Introdução à Análise de dados em FAE **(Data: 08/12/20)**

Solução dos Exercícios

Professores: Sandro Fonseca, Sheila Amaral, Eliza Melo. *Name:* João Pedro Gomes Pinheiro.

Problema 0:

Quando um píon decai um dois fótons, qual a energia do fóton?

Vamos utilizar a conservação da energia e do *momentum* relativísticos no referencial do laboratório. Considere um π^0 com velocidade v e massa m_π decaindo em dois fótons (γ_1 e γ_2) que fazem ângulos θ_1 e θ_2 com respeito a direção original do píon, conforme representado na Figura 1.

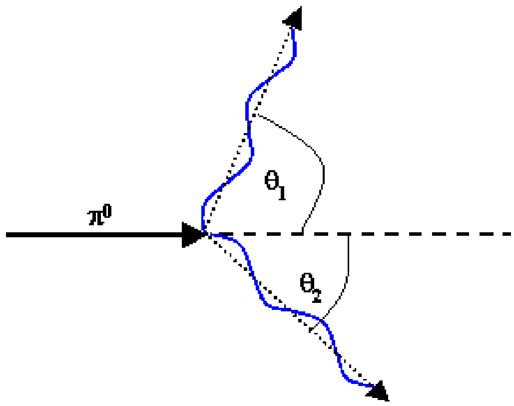

Figura 1: Decaimento do π^0 em 2 fótons no referencial do laboratório.

Da conservação da energia, teremos:

$$E_\pi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$$

A energia do píon é $E_\pi = \gamma m_\pi c^2$ e a energia dos fótons é $E_{\gamma_1} = h\nu_1$ e $E_{\gamma_2} = h\nu_2$ pois são partículas sem massa. Portanto:

$$\gamma m_\pi c^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \tag{0.1}$$

A conservação do *momentum* implica uma conservação no eixo paralelo e perpendicular à direção do π:

$$|\vec{p}_{\pi,\parallel}| = |\vec{p}_{1,\parallel}| + |\vec{p}_{2,\parallel}|$$

$$|\vec{p}_{\pi,\perp}| = |\vec{p}_{1,\perp}| + |\vec{p}_{2,\perp}|$$

Mas

$$|\vec{p}_{\pi,\parallel}| = \gamma m_\pi v$$
$$|\vec{p}_{\pi,\perp}| = 0$$
$$|\vec{p}_{1,\parallel}| = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1$$
$$|\vec{p}_{2,\parallel}| = \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta_2$$
$$|\vec{p}_{1,\perp}| = \frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1$$

$$|\vec{p}_{2,\perp}| = \frac{h\nu_2}{c}\sin\theta_2$$

Portanto:

$$\gamma m_\pi v = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta_2 \tag{0.2}$$

$$\frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}\sin\theta_2 = 0 \tag{0.3}$$

Vamos manipular a Equação 0.2:

$$\gamma m_\pi v = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 = \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2\cos^2\theta_2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2\left(1-\sin^2\theta_2\right)$$

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2\sin^2\theta_2 \tag{0.4}$$

Mas, pela Equação 0.3:

$$\left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2\sin^2\theta_2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2\sin^2\theta_1$$

E, pela Equação 0.1:

$$\frac{h\nu_2}{c} = \gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}$$

Juntado na Equação 0.4:

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2\sin^2\theta_1$$

$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2\cos^2\theta_1 = \left(\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2\sin^2\theta_1$$

$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = \left(\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}\right)^2$$

$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 = (\gamma m_\pi c)^2 - 2\gamma m_\pi c\frac{h\nu_1}{c} + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2$$

$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2\gamma m_\pi v\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 = (\gamma m_\pi c)^2 - 2\gamma m_\pi c\frac{h\nu_1}{c}$$

$$\gamma m_\pi v^2 - 2v\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 = \gamma m_\pi c^2 - 2c\frac{h\nu_1}{c}$$

$$2\frac{h\nu_1}{c}(c - v\cos\theta_1) = \gamma m_\pi \underbrace{(c^2 - v^2)}_{=c^2(1-v^2/c^2)=c^2/\gamma^2} = \frac{m_\pi c^2}{\gamma}$$

$$2h\nu_1\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right) = \frac{m_\pi c^2}{\gamma}$$

A energia de um dos fótons, portanto, será:

$$E_{\gamma_1} = h\nu_1 = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)} \tag{0.5}$$

A energia do outro fóton pode ser calculada inserindo a Equação 0.5 na Equação 0.1. Teremos:

$$E_2 = h\nu_2 = \gamma m_\pi c^2 - h\nu_1 = \gamma m_\pi c^2 - \frac{m_\pi c^2}{2\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)} = \frac{2\gamma^2 m_\pi c^2 - 2\gamma^2 m_\pi cv\cos\theta_1 - m_\pi c^2}{2\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)}$$

$$E_2 = 2m_\pi c^2 \frac{\gamma^2 - \gamma^2\frac{v}{c}\cos\theta_1 - 1}{2\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)}$$

Mas $\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} - 1 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} - \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = \frac{v^2}{c^2 - v^2} = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2$. Portanto:

$$E_2 = m_\pi c^2 \frac{\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 - \gamma^2\frac{v}{c}\cos\theta_1}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1\right)} = m_\pi v^2 \gamma \frac{1 - \frac{c}{v}\cos\theta_1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1}$$

$$E_2 = h\nu_2 = m_\pi v^2 \gamma \frac{1 - \frac{c}{v}\cos\theta_1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1} \tag{0.6}$$

Problema 1:

Prove a equação

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2}$$

Usaremos a variável de Mandelstam s, que representa a energia do centro de massa e é dada pela soma dos quadrimomentos das partículas incidentes elevado ao quadrado. Todas as variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz, portanto faremos a análise no referencial do laboratório. No referencial do laboratório, a variável s é dada por:

$$s = (p_{1L} + p_{2L})^2 = p_{1L}^2 + p_{2L}^2 + 2\left((p_{1L})^0 (p_{2L})^0 - \vec{p}_{1L}\cdot\vec{p}_{2L}\right)$$

Mas, considerando a invariância do *quadrimomentum* e considerando o referencial do laboratório:

$$p_{1L}^2 = m_1^2$$

$$p_{2L}^2 = m_2^2$$

$$\vec{p}_{2L} = \vec{0}$$

$$(p_{1L})^0 = E_1^{lab}$$

$$(p_{2L})^0 = E_2^{lab} = m_2$$

portanto:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2} \tag{0.7}$$

Problema 2:

Considerando $E_L^{lab} >> m_1, m_2$, prove esta aproximação;

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$$

Se $E_L^{lab} >> m_1.m_2$, então $E_L^{lab} m_2 >> m_2^2$ e $E_L^{lab} m_2 >> m_1^2$, portanto podemos desconsiderar estes termos quadrados de dentro da raiz, obtendo apenas:

$$E_T = \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$$

Problema 3:

Prove a equação:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)}$$

Novamente, vamos usar a variável s de Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$

Da definição do *quadrimomentum*, temos que:

$$p_1^2 = m_1^2$$

$$p_2^2 = m_2^2$$

$$p_1p_2 = E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

Se θ é o ângulo entre as partículas incidentes 1 e 2, temos que:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta$$

Portanto:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta)$$

Definindo $\beta_1 = \dfrac{|\vec{p}_1|}{E_1}$ e $\beta_2 = \dfrac{|\vec{p}_2|}{E_2}$, podemos escrever, finalmente:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\vec{p}_2\cos\theta} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \frac{|\vec{p}_1|}{E_1}\frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\cos\theta\right)}$$

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta\right)}$$

Problema 4:

Considerando $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ e $m_1 = m_2$, prove

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$

Partindo da expressão deduzida no Problema anterior, temos $\theta = \pi$, portanto $\cos\pi = -1$. Além disso, $m_1 = m_2 = m$ e $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$, o que leva a:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta\right)} = \sqrt{2m^2 + 2E_1E_2\left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{E_1E_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{2m^2 + 2E_1E_2 + 2|\vec{p}|^2}$$

Mas, repare que:

$$E_1^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 = E_2^2$$

Logo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2m^2 + 2E_1E_2 + 2|\vec{p}|^2} = \sqrt{2E_1^2 + 2E_1^2} = 2E_1$$

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$

Problema 5:

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

a) Qual é a energia de centro de massa para está interação?

Vamos utilizar a Equação obtida no Problema 2 para a energia de centro de massa no caso onde a energia da partícula alvo é muito maior que sua massa de repouso. Neste caso, $E_1^{lab} = 100$ GeV é a energia dos prótons incidentes e $m_2 = 1$ GeV é a massa do hidrogênio.

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2E_1^{lab} m_2} = \sqrt{2 \times 100 \times 1} = \sqrt{200} \sim 14,2 \text{ GeV}$$

b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

`Resposta` :

Para alcançar a energia de $E_T = \sqrt{s} = 13$ TeV, devemos obter a seguinte energia E_1^{lab}, considerando ainda $m_2 = 1$ GeV:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2E_1^{lab} m_2} = \sqrt{2E_1^{lab}} = 13 \times 10^3 \text{ GeV}$$

$$\Rightarrow E_1^{lab} = \frac{13^2}{2} 10^6 = 84,5 \times 10^6 \text{ GeV}$$

c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

Atualmente, talvez o detector assimétrico mais famoso seja o **LHCb**, instalado em torno do tubo do LHC. Este experimento almeja investigar a Física do *quark* b. Como os mésons B formados na colisão $p - p$ não são espalhados em direções aleatórias, mas ficam próximos à linha do tubo do feixe, o formato do detector é assimétrico.

No caso de detectores de alvo fixo, apesar de seu custo mais baixo, não vale a pena investir em detectores mais potentes pois, para produzir uma energia de centro de massa alta, é necessário um feixe com uma energia muito maior do que no caso de um acelerador circular.

Problema 5a:

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo em um colisor de partículas cujo o feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

Considerando o alvo fixo como um próton e usando a solução do Problema 2, temos:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2E_1^{lab} m_2} = \sqrt{2 \times 3,5 \times 10^3 \times 1} = 83,667 \text{ GeV}$$

Problema 6:

Em espalhamento elástico do tipo: $A + A \to A + A$, quais são as variáveis de Mandelstam?

Teremos: $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, mas $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$, $E_1 = E_2 = E$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. Como pode ser visto na Figura 2.

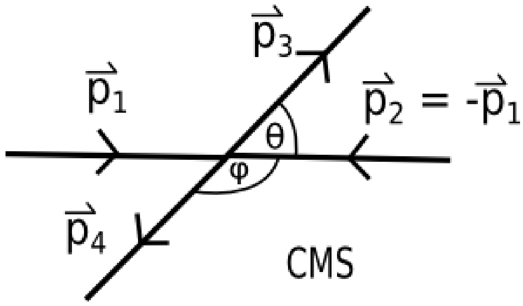

Figura 2: Colisão relevante para as variáveis t e u no espalhamento elástico $A + A \to A + A$.

Para o canal s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 = m_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + m_2^2 = 2m^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) =$$

$$= 2m^2 + 2(E^2 + |\vec{p}|^2) = 2m^2 + 2(m^2 + |\vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2)$$
$$s = 4(m^2 + p^2)$$

Para o canal t:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 - 2p_1p_3 + p_3^2 = 2m^2 - 2E_1E_3 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = 2m^2 - 2E_1^2 + 2|\vec{p}|^2 \cos\theta$$

$$= 2m^2 - 2m^2 - 2|\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}|^2 \cos\theta = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)$$

$$t = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)$$

Para o canal u:

$$u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 - 2p_1p_4 + p_4^2 = 2m^2 - 2E_1E_4 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 = \underbrace{2m^2 - 2E_1^2}_{=-2|\vec{p}|^2} - 2|\vec{p}|^2 \cos\theta$$

$$u = -2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta)$$

Problema 7:

Prove a relação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

Para facilitar a notação, vamos chamar $M_1 = m_3$ e $M_2 = m_4$.

Sabemos, da invariância do *quadrimomentum*, que $p_i^2 = m_i^2$ em que i varia para as partículas em questão, $i = 1, 2, 3, 4$. Da conservação do *quadrimomentum*, também podemos escrever:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \Rightarrow p_1 = -p_2 + p_3 + p_4$$

$$s + t + u = (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1^2 + p_3^2 + p_1^2 + p_4^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_1p_4 =$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1^2 - 2p_1 \underbrace{(-p_2 + p_3 + p_4)}_{=p_1} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Ao voltar para a notação antiga fazendo $m_3 = M_1$ e $m_4 = M_2$,teremos:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

Problema 8:

Mostre esta transformação:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\|} \end{pmatrix}, \quad p'_T = p_T$$

onde $p_{\|}$ e p_T são os componentes longitudinais e transversais de $\vec{p}$, que são paralelos e perpendiculares a β, respectivamente. Além disso, $\gamma_s = \cosh y$, $\beta_s = \tanh y$ e $\gamma_s\beta_s = \sinh y$.

Da Relatividade Restrita, sabemos que quantidades perpendiculares ao movimento não são alteradas por transformações de Lorentz, o que leva diretamente a $p'_T = p_T$.

A matriz de transformação entre $(E, p_{\|}) \rightleftarrows (E', p'_{\|})$ pode ser construída de várias formas alternativas. A primeira, mais intuitiva, nos leva a considerar uma transformação que preserve a invariância de $E'^2 - p'^2_{\|} = E^2 - p^2_{\|}$. Sabemos, das funções hiperbólicas, que $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, o que nos leva a propor a matriz de transformação:

$$\begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix}$$

cujo determinante é justamente $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, que leva à invariância imposta. Fazendo as substituições de γ_s e β_s chegamos à transformação do enunciado.

Uma outra maneira, menos intuitiva, porém matematicamente mais bonita é considerar uma matriz de rotação 2D qualquer:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

No plano de Minkowski, esta rotação de um ângulo real θ se transforma na rotação através de um ângulo complexo iy no plano complexo, ou seja, considerando E no eixo horizontal e $p_{\|}$ no eixo vertical de um plano complexo, fazemos $\theta \to iy$ e $p_{\|} \to ip_{\|}$. Na Equação acima:

$$\begin{pmatrix} E' \\ ip'_{\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos iy & \sin iy \\ -\sin iy & \cos iy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ ip_{\|} \end{pmatrix}$$

Mas $\sin(iy) = i\sinh y$ e $\cos(iy) = \cosh y$, portanto:

$$\begin{pmatrix} E' \\ ip'_{\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & i\sinh y \\ -i\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ ip_{\|} \end{pmatrix}$$

$$E' = E\cosh y - p_{\|}\sinh y$$

$$ip'_{\|} = -iE\sinh y + ip_{\|}\cosh y$$

Que leva a:

$$\begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix}$$

E, substituindo γ_s e β_s leva à matriz de transformação:

$$\begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s y & \gamma_s \end{pmatrix}$$

Problema 8b:

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:

$$E_1 = \frac{M_2 - m_2 + m_1}{2M}, \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$$

$$E_1 = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M}$$

Da conservação do *quadrimomentum*:

$$P = p_1 + p_2$$

Como consideramos o referencial onde a partícula que decai está em repouso, então: $P = (E_0, \vec{0})$. Portanto:

$$p_2 = P - p_1$$
$$\Rightarrow p_2^2 = (P - p_1)^2 = P^2 - 2Pp_1 + p_1^2 = m_2^2$$

$$\Rightarrow m_2^2 = M^2 - 2E_0E_1 + m_1^2$$

Mas $E_0 = M$, portanto:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

O *momentum*, por sua vez, será:

$$|\vec{p}_1|^2 = E_1^2 - m_1^2 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} - \frac{4M^2m_1^2}{4M^2} = \frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2M^2m_1^2 + 2M^2m_2^2 + 2m_1^2m_2^2 - 4M^2m_1^2}{4M^2} =$$

$$= \frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2m_1^2 + 2M^2m_2^2 + 2m_1^2m_2^2}{4M^2} = \frac{(M^2 - m_1^2 - 2m_1^2m_2^2 - m_2^2)(M^2 - m_1^2 + 2m_1^2m_2^2 - m_2^2)}{4M^2} =$$

$$= \frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4M^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{p}_1| = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M}$$

Problema 9:

Determine a energia e *momentum* para o seguinte decaimento de dois corpos:

$$\pi^- \to \mu^+ + \nu_\mu$$

Sabemos que $m_\pi = 0,1396$ GeV, $m_\mu = 0,1057$ GeV e $m_\nu \sim 0$ GeV.

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{(0,1396)^2 + (0,1057)^2}{2 \times 0,1396} \sim 0.1098 \text{ GeV}$$

$$|\vec{p}_\mu| = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_\mu^2)(m_\pi^2 - m_\mu^2)}}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{(0,1396)^2 - (0,1057)^2}{2 \times 0,1396} \sim 0.0298 \text{ GeV} = |\vec{p}_\nu|$$

Prolema 10:

Prove o decaimento de 3 corpos.

Vmos considerar uma partícula de massa m_a e *quadrimomentum* p_a decaindo em 3 partículas de *quadrimomentum* p_1, p_2 e p_3.

$$p_a = (E_a, \vec{p}_a)$$

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \;\; p_2 = (E_2, \vec{p}_2), \;\; p_3 = (E_3, \vec{p}_3)$$

A partir da conservação da energia e do 4-momento.

$$E_a = E_1 + E_2 + E_3$$
$$\vec{p}_a = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$
$$p_a = p_1 + p_2 + p_3$$

Definindo

$$p_{ij} = p_i + p_j s_{ij} = p_{ij}^2 = (p_i + p_j) \cdot (p_i + p_j)$$

onde s_{ij} é uma das variáveis de Mandelstam, dadas por:

$$s_{12} \equiv s_{21} = (p_1 + p_2)^2 = (p_a - p_3)^2$$
$$s_{13} \equiv s_{32} = (p_2 + p_3)^2 = (p_a - p_1)^2$$
$$s_{31} \equiv s_{13} = (p_3 + p_1)^2 = (p_a - p_2)^2$$

Somando todas essas constribuições.

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3} [(E_a - E_i)^2 - |\vec{p}_a - \vec{p}_i|^2] = \sum_{i=1}^{3} [(E_a^2 - 2E_a E_i + E_i^2) - (|\vec{p}_a|^2 + |\vec{p}_i|^2 - 2|\vec{p}_a||\vec{p}_i| \cos\theta_i)]$$

em que θ_i é o ângulo que $\vec{p}_i$ forma com $\vec{p}_a$. Arrumando os termos da última equação, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3} [\underbrace{(E_a^2 - |\vec{p}_a|^2)}_{m_a^2} + \underbrace{(E_i^2 - |\vec{p}_i|^2)}_{m_i^2} - 2E_a E_i + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_i| \cos\theta_i] =$$

$$= 3m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2E_a \underbrace{(E_1 + E_2 + E_3)}_{E_a} + 2|\vec{p}_a| \underbrace{(|\vec{p}_1| \cos\theta_1 + |\vec{p}_2| \cos\theta_2 + |\vec{p}_3| \cos\theta_3)}_{|\vec{p}_a|}$$

Acima, utilizamos a conservação da energia e a conservação da componente do *momentum* na direção de movimento da partícula mãe, ou seja:

$$E_a = E_1 + E_2 + E_3$$
$$|\vec{p}_a| = |\vec{p}_1| \cos\theta_1 + |\vec{p}_2| \cos\theta_2 + |\vec{p}_3| \cos\theta_3$$

A expressão se torna:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = 3m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2 \underbrace{(E_a^2 - |\vec{p}_a|^2)}_{=m_a^2} = m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

No referencial do Centro de Massa:

$$p_a^\star = (m_a, \vec{0})$$

A grandeza s_{12} fica:

$$s_{12} = (p_a^\star - p_3^\star)^2 = (m_a - E_3^\star)^2 - |\underbrace{\vec{p}_a^\star}_{=0} - \vec{p}_3^\star|^2$$

$$s_{12} = m_a^2 - 2m_a E_3^\star + \underbrace{E_3^{2\star} - |\vec{p}_3^\star|^2}_{=m_3^2}$$

$$s_{12} = m_a^2 - 2m_a E_3^\star + m_3^2$$

$$E_3^\star = \frac{m_a^2 + m_3^2 - s_{12}}{2m_a}$$

Analogamente:

$$E_1^\star = \frac{m_a^2 + m_1^2 - s_{23}}{2m_a}$$

$$E_2^\star = \frac{m_a^2 + m_2^2 - s_{31}}{2m_a}$$

Para calcular o *momentum* das partículas.

$$E_i^{\star 2} - |\vec{p_i^\star}|^2 = m_i^2$$

$$|\vec{p_3^\star}|^2 = E_3^{\star 2} - m_3^2 = \frac{(m_a^2 + m_3^2 - s_{12})^2 - 4m_a^2 m_3^2}{4m_a^2}$$

$$|\vec{p_3^\star}| = \frac{[(m_a^2)^2 + (m_3^2)^2 + s_{12}^2 - 2m_a^2 s_{12} - 2m_3^2 s_{12}]^{1/2}}{2m_a}$$

Fazendo $m_a \equiv M$, obtemos:

$$|\vec{p_3}| = \frac{([M^2 - (m_{12} + m_3)^2)(M^2 - (m_{12} - m_3)^2)]^{1/2})}{2M}$$

Prolema 10a:

Prove o decaimento abaixo:

$$\pi + p \to \pi + \pi + \pi + p$$

O processo acima trata da produção elástica de píons a partir da interação de um píon com um próton. A energia de centro de massa deve ser maior que a soma da massa de repouso das partículas criadas, para que haja conservação de energia. Ou seja:

$$\sqrt{s} \geq \sum_{i=1} m_i \tag{0.8}$$

Vamos determinar a variável s. Da definição de s, temos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_\pi E_p - \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p)$$

Vamos considerar o próton em repouso (ou, de forma mais geral, porém equivalente, o referencial onde o próton está em repouso). Desta forma, $|\vec{p}_p| = 0$ e $E_p = m_p$. Teremos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p$$

A energia do píon será:

$$E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Mas, da Equação 0.8, podemos escrever:

$$E_\pi \geq \frac{(\sum_i m_i)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

No caso da produção elástica de 2 píons, temos que $\sum_i m_i = 2m_\pi$
Portanto:

$$E_\pi \geq \frac{4m_\pi^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{3m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{3 \times 135^2 - 938^2}{2 \times 938} \sim 500 \text{ MeV}$$

Prolema 11:

Prove a equação abaixo

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$

A massa invariante é a porção da massa total de um objeto (ou de um sistema de objetos) que é independente do movimento geral do sistema. Em outras palavras, é uma característica do sistema que é independente do sistema de referência, é um invariante. Se existe um referencial de centro de massa, então a massa invariante é a massa de repouso neste sistema de referência. Em outros sistemas de referência, a massa total do sistema é maior ou igual a sua massa invariante.

No caso de uma única partícula, sua massa invariante é sua massa de repouso, que já é por si só um invariante de Lorentz:

$$m_0 = E^2 - |\vec{p}|^2$$

Considere agora o decaimento de uma partícula. Como a massa invariante é determinada por quantidades que são conservadas durante o decaimento, o cálculo da massa invariante a partir da energia e *momentum* dos produtos desse decaimento é igual a massa invariante da partícula que decaiu. Em outras palavras, podemos calcular a massa invariante a partir da soma da energia e do *momentum* dos produtos de um decaimento, obtendo a massa invariante da partícula de decaiu:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$