Agora, vamos propagar o erro em a em relação a y_i:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_x}\right)^4 \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_i^4} \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^4} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2 (x_i - \overline{x})^2}_{=\sigma_x^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \Rightarrow \sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x}$$

Agora, vamos propagar o erro em b em relação a y_i:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \overline{x})\overline{x}}{\sigma_x^2}\right]^2 \sigma_i^2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^{N} \left[\omega_i \sigma_x^2 - \omega_i (x_i - \overline{x})\overline{x}\right]^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\sigma_x^4} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} \sigma_x^4 \sigma_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} \sigma_x^2 (x_i - \overline{x})\overline{x}\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} (x_i - \overline{x})^2 \overline{x}^2 \sigma_i^2\right] =$$

$$= \sigma^4 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}_{=1/\sigma^2} - 2\frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}(x_i - \overline{x})\overline{x}}_{=(\overline{x}-\overline{x})\overline{x}=0} + \frac{\sigma^2}{\sigma_x^4} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}(x_i - \overline{x})^2}_{=\sigma_x^2} \overline{x}^2 = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\overline{x}^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \underbrace{(\sigma_x^2 + \overline{x}^2)}_{=\overline{x^2}} = \overline{x^2}\sigma_a^2$$

Portanto:

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\overline{x^2}}\sigma_a$$

Problema 6:

Mostre que, no ajuste linear, as estimativas dos parâmetros e suas incertezas são dadas por:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x}\frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N-2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{N-2}(1 - r^2)}$$

Suponha um conjunto de pares de medidas (x_i, y_i) e que a incerteza relativa associada às medidas em x são bem menores que as associadas a y. Suponha também que desejamos ajustar uma reta $y(x) = ax + b$. Para isso, devemos determinar os parâmetros a e b. O método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos $(y_i - y(x_i))$, ou seja, minimizar a soma abaixo:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - y(x_i)\Big]^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - (ax_i + b)\Big]^2$$

Precisamos entender o comportamento da curva $S(a, b)$ tanto pra variável a quanto pra variável b. Desta forma, poderemos assegurar que os valores encontrados em breve realmente são mínimos e não máximos, ou pontos de inflexão. Teremos:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i - (ax_i + b)\Big]^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2\Big] = \sum_{i=1}^{N} \Big[y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + b^2 + 2abx_i\Big] =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}_{=N\overline{y^2}} - 2a \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_iy_i}_{=N\overline{xy}} - 2b \underbrace{\sum_{i=1}^{N} y_i}_{=N\overline{y}} + a^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}_{=\overline{x^2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} b^2}_{=Nb^2} + 2ab \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i}_{=N\overline{x}} =$$

$$S(a, b) = N(\overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + a^2\overline{x^2} + b^2 + 2ab\overline{x})$$

Fixando b, temos que a Função $S(a, b = cte)$ é uma parábola de concavidade para cima devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha a^2. Da mesma forma, fixando a, temos que $S(a = cte, b)$ é uma parábola com a concavidade para cima, devido ao valor positivo do coeficiente que acompanha b^2. Portanto, nos asseguramos que derivando $S(a, b)$ e igualando a zero encontraremos valores de a e b que minimizam $S(a, b)$.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2N\overline{xy} + 2Na\overline{x^2} + 2Nb\overline{x} = 0 \Rightarrow a = \frac{\overline{xy} - b\overline{x}}{\overline{x^2}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2N\overline{y} + 2Nb + 2Na\overline{x} = 0 \Rightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Substituindo b em a, teremos:

$$a = \frac{\overline{xy} - b\overline{x}}{\overline{x^2}} = a = \frac{\overline{xy} - \overline{y}\ \overline{x} + a\overline{x}^2}{\overline{x^2}} = a\underbrace{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}_{=\sigma_x^2} = \underbrace{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}_{=\sigma_{xy}} \Rightarrow a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Teremos então b:

$$b = \overline{y} - \frac{\overline{x}\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Lembre-se que desde o princípio consideramos os erros em x pequenos o suficiente quando comparados aos de y. E, além disso, os erros em y, representados por $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_N = \epsilon_y$, são todos idênticos. Para determinar a incerteza nos parâmetros a e b, vamos partir do que encontramos e fazer a propagação de erro, conforme determinado no exercício anterior:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

De a, abrindo o somatório em y_i, temos:

$$a = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i y_i - \overline{x} y_i)}{N\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}) y_i}{N\sigma_x^2}$$

Em b, teremos:

$$b = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N} - a\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x}) y_i}{N\sigma_x^2}\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{N} - \frac{(x_i - \overline{x})\overline{x}}{N\sigma_x^2}\right] y_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sigma_x^2 - (x_i - \overline{x})\overline{x}}{\sigma_x^2 N}\right] y_i$$

Agora, vamos propagar o erro em a em relação a y:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \epsilon_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{N^2\sigma_x^4}\epsilon_y^2 = \frac{\epsilon_y^2}{N\sigma_x^4} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{N}}_{=\sigma_x^2} = \frac{\epsilon_y^2}{N\sigma_x^2} \Rightarrow \sigma_a = \frac{\epsilon_y}{\sqrt{N}\sigma_x}$$

$$\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sigma_x^2 - (x_i - \overline{x})\overline{x}}{\sigma_x^2 N}\right]^2 \epsilon_y^2 =$$

$$= \frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2} \sum_{i=1}^{N} \left[\sigma_x^2 - (x_i - \overline{x})\overline{x}\right]^2 = \frac{\epsilon_y^2}{(\sigma_x^2 N)^2} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sigma_x^4}_{=N\sigma_x^4} - 2\sigma_x^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})}_{=N(\overline{x} - \overline{x}) = 0} \overline{x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}_{=N\sigma_x^2} \overline{x}^2\right] =$$

$$= \frac{\epsilon_y^2}{\sigma_x^2 N} \underbrace{\left[\sigma_x^2 + \overline{x}^2\right]}_{=\overline{x^2}} = \underbrace{\frac{\epsilon_y^2}{\sigma_x^2 N}}_{=\sigma_a^2} \overline{x^2} \Rightarrow \sigma_b = \sqrt{\overline{x^2}}\sigma_a$$

E erro ϵ_y é a estimativa em cada medida de y, que pode ser calculado por:

$$\epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{N - 2}}$$

Dos N dados usados para estimar o erro padrão, temos $N-2$ eventos independentes, isto porque o valor de -2 que aparece na equação final é porque usamos 2 parâmetros para o ajuste linear.

Problema 7:

Dentre os calouros de uma Universidade, 2.587 são alunos e 2.832 são alunas. Inscreveram-se nos cursos da área tecnológica 1.291 alunos e 547 alunas. Determine a probabilidade de se sortear aleatoriamente um estudante do sexo masculino da área tecnológica.

Suponha A o conjunto de alunos e B o conjunto de alunas. A probabilidade de se sortear um aluno é a razão entre a quantidade de alunos e a quantidade total de pessoas, ou seja:

$$P(A) = \frac{2.587}{2.587 + 2.832} = \frac{2.587}{5.419} \sim 0,48$$

A probabilidade de se sortear uma aluna é a razão entre a quantidade de alunas e a quantidade total de pessoas, ou seja:

$$P(B) = \frac{2.832}{2.587 + 2.832} = \frac{2.832}{5.419} \sim 0,52$$

A probabilidade de sortear alguém da área tecnológica, dado que é homem, será:

$$P(T|A) = \frac{1.291}{2.587} \sim 0,5$$

A probabilidade de sortear alguém da área tecnológica, dado que é mulher, será:

$$P(T|B) = \frac{547}{2.832} \sim 0,19$$

Desta forma, a probabilidade de uma pessoa ser sorteada em algum curso da área tecnológica será a probabilidade de se sortear alguém que é da área tecnológica, dado que é aluno, vezes a probabilidade de se sortear um aluon, mais a probabilidade de se sortear alguém que é da área tecnológica, dado que é aluna, vezes a probabilidade de se sortear uma aluna:

$$P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) = 0,5 \times 0,48 + 0,19 \times 0,52 = 0,24 + 0,0988 = 0,339$$

Podemos lançar mão da fórmula de Bayes para determinar a probabilidade $P(A|T)$ de se sortear um aluno, dado que é da área tecnológica:

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T)} = \frac{0,5 \times 0,48}{0,339} \sim 0,71$$

Portanto, a probabilidade de se sortear aleatoriamente um estudante do sexo masculino da área tecnológica é, aproximadamente, 71%.

Problema 8:

Em uma cidade, 15% dos táxis são azuis e o restante são verdes. Em uma noite, um táxi atropelou uma pessoa e fugiu. Uma testemunha identificou como azul o táxi envolvido no acidente. A polícia constatou que, nas mesmas circustâncias da noite do acidente, essa testemunha identificou cada cor corretamente em 80% das vezes, e confundiu as cores em 20% das vezes. Determine a probalididade de ter sido azul o táxi envolvido no acidente.

Se 15% dos táxis são azuis, então podemos escrever a probabilidade de um dado táxi ser azul ($P(A)$) como:

$$P(A) = 0,15$$

Como só existem táxis azuis e verdes, então as probabilidades são complementares, ou seja, a probabilidade de um dado táxi ser verde ($P(V)$) será:

$$P(V) = 1 - 0,15 = 0,85$$

Como a testemunha acerta 80% das vezes e erra 20% das vezes, podemos escrever que a probabilidade da pessoa dizer que o táxi é azul, dado que o táxi é azul (o que vamos chamar de $P(T_A|A)$), será a probabilidade de acerto:

$$P(T_A|A) = 0,8$$

E $P(T_V|A)$ será a probabilidade de que a testemunha disse que o táxi é azul, dado que o táxi é verde, ou seja, a probabilidade de erro:

$$P(T_A|V) = 0,2$$

Agora utilizamos a fórmula de Bayes para determinar a probabilidade do carro ser azul, dado que a testemunha disse que é azul, ou seja:

$$P(A|T_A) = \frac{P(T_A|A)P(A)}{P(T_A|A)P(A) + P(T_A|V)P(V)} = \frac{0,8 \times 0,15}{0,8 \times 0,15 + 0,2 \times 0,85} = \frac{0,12}{0,12 + 0,17} = \frac{0,12}{0,29} \sim 0,41$$

Portanto, a probabilidade do táxi envolvido no acidente ser azul é, aproximadamente, 41%.

Problema 9:

Enquanto 7% das mamografias identificam um caso de câncer quando ele não existe (taxa de falsos-positivos), 10% não identificam a doença quando ela existe (taxa de falsos-negativos). Sabendo que a incidência de câncer na população feminina é cerca de 0,8%, determine a probabilidade de que uma mulher esteja doente ao receber um resultado de teste positivo.

A taxa de incidência do câncer ($P(C)$) é a probabilidade de uma mulher ter câncer, ou seja:

$$P(C) = 0,008$$

A probabilidade de uma mulher não ter câncer pode ser obtida simplesmente a partir do complemento da probabilidade do evento anterior, chamaremos de probabilidade de não-câncer, ou seja, $P(\overline{C})$:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,008 = 0,992$$

A taxa de falso-positivo é a probabilidade de detectar-se o câncer quando ele não existe, ou seja, a probabilidade de sim quando não há câncer. Chamaremos de $P(S, \overline{C})$, ou seja:

$$P(S, \overline{C}) = 0,07$$

Por outro lado, a probabilidade de dizer que não há câncer, dado que há, é a taxa de falso-negativo, dada por:

$$P(N, C) = 0,1$$

Portanto, a probabilidade de dizer que não há câncer, quando de fato não há, é dada por:

$$P(S|C) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Podemos determinar a probabilidade de haver câncer, quando diz-se que há, através da fórmula de Bayes:

$$P(C|S) = \frac{P(S|C)P(C)}{P(S|C)P(C) + P(S|\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{0,9 \times 0,008}{0,9 \times 0,008 + 0,07 \times 0,992} = \frac{0,0072}{0,0072 + 0,06944} = \frac{0,0072}{0,07664} \sim 0,094$$

$$P(C|S) = 9,4\%$$

Problema 10:

Três urnas têm a seguinte composição: a primeira contém 5 bolas brancas e 6 pretas; a segunda contém 4 brancas e 5 pretas; a terceira 4 brancas e 4 pretas. Após escolher por acaso uma urna e se retirar uma bola preta, determine a probabilidade de que a bola sorteada tenha sido extraída da terceira urna.

A probabilidade de escolher uma urna entre três, é 1/3, ou seja $P(u_i) = \frac{1}{3}$, sendo que u_i pode corresponder à primeira, segunda ou terceira urna.

A primeira urna contém 5 bolas brancas e 6 bolas pretas: $u_1 = \{5B, 6P\}$.

A segunda urna contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas: $u_2 = \{4B, 5P\}$.
A terceira urna contém 4 bolas brancas e 4 bolas pretas: $u_3 = \{4B, 4P\}$.
Podemos, facilmente, calcular a probabilidade condicional $P(P|u_i)$ de sortear uma bola preta, dado que a urna é a u_i:

$$P(P|u_1) = \frac{6}{5+6} = \frac{6}{11}$$

$$P(P|u_2) = \frac{5}{4+5} = \frac{5}{9}$$

$$P(P|u_3) = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$$

Podemos utilizar a fórmula de Bayes para encontrar a probabilidade $P(u_3|P)$ de que a urna é a três, dado que a bola sorteada é preta:

$$P(u_3|P) = \frac{P(P|u_3)P(u_3)}{P(P|u_1)P(u_1) + P(P|u_2)P(u_2) + P(P|u_3)P(u_3)} = \frac{1/2}{6/11 + 5/9 + 1/2} = \frac{1}{2}\frac{198}{139} \sim 0,71$$

$$P(u_3|P) = 71\%$$

Problema 11:

Seja x uma variável contínua, como as possíveis posições de uma partícula confinada em uma região de dimensão a, cuja densidade de probabilidade $\rho(x)$ é proporcional a função $\sin^2 \frac{\pi}{a}x$. Determine o valor médio e o desvio-padrão associado à variável x.
A densidade de probabilidade é expressa como:

$$\rho(x) = A \sin^2 \frac{\pi}{a} x$$

na qual A é uma constante de normalização.
Vamos normalizar a nossa p.d.f. Como $0 < x < a$, devemos ter:

$$A \int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x \; dx = 1$$

$$\frac{A}{2} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi}{a} x\right) dx = \frac{A}{2} \underbrace{\int_0^a dx}_{=a} - \frac{A}{2} \underbrace{\int_0^a \cos \frac{2\pi}{a} x \; dx}_{=0} = A\frac{a}{2} = 1$$

$$A = \frac{2}{a}$$

O valor médio será:

$$\overline{x} = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \frac{\pi}{a} x \; dx = \frac{1}{a} \int_0^a x\left(1 - \cos \frac{2\pi}{a} x\right) dx = \frac{1}{a} \underbrace{\int_0^a x \; dx}_{=a^2/2} - \frac{1}{a} \int_0^a x \cos \frac{2\pi}{a} x \; dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a x \cos \frac{2\pi}{a} x \; dx = \frac{xa}{2\pi} \underbrace{\sin \frac{2\pi}{a} x \bigg|_0^a}_{=0} - \frac{a}{2\pi} \underbrace{\int_0^a \sin \frac{2\pi}{a} x \; dx}_{=0} = 0$$

Portanto:

$$\overline{x} = \frac{a}{2}$$

A média quadrática será:

$$\overline{x^2} = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin^2\frac{\pi}{a}x\ dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\ dx = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^a x^2\ dx}_{=a^3/3} - \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^a x^2\cos\frac{2\pi}{a}x\ dx}_{=a^3/2\pi^2}$$

$$\int_0^a x^2\cos\frac{2\pi}{a}x\ dx = \frac{a}{2\pi}\underbrace{x^2\sin\frac{2\pi}{a}x\bigg|_0^a}_{=0} - \frac{a}{\pi}\underbrace{\int_0^a x\sin\frac{2\pi}{a}x\ dx}_{=-a^2/2\pi} = \frac{a^3}{2\pi^2}$$

$$\int_0^a x\sin\frac{2\pi}{a}x\ dx = -\frac{a}{2\pi}\underbrace{x\cos\frac{2\pi}{a}x\bigg|_0^a}_{=a} + \frac{a}{2\pi}\underbrace{\int_0^a \cos\frac{2\pi}{a}x\ dx}_{=0} = -\frac{a^2}{2\pi}$$

Portanto:

$$\overline{x^2} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2}$$

A variância, portanto, será:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\pi^2}$$

$$\sigma_x = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{6}{\pi^2}}$$

Problema 12:

A figura abaixo representa um sistema de detecção de múons incidenes, constituído por três tubos de ionização,[2] A, B e C.

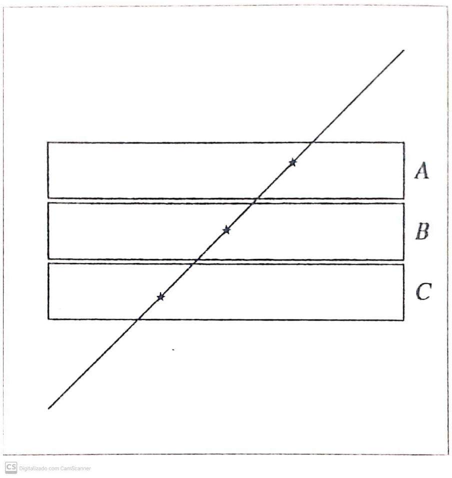

Figura 1: Detecção de múons a partir de 3 tubos de ionização.

Se a localização do ponto de ionização em cada tubo é determinada com 60% de eficiência (ou seja, com probabilidade igual a 0,6) e a reconstrução da trajetória de um múon requer a determinação de pelo menos três pontos em câmaras distintas, a eficiência do sistema é dada por:

$$B(3|3;0,6) \Rightarrow 21,6\%$$

Determine a eficiência para sistemas compostos por quatro ou cinco câmeras.

$$B(m|N,p) = \frac{N!}{m!(N-m)!}p^m(1-p)^{N-m}$$

[2]Esses tubos são câmaras de fios onde um gás é ionizado pela passagem de um múon, e a partir da medida do tempo de deriva dos íons até um fio, localiza-se o ponto onde o gás foi ioonizado.

Para 3 câmeras, a eficiência é dada por:

$$B(3|3;0,6) = \frac{3!}{3!(3-3)!}0,6^3(1-0,6)^{3-3} = 0,6^3 = 21,6\%$$

Ou seja, a cada 100 múons que passam pela câmera, por volta de 21,6 são registrados.

Para 4 câmaras, somamos as assinaturas dos múons em três ou quatro camâras. Então, a eficiência é:

$$B(3|4;0,6) + B(4|4;0,6) = \frac{4!}{3!(4-3)!}0,6^3(1-0,6)^{4-3} + \frac{4!}{4!(4-4)!}0,6^4(1-0,6)^{4-4} = 4\times 0,6^3\times 0,4 + 0,6^4 =$$

$$= 47,57\%$$

Para 5 câmeras, temos que somar os casos de quando o múon deixa sinal em três, quatro ou cinco câmeras. A eficiência é dada por:

$$B(3|5;0,6) + B(4|5;0,6) + B(5|5;0,6) =$$

$$= \frac{5!}{3!(5-3)!}0,6^3(1-0,6)^{5-3} + \frac{5!}{4!(5-4)!}0,6^4(1-0,6)^{5-4} + \frac{5!}{5!(5-5)!}0,6^5(1-0,6)^{5-5} =$$

$$= 5\times 2\times 0,6^3\times 0,4^2 + 5\times 0,6^4\times 0,4 + 0,6^5 =$$

$$= 68,256\%$$

Problema 13:

Qual a probabilidade de que dentre 720 pessoas duas anivesariem em um mesmo dia? (Compare binomial e Poisson)

Não levando em conta anos bissextos, o número total de possibilidades de que a data de aniversário de duas pessoas quaisquer possam coincidir durante um ano é dado por: $365\times 365 = (365)^2$. A probabilidade de que um determinado par de pessoas aniversariem em um dia qualquer do ano (o que o evento (i,j) ocorra) é dada por:

$$P(i,j) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$

Considerando que os pares de eventos (i,j) e (k,l) em que $i\neq j\neq k\neq l$ são independentes, o número de pares distintos (dentre N pessoas) de pessoas que podem aniversariar no mesmo dia é igual a:

$$C_N = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Utilizando a distribuição binomial, a probabilidade de que não ocorra coincidências de aniversários ($P(\overline{C})$), ou seja, de $m=0$ sucessos, será:

$$P(\overline{C}) = P_{m=0} = \left(1-\frac{1}{365}\right)^{C_N}$$

Então, a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas aniversariem no mesmo dia será:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(1-\frac{1}{365}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

Podemos também utilizar a aproximação de Poisson. A probabilidade de que não ocorram coincidências de aniversários, ou seja, $m=0$ sucessos, é de:

$$P(\overline{C}) = e^{-\frac{C_N}{365}}$$

Então a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas aniversariem no mesmo dia será:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - e^{-\dfrac{N(N-1)}{730}}$$

Repare que, para aproximadamente $N = 60$ a probabilidade de 2 pessoas aniversariarem no mesmo dia já gira em torno de 1 para ambas distribuições:

$$P(C; N = 60)_{\text{Binomial}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{\dfrac{60 \times 59}{2}} \sim 99,22\%$$

$$P(C; N = 60)_{\text{Poisson}} = 1 - e^{-\dfrac{60 \times 59}{730}} \sim 99,22\%$$

Portanto, para $N = 720$ é certo que pelo menos 2 pessoas vão aniversariam no mesmo dia.

Problema 14:

Cada uma das 15 questões de um teste tem 4 alternativas e apenas uma delas é correta. Desse modo, a probabilidade (p), *a priori*, de acerto ao acaso de uma questão é 1/4.

a) Determine a distribuição de probabilidades de acertos ao acaso de $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, 15$ das 15 questões.

b) Represente em um histograma.

c) Se 1.000 alunos fizerem o teste respondendo as questões ao acaso, quantos, em média, acertarão pelo menos 3 questões?

Neste caso, temos uma distribuição binomial. Uma prova com 15 questões, ou seja, $N = 15$, com probabilidade de acerto de $p = 1/4$. Teremos:

$$P_m = \frac{15!}{m!(15-m)!}\left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^{15-m}$$

A Tabela 1 mostra valores de probabilidade de m acertos numa prova de 15 questões. Estes resultados podem ser vistos na Figura 2.

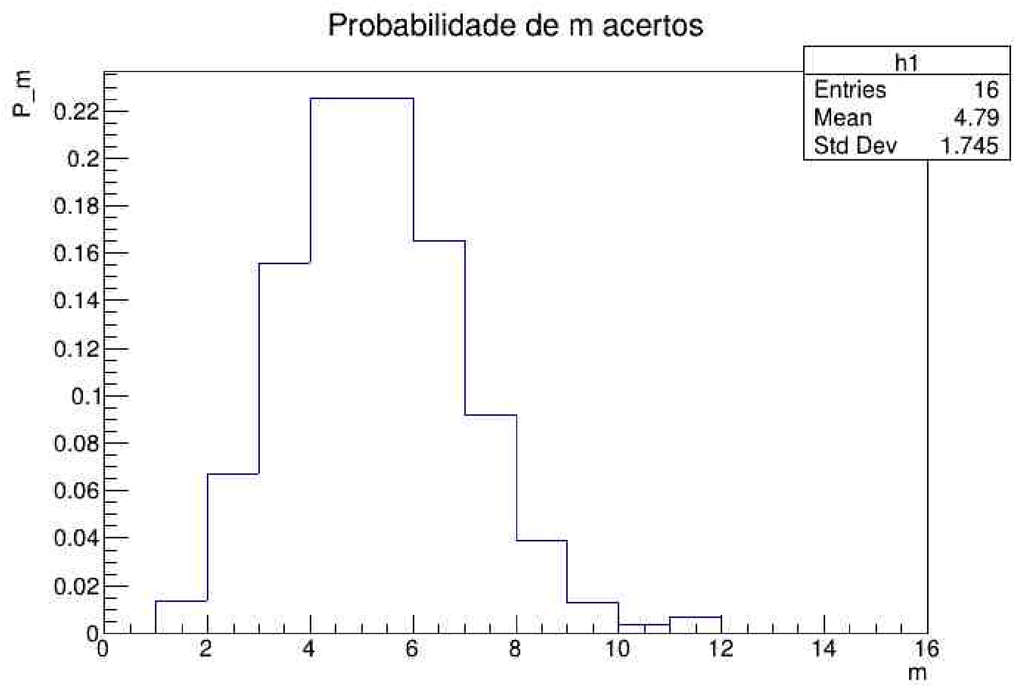

Figura 2: Probabilidade de m acertos numa prova de 15 questões.

Tabela 1: Probabilidade de acertar m questões.

m	P_m
0	0,0134
1	0,0668
2	0,1559
3	0,2252
4	0,2252
5	0,1651
6	0,0917
7	0,0393
8	0,0131
9	0,0039
10	0,0068
11	$1{,}028\times10^{-4}$
12	$1{,}144\times10^{-5}$
13	$8{,}800\times10^{-7}$
14	$4{,}191\times10^{-8}$
15	$9{,}313\times10^{-10}$

Tabela 2: Frequências (f_m) correspondentes ao número de contagens (m) em cada intervalo de 7,5 s.

m	f_m
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273
7	139
8	45
9	27
10	10
11	4
12	2
13	0
14	0

A probabilidade de se acertar pelo menos 3 questões é de:

$$P(m \geq 3) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - 0,0134 - 0,0668 - 0,1559 = 0,764$$

Portanto, se 1.000 alunos fizeram o teste, espera-se que, em média, 764 acertem pelo menos 3 questões.

Problema 15:

Um problema clássico envolvendo a distribuição de Poisson é o experimento de Rutherfor-Geiger, da contagem do número de partículas α emitidas por uma amostra de Polônio, em intervalos de $7,5$ s, num total de 2.608 intervalos. A Tabela 2 mostra as frequências (f_m) correspondentes ao número de contagens (m) em cada intervalo.

a) Determine o número médio de contagens em cada intervalo de $7,5$ s.

b) Compare a distribuição de frequências das contagens do experimento com a distribuição de Poisson de média igual ao número médio de contagens.

O número médio de contagens em cada intervalo de $7,5$ s, ou a taxa média de contagem por 7,5 s, é dado por:

$$\overline{f_m} = \frac{203 + 2 \times 383 + 3 \times 525 + 4 \times 532 + 5 \times 408 + 6 \times 273 + 7 \times 139 + 8 \times 45 + 9 \times 27 + 10 \times 10 + 11 \times 4 + 12 \times 2}{57 + 203 + 383 + 525 + 532 + 408 + 273 + 139 + 45 + 27 + 10 + 4 + 2} =$$

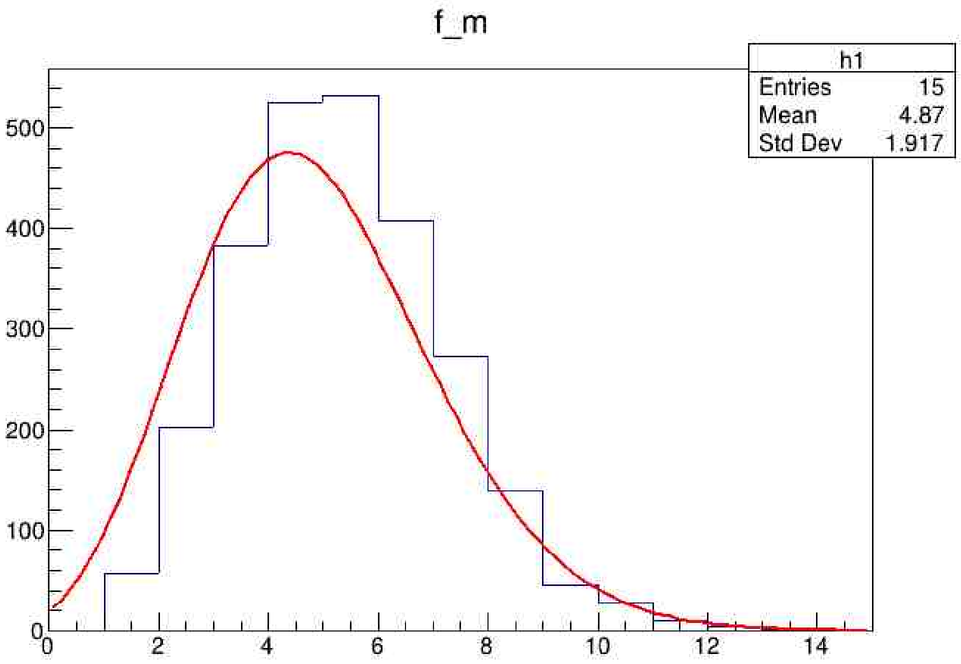

Figura 3: Distribuição do número m de contagens sobreposta a uma distribuição de Poisson.

$$\overline{f_m} = \frac{10.094}{2.608} = 3,87$$

A Figura 3 mostra a comparação da distribuição do número m de contagens com a distribuição de Poisson de média igual a 3,87.

Problema 16:

Em um grupo de pessoas a altura média é de 170 cm com desvio padrão de 5 cm. Calcule a altura acima da qual estão os 10% mais altos.

Vamos utilizar uma distribuição gaussiana padrão, de média zero e variância 1. Devemos descobrir quando valor de z, tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2}\, dz = 0,9$$

Consultando a tabela da Distribuição de Gauss, obtemos que isto é válido se $z = 1,29$, ou seja

$$P(z < 1,29) = 90\% \Rightarrow z = 1,29$$

Como, neste caso, temos média $\mu = 170$ e desvio padrão de $\sigma = 5$, teremos:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 1,29 \Rightarrow x = 176,4 \text{ cm}$$

Problema 17:

A média dos diâmetros dos rolamentos de esfera produzidos por uma determinada máquina é de $0,482$ cm com desvio padrão de $0,004$ cm. Uma peça é considerada defeituosa se tiver mais que $0,491$ cm ou menos que $0,473$ cm. Qual a porcentagem de peças defeituosas produzidas?

Escrevendo a distribuição gaussiana padrão, teremos que:

$$z = \frac{0,491 - 0,482}{0,004} \Rightarrow z = \left|\frac{0,473 - 0,482}{0,004}\right| = 2,25$$

Portanto, consultando a tabela de distribuição de Gauss:

$$P(|z| < 2,25) = 2(1 - \underbrace{\phi(2,25)}_{-0,9878}) = 0,0244$$

Ou seja, 2,44%.

Problema 18:

Mostre que no ajuste de uma função linear:

a) $\chi^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma}\right)^2 (1 - r^2)$ (para uma amostra heterocedástica);

R.:Considerando,
$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2$, em que $y(x_i) = ax_i + b, a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma x \sigma_y}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Escrevendo-se $y_i - y(x_i) = (y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})$, implica,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - \bar{y})^2 + a^2(x_i - \bar{x})^2 - 2a(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_i^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_2^2 + a^2\sigma_x^2 - 2a\sigma_{xy}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)$$

ou seja,

$$\chi^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2\right) = \chi^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma}\right)^2 \left(1 - (r)^2\right)$$

b) $\chi^2 = \frac{\sigma_y^2}{(\epsilon_y^2/N)}(1 - r^2)$ (para uma amostra homocedástica).

R.: Para $\sigma_i = \epsilon_y$, temos $\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma} = \frac{N}{\epsilon_y^2}$. Logo,

$$\chi^2 = \frac{\sigma_y^2}{\left(\epsilon_y^2/N\right)}\left(1 - r^2\right)$$

se queremos um ajuste linear bom, $\chi^2 \simeq \nu = N - 2$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{\epsilon_y^2(N-2)} \simeq\rightarrow \epsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{N-2}}$$

Problema 19:

Ao colidir com a superfície terreste, um meteoro provoca uma cratera. A relação esperada entre o diâmetro (D) da cratera e a energia cinética (E) do meteoro no instante do impacto é dada por

$$D = kE^{1/2}$$

em que k é uma constante.

A Tabela 3 mostra os diâmetros das depressões causadas pelo impacto de diversas esferas de aço sobre a areia contida em uma caixa, e as correspondentes incertezas (ϵ_D) e energias cinéticas das esferas ao colidirem com a areia da caixa. As esferas são utilizadas para simularem a queda dos meteoros.

A partir de um ajuste linear, determine uma estimativa para o expoente da relação esperada entre a energia e o diâmetro.

Tabela 3: Energia cinética da esfera ao colidir e diâmetro da depressão causada, com sua incerteza.

E(J)	D(cm)	ϵ_D(cm)
0,07	4,9	0,3
0,18	6,7	0,3
0,30	7,3	0,4
0,45	8,1	0,4
0,69	9,2	0,4

R.: Expressando a relação como.
$\underbrace{\ln D}_{y} = n \underbrace{\ln E}_{x} + \underbrace{\ln k}_{b}$, sendo 0.25 o valor esperado de n, podemos representar em uma tabela os dados.

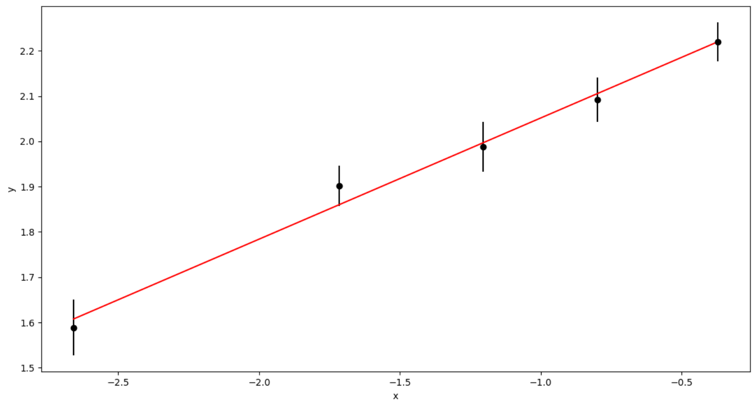

Figura 4: Ajuste Linear do problema 19

Pelo método dos mínimos quadrados e com o gŕafico que temos,

$$z \pm \sigma_n = (0.26 \pm 0.03)$$

Problema 20:

O desvio padrão de uma população é igual a 22. Se uma amostra de 100 elementos dessa população fornece a média $\overline{x} = 115,8$, pode-se afirmar que o valor médio da população é inferior a 120, ao nível de significância 5%?
R.: Fazemos a hipótese de nulidade:
$H- > \mu \sim 120$
O valor crítico de t que corresponde ao nível de 5% ($a = 0.05$) de significância é dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt = 0.05 \to t_{5\%} = -1.645$$

Sabendo que $t = \dfrac{115.8 - 120}{22/\sqrt{100}} = -1.91 < t_{5\%}$ não podemos considerar a hipótese de nulidade, ou seja, o valor esperado é inferior a 120. O valor de p para $t < -1.91$,

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+1.91} \exp^{-t^2/2} dt < a$$

Problema 21:

As notas $\{x_i\}$ de mecânica dos alunos de todas as turmas de uma faculdade constituem uma população distribuída normalmente com média $3,0$ e desvio padrão $2,0$. A média de uma nova turma de 100 alunos é de $3,4$.

Tabela 4: Tabela Exercício 23

m	f_m^{exp}	$f_m^{teorica}$	$(f_m^{exp} - f_m^{teorica})^2 / f_m^{teorica}$
0	57	54.3986	0.1243
1	203	210.5226	0.2688
2	383	407.36140	0.8276
3	525	525.4962	0.0004685
4	532	508.4175	1.0930
5	408	393.5152	0.5331
6	273	253.8173	1.4497
7	139	140.3247	0.01250
8	45	67.8820	7.7132
9	27	29.1892	0.1642
10	10	11.2962	0.1487
11	6	3.9742	1.0325

A média dessa nova turma é superior às outras ao nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$)?
R.: $t = \dfrac{3.4 - 3}{2/\sqrt{100}} = 2 \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\dfrac{-t^2}{2}\right) dt = 0.046 < a$ Abolimos a hipótese nula mais uma vez

Problema 23:

Avalie a compatibilidade dos dados do experimento de Rutherford-Geiger, listados na Tabela 2 com uma distribuição de Poisson de média igual ao número médio de contagens.
R.: Pela distribuição de Poisson, calculamos o valor teórico para cada frequência.

$$f = \mathcal{A}\frac{3.87^m}{m!} \exp(-3.87)$$

onde 3.87 é a média. Com a ajuda de um pequeno código em python, calculamos para cada grau de liberdade, os valores teóricos previstos pela teoria das distribuições de Poisson. A constante $\mathcal{A}$ é encontrada somando todos valores experimentais encontrados, como forma de normalizar a nossa distribuição. Abaixo está código:

```python
## codigo referente ao exercicio 23 ##
import math # biblioteca para realizar as operacoes de fatorial e exponencial
media = 3.87 # media das distribuicoes
A = 2608 # normalizacao
f_exp = [57,203,389,525,532,408,273,139,45,27,10,6] # valores medidos
f_teo = [] # criar uma lista vazia
for m in range(0,12):
    f_teo.append(A * media**( m )/( math.factorial( m ) ) * math.exp( - media ) )
# o loop "for" calcula para cada valor de m indo 0 ate 11 as frequencias e guarda
   na lista f com o atributo "append"
import numpy as np # importa a biblioteca numpy para facilitar os calculos
chi2 = ( np.array( f_exp ) - np.array( f_teo ) ) **2/ np.array( f_teo )
print( chi2.sum() ) # o chi quadrado de fato e caculado aqui, quando somamos todas as
    contribuicoes
from scipy.stats import chisquare # biblioteca para importada para o calculo do chi2
print( chisquare( f_exp,f_teo ) ) # podemos checar o valor com a funcao chisquare do
   scipy.stats
```

Com isso temos a seguinte Tabela 4 com os resultados encontrados. O valor de $\chi^2 = 13.369$, esse valor é próximo do número de graus de liberdade(12), então podemos comprovar a compatibilidade

Problema 24:

O número total de eventos (n) em um experimento obedece uma distribuição de Poisson. Sendo $n = n_s + n_b$, em que n_s (*sinal*) é a contribuição associada a presença de uma nova classe de eventos e $n_b = 4,5$ é o número esperado de eventos associados ao *background*, determine a evidência do resultado a favor da descoberta de um novo fenômeno, ao se observar um total de 15 eventos.

Tabela 5: Divisão dos grupos (Problema 25).

grupos	intervalos	probabilidade $(1-[1,2]\sigma)/2$	$n_{esperado}$	$n_{observado}$
1	$T < \bar{T} - \sigma_{\bar{T}}$	0.158	12,692	12
2	$\bar{T} - \sigma_{\bar{T}} \leq \bar{T} < \bar{T}$	0,341	27,307	31
3	$\bar{T} \leq T \leq \bar{T} + \sigma_{\bar{T}}$	0,341	27,307	27
4	$T > \bar{T} + \sigma_{\bar{T}}$	0,158	12,692	10

R.:
Como estamos falando de um novo evento, então a probabilidade de enxerga-lo é nula, logo $n_s = 0$, desta forma, reduzimos nossa equação da Distribuição de Poisson da seguinte maneira

$$P(n|n_b; n_s) = \frac{(n_b)^n}{n!} e^{-(n_b)} = \frac{4.5^{15}}{15!} e^{-4.5}$$

o número de eventos observados que sejam maior ou igual a 15 é:

$$P(n \geq n_{obse}) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{obse}} \frac{n_b^n}{n_b!} e^{-n_b} = 2.04 \times 10^{-5}$$

Problema 25:

Avalie a compatilidade dos dados da Tabela 7 com uma distribuição de Gauss de mesma média e desvio padrão.
R.: Como a distribuição de Gauss nos dá uma probabilidade simétrica em relação ao valor esperado, a mesma, que está associada ao intervalo de $(< T > -\sigma_{<T>}, < T > +\sigma_{<T>})$ é da ordem de 0,683. Vamos separar em 4 grupos como mostra a Tabela 5

A tabela nos mostra, o agrupamento da quantidade de eventos que temos nos intervalos mencionados. Os números de eventos esperados no intervalo em questão, é 80 multiplicado pela probabilidade. Abaixo, está o código que foi usado para agrupar os valores e encontrar o χ^2 que é da ordem de 1.208. Considerando apenas um grau de liberdade, temos então que os resultados são compatíveis com a distribuição.

```
import pandas as pd
from scipy.stats import chi2,norm,chisquare
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt

pendulo = pd.DataFrame
    ([0.7743,0.7723,0.7717,0.7737,0.7720,0.7707,0.7723,0.7740,0.7743,
0.7730,0.7743,0.7737,0.7733, 0.7733,0.7730,0.7737,0.7723,0.7723,0.7730,0.7737,
0.7713,0.7727,0.7713,0.7740,0.7720,0.7727,0.7723,0.7740,0.7723,0.7723,0.7727,
0.7717,0.7703,0.7723,0.7743,0.7733,0.7730,0.7737,0.7723,0.7757,0.7717,0.7737,0.7740,
0.7757,0.7743,0.7707,0.7740,0.7723,0.7743,0.7710,0.7727,0.7723,0.7723,0.77200,
0.7717,0.7733,0.7727,0.7733,0.7723,0.7737,0.7723,0.7730,0.7740,0.7757,
0.7710,0.7703,0.7727,0.7730,0.7723,0.7710,0.7740,0.7727,0.7713,0.7703,0.7733,
0.7720,0.7723,0.7700,0.7730,0.7750])

media = pendulo.mean()[0]
sigma  = pendulo.std()[0]

grupo1 = pendulo.loc[pendulo[0] < (media - sigma) ]
grupo2 = pendulo.loc[pendulo[0] > (media - sigma)].loc[pendulo[0] < media]
grupo3 = pendulo.loc[pendulo[0] < (media + sigma)].loc[pendulo[0] > media]
grupo4 = pendulo.loc[pendulo[0] > (media + sigma) ]

sns.distplot(pendulo[0],fit=norm,kde=False, color = 'red',axlabel='T')
plt.plot([media,media],[0,400],label = "Media: {:2.3f}".format(media) )
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```

Tabela 6: Tabela de acordo com o exercício 19

$\ln(D)$	$\ln(E)$	ϵ	$\sigma_{\ln(D)}$	$\sigma_{\ln(E)}$	σ_{xy}	r	σ
-2.659	1.589	0,061	0.7443	0.1965	0.1453	0.9935	0.0221
-1.715	1.902	0,045					
-1.204	1.988	0,055					
-0.799	2.092	0,049					
-0.371	2.219	0,043					

```
esperados  = [ 12.69,27.30,27.30,12.69]
observados = [ len(grupo1),len(grupo2),len(grupo3),len(grupo4) ]
print(chisquare(esperados,observados))
```

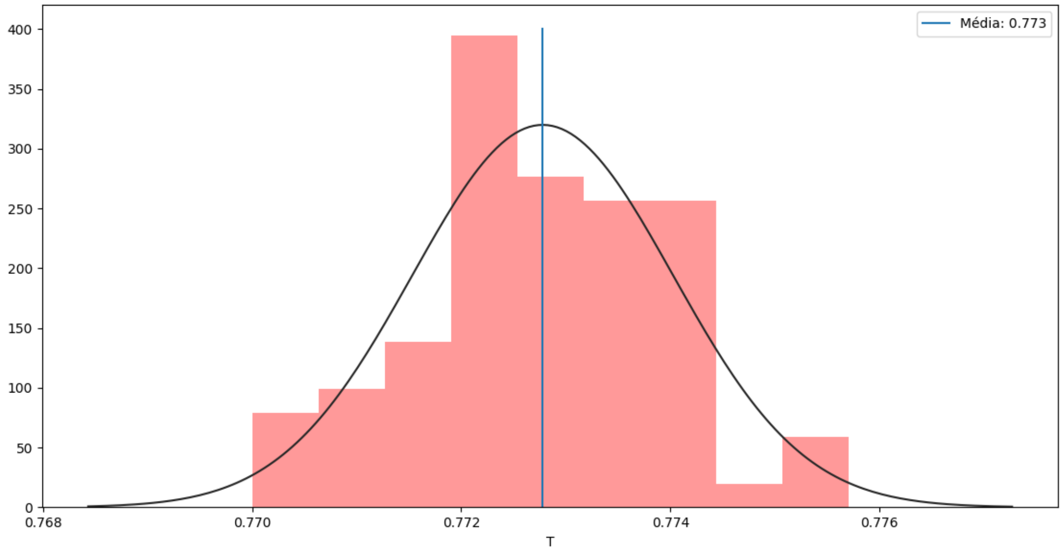

Figura 5: Distribuição Normal do exercício 24

Problema 26:

Avalie a compatibilidade dos dados da Tabela 3 com a relação esperada.
R.: Vamos fazer uma tabela contendo os resultados das aplicações do ln nos valores.

De posse desses valores obtidos na Tabela 6, obtemos os resultados para o $\chi^2 = 1.01$ e $\chi^2/\nu = 0.37$ para 3 graus de liberdade. De fato, este resultado mostra a compatibilidade com os resultados encontrados

Tabela 7: 80 medidas do período de um pêndulo, em segundos, obtidas no laboratório de Física Geral do curso de Física da UERJ.

0,7743	0,7723	0,7717	0,7737	0,7720	0,7707	0,7723	0,7740
0,7743	0,7730	0,7743	0,7737	0,7733	0,7733	0,7730	0,7737
0,7723	0,7723	0,7730	0,7737	0,7713	0,7727	0,7713	0,7740
0,7720	0,7727	0,7723	0,7740	0,7723	0,7723	0,7727	0,7717
0,7703	0,7723	0,7743	0,7733	0,7730	0,7737	0,7723	0,7757
0,7717	0,7737	0,7740	0,7757	0,7743	0,7707	0,7740	0,7723
0,7743	0,7710	0,7727	0,7723	0,7723	0,7720	0,7717	0,7733
0,7727	0,7733	0,7723	0,7737	0,7723	0,7730	0,7740	0,7757
0,7710	0,7703	0,7727	0,7730	0,7723	0,7710	0,7740	0,7727
0,7713	0,7703	0,7733	0,7720	0,7723	0,7700	0,7730	0,7750