

# CONSTRUCCIÓN DE INTERVALOS DE CONFIANZA PARAMÉTRICOS PARA UNA MEDIDA DE SOLAPAMIENTO BASADA EN LA DIVERGENCIA DE KULLBACK LEIBLER

---

GRADO EN MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA. FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

---



Javier Gómez Barroso

Curso 2020-2021

Tutoras:

Alba María Franco  
M. Carmen Pardo

# Resumen en castellano

Comúnmente, en Estadística, es necesario encontrar el grado de semejanza o diferencia entre dos poblaciones de interés. El objetivo de este trabajo consiste en construir intervalos de confianza paramétricos para un coeficiente de semejanza entre dos funciones de densidad, el coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler, el cual no es más que un ajuste de la divergencia de Kullback-Leibler. Este coeficiente toma valores en el intervalo  $(0,1)$ , donde valores próximos a 0, indican que las poblaciones son diferentes.

Para poder construir estos intervalos de confianza se dan 10 posibles métodos y sus algoritmos, basados principalmente en el método delta y técnicas bootstrap de remuestreo. Ambas técnicas se usan para calcular la variabilidad del estimador del coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler y, con ello, el correspondiente intervalo de confianza asociado. En ocasiones, será conveniente aplicar una transformación Box-Cox a los datos, o bien considerar la escala logit para el intervalo de confianza.

Los intervalos de confianza contruidos para la medida de solapamiento de Kullback-Leibler para dos densidades logran dar buenos resultados cuando la semejanza entre poblaciones es pequeña. Esto es así, porque a medida que aumenta el coeficiente de solapamiento Kullback-Leibler, los anchos del intervalo de confianza crecen considerablemente, incluso con tamaños muestrales grandes. No hay grandes diferencias entre las técnicas bootstrap y las técnicas que emplean el método delta. La escala logit logra encontrar intervalos de confianza más precisos, según podemos concluir del estudio de simulación realizado.

## Palabras clave

Coeficiente de solapamiento, Kullback-Leibler, Método Delta, Bootstrap, Intervalos de confianza

# Abstract

Commonly, in statistics, is necessary to find the degree of similarity or difference between two populations of interest. The aim of this work consists of constructing parametric confidence intervals for a coefficient of similarity between two density functions, the Kullback-Leibler's overlap coefficient, which is nothing more than an adjustment of the Kullback-Leibler's divergence. This coefficient, take values in the interval  $(0,1)$ , where values close to 0 indicate that populations are different.

To build this confidence intervals, 10 possible methods are given, and its algorithms are mainly based on the delta method and resampling bootstrap techniques. Both techniques are used to calculate the variability of the estimator of Kullback-Leibler's overlap coefficient, and, with this, the associated confidence interval. Sometimes, it will be useful to apply a Box-Cox transformation to the data, or to consider the logit scale to the confidence interval. The proposed confidence intervals for the Kullback-Leibler's overlap coefficient for two densities, give good results when similarity between populations is small. This is because as the Kullback-Leibler's overlap coefficient increases, the width of the confidence interval increases too, even with large sizes of samples. There are no big differences between the delta method and using some bootstrap techniques. The logit scale lets find more precises confidence intervals as concluded in the simulation study.

## Keywords

Overlap coefficient, Kullbak-Leibler, Delta Method, Bootstrap, Confidence intervals.

# Índice general

Índice	I
Agradecimientos	II
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Medidas de solapamiento . . . . .	1
1.2. Resultados previos . . . . .	5
1.3. Ejemplos con datos reales . . . . .	8
<b>2. Métodos paramétricos para la construcción de intervalos de confianza</b>	<b>15</b>
2.1. Método Delta . . . . .	16
2.2. Método Delta-BC . . . . .	17
2.3. Método Delta-BC- $\lambda$ . . . . .	18
2.4. Transformaciones logit . . . . .	19
2.5. Métodos Bootstrap . . . . .	20
<b>3. Simulación</b>	<b>23</b>
3.1. Método Delta y L-Delta . . . . .	24
3.2. Método Delta-BC y L-Delta-BC . . . . .	25
3.3. Método Delta-BC- $\lambda$ y L-Delta-BC- $\lambda$ . . . . .	25
3.4. Método Bootstrap, L-Bootstrap, Bootstrap-p y Bootstrap-BCa . . . . .	26
3.5. Resultados . . . . .	27
<b>4. Aplicación a datos reales</b>	<b>35</b>
<b>5. Conclusiones generales</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>
<b>A. Medida de solapamiento de Kullback Leibler</b>	<b>42</b>
<b>B. Matriz de varianzas covarianzas de los estimadores máximo verosímiles</b>	<b>44</b>
<b>C. Derivadas parciales para el método Delta-BC-<math>\lambda</math></b>	<b>46</b>
<b>D. Tablas de resultados de la simulación</b>	<b>48</b>

# Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, a mis tutoras Alba María Franco Pereira y María del Carmen Pardo Llorente, por darme las pautas necesarias y por emplear gran parte de su tiempo para el desarrollo de este trabajo, sin ellas nada de esto hubiera sido posible.

Debo agradecer a mi familia y amigos, los buenos momentos que me han dado, que han ayudado a desarrollar un ambiente de trabajo sano y feliz durante todos estos años.

A cada uno de los profesores que me han formado durante los cuatro cursos del grado, por enseñarme que las matemáticas son más que una ciencia, por hacer de la facultad un lugar cordial y de alto prestigio.

A Elías Baro, por convencerme, inconscientemente, de que no abandonara mis estudios. A Gustavo Muñoz, por su templanza, paciencia y buen trato.

A mis compañeros de cada uno de los cursos, desde matemáticas básicas hasta las prácticas en empresa, pero especialmente a Pablo Cano Herrera, por enseñarme que ninguna circunstancia te debe apartar de tu objetivo, y a Andrés Costumero, por su positividad, vitalidad y buen sentido del humor.

A todos vosotros, gracias.

# Capítulo 1

## Introducción

En Estadística es muy común realizar estudios comparativos entre dos poblaciones diferentes, así como medir el grado de semejanza entre sus parámetros o en sus densidades o distribuciones. Supongamos  $f_{X_1}(x_1)$  y  $f_{X_2}(x_2)$  las correspondientes funciones de densidad de las poblaciones  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Nuestro objetivo en este trabajo consistirá en calcular intervalos de confianza paramétricos para una medida de solapamiento entre estas dos densidades, basada en la medida de divergencia de Kullback-Leibler, para medir el grado de semejanza entre ellas.

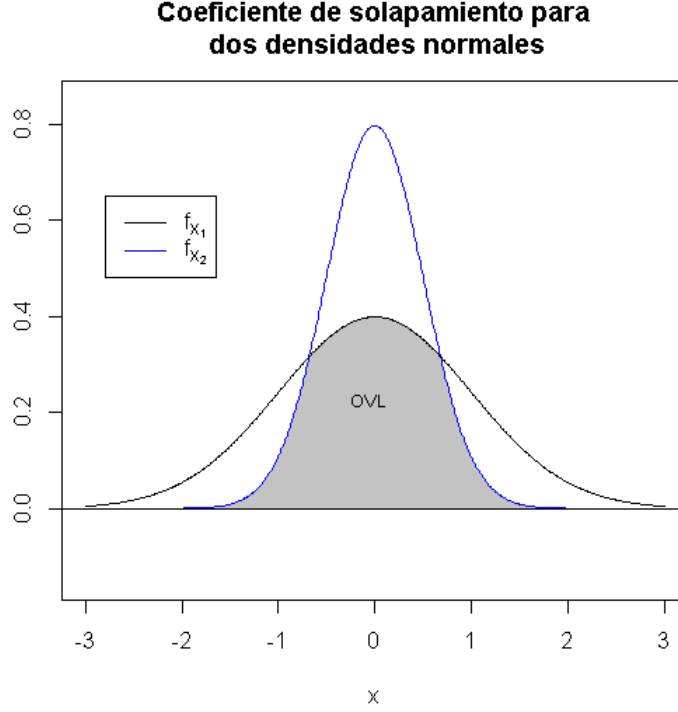
### 1.1. Medidas de solapamiento

Las medidas o coeficientes de solapamiento se definen como el área de intersección delimitado por dos densidades en la recta real. A modo de ejemplo, supongamos que

$$X_1 \sim N(0, 1)$$

$$X_2 \sim N(0, 0.5)$$

El coeficiente de solapamiento para estas dos poblaciones será el área de intersección de las dos densidades normales. En inglés, este coeficiente se denomina «Overlapping coefficient», lo que hace que, comúnmente, se le denote por OVL.



**Figura 1.1:** *OVL entre  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim N(0, 0.5)$*

En la Figura 1.1 podemos ver gráficamente en qué consiste el coeficiente de solapamiento. Originalmente, el interés en este coeficiente surge en torno a 1958 y se le atribuye a un trabajador de la empresa RAND Corporation, llamado Edward B. Berman, el cual usó este coeficiente para comparar sistemas armamentísticos diferentes, según Larson et al. (2014). Sin embargo, el uso como tal de estas medidas se atribuyen a Murray Weitzman en 1970 en estudios comparativos de ingresos.

Por simplificación en la notación de ahora en adelante usaremos  $f_1(x_1)$  y  $f_2(x_2)$ , para denotar a  $f_{X_1}(x_1)$ , y  $f_{X_2}(x_2)$  respectivamente. La formalización matemática del OVL se puede realizar de diversas formas, lo que da lugar a varias medidas conocidas, como las siguientes

- Medida de Weitzman:

$$\Delta = \int \min\{f_1(x), f_2(x)\}dx$$

- Medida de Matusita:

$$\rho = \int \sqrt{f_1(x)f_2(x)}dx$$

- Medida de Morisita:

$$\lambda = \frac{2 \int f_1(x)f_2(x)dx}{\int (f_1(x))^2 dx \int (f_2(x))^2 dx}$$

- Medida de Kullback-Leibler:

$$\Lambda = \frac{1}{1 + KL(f_1||f_2)}, \quad (1.1)$$

siendo  $KL(f_1||f_2) = \int (f_1(x) - f_2(x))\log(\frac{f_1(x)}{f_2(x)})dx$ .

Es sencillo probar que, bajo la igualdad de las densidades ( $f_1(x) = f_2(x)$ ), las medidas anteriormente definidas son iguales a 1. Dicho de otra forma, las cuatro medidas se aproximan a 1 bajo similaridad y se alejan de 1 a medida que existen más diferencias entre ambas densidades.

Para el ejemplo de la Figura 1.1, en el que  $X_1 \sim N(0, 1)$ ,  $X_2 \sim N(0, 0.5)$ , vamos a calcular su medida de Weitzman.

En primer lugar, encontramos los puntos de corte entre ambas densidades

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Obteniendo

$$x = \begin{cases} -0.679778 \\ 0.679778 \end{cases}$$

Ahora, considerando la función de distribución correspondiente hasta el punto de corte, según la Figura 1.1, se obtiene

$$\Delta = 2F_{x_2}(-0.679778) + F_{x_1}(0.679778) - F_{x_1}(-0.679778) = 0.6773.$$

Donde  $F_{x_1}$  y  $F_{x_2}$  denotan las funciones de distribución de las poblaciones  $X_1$  y  $X_2$ , en ese orden.



Este valor de la medida de Weitzman nos estaría indicando una cierta diferencia entre las dos densidades de las poblaciones  $X_1$  y  $X_2$ , ya que no se aproxima a 1. Realmente, el OVL se podría interpretar como un porcentaje de similitud, que en este caso se correspondería con un 67.73 %.

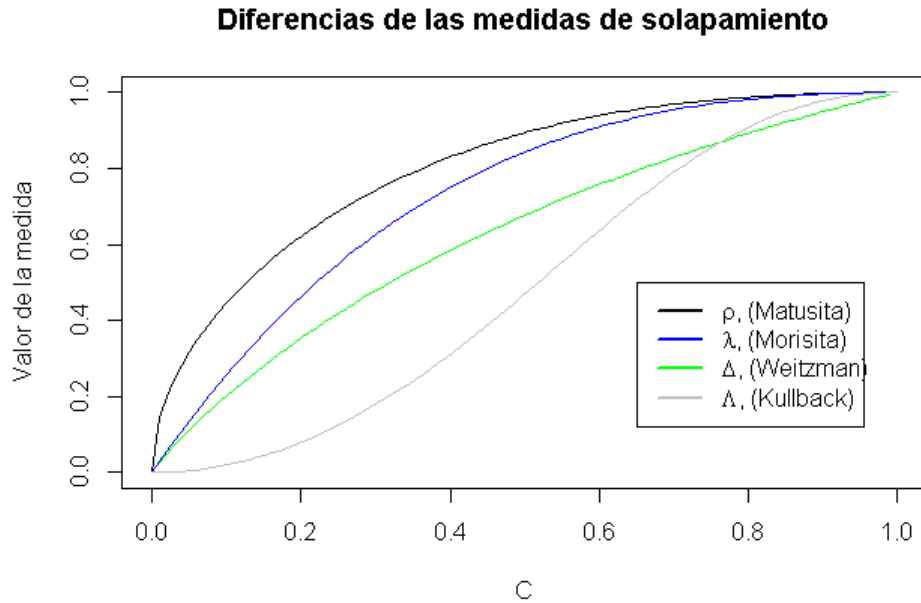
Podemos evaluar el resto de medidas, de tal forma que, siendo  $C = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1/2}{1} = 1/2$  con  $0 \leq C \leq 1$ , se tienen las siguientes expresiones para las medidas bajo igualdad de medias de poblaciones normales (véase en Dhaker et al. (2018))

$$\rho = \sqrt{\frac{2C}{1+C^2}} = 0.8944$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+C^2}} \left( \frac{C}{1+C} \right) = 0.8432$$

$$\Lambda = \frac{2C^2}{C^4 + 1} = 0.4705$$

Se puede ver una gran diferencia en los resultados obtenidos por cada una de las distintas medidas.



**Figura 1.2:** *Valor de las medidas para poblaciones normales con medias iguales*

Claramente, se mantiene el orden siguiente entre las 3 medidas

$$\rho \geq \lambda \geq \Delta$$

e igualmente

$$\rho \geq \lambda \geq \Lambda$$

Sin embargo, no hay relación clara para las medidas de Weitzman y Kullback, ya que a partir de un cierto  $C$ , la medida de Kullback es mayor que la de Weitzman (ver Figura 1.2).

## 1.2. Resultados previos

Para construir un intervalo de confianza de un coeficiente de solapamiento, se necesita estimar de manera puntual el coeficiente y conocer su distribución. Como en general no se conoce la distribución, se recurre a técnicas de inferencia estadística. En este caso, se desconoce totalmente la distribución de la medida de Kullback-Leibler,  $\Lambda$ , con lo que usaremos el método delta para tratar de calcular el intervalo de confianza de esta medida (ver en Kupelberg et al. (2017) y en Casella et al. (2002)).

**Teorema 1.** (Método delta multivariante)

Supongamos una sucesión de variables aleatorias multidimensionales  $X_n$  que satisfacen la convergencia en ley

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \rightarrow N(0, \Sigma).$$

Se tiene entonces que, dada cualquier función  $g$  que satisfaga la propiedad de que  $\nabla g(\theta)$  existe y toma un valor distinto de 0, entonces

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \rightarrow N(0, \nabla g(\theta)' \cdot \Sigma \cdot \nabla g(\theta)).$$

La utilidad de este método es realmente interesante y es debido a que podemos encontrar la varianza de un estimador cualquiera que involucre a la muestra original, usando principalmente la función del estimador y derivándola con respecto a los parámetros involucrados.

En el caso de las medidas de solapamiento, se involucran dos poblaciones,  $X_1$  y  $X_2$ , y, si asumimos normalidad, los estadísticos que estiman los coeficientes de solapamiento, dependen, únicamente, de las medias y varianzas de cada población, es decir, de los parámetros

$$(\mu_{X_1}, \sigma_{X_1}, \mu_{X_2}, \sigma_{X_2}) = (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2).$$

De esta forma, dado un estimador cualquiera del coeficiente de solapamiento, llamémoslo  $\widehat{OVL}$ , siempre que se suponga normalidad e independencia de  $X_1$  y  $X_2$ , sabemos que su distribución conjunta seguirá una distribución normal multivariante y, por tanto, la varianza del estimador vendrá dada, según el Teorema 1, por

$$Var(\widehat{OVL}) \approx \left( \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \mu_2}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \sigma_2} \right) \widehat{\Sigma} \left( \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \mu_2}, \frac{\partial \widehat{OVL}}{\partial \sigma_2} \right)',$$

siendo  $\widehat{\Sigma}$  el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas del vector de parámetros estimados  $(\widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\sigma}_2)$ .

Sabiendo esto, y por la normalidad del estimador, se tiene que el intervalo de confianza vendrá dado por

$$\widehat{OVL} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\widehat{OVL})},$$

siendo  $z_{1-\alpha/2}$  el valor que deja una probabilidad de  $1-\alpha/2$  a su izquierda en una distribución normal estándar. Es decir, aquel que verifica

$$P(N(0, 1) \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$$

Este método para construir intervalos de confianza lo denotaremos como **Método Delta** debido al uso del Teorema 1 para el cálculo del intervalo de confianza. Es un método paramétrico porque asumimos normalidad.

Sin embargo, la realidad es que los datos no suelen seguir una distribución normal. Aún así, en muchos casos, al aplicar una transformación a los mismos, se puede obtener la normalidad necesaria para poder realizar el cálculo del intervalo de confianza anterior. Comúnmente, se suele recurrir a la transformación Box-Cox para ello, definida como

$$X_1^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X_1^\lambda - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(X_1) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

(análogo para la variable  $X_2$ )

El valor  $\lambda$  óptimo para obtener la normalidad de las variables, que, de hecho, se usa para ambas transformaciones, se puede obtener maximizando la función de verosimilitud dada por (véase en Bantis et al. (2019) y en Zou et al. (1998))

$$\begin{aligned} l(\lambda) = & -\frac{n_1}{2} \log \left( \frac{\sum_i^{n_1} \left( x_{1i}^{(\lambda)} - \frac{\sum_i^{n_1} x_{1i}^{(\lambda)}}{n_1} \right)^2}{n_1} \right) - \frac{n_2}{2} \log \left( \frac{\sum_i^{n_2} \left( x_{2i}^{(\lambda)} - \frac{\sum_i^{n_2} x_{2i}^{(\lambda)}}{n_2} \right)^2}{n_2} \right) + \\ & + (\lambda - 1) \left( \sum_i^{n_1} \log(x_{1i}) + \sum_j^{n_2} \log(x_{2j}) \right) + k, \end{aligned} \quad (1.2)$$

siendo  $k$  una constante y  $n_1$  y  $n_2$  los correspondientes tamaños muestrales de cada una de las poblaciones.

Tras encontrar el valor de  $\lambda$  que maximiza la función anterior, la idea es calcular las medias y varianzas de los datos transformados, es decir, calcular  $\mu_1^{(\lambda)}, \sigma_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)}, \sigma_2^{(\lambda)}$  y con ello, el valor de la estimación del coeficiente del solapamiento  $\widehat{OVL}^{(\lambda)}$ , resultando su varianza entonces

$$\begin{aligned} & Var(\widehat{OVL}^{(\lambda)}) \approx \\ & \approx \left( \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right) \widehat{\Sigma}^{(\lambda)} \left( \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{OVL}^{(\lambda)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right)', \end{aligned}$$

con  $\widehat{\Sigma}^{(\lambda)}$  la matriz de varianzas y covarianzas del vector de parámetros estimados de

$$(\mu_1^{(\lambda)}, \sigma_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)}, \sigma_2^{(\lambda)})$$

Una vez obtenida la normalidad necesaria, podemos seguir con el cálculo del intervalo de confianza, igual que en el Método Delta. Con la aplicación de la transformación Box-Cox, el método pasa a conocerse como **Delta-BC o Delta-BC- $\lambda$** , tal y como se definen en Bantis et al. (2019), dependiendo, si no se considera la variabilidad del parámetro  $\lambda$  a la hora de

calcular la varianza del estimador (Delta BC), o si por el contrario se considera esta en el cálculo de la varianza (Delta BC- $\lambda$ ). Véase en más detalle las diferencias entre ambos métodos en 2.2 y 2.5.

### 1.3. Ejemplos con datos reales

#### Ejemplo 1

La base de datos (véase Chaintaya et al. (2012)) con la que se va a tratar, describe el comportamiento evolutivo de los pinzones de Darwin, los cuales fueron descubiertos por Charles Darwin en uno de sus viajes a las islas Galápagos. Para ver si estos pájaros experimentan cierta evolución, lo más común es medir la longitud y forma del pico a lo largo de los años. En nuestro caso, usaremos los datos del estudio de Peter y Rosemary Grant, pareja de biólogos de la universidad de Princeton, que se dedicaron desde 1973 a recopilar abundante información de todo tipo de los pinzones.

La base de datos recopila información de la longitud de los picos, medida en milímetros, de los pinzones de Darwin en los años 1975 y 2012. Nótese que se desconoce la edad de los pájaros y no son los mismos de un estudio a otro, ya que su esperanza de vida está en torno a los 9 o 12 años. Nuestro objetivo es ver el grado de diferencia en las distribuciones de las longitudes de los picos pasados 37 años, así como dar un intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback Leibler de ambas distribuciones.

Un análisis descriptivo de las variables resulta

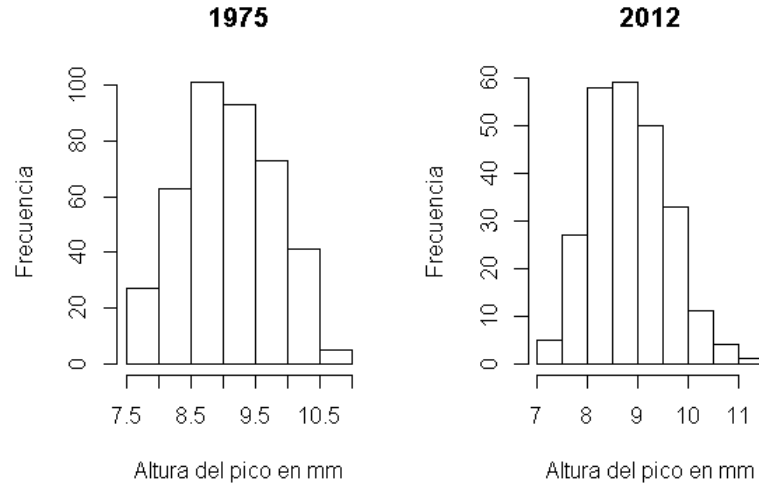
Año	Tamaño Muestral	Media	Desviación
1975	403	9.126	0.708
2012	248	8.902	0.757

**Tabla 1.1:** *Descriptivos básicos*

Se observa como hay una cierta disminución en la longitud media de los picos de 1975

a 2012. Sin embargo, ambas poblaciones resultan muy similares en cuanto a media y a desviación, con lo que se espera que las estimaciones del OVL sean próximas a 1, siempre que procedan de una misma distribución.

Veamos los histogramas de las alturas de los picos transcurridos 37 años



**Figura 1.3:** *Histogramas de los datos de 1975 y de 2012*

Gráficamente podemos sospechar que haya una cierta normalidad de los datos, aunque lo ideal es realizar un test de normalidad.

Por el test de Anderson-Darling, se obtiene

Año	Valor del estadístico	P-valor
1975	1.0007	0.01214
2012	0.73012	0.05629

**Tabla 1.2:** *Test de Anderson Darling*

En este caso podemos aceptar a un nivel de significación del 5% la normalidad de los datos para el año 2012, pero no para 1975. Véanse los resultados de las estimaciones del intervalo de confianza de la medida de Kullback Leibler en la Sección 4.

## Ejemplo 2

En este caso, el conjunto de datos, siguiendo el estudio de Franco et al. (2017), trata de comparar el poder de discriminación de dos sueros entre pacientes con cáncer de páncreas y pancreatitis: el CA-125, un antígeno del cáncer y el CA-19-9, un antígeno basado en carbohidratos. Se analizarán las diferencias obtenidas entre los 90 enfermos con cáncer de páncreas y un grupo de control de 51 individuos con pancreatitis. Se miden estos dos antígenos tras la extracción del suero, en una escala continua y positiva en la que valores pequeños indican individuos sin cáncer. Un análisis descriptivo de las variables resulta

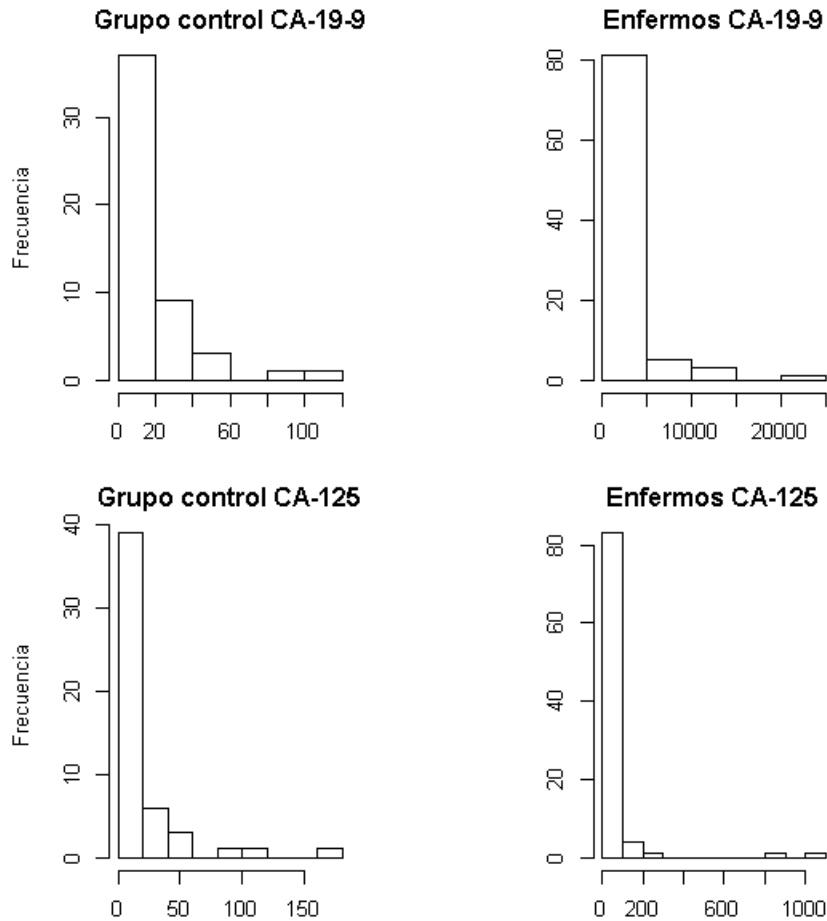
Grupo	Tamaño Muestra	Media	Desviación
Control	51	18.0343	20.8165
Enfermos	90	1715.414	3681.469

**Tabla 1.3:** *Descriptivos básicos para el suero CA-19-9*

Grupo	Tamaño Muestra	Media	Desviación
Control	51	21.8176	30.2957
Enfermos	90	55.0474	138.8324

**Tabla 1.4:** *Descriptivos básicos para el suero CA-125*

A simple vista de las Tablas 1.3 y 1.6, se puede ver como son algo más similares las poblaciones asociadas a la medición del antígeno CA-125, pero no sabemos la cantidad exacta de semejanza o diferencia, y para ello se calculará la estimación del coeficiente de Kullback-Leibler, así como su intervalo de confianza asociado. Los resultados serán presentados en la Sección 4. Para comprobar la normalidad de ambos grupos, recurrimos a los histogramas



**Figura 1.4:** *Histogramas para cada grupo y su suero correspondiente*

A simple vista, se aprecia que las distribuciones en este caso no son normales. El test de Anderson Darling proporciona los siguientes resultados

Grupo	Valor del estadístico	P-valor
Control	5.4377	1.30e-13
Enfermos	16.058	2.2e-16

**Tabla 1.5:** *Test de Anderson Darling para el suero CA-19-9*



Grupo	Valor del estadístico	P-valor
Control	8.6176	2.2e-16
Enfermos	20.901	2.2e-16

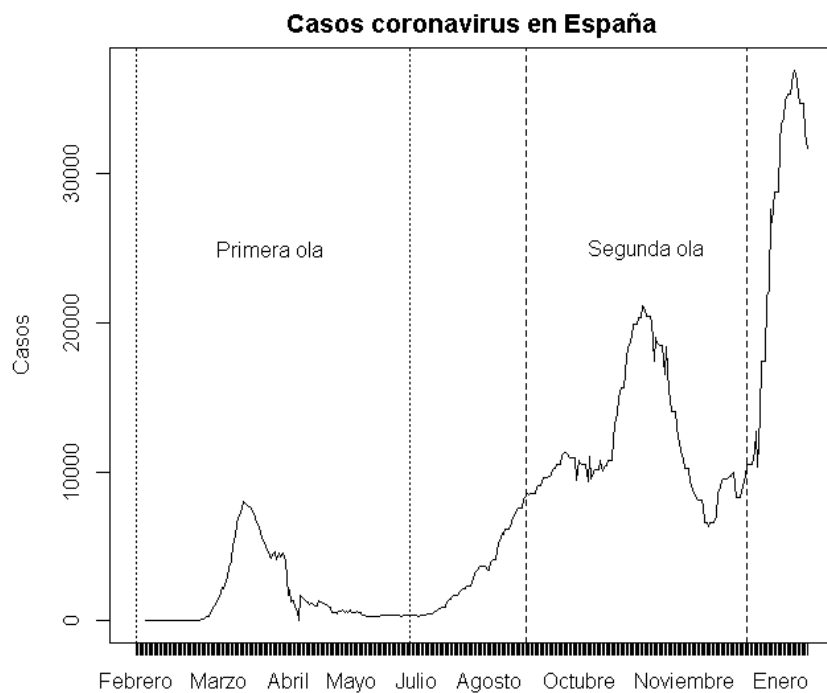
**Tabla 1.6:** *Test de Anderson Darling para el suero CA-125*

Teóricamente se obtiene el resultado de no normalidad para ninguno de los 4 grupos para cada suero correspondiente. La idea por tanto es dar un valor numérico a la semejanza o diferencia entre ambos grupos de acuerdo a estos dos antígenos, mediante el uso del coeficiente de Kullback-Leibler, tras la aplicación de la transformación Box-Cox a los datos. También se darán los intervalos de confianza asociados a la medida de Kullback-Leibler, tal y como se puede ver en el Ejemplo 2 de la Sección 4.

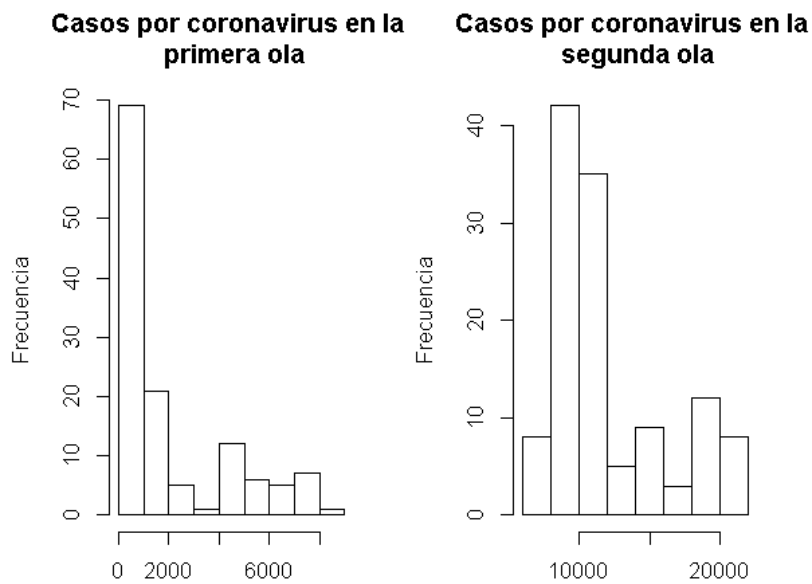
### Ejemplo 3

En este ejemplo, se trata de comparar el porcentaje de similitud entre las dos primeras olas de contagios por COVID-19 en España. Véase en detalle la base de datos en Ritchie et al. (2021), en la que se proporciona una curva suavizada del coronavirus. En la Figura 1.5, se puede ver la curva suavizada que se comenta, que permite distinguir dos olas de contagios, tal y como se estudian en, Grasso et al. (2021), que abarcan desde el 1 de Febrero de 2020 al 31 de Junio de 2020 y del 1 de Septiembre de 2020 al 31 de Diciembre de 2020, respectivamente.

Tal y como se muestra en el histograma de ambas olas, en la Figura 1.6, se ve una falta de normalidad de los datos muy clara, con lo que serán necesarios métodos con transformaciones Box-Cox que permitan estimar el intervalo de confianza para la medida o coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler.



**Figura 1.5:** *Casos por coronavirus a lo largo del tiempo*



**Figura 1.6:** *Histogramas de casos de coronavirus para ambas olas*

Un análisis descriptivo básico para ambas olas resulta

Ola	Tamaño Muestral	Media	Desviación
Primera	127	1954.941	2357.869
Segunda	122	11866.07	4076.034

**Tabla 1.7:** *Descriptivos básicos*

Es claro que se espera un valor de la estimación de la medida de Kullback-Leibler pequeño, ya que hay poca semejanza entre ambas poblaciones, a simple vista, debido a que la segunda ola de contagios presenta muchos más casos, en media, que la primera. Véanse los resultados asociados al cálculo del intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler en la Sección 4.

## Capítulo 2

# Métodos paramétricos para la construcción de intervalos de confianza

La medida de solapamiento de Kullback-Leibler definida en la Sección 1.1, realmente es una modificación de la divergencia de Kullback-Leibler, la cual se usa como medida de distancia entre dos densidades. Siempre que las densidades  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  existan con respecto a la medida de Lebesgue, la divergencia de Kullback-Leibler viene dada por

$$D(f_1||f_2) = \int_{R^d} f_1(x) \log \left( \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) dx \geq 0.$$

De ahora en adelante, nuestro objetivo consiste en dar expresiones teóricas al intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler

$$\Lambda = \frac{1}{1 + KL(f_1||f_2)},$$

siendo  $KL(f_1||f_2) = \int (f_1(x) - f_2(x)) \log \left( \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) dx$ .

Se puede probar (véase demostración en Apéndice A) que, bajo hipótesis de normalidad, con  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  y  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ , se verifica que

$$\Lambda = \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^4 + \sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_2^4 + \sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1)^2}$$

## 2.1. Método Delta

Teniendo en cuenta que los estimadores máximo verosímiles para los parámetros de una normal son la media muestral y la varianza muestral (véase demostración multivariante en Alt et al. (2017)), estos se usarán para estimar el coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler, debido a la normalidad asintótica de estos estimadores, necesaria en el método Delta. Tenemos así que

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_i^{n_1} x_{1i}, \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{n_1} \sum_i^{n_1} (x_{1i} - \hat{\mu}_1)^2. \\ &(\text{análogo para } \hat{\mu}_2 \text{ y } \hat{\sigma}_2^2)\end{aligned}$$

Con esto, una estimación del coeficiente de solapamiento de Kullback Leibler vendrá dada por

$$\hat{\Lambda} = \frac{2\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^4 + \hat{\sigma}_1^2(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)^2 + \hat{\sigma}_2^4 + \hat{\sigma}_2^2(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)^2} \quad (2.1)$$

Volviendo ahora al cálculo de la varianza por el Método Delta, mostrado en la Sección 1.2, tenemos que

$$Var(\hat{\Lambda}) \approx \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \mu_2}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \sigma_2} \right) \hat{\Sigma} \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \mu_2}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \sigma_2} \right)'$$

Calculemos, por tanto, las derivadas parciales de la medida de Kullback-Leibler. Denotemos al denominador por  $v = \sigma_1^4 + \sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_2^4 + \sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1)^2$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu_1} &= \frac{-2\sigma_1^2\sigma_2^2(2\sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2) - 2\sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1))}{v^2} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu_2} &= \frac{-2\sigma_1^2\sigma_2^2(-2\sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2) + 2\sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1))}{v^2} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_1} &= \frac{4\sigma_1\sigma_2^2v - 2\sigma_1^2\sigma_2^2(4\sigma_1^3 + 2\sigma_1(\mu_1 - \mu_2)^2)}{v^2} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_2} &= \frac{4\sigma_2\sigma_1^2v - 2\sigma_1^2\sigma_2^2(4\sigma_2^3 + 2\sigma_2(\mu_2 - \mu_1)^2)}{v^2}\end{aligned} \quad (2.2)$$

Nótese que, para las estimaciones de estas derivadas parciales, tan solo es necesario reemplazar las varianzas poblaciones por las varianzas muestrales y las medias poblaciones por las medias muestrales.

La forma de la matriz  $\hat{\Sigma}$  será

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\mu_1}^2 & \hat{\sigma}_{\mu_1, \sigma_1} & \hat{\sigma}_{\mu_1, \mu_2} & \hat{\sigma}_{\mu_1, \sigma_2} \\ \hat{\sigma}_{\mu_1, \sigma_1} & \hat{\sigma}_{\sigma_1}^2 & \hat{\sigma}_{\sigma_1, \mu_2} & \hat{\sigma}_{\sigma_1, \sigma_2} \\ \hat{\sigma}_{\mu_1, \mu_2} & \hat{\sigma}_{\mu_2, \sigma_1} & \hat{\sigma}_{\mu_2}^2 & \hat{\sigma}_{\mu_2, \sigma_2} \\ \hat{\sigma}_{\sigma_2, \mu_1} & \hat{\sigma}_{\sigma_2, \sigma_1} & \hat{\sigma}_{\sigma_2, \mu_2} & \hat{\sigma}_{\sigma_2}^2 \end{pmatrix}$$

Se puede probar que esta matriz (véase apéndice B) resulta

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2(n_1-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_2^2}{2(n_2-1)} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

El intervalo de confianza para la medida de Kullback Leibler vendrá dado, por lo tanto, por

$$\hat{\Lambda} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda})}$$

## 2.2. Método Delta-BC

El método Delta-BC es idéntico al método Delta, pero en el que, previamente, los datos se normalizan mediante una transformación Box-Cox (ver Sección 1.2) para ambas variables. Para esta transformación, es necesario calcular el parámetro  $\lambda$  que haga máxima la función de verosimilitud  $l(\lambda)$ . Tras ello, nuestros datos normalizados pasan a ser  $X_1^{(\lambda)}$  y  $X_2^{(\lambda)}$ , y con estos, se deben realizar todos los cálculos realizados en la Sección 2.1. Las medias y varianzas muestrales, entonces, se denotan por

$$\hat{\mu}_1^{(\lambda)} = \frac{1}{n_1} \sum_i^{n_1} x_{1i}^{(\lambda)} = \bar{x}_1^{(\lambda)},$$

$$\hat{\mu}_2^{(\lambda)} = \frac{1}{n_2} \sum_i^{n_2} x_{2i}^{(\lambda)} = \bar{x}_2^{(\lambda)},$$

$$\hat{\sigma}_1^{2(\lambda)} = \frac{1}{n_1} \sum_i^{n_1} (x_{1i}^{(\lambda)} - \bar{x}_1^{(\lambda)})^2,$$

$$\hat{\sigma}_2^{2(\lambda)} = \frac{1}{n_2} \sum_i^{n_2} (x_{2i}^{(\lambda)} - \bar{x}_2^{(\lambda)})^2.$$

La estimación de la medida de Kullback-Leibler dada por estas medias y varianzas se denota en este caso por  $\hat{\Lambda}^{(BC)}$ , y la estimación de la varianza de la medida de Kullback Leibler vendrá dada por

$$Var(\hat{\Lambda}^{(BC)}) \approx \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right) \hat{\Sigma}^{(\lambda)} \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \hat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right)',$$

Finalmente, el intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler resulta

$$\hat{\Lambda}^{(BC)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda}^{(BC)})}$$

Nótese que en este método no se incluye la variabilidad adicional del parámetro  $\lambda$ .

### 2.3. Método Delta-BC- $\lambda$

El objetivo del método Delta-BC- $\lambda$  es realizar una transformación Box-Cox como en la sección anterior, pero incluyendo la varianza del parámetro  $\lambda$ , en la varianza general del estimador  $\hat{\Lambda}^{(BC)}$ . Para ello, se debe considerar la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros, teniendo en cuenta que  $\lambda$  es un parámetro en la función de verosimilitud

$$l(\theta) = -\frac{n_{x_1}}{2} \log\left(\frac{\sum_i^{n_{x_1}} (x_{1i}^{(\lambda)} - \frac{\sum_i^{n_{x_1}} x_{1i}^{(\lambda)}}{n_{x_1}})^2}{n_{x_1}}\right) - \frac{n_{x_2}}{2} \log\left(\frac{\sum_i^{n_{x_2}} (x_{2i}^{(\lambda)} - \frac{\sum_i^{n_{x_2}} x_{2i}^{(\lambda)}}{n_{x_2}})^2}{n_{x_2}}\right) +$$

$$+(\lambda - 1) \left( \sum_i^{n_{x_1}} \log(x_{1i}) + \sum_j^{n_{x_2}} \log(x_{2j}) \right) + k,$$

que afecta a la matriz de información de Fisher, que en este caso es no diagonal (véase en más detalle en Bantis et al. (2014))

$$I(\theta) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_1^2(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu_1(\lambda) \partial \lambda} \\ 0 & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_1^2(\lambda)} & 0 & 0 & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_1(\lambda) \partial \lambda} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_2^2(\lambda)} & 0 & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu_2(\lambda) \partial \lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_2^2(\lambda)} & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_2(\lambda) \partial \lambda} \\ \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu_1(\lambda) \partial \lambda} & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_1(\lambda) \partial \lambda} & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu_2(\lambda) \partial \lambda} & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma_2(\lambda) \partial \lambda} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

siendo  $\theta = (\mu_1^{(\lambda)}, \sigma_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)}, \sigma_2^{(\lambda)}, \lambda)$  (Véase la forma de las derivadas parciales de  $I(\theta)$  en el Apéndice C).

La matriz de varianzas y covarianzas estimada  $\widehat{\Sigma}_\lambda^{(\lambda)}$  será, por tanto, la matriz de dimensión 4x4, de la inversa de la matriz  $I$ , es decir,

$$\widehat{\Sigma}_\lambda^{(\lambda)} = I(\theta)_{4 \times 4}^{-1}. \quad (2.5)$$

Igual que en la sección anterior, la estimación de la varianza de la medida de Kullback-Leibler vendrá dada por

$$Var_\lambda(\widehat{\Lambda}^{(BC)}) \approx \left( \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right) \widehat{\Sigma}_\lambda^{(\lambda)} \left( \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_1^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \mu_2^{(\lambda)}}, \frac{\partial \widehat{\Lambda}^{(BC)}}{\partial \sigma_2^{(\lambda)}} \right)',$$

Finalmente, el intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler resulta

$$\widehat{\Lambda}^{(BC)} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var_\lambda(\widehat{\Lambda}^{(BC)})}.$$

Nótese que en este método si se incluye la variabilidad adicional del parámetro  $\lambda$ .

## 2.4. Transformaciones logit

En ocasiones, es útil considerar los intervalos de confianza en la escala logit. Tal y como se describe en Sadinle et al. (2009), se tiene que

$$Logit(\widehat{\Lambda}) = \log\left(\frac{\widehat{\Lambda}}{1 - \widehat{\Lambda}}\right)$$

y

$$Var(Logit(\widehat{\Lambda})) = \frac{Var(\widehat{\Lambda})}{(\widehat{\Lambda}(1 - \widehat{\Lambda}))^2},$$



con lo que el intervalo de confianza en la escala logit viene dado por

$$\text{Logit}(\hat{\Lambda}) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\text{Logit}(\hat{\Lambda}))}.$$

Deshaciendo el cambio, el intervalo de confianza de la medida de Kullback-Leibler vendrá dado por

$$\left[ \frac{\exp[\text{Logit}(\hat{\Lambda}) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\text{Logit}(\hat{\Lambda}))}]}{1 + \exp[\text{Logit}(\hat{\Lambda}) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\text{Logit}(\hat{\Lambda}))}]}, \frac{\exp[\text{Logit}(\hat{\Lambda}) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\text{Logit}(\hat{\Lambda}))}]}{1 + \exp[\text{Logit}(\hat{\Lambda}) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\text{Logit}(\hat{\Lambda}))}]} \right].$$

Cuando se aplica esta transformación logit a los métodos Delta, Delta-BC y Delta-BC- $\lambda$ , estos se denominan **L-Delta**, **L-Delta-BC** y **L-Delta-BC- $\lambda$** , respectivamente, según Bantis et al. (2019).

## 2.5. Métodos Bootstrap

El método bootstrap es muy útil en estadística. Es un método no paramétrico de remuestreo que surge para estimar la precisión de un estimador y que estima la población de partida, tomando B remuestras con reemplazamiento de la muestra original, llamadas remuestras bootstrap (ver Efron et al. (1993)). El método no asume ninguna distribución de los datos, y en nuestro caso, se usa para calcular los extremos del intervalo de confianza, haciendo uso de la varianza muestral de las B estimaciones de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler ( $\Lambda$ ), es decir

$$EI = \hat{\Lambda} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\Lambda})}$$

$$ES = \hat{\Lambda} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\Lambda})},$$

con  $\hat{\Lambda}$  la estimación puntual del coeficiente de Kullback-Leibler a partir de las dos muestras originales y  $\text{Var}(\hat{\Lambda})$  la varianza muestral de las réplicas de la medida  $\hat{\Lambda}$  en cada una de las B remuestras bootstrap ( $\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B$ ). A este método se le denomina **Bootstrap**.

Otra manera de proceder con el método bootstrap, consiste en considerar los cuantiles empíricos, estimados de la muestra de estimadores

$$(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B).$$

En este caso, los extremos del intervalo de confianza resultan, entonces

$$EI = \hat{p}_{\alpha/2}(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B)$$

$$EI = \hat{p}_{1-\alpha/2}(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B),$$

siendo  $\hat{p}_\alpha(x)$  el percentil  $\alpha$ -ésimo estimado de la muestra  $x$ . Llamaremos a este método en el que se usan percentiles estimados por **Bootstrap-p** (bootstrap percentil).

Otro método muy común al usar las técnicas bootstrap, es el método BCa (bias-corrected and accelerated), que corrige algunas deficiencias del método bootstrap y del método bootstrap percentil. Este método, a diferencia del método Bootstrap-p, depende también de (ver Helwig et al. (2017))

- El parámetro de aceleración  $\hat{a}$ , que expresa el ratio de cambio de la desviación estándar de  $\hat{\Lambda}$  con respecto al verdadero parámetro  $\Lambda$ .
- El factor de corrección del sesgo  $\hat{z}_0$ , que mide la diferencia entre la mediana de las estimaciones de la medida mediante las B remuestras bootstrap  $(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B)$  y el valor estimado de la medida  $\hat{\Lambda}$ .

En este caso los extremos del intervalo de confianza resultan

$$EI = \hat{p}_{\alpha_1}(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B)$$

$$EI = \hat{p}_{\alpha_2}(\hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_B),$$

siendo

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})}\right)$$

$$\alpha_2 = \Phi\left(\widehat{z}_0 + \frac{\widehat{z}_0 + z_{1-\alpha/2}}{1 - \widehat{a}(\widehat{z}_0 + z_{1-\alpha/2})}\right),$$

con

$$\widehat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\{\widehat{\Lambda}_i \leq \widehat{\Lambda}\}_{i \in \{1, \dots, B\}}}{B}\right),$$

donde  $\Phi$  denota la función de distribución de una normal estándar.

En nuestro tomaremos  $\widehat{a} = 0$ , con lo que, si  $\widehat{z}_0 = 0$ , es decir, la mitad de las estimaciones bootstrap de  $\Lambda$  son menores o iguales que la estimación  $\widehat{\Lambda}$ , tenemos el caso particular Bootstrap-p. A este último método le denominamos **Bootstrap-BCa**.

Nótese que al método bootstrap se le puede aplicar una transformación a la escala logit como en la Sección 2.4, dando lugar al método **L-Bootstrap**.

# Capítulo 3

## Simulación

Para evaluar y comparar los diferentes métodos de construcción de intervalos de confianza, se lleva a cabo un extenso estudio de simulación bajo diferentes escenarios. En primer lugar, se consideran distribuciones normales con parámetros que corresponden a los verdaderos valores de la medida  $\Lambda = 0.2, 0.4, 0.6$  y  $0.8$ . Se toman los tamaños muestrales iguales  $n_1 = n_2 = 30, 50, 100, 200$  y  $500$  así como los tamaños muestrales desiguales  $n_1 = 20, n_2 = 30$  y  $n_1 = 50, n_2 = 100$ . Para cada escenario, se llevan a cabo 2000 simulaciones Monte Carlo y se calcula el intervalo de confianza al nivel  $0.05$  para  $\Lambda$ , utilizando los métodos descritos en este trabajo. Posteriormente, se realizará el mismo análisis para las distribuciones lognormales y gammas, estimando numéricamente el verdadero valor de la medida de Kullback-Leibler. Con esto se trata de concluir la eficacia de los métodos descritos cuando no se tiene la normalidad necesaria. En las Tablas [D.1](#), [D.30](#) y [D.59](#), se dan los parámetros para cada una de las distribuciones que se han usado en la simulación.

En las siguientes secciones, se proporcionan los algoritmos necesarios para cada uno de los métodos de la Sección [2](#), que permitan obtener los intervalos de confianza del coeficiente de Kullback-Leibler para las distribuciones de las tablas anteriores.

### 3.1. Método Delta y L-Delta

El algoritmo para simular intervalos de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler por el método Delta viene dado por

- 1) Seleccionar el tamaño muestral para cada una de las poblaciones normales  $n_1$  y  $n_2$
- 2) Repetir  $T$  veces:
  - 2.1) Generar una muestra de la población normal  $X_1$  de tamaño  $n_1$  y otra de la población normal  $X_2$  de tamaño  $n_2$
  - 2.2) Calcular las medias y varianzas muestrales de las muestras anteriores  $(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2^2)$
  - 2.3) Calcular el estimador  $\hat{\Lambda}$  como en la ecuación 2.1
  - 2.4) Calcular las derivadas parciales estimadas  $\frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_2}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_1} y \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_2}$ , como en 2.2.
  - 2.5) Se calcula la matriz de varianzas covarianzas  $\hat{\Sigma}$ , siguiendo la expresión dada en 2.3.
  - 2.6) Se calcula la varianza del estimador

$$Var(\hat{\Lambda}) \approx \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_2}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_2} \right) \hat{\Sigma} \left( \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_1}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\mu}_2}, \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \hat{\sigma}_2} \right)'$$

- 2.7) Se almacenan los extremos del intervalo de confianza

$$EI_t = \hat{\Lambda} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda})}$$

$$ES_t = \hat{\Lambda} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda})}$$

con  $t \in \{1, \dots, T\}$

- 3) Se obtiene el intervalo de confianza como media de todos los extremos superiores e inferiores del intervalo, es decir,  $IC = [EI, ES]$ , donde

$$EI = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T EI_t$$

$$ES = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T ES_t$$

Para el método L-Delta el algoritmo es idéntico, pero en el apartado 3) se debe dar el intervalo de confianza logit descrito en la Sección 2.4.

## 3.2. Método Delta-BC y L-Delta-BC

El algortimo para simular el intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler para el método Delta-BC es idéntico al descrito en el apartado 3.1 excepto el paso

---

2.2) Se encuentra el valor  $\lambda$  que maximice la función de máxima verosimilitud dada en la ecuación 1.2. Se calculan las medias y varianzas muestrales de los datos transformados  $X_1^{(\lambda)}$  y  $X_2^{(\lambda)}$ , denotadas por  $\hat{\mu}_1$ ,  $\hat{\sigma}_1^2$ ,  $\hat{\mu}_2$  y  $\hat{\sigma}_2^2$ .

---

Igualmente, para el método L-Delta-BC tan solo es necesario considerar el intervalo de confianza en la escala logit como en la Sección 2.4.

## 3.3. Método Delta-BC- $\lambda$ y L-Delta-BC- $\lambda$

El algortimo para simular el intervalo de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler para el método Delta-BC- $\lambda$  resulta idéntico al descrito en el apartado 3.2, salvo en el paso

---

2.5) Se calcula la matriz de varianzas covarianzas siguiendo la ecuación dada en 2.5, haciendo uso de la matriz de información de Fisher dada en 2.4.

---

Igualmente para el método L-Delta-BC- $\lambda$  tan solo es necesario transformar el intervalo de confianza a la escala logit como en la Sección 2.4.

### 3.4. Método Bootstrap, L-Bootstrap, Bootstrap-p y Bootstrap-BCa

El algoritmo por el método bootstrap necesita de las muestras originales de ambas poblaciones, llamémoslas  $x_1$  y  $x_2$  de tamaños  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente. Calculamos la estimación del coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler,  $\hat{\Lambda}$  para estas muestras. Fijamos el número de simulaciones de Monte Carlo  $T$ , así como el número de remuestras bootstrap,  $B$ .

- 1) Para cada  $b \in \{1, \dots, B\}$ , generar muestra bootstrap de  $x_1$ , llamémosla  $x_1^*$  y de  $x_2$ , llamémosla  $x_2^*$ . Calculo sus medias y varianzas muestrales  $\hat{\mu}_1^*$ ,  $\hat{\sigma}_1^{2*}$ ,  $\hat{\mu}_2^*$  y  $\hat{\sigma}_2^{2*}$
- 2) Para cada  $b \in \{1, \dots, B\}$ , almacenar el estimador  $\hat{\Lambda}_b$ , siguiendo la expresión dada en 2.1, usando  $\hat{\mu}_1^*$ ,  $\hat{\sigma}_1^{2*}$ ,  $\hat{\mu}_2^*$  y  $\hat{\sigma}_2^{2*}$
- 3) Calcular la varianza del estimador  $Var(\hat{\Lambda})$ , definida como la varianza muestral de todas las estimaciones de las remuestras bootstrap del paso anterior.
- 4) Para cada  $t \in \{1, \dots, T\}$ , almacenar los extremos del intervalo de confianza

$$[EI_t, ES_t] = [\hat{\Lambda} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda})}, \hat{\Lambda} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\Lambda})}],$$

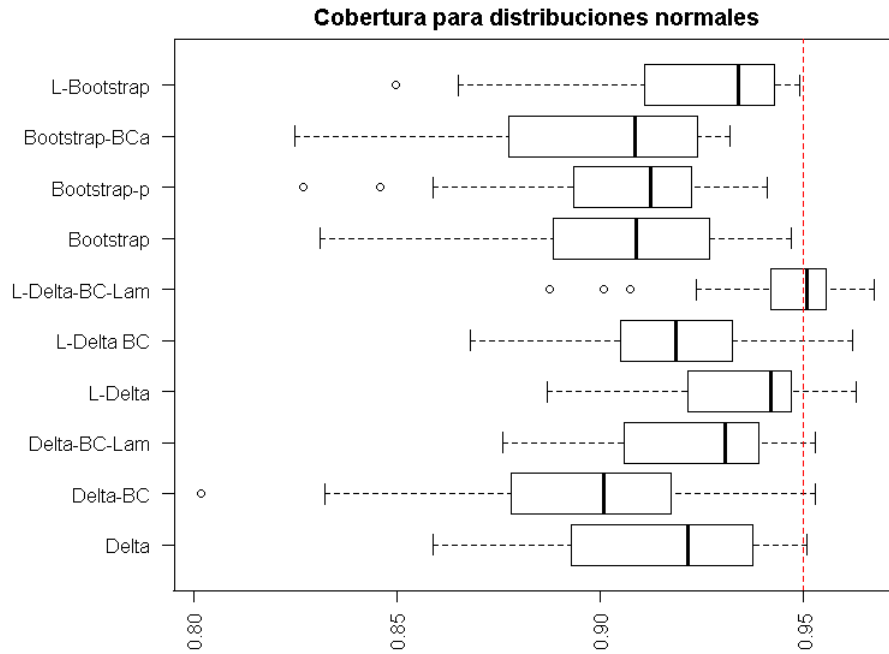
- 5) Obtengo el Intervalo de confianza como media de todos los extremos superiores e inferiores del intervalo, es decir

$$IC = [EI, ES] = [\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T EI_t, \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T ES_t]$$

El método L-Bootstrap es igual, con la correspondiente transformación del intervalo de confianza a la escala logit como en las secciones anteriores. Para los métodos **Bootstrap-p** y **Bootstrap-BCa**, el algoritmo es idéntico hasta 2), pero continua con el cálculo del intervalo de confianza correspondiente, dado en la Sección 2.5.

### 3.5. Resultados

Para las simulaciones, se han usado los algoritmos de la Sección anterior con  $T = 2000$  y  $B = 100$ . Una forma de comparar la eficiencia de los 10 métodos es observar el porcentaje de veces que el verdadero valor del coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler se encuentra dentro de los diferentes intervalos de confianza, estimados por medio de la simulación, es decir, calcular la probabilidad de recubrimiento

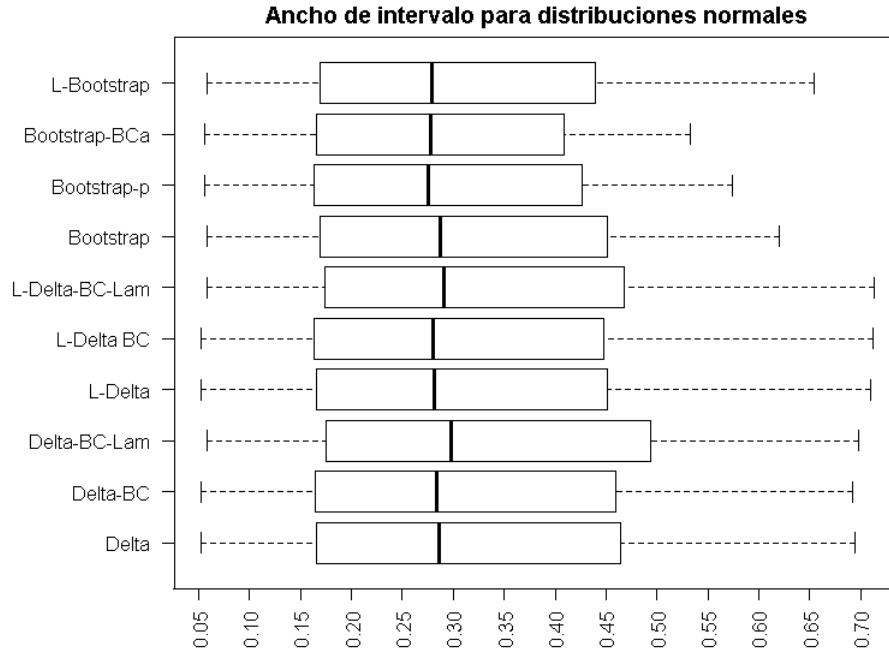


**Figura 3.1:** *Boxplot de la medida CP obtenida en el Apéndice D*

Lo deseable sería encontrar aquel método que dé una mayor proporción de veces en la que el verdadero valor de la medida  $\Lambda$  se encuentra dentro del intervalo de confianza simulado. En este caso parece destacar el método L-Delta-BC- $\lambda$ , aún contando con algunos valores atípicos. Entre los peores, destacan el método Delta-BC o Bootstrap-BCa, lo que indica que la transformación Box-Cox no es necesaria bajo normalidad. Nótese como la escala logit logra mejorar la cobertura para las distribuciones normales, tanto para las técnicas bootstrap como para las técnicas que usan el método delta. En cuanto a las técnicas bootstrap, destaca principalmente el método L-Bootstrap, seguido de Bootstrap-p.



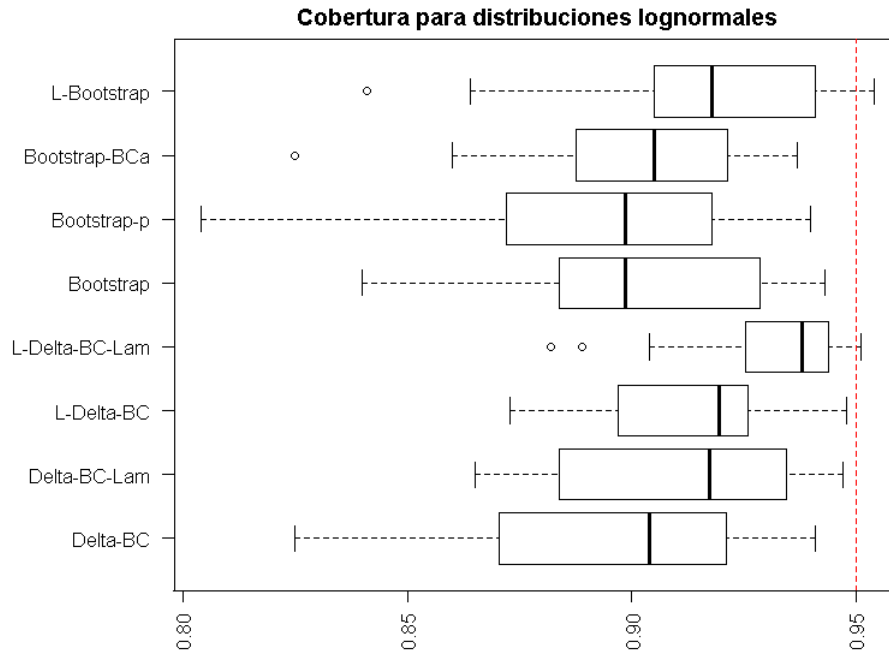
Llegados a este punto, sería interesante considerar los anchos del intervalo de confianza estimado, porque, se sabe que si este es demasiado grande, el porcentaje de aciertos aumenta considerablemente.



**Figura 3.2:** *Boxplot de la medida  $h$  obtenida en el Apéndice D*

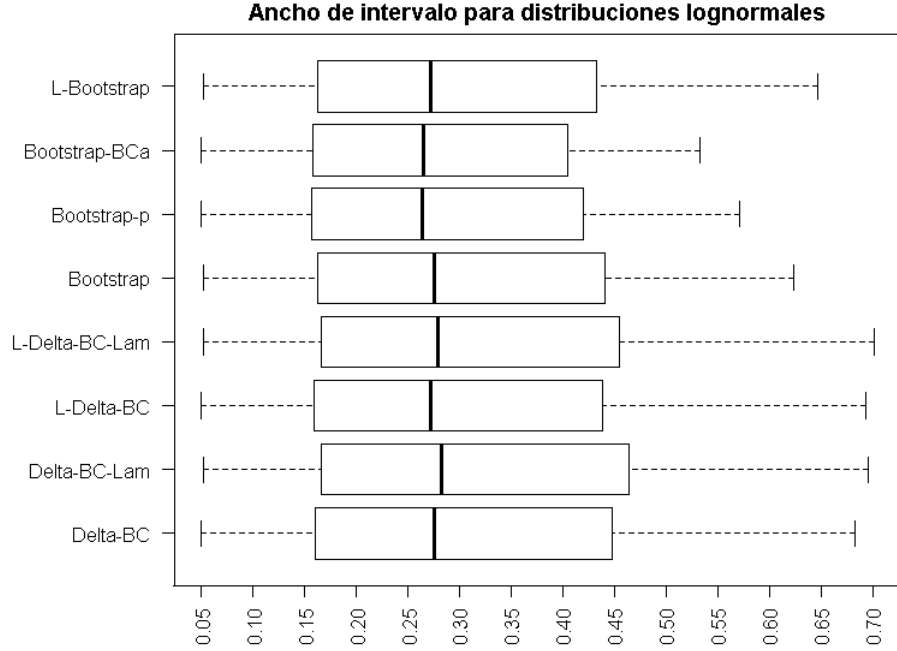
Los métodos, en términos de mediana, son muy similares, pero de ellos se pueden sacar algunas conclusiones de interés. Por ejemplo, se ve claramente que el método Delta-BC- $\lambda$ , así como el método L-Delta-BC- $\lambda$  obtienen los anchos más grandes del intervalo, y esto es debido a la varianza adicional que proporciona el estimador de la máxima verosimilitud de la transformación Box-Cox ( $\lambda$ ). Esto implica un intervalo más amplio tal y como muestra la Figura 3.2. También se ve una reducción del ancho del intervalo de confianza tras aplicar la escala logit para todos los métodos, lo cual indica la alta eficiencia de esta escala, pues no solo es capaz de reducir el ancho de intervalo, sino que también aumenta la cobertura de aciertos. En cuanto a las técnicas bootstrap, dan mejores resultados aquellas que usan percentiles empíricos, es decir, las técnicas Bootstrap-p y Bootstrap-BCa dan mejores resultados que los obtenidos por los métodos Bootstrap o L-Bootstrap.

Veamos ahora qué resultados se obtienen para las poblaciones lognormales, comenzando por la cobertura o probabilidad de recubrimiento



**Figura 3.3:** *Boxplot de la medida CP obtenida en el Apéndice D*

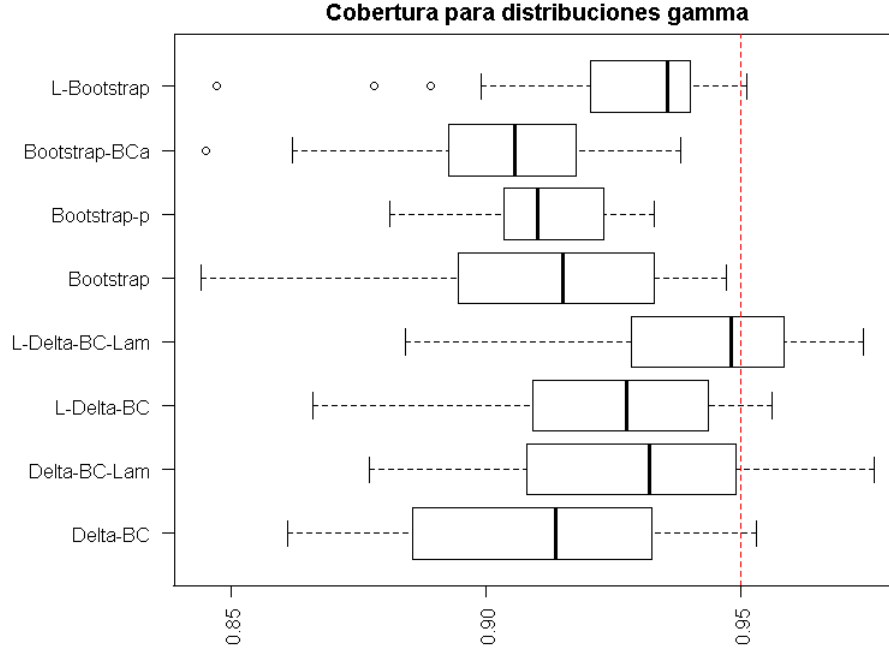
Los métodos Delta y L-Delta, los cuales requieren de normalidad, no proporcionan una cobertura aceptable, pues ni siquiera un 10 % de las veces se logra obtener un intervalo de confianza que incluya al verdadero valor de la medida de Kullback-Leibler, con lo que no se incluyen en el estudio. Esto era esperable, ya que las distribuciones no son normales en este caso. El método L-Delta-BC- $\lambda$  parece dar de nuevo la mejor cobertura. Destacan también los métodos L-Bootstrap y L-Delta-BC, lo que prueba que la escala logit logra aumentar la probabilidad de recubrimiento para las distribuciones lognormales. Veamos los anchos que proporcionan estos métodos



**Figura 3.4:** *Boxplot de la medida  $h$  obtenida en el Apéndice D*

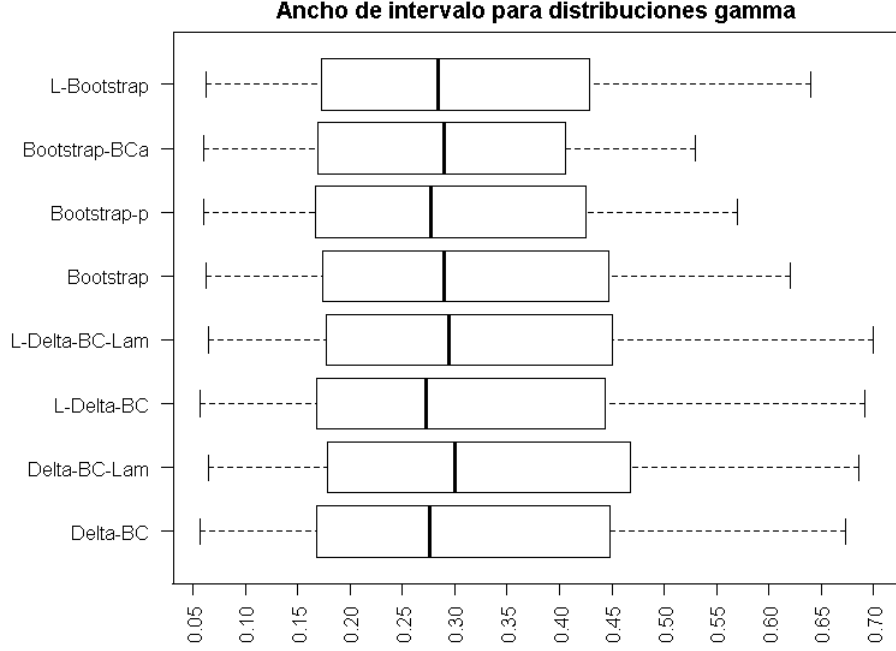
Los métodos que proporcionan los anchos del intervalo de confianza más pequeños son el método L-Delta-BC y Bootstrap-BCa principalmente. Como ocurre en el caso de normalidad, el método Delta-BC- $\lambda$  obtiene buenas coberturas debido a que el ancho de intervalo suele ser algo mayor que los anchos del resto de métodos.

Veamos ahora el caso de las distribuciones gammas



**Figura 3.5:** *Boxplot de la medida CP obtenida en el Apéndice D*

De nuevo, los métodos Delta y L-Delta no proporcionan unas coberturas aceptables, debido a que no se dispone de la normalidad necesaria para estos métodos, con lo que se descartan del estudio. La transformación Box-Cox sigue siendo suficientemente eficaz como para dar una cobertura próxima a 0.9, y destaca el método L-Delta-BC- $\lambda$  tal y como ocurría en el caso de las normales y lognormales. La escala logit sigue siendo eficaz para aumentar la probabilidad de recubrimiento. Nótese como en las técnicas bootstrap, el mejor método sería el L-bootstrap.



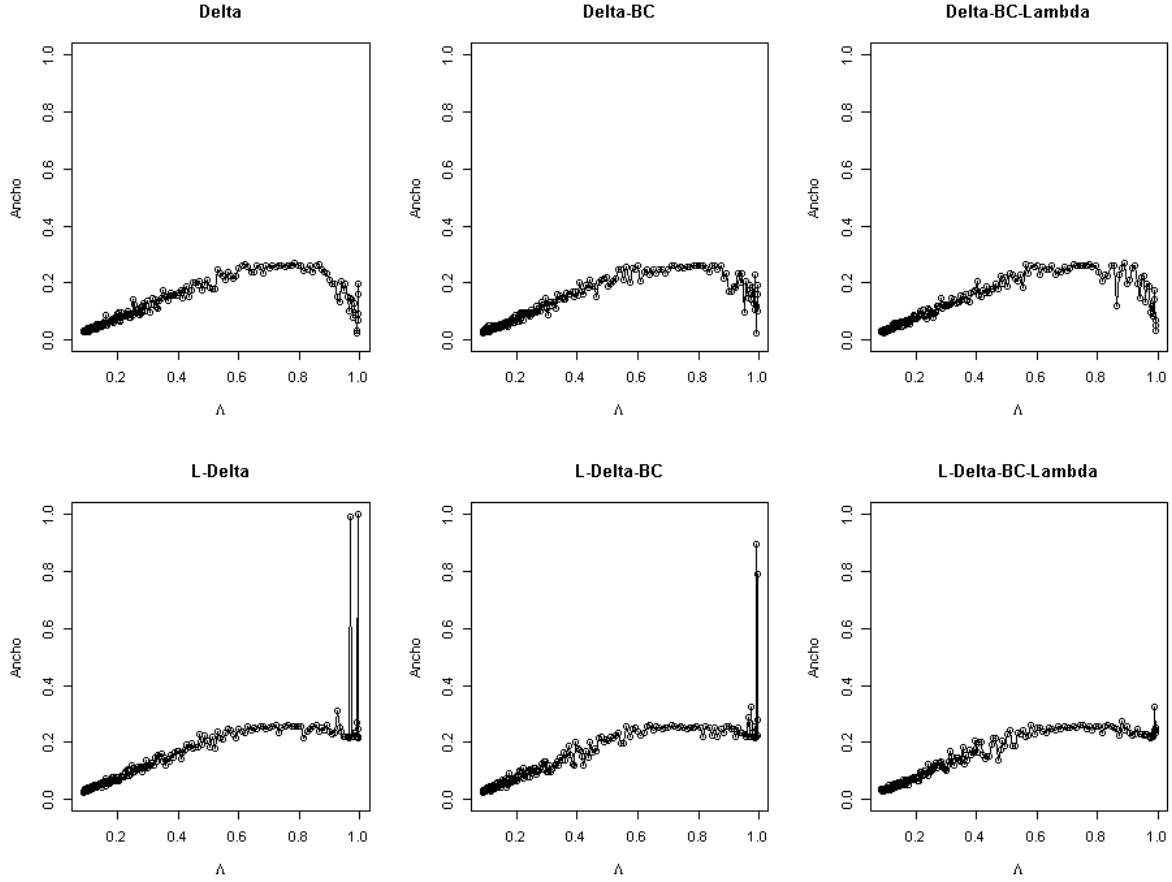
**Figura 3.6:** *Boxplot de la medida  $h$  obtenido del Apéndice D*

Destaca principalmente el método Bootstrap-BCa. Se ve claramente que la escala logit no solo logra mejorar la cobertura de todos los métodos, sino que también reduce los anchos del intervalo de confianza. De nuevo, los mayores anchos de intervalo se obtienen por el método Delta-BC- $\lambda$ , lo que explica su mayor probabilidad de recubrimiento en todas las simulaciones. Algo curioso que ocurre a la hora de calcular los intervalos de confianza de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler, es, que a medida que el valor de la medida se aproxima a 1, las estimaciones son peores que cuando esta se aproxima a 0, ya que los anchos de los intervalos son considerablemente mayores, tal y como se puede ver en el Apéndice D. Veamos un ejemplo de esto último para el conjunto de muestras de tamaños  $n_1 = n_2 = 200$  para las poblaciones normales

$$X_1 \sim N(6.5, \sqrt{0.09}) \text{ y } X_2^i \sim N(\mu_2^i, \sqrt{0.1})$$

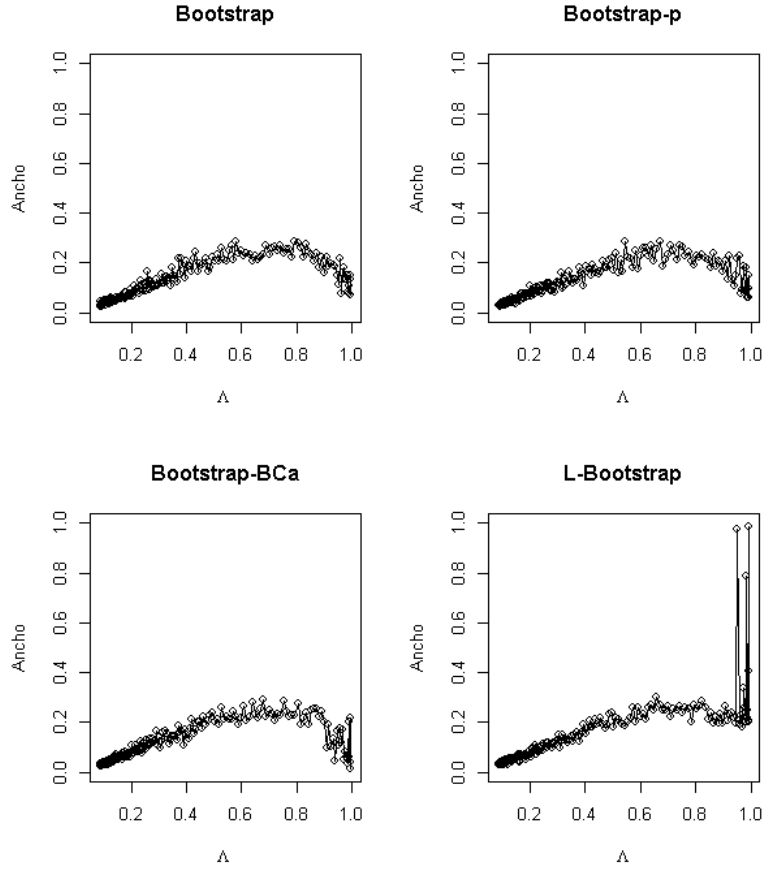
siendo  $\mu_2^i = 6.5 + 0.005(i - 1)$  para  $i \in [1, 201]$

Se obtienen los resultados para los métodos Delta



**Figura 3.7:** *Coeficiente de Kullback-Leibler frente a  $h$*

Se ve un comportamiento creciente de los anchos del intervalo hasta el valor de la medida  $\Lambda = 0.8$  aproximadamente y posteriormente los anchos del intervalo presentan un comportamiento bastante impredecible, principalmente decreciente para los métodos Delta, Delta-BC y Delta-BC- $\lambda$ . La escala logit logra reducir el comportamiento decreciente a partir de  $\Lambda = 0.8$  en adelante, pero da valores muy grandes del ancho del intervalo cuando  $\Lambda$  se aproxima a 1. Sin la escala logit, el ancho se aproxima a 0 cuando  $\Lambda$  se aproxima a 1. Para los métodos Bootstrap se da la misma situación



**Figura 3.8:** *Coeficiente de Kullback-Leibler frente a  $h$*

En resumen, la construcción de intervalos de confianza para la medida de Kullback-Leibler, da mejores resultados cuando se quieren medir diferencias altas entre dos densidades, es decir, cuando el valor de la medida de Kullback-Leibler es realmente bajo. Para dar buenos resultados del intervalo de confianza, cuando esta medida toma valores más altos, es necesario disponer de un tamaño muestral muy grande.

# Capítulo 4

## Aplicación a datos reales

Tras el estudio de simulación en el que se comparan los 10 métodos propuestos, vamos a ilustrar la aplicabilidad de estos. Para ello, se seguirá con los ejemplos de la Sección 1.3, en los que se darán las estimaciones de estos intervalos de confianza para la medida de solapamiento de Kullback-Leibler.

Se usará una notación abreviada para los métodos, por cuestión de extensión de las tablas que se mostrarán a continuación, definida al inicio del Apéndice D.

### Ejemplo 1

Se recuerda que el objetivo es medir si hay cierto grado de diferencia en la evolución de los pinzones de Darwin, haciendo uso de los intervalos de confianza propuestos a lo largo de todo el trabajo. En la primera fila de la Tabla 4.1, se muestra el valor de la estimación de la medida de Kullback-Leibler, utilizando los métodos descritos en la Sección anterior. En la segunda y tercera filas se dan los extremos inferior y superior del intervalo de confianza a un nivel del 95 %, respectivamente, y finalmente la amplitud del intervalo  $h$ .

Vemos como, debido al tamaño muestral tan grande de ambas poblaciones, los métodos proporcionan resultados similares. Se puede concluir a un nivel de confianza del 95 %, que existen entre un 80.34 % y un 97 % de semejanzas en las longitudes de los picos de los pinzones de Darwin transcurridos 37 años. Esto supondría que hay una pequeña pérdida de semejanza pasados estos años, ya que las distribuciones son muy similares.



**Tabla 4.1:** *Resultados para los picos de los pinzones*

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B	Media
$\hat{\Lambda}$	0.9075	0.8991	0.8991	0.8734	0.8663	0.8661	0.8991	0.8850	0.8979	0.8736	0.8867
EI	0.8236	0.8124	0.8120	0.7830	0.7741	0.7734	0.8235	0.8037	0.8351	0.7934	0.8034
ES	0.9915	0.9858	0.9861	0.9639	0.9586	0.9588	0.9746	0.9663	0.9607	0.9538	0.9700
h	0.1679	0.1734	0.1741	0.1809	0.1846	0.1854	0.1510	0.1627	0.1256	0.1604	0.1666

Nótese como, en este ejemplo, se confirman los resultados comentados de las Figuras 3.2 y 3.3, pues por tener estimaciones del coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler próximos a 0.9, la escala logit comienza a dar anchos de intervalo mayores que los que se dan sin la transformación logit (véase en la Tabla 4.1). Igualmente, los métodos Delta y Delta-BC no muestran grandes diferencias, debido a que existía cierta normalidad en los datos de partida. Tal y como se concluye en la sección 3.5, el método que obtiene un menor ancho del intervalo es el método Bootstrap-BCa.

## Ejemplo 2

El objetivo ahora, consiste en medir el grado de semejanza o diferencia, de acuerdo a los antígenos, entre los enfermos con cáncer de páncreas y el grupo de control, que padece pancreatitis. La idea es comparar ambos grupos para cada uno de los dos posibles antígenos estudiados (el CA-19-9 y el CA-125). Para el suero CA-19-9, se obtienen los resultados dados en la Tabla 4.2.

**Tabla 4.2:** *Resultados para el suero CA-19-9*

	D-BC	D-BC-L	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B	Media
$\hat{\Lambda}$	0.1037	0.1037	0.1122	0.1171	0.1037	0.1037	0.1093	0.1204	0.1092
EI	0.0591	0.0476	0.0668	0.0595	0.0405	0.0552	0.0575	0.0557	0.0552
ES	0.1483	0.1598	0.1575	0.1747	0.1669	0.1523	0.1610	0.1851	0.1632
h	0.0893	0.1122	0.0907	0.1151	0.1264	0.0970	0.1035	0.1294	0.1080

Se puede concluir, de manera general, a un nivel de confianza del 95 %, que existen unas semejanzas entre el 5.52 % y el 16.32 % en la salud de los individuos con cáncer de páncreas y el grupo de control (que padece de pancreatitis) tras la medición del antígeno CA-19-9 (basado en carbohidratos). Esto indica que la medición de este biomarcador es de gran ayuda para distinguir entre pacientes con cáncer y pacientes con pancreatitis. En cuanto a los intervalos de confianza obtenidos por los diferentes métodos, todos proporcionan resultados muy similares, pero la escala logit no logra reducir el ancho del intervalo en este caso.

Para el caso del suero CA-125, se puede concluir, de manera general que a un nivel de confianza del 95 %, existen entre un 42.25 % y un 86.19 % de semejanzas en la salud entre el grupo de enfermos y el grupo de control, tras la medición del antígeno CA-125 (véase Tabla 4.3). Destaca, en este ejemplo, el método Bootstrap-BCa, por obtener el menor ancho del intervalo de confianza.

Se puede concluir que la discriminación entre pacientes con cáncer de páncreas y pancreatitis es mas efectiva con el biomarcador CA-19-9 que con el CA-125, ya que el solapamiento de las distribuciones de ambos grupos es menor con el primer marcador.

**Tabla 4.3:** *Resultados para el suero CA-125*

	D-BC	D-BC-L	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B	Media
$\hat{\Lambda}$	0.6526	0.6526	0.6237	0.6237	0.6526	0.6519	0.6595	0.6209	0.6422
EI	0.4313	0.4315	0.4145	0.4147	0.3770	0.4211	0.4885	0.4015	0.4225
ES	0.8739	0.8737	0.8329	0.8328	0.9282	0.8827	0.8305	0.8402	0.8619
h	0.4425	0.4422	0.4184	0.4181	0.5512	0.4616	0.3420	0.4387	0.4393

Nótese como la Tabla 4.3, muestra anchos del intervalo de confianza excesivamente grandes, que abarcan casi la mitad del dominio de definición de la medida de solapamiento de Kullback-Leibler ( $D = [0, 1]$ ), tal y como se concluye a la vista de las Figuras 3.7 y 3.8.

### Ejemplo 3

Se trata de comparar ahora, el grado de semejanza entre las olas de coronavirus en España, las cuales muestran una gran diferencia en el número de contagios.

**Tabla 4.4:** *Resultados para las olas de coronavirus*

	D-BC	D-BC-L	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B	Media
$\hat{\Lambda}$	0.0384	0.0384	0.0398	0.0411	0.0384	0.0403	0.0391	0.0402	0.0395
EI	0.0279	0.0238	0.0292	0.0262	0.0269	0.0277	0.0281	0.0282	0.0273
ES	0.0490	0.0530	0.0505	0.0560	0.0500	0.0528	0.0501	0.0521	0.0517
h	0.0211	0.0292	0.0214	0.0298	0.0231	0.0251	0.0219	0.0239	0.0244

Se puede concluir, a la vista de los resultados de la Tabla 4.4, que a un nivel de significatividad del 95 %, existen entre un 2.73 % y un 5.17 % de semejanzas entre ambas olas del coronavirus. Esto indica que hay una gran diferencia en cuanto al número de contagios que se producen en ambas olas, pues el número de contagios en la segunda ola es considerablemente mayor, aunque esto puede ser debido a un aumento considerable en las pruebas de diagnóstico, como las PCR, lo que debe ser juzgado correctamente por expertos en pandemias.

Debido a que la estimación del coeficiente de Kullback-Leibler es pequeña, esto se traduce en anchos de intervalos realmente pequeños, lo que hace que el resultado obtenido sea mucho más preciso. Destaca de nuevo el método Bootstrap-BCa como aquel que obtiene el menor ancho de intervalo del intervalo de confianza.

# Capítulo 5

## Conclusiones generales

A lo largo de todo el trabajo, se proponen 10 métodos para la construcción de intervalos de confianza. Principalmente, se han enfocado a la medida de solapamiento de Kullback-Leibler, bajo la asunción de normalidad de las dos poblaciones involucradas. Esta medida es realmente interesante, debido a que trata de estimar el área mínimo que se forma mediante la intersección de dos funciones de densidad, a la vez que depende de una de las medidas de divergencia más utilizadas, la medida de divergencia de Kullback-Leibler, usada principalmente tanto en estimaciones de parámetros como en construcción de estadísticos de contraste. En la estimación de intervalos de confianza para la medida o coeficiente de solapamiento de Kullback-Leibler, se obtienen especialmente buenos resultados, cuando la estimación de este coeficiente es pequeña. A medida que  $\Lambda$  se aproxima a 1, se van obteniendo anchos del intervalo de confianza realmente grandes, que abarcan una gran parte de su dominio de definición ( $D = [0, 1]$ ). De manera general, los resultados de todas las técnicas son similares si se dispone de un tamaño muestral suficientemente grande. Para tamaños muestrales pequeños y estimaciones de  $\Lambda$  cercanas a 1, puede haber diferencias muy significativas entre un método y otro. Además, siempre que no se disponga de la normalidad, lo ideal es descartar del estudio los métodos Delta y L-Delta. La escala logit, de manera general, se sabe que es capaz de reducir el ancho del intervalo de confianza. Sin embargo, por su definición, estos anchos aumentan cuando nos aproximamos a 0 y a 1, con lo que lo ideal es utilizarla cuando la estimación de  $\Lambda$  se encuentre suficientemente alejada de 0 y 1.

# Bibliografía

- [1] Larson, B. (2014) *Meet the Overlapping Coefficient*. URL:  
<http://www.iceaaonline.com/ready/wp-content/uploads/2014/06/MM-9-Presentation-Meet-the-Overlapping-Coefficient-A-Measure-for-Elevator-Speeches.pdf>
- [2] Dhaker, H. Ngom, P. Ibrahimou, B. y Mbodj, M. (2018) *Overlap Coefficients Based on Kullback-Leibler of Two Normal Densities: Equal Means Case. Preprints*, (doi: 10.20944/preprints201811.0197.v1)
- [3] Kupelberg, R. (2017) *Delta Method*. URL:  
<http://fisher.stats.uwo.ca/faculty/kulperger/SS3858/Handouts/DeltaMethod.pdf>
- [4] Casella, G. y Berger, R. (2002) *Statistical inference*. Duxbury, 2, 240-245
- [5] Zou, K. H., Tempany, C. M., Fielding, J. R., y Silverman, S. G. (1998) *Original smooth receiver operating characteristic curve estimation from continuous data: Statistical methods for analyzing the predictive value of spiral CT of ureteral stones. Academic Radiology*, 5(10), 680–687
- [6] Bantis, L. E. y Nakas, C. T. (2019) *Construction of confidence intervals for the maximum of the Youden index and the corresponding cutoff point of a continuous biomarker. Biometrical Journal*, 61, 138-156 (doi: 10.1002/bimj.201700107)
- [7] Geyer, C (2007) *Confidence intervals using maximum likelihood*. URL:  
<https://www.stat.umn.edu/geyer/s06/5102/notes/fish.pdf>
- [8] Bantis, L. E. Nakas, C. T. y Reiser, B. (2014) *Construction of confidence regions in the ROC space after the estimation of the optimal Youden index-based cut-off point. Biometrics*, 70, 212-223 (doi: 10.1111/biom.12107)

- [9] Chaintaya. (2012) *Darwin's Finches Evolution Dataset*. URL:  
[https://www.kaggle.com/crbelhekar619/darwins-finches-evolution-dataset?select=finch\\_beaks\\_2012.csv](https://www.kaggle.com/crbelhekar619/darwins-finches-evolution-dataset?select=finch_beaks_2012.csv)
- [10] Franco, A. M. y Pardo, M. C. (2017) *Non parametric Roc summary statistics*. *Revstat*, 15, 583-600
- [11] Sadinle, M. (2009) *Transformed Logit Confidence Intervals for Small Populations in Single Capture-Recapture Estimation*, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. Taylor and Francis, 38:9, 1909-1924, (doi: 10.1080/03610910903168595)
- [12] Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1993) *An introduction to the bootstrap*. Springer.
- [13] Helwig, N. E. (2017) *Bootstrap confidence intervals* URL:  
<http://users.stat.umn.edu/helwig/notes/bootci-Notes.pdf>
- [14] Grasso, D. (2021) *La segunda ola causa más muertes en media España que la primera* URL:  
URL:<https://elpais.com/sociedad/2021-01-01/la-tercera-ola-llega-a-los-hospitales-tras-otra-mas-mortifera-en-media-espana.html>
- [15] Ritchie, H. Ortiz, E. Beltekian, D. Mathieu, E. Hasell, J. Macdonald, B. Giattino, C. y Roser, M. (2021) *Coronavirus Pandemic (COVID-19) - the data* URL: <https://ourworldindata.org/coronavirus-data?country=ESP>

# Apéndice A

## Medida de solapamiento de Kullback Leibler

$$KL(f_1||f_2) = \int f_1(x)(\log f_1(x) - \log f_2(x))dx + \int f_2(x)(\log f_2(x) - \log f_1(x))dx$$

Bajo la suposición de que las poblaciones son normales ( $X_1 \approx N(\mu_1, \sigma_1)$  e  $X_2 \approx N(\mu_2, \sigma_2)$ )

$$\begin{aligned} & \int f_1(x)(\log f_1(x) - \log f_2(x))dx = \\ &= \int f_1(x) \cdot \left[ \frac{-1}{2} \log(2\pi) - \log(\sigma_1) - \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \log(\sigma_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] dx = \\ &= \int \left[ \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - \left( \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right] f_1(x) dx = E_{X_1} \left[ \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{X_1 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - \left( \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right] = \\ &= \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2\sigma_2^2} E_{X_1}[(X_1 - \mu_2)^2] - \frac{1}{2\sigma_1^2} E_{X_1}[(X_1 - \mu_1)^2] = (*) \end{aligned}$$

Realizando el cambio

$$(X_1 - \mu_2)^2 = ((X_1 - \mu_1) + (\mu_1 - \mu_2))^2 = (X_1 - \mu_1)^2 + 2(X_1 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2$$

y, sabiendo que

$$E_{X_1}((X_1 - \mu_1)^2) = \sigma_1^2$$

se tiene que

$$(*) = \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{2\sigma_2^2} [E_{X_1}((X_1 - \mu_1)^2) + 2(\mu_1 - \mu_2)E_{X_1}(X_1 - \mu_1) + (\mu_1 - \mu_2)^2] - \frac{1}{2} =$$

$$= \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2}$$

ya que  $E_{X_1}(X_1 - \mu_1) = \mu_1 - \mu_1 = 0$

Usando ahora el mismo razonamiento para el segundo sumando, se obtiene

$$\int f_2(x) \log f_2(x) dx - \int f_2(x) \log f_1(x) dx = \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} KL(f_1||f_2) &= \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2} + \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - 1 = \frac{\sigma_1^4 + \sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_2^4 + \sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1)^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos la siguiente expresión para la medida en el caso de variables aleatorias normales

$$\Lambda = \frac{1}{1 + KL(f_1||f_2)} = \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^4 + \sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_2^4 + \sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1)^2}$$



## Apéndice B

### Matriz de varianzas covarianzas de los estimadores máximo verosímiles

Sabemos que la varianza de la media muestral viene dada por

$$\sigma_{\mu_1}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$$

Igualmente, por la linealidad de la covarianza, se tiene que la covarianza entre las medias es

$$\sigma_{\mu_1, \mu_2} = \sigma_{X_1, X_2} = \frac{1}{n} \sum_i^n (x_{1i} - \mu_1)(x_{2i} - \mu_2) = 0$$

A continuación usamos el Lema de Fisher para calcular la covarianza de la media y la desviación muestral.

**Lema 1.** (Lema de Fisher)

Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a i.i.d  $N(\mu, \sigma^2)$ . Entonces:

- 1)  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- 2)  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \approx \chi_{n-1}^2$
- 3)  $\bar{X}$  y  $S^2$  son independientes

---

De esto se deduce que

$$\sigma_{\mu_1, \sigma_1} = 0$$

Ahora, se sabe que bajo independencia de las poblaciones se verifica

$$E[\alpha(X)\beta(Y)] = E[\alpha(X)]E[\beta(Y)]$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  funciones cualesquiera definidas en la recta real.

Esto se usa para calcular precisamente la covarianza entre la media y la desviación, así como la covarianza entre las desviaciones de ambas poblaciones.

$$\hat{\sigma}_{\mu_1, \sigma_2} = Cov\left(\bar{x}, \sqrt{\left(\frac{1}{n_2} \sum_j y_j^2\right) - \bar{y}^2}\right) = Cov(\alpha(X), \beta(Y)) = E[\alpha(X)\beta(Y)] - E[\alpha(X)]E[\beta(Y)] = 0$$

Con el mismo razonamiento es sencillo probar que

$$\sigma_{\mu_1, \sigma_2} = 0$$

Finalmente, tal y como se indica en Bantis et al. (2014), se tiene que

$$Var(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2(n-1)}$$

Y por tanto, la matriz de varianzas covarianzas de los parámetros estimados resulta

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2(n_1-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_2^2}{2(n_2-1)} \end{pmatrix}$$

## Apéndice C

### Derivadas parciales para el método Delta-BC- $\lambda$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_1^2(\lambda)} = \frac{-n_1}{\sigma_1^2(\lambda)}$$
$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_2^2(\lambda)} = \frac{-n_2}{\sigma_2^2(\lambda)}$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_1^2(\lambda)} = \frac{n_1}{\sigma_1^2(\lambda)} - \frac{3}{\sigma_1^4(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1_i}^{(\lambda)} - \mu_1^{(\lambda)})^2$$
$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_2^2(\lambda)} = \frac{n_2}{\sigma_2^2(\lambda)} - \frac{3}{\sigma_2^4(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2_i}^{(\lambda)} - \mu_2^{(\lambda)})^2$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_1^{(\lambda)} \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma_1^2(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{X_{1_i}^\lambda \log(X_{1_i})}{\lambda} - \frac{X_{1_i}^\lambda - 1}{\lambda^2} \right)$$
$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu_2^{(\lambda)} \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma_2^2(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{X_{2_i}^\lambda \log(X_{2_i})}{\lambda} - \frac{X_{2_i}^\lambda - 1}{\lambda^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_1^{(\lambda)} \partial \lambda} = \frac{2}{\sigma_1^3(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1_i}^{(\lambda)} - \mu_1^{(\lambda)}) \left( \frac{X_{1_i}^\lambda \log(X_{1_i})}{\lambda} - \frac{X_{1_i}^\lambda - 1}{\lambda^2} \right)$$
$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \sigma_2^{(\lambda)} \partial \lambda} = \frac{2}{\sigma_2^3(\lambda)} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2_i}^{(\lambda)} - \mu_2^{(\lambda)}) \left( \frac{X_{2_i}^\lambda \log(X_{2_i})}{\lambda} - \frac{X_{2_i}^\lambda - 1}{\lambda^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \lambda^2} = \frac{\mu_1^{(\lambda)}}{\lambda \sigma_1^2(\lambda)} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\lambda^2 \sigma_1^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_1} (2X_{1_i}^{2\lambda} \log^2(X_{1_i}) - X_{1_i}^\lambda \log^2(X_{1_i}) + 2\mu_1^{(\lambda)} X_{1_i}^\lambda \log(X_{1_i})) + \\
& + \frac{1}{\lambda^3 \sigma_1^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_1} (4X_{1_i}^{2\lambda} \log(X_{1_i}) - 4X_{1_i}^\lambda \log(X_{1_i}) + 2\mu_1^{(\lambda)} (X_{1_i}^{(\lambda)} - 1)) - \\
& - \frac{3}{\lambda^4 \sigma_1^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1_i}^\lambda - 1)^2 + \\
& + \frac{\mu_2^{(\lambda)}}{\lambda \sigma_2^{2(\lambda)}} - \\
& - \frac{1}{\lambda^2 \sigma_2^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_2} (2X_{2_i}^{2\lambda} \log^2(X_{2_i}) - X_{2_i}^\lambda \log^2(X_{2_i}) + 2\mu_2^{(\lambda)} X_{2_i}^\lambda \log(X_{2_i})) + \\
& + \frac{1}{\lambda^3 \sigma_2^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_2} (4X_{2_i}^{2\lambda} \log(X_{2_i}) - 4X_{2_i}^\lambda \log(X_{2_i}) + 2\mu_2^{(\lambda)} (X_{2_i}^{(\lambda)} - 1)) - \\
& - \frac{3}{\lambda^4 \sigma_2^{2(\lambda)}} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2_i}^\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

# Apéndice D

## Tablas de resultados de la simulación

Denotamos por

-EI y ES a los extremos inferiores y superiores del intervalo de confianza, respectivamente

-h al ancho del intervalo

-CP al porcentaje de veces que el verdadero valor de la medida de Kullback está contenido dentro del intervalo de confianza

-D, D-BC, D-BC-L, L-D, L-D-BC, L-D-BC-L, B, B-p, B-BCa, L-B a los métodos Delta, Delta-BC, Delta-BC- $\lambda$ , L-Delta, L-Delta-BC, L-Delta-BC- $\lambda$ , Bootstrap, Bootstrap-p, Bootstrap-BCa y L-Bootstrap, en ese orden.

Para las **poblaciones normales**, se tomarán los siguientes valores de los parámetros, con su valor de la medida de Kullback-Leibler asociado

**Tabla D.1:** *Parámetros para distribuciones normales*

$\mu_1 = 6.5$	$\sigma_1^2 = 0.09$	$\mu_2 = 7.17$	$\sigma_2^2 = 0.179$	$\Lambda = 0.20$
$\mu_1 = 6.5$	$\sigma_1^2 = 0.09$	$\mu_2 = 6.887$	$\sigma_2^2 = 0.179$	$\Lambda = 0.40$
$\mu_1 = 6.5$	$\sigma_1^2 = 0.09$	$\mu_2 = 6.724$	$\sigma_2^2 = 0.179$	$\Lambda = 0.60$
$\mu_1 = 6.5$	$\sigma_1^2 = 0.09$	$\mu_2 = 6.52$	$\sigma_2^2 = 0.179$	$\Lambda = 0.80$

**Tabla D.2:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1942	0.1878	0.1966	0.2139	0.2071	0.2216	0.1845	0.1880	0.2150	0.2086
EI	0.0895	0.0866	0.0789	0.1094	0.1060	0.1040	0.0753	0.0836	0.1043	0.0986
ES	0.2989	0.2891	0.3143	0.3185	0.3083	0.3392	0.2938	0.2924	0.3256	0.3185
h	0.2095	0.2024	0.2354	0.2090	0.2023	0.2352	0.2185	0.2088	0.2213	0.2199
CP	0.8907	0.8323	0.9228	0.9205	0.8681	0.9596	0.8590	0.8460	0.8750	0.9300

**Tabla D.3:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1967	0.1916	0.1954	0.2089	0.2036	0.2108	0.1907	0.1924	0.2091	0.2053
EI	0.1151	0.1121	0.1050	0.1273	0.1240	0.1202	0.1046	0.1097	0.1236	0.1189
ES	0.2783	0.2710	0.2858	0.2904	0.2831	0.3013	0.2767	0.2752	0.2945	0.2916
h	0.1632	0.1589	0.1808	0.1632	0.1590	0.1811	0.1722	0.1655	0.1709	0.1727
CP	0.9230	0.8800	0.9402	0.9420	0.9130	0.9674	0.9060	0.8950	0.9000	0.9340

**Tabla D.4:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1981	0.1960	0.1966	0.2044	0.2021	0.2044	0.1959	0.1966	0.2052	0.2034
EI	0.1403	0.1388	0.1323	0.1465	0.1449	0.1400	0.1329	0.1362	0.1438	0.1407
ES	0.2560	0.2531	0.2608	0.2622	0.2593	0.2688	0.2588	0.2569	0.2665	0.2661
h	0.1156	0.1143	0.1286	0.1157	0.1144	0.1287	0.1260	0.1207	0.1226	0.1254
CP	0.9330	0.8870	0.9354	0.9470	0.9170	0.9566	0.9100	0.8920	0.9010	0.9340

**Tabla D.5:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1989	0.1976	0.1977	0.2020	0.2007	0.2016	0.1986	0.1986	0.2034	0.2025
EI	0.1578	0.1569	0.1520	0.1610	0.1600	0.1559	0.1538	0.1553	0.1600	0.1574
ES	0.2399	0.2384	0.2434	0.2431	0.2415	0.2474	0.2435	0.2419	0.2467	0.2475
h	0.0821	0.0815	0.0914	0.0821	0.0815	0.0915	0.0897	0.0866	0.0867	0.0901
CP	0.9420	0.9040	0.9389	0.9520	0.9110	0.9510	0.9220	0.9170	0.9070	0.9450

**Tabla D.6:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2002	0.1998	0.1998	0.2015	0.2011	0.2014	0.1991	0.1991	0.2008	0.2007
EI	0.1741	0.1738	0.1706	0.1753	0.1750	0.1722	0.1703	0.1714	0.1732	0.1718
ES	0.2263	0.2259	0.2290	0.2276	0.2271	0.2306	0.2279	0.2268	0.2285	0.2296
h	0.0522	0.0521	0.0583	0.0522	0.0521	0.0583	0.0575	0.0553	0.0553	0.0578
CP	0.9400	0.9110	0.9430	0.9400	0.9120	0.9420	0.9420	0.9220	0.9240	0.9490

**Tabla D.7:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1976	0.1947	0.1965	0.2074	0.2044	0.2083	0.1948	0.1949	0.2073	0.2055
EI	0.1245	0.1229	0.1173	0.1343	0.1325	0.1290	0.1205	0.1228	0.1347	0.1309
ES	0.2706	0.2666	0.2757	0.2805	0.2763	0.2876	0.2692	0.2670	0.2799	0.2801
h	0.1461	0.1437	0.1585	0.1462	0.1438	0.1587	0.1487	0.1442	0.1452	0.1491
CP	0.9270	0.8790	0.9362	0.9390	0.9050	0.9475	0.9190	0.9110	0.9190	0.9400

**Tabla D.8:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1941	0.1877	0.1951	0.2199	0.2127	0.2251	0.1822	0.1859	0.2174	0.2105
EI	0.0749	0.0729	0.0659	0.1008	0.0978	0.0961	0.0630	0.0717	0.0959	0.0911
ES	0.3133	0.3025	0.3244	0.3389	0.3277	0.3541	0.3015	0.3002	0.3389	0.3299
h	0.2385	0.2295	0.2585	0.2382	0.2298	0.2580	0.2385	0.2285	0.2430	0.2387
CP	0.8829	0.8018	0.9011	0.9545	0.8818	0.9560	0.8310	0.8270	0.8720	0.9030

**Tabla D.29:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7232	0.7275	0.7224	0.5663	0.5669	0.5651	0.7266	0.6320	0.7095	0.5811
EI	0.3760	0.3816	0.3730	0.2111	0.2107	0.2085	0.4164	0.3451	0.4761	0.2538
ES	1.0705	1.0733	1.0717	0.9214	0.9230	0.9216	1.0368	0.9189	0.9428	0.9085
h	0.6945	0.6917	0.6987	0.7103	0.7122	0.7131	0.6204	0.5738	0.4668	0.6544
CP	0.8800	0.8770	0.8760	0.8870	0.8920	0.8877	0.8860	0.8820	0.8250	0.8498

**Tabla D.9:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3896	0.3850	0.3987	0.4021	0.3973	0.4124	0.3818	0.3923	0.4290	0.3978
EI	0.1667	0.1654	0.1568	0.1940	0.1920	0.1886	0.1608	0.1813	0.2129	0.1895
ES	0.6124	0.6045	0.6406	0.6101	0.6025	0.6362	0.6028	0.6033	0.6452	0.6060
h	0.4457	0.4391	0.4838	0.4161	0.4104	0.4476	0.4420	0.4220	0.4323	0.4165
CP	0.8847	0.8518	0.9181	0.9235	0.8996	0.9599	0.8670	0.8790	0.8870	0.9130

**Tabla D.10:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3939	0.3897	0.3950	0.4034	0.3992	0.4061	0.3881	0.3974	0.4204	0.3997
EI	0.2185	0.2166	0.2072	0.2352	0.2330	0.2268	0.2095	0.2264	0.2460	0.2285
ES	0.5694	0.5629	0.5828	0.5717	0.5655	0.5853	0.5667	0.5684	0.5947	0.5709
h	0.3509	0.3463	0.3757	0.3365	0.3325	0.3585	0.3572	0.3420	0.3486	0.3425
CP	0.9210	0.8960	0.9384	0.9450	0.9290	0.9622	0.9070	0.9120	0.9240	0.9390

**Tabla D.11:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3968	0.3952	0.3959	0.4025	0.4009	0.4026	0.3959	0.4011	0.4143	0.4023
EI	0.2714	0.2704	0.2615	0.2797	0.2787	0.2713	0.2641	0.2750	0.2862	0.2742
ES	0.5223	0.5200	0.5303	0.5254	0.5231	0.5339	0.5277	0.5272	0.5424	0.5304
h	0.2508	0.2495	0.2688	0.2457	0.2444	0.2626	0.2636	0.2522	0.2562	0.2562
CP	0.9300	0.9130	0.9335	0.9430	0.9250	0.9527	0.9170	0.9070	0.9140	0.9410

**Tabla D.12:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3981	0.3971	0.3972	0.4012	0.4002	0.4008	0.3992	0.4016	0.4092	0.4027
EI	0.3088	0.3081	0.3014	0.3129	0.3121	0.3062	0.3050	0.3110	0.3179	0.3091
ES	0.4874	0.4861	0.4930	0.4896	0.4883	0.4955	0.4934	0.4922	0.5005	0.4962
h	0.1786	0.1780	0.1916	0.1767	0.1762	0.1893	0.1884	0.1812	0.1826	0.1872
CP	0.9440	0.9220	0.9389	0.9520	0.9320	0.9510	0.9310	0.9190	0.9290	0.9390



**Tabla D.13:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4007	0.4005	0.4005	0.4020	0.4018	0.4020	0.3992	0.4003	0.4026	0.4007
EI	0.3438	0.3436	0.3393	0.3453	0.3451	0.3411	0.3388	0.3422	0.3446	0.3403
ES	0.4576	0.4573	0.4616	0.4587	0.4584	0.4628	0.4596	0.4584	0.4606	0.4611
h	0.1138	0.1137	0.1223	0.1134	0.1133	0.1217	0.1209	0.1162	0.1160	0.1208
CP	0.9450	0.9300	0.9490	0.9470	0.9330	0.9490	0.9410	0.9250	0.9320	0.9440

**Tabla D.14:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3949	0.3929	0.3952	0.4030	0.4009	0.4044	0.3941	0.3974	0.4169	0.4028
EI	0.2399	0.2391	0.2316	0.2530	0.2519	0.2464	0.2392	0.2479	0.2668	0.2525
ES	0.5498	0.5466	0.5589	0.5531	0.5498	0.5624	0.5490	0.5468	0.5669	0.5530
h	0.3099	0.3075	0.3273	0.3001	0.2979	0.3160	0.3098	0.2989	0.3002	0.3006
CP	0.9220	0.8910	0.9243	0.9420	0.9200	0.9427	0.9230	0.9210	0.9280	0.9420

**Tabla D.15:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3778	0.3740	0.3867	0.3943	0.3898	0.4037	0.3745	0.3822	0.4269	0.3932
EI	0.1347	0.1344	0.1253	0.1701	0.1685	0.1649	0.1350	0.1558	0.1941	0.1719
ES	0.6209	0.6135	0.6481	0.6186	0.6110	0.6424	0.6140	0.6085	0.6597	0.6145
h	0.4862	0.4791	0.5228	0.4485	0.4425	0.4775	0.4789	0.4527	0.4656	0.4426
CP	0.8748	0.8597	0.9066	0.9230	0.9139	0.9497	0.8540	0.8590	0.8760	0.9030

**Tabla D.16:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5757	0.5735	0.5838	0.5311	0.5286	0.5349	0.5696	0.5480	0.5900	0.5333
EI	0.2749	0.2750	0.2699	0.2537	0.2526	0.2470	0.2906	0.2855	0.3367	0.2715
ES	0.8764	0.8719	0.8977	0.8084	0.8046	0.8228	0.8486	0.8104	0.8433	0.7950
h	0.6015	0.5969	0.6278	0.5547	0.5521	0.5759	0.5580	0.5249	0.5066	0.5235
CP	0.8810	0.8740	0.9049	0.9160	0.9140	0.9507	0.8540	0.9020	0.8730	0.9030

**Tabla D.17:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5841	0.5826	0.5872	0.5566	0.5549	0.5574	0.5810	0.5718	0.5975	0.5573
EI	0.3430	0.3430	0.3354	0.3293	0.3285	0.3209	0.3483	0.3509	0.3799	0.3372
ES	0.8252	0.8222	0.8390	0.7839	0.7813	0.7940	0.8137	0.7927	0.8151	0.7774
h	0.4822	0.4792	0.5036	0.4545	0.4528	0.4730	0.4654	0.4418	0.4353	0.4402
CP	0.9110	0.9000	0.9208	0.9390	0.9330	0.9550	0.9080	0.9230	0.9110	0.9310

**Tabla D.18:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5931	0.5926	0.5931	0.5791	0.5786	0.5782	0.5931	0.5890	0.6038	0.5794
EI	0.4173	0.4173	0.4090	0.4095	0.4093	0.4010	0.4175	0.4217	0.4370	0.4106
ES	0.7689	0.7680	0.7772	0.7488	0.7479	0.7553	0.7687	0.7563	0.7706	0.7481
h	0.3516	0.3507	0.3683	0.3393	0.3386	0.3542	0.3512	0.3347	0.3336	0.3374
CP	0.9180	0.9080	0.9286	0.9430	0.9350	0.9538	0.9110	0.9170	0.9160	0.9380

**Tabla D.19:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5960	0.5957	0.5957	0.5891	0.5887	0.5882	0.5979	0.5963	0.6044	0.5905
EI	0.4698	0.4697	0.4635	0.4653	0.4652	0.4588	0.4696	0.4734	0.4811	0.4642
ES	0.7221	0.7216	0.7280	0.7128	0.7123	0.7177	0.7262	0.7192	0.7277	0.7168
h	0.2523	0.2519	0.2644	0.2475	0.2471	0.2589	0.2566	0.2458	0.2465	0.2526
CP	0.9450	0.9250	0.9469	0.9500	0.9320	0.9510	0.9360	0.9250	0.9230	0.9460

**Tabla D.20:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6002	0.6002	0.6002	0.5973	0.5974	0.5971	0.5987	0.5982	0.6011	0.5957
EI	0.5195	0.5196	0.5156	0.5173	0.5174	0.5133	0.5153	0.5181	0.5213	0.5128
ES	0.6808	0.6809	0.6848	0.6774	0.6774	0.6810	0.6821	0.6784	0.6808	0.6786
h	0.1614	0.1613	0.1692	0.1600	0.1600	0.1677	0.1668	0.1603	0.1594	0.1658
CP	0.9470	0.9380	0.9470	0.9530	0.9380	0.9550	0.9440	0.9390	0.9320	0.9490

**Tabla D.21:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5859	0.5854	0.5879	0.5656	0.5647	0.5661	0.5841	0.5718	0.5958	0.5652
EI	0.3726	0.3731	0.3672	0.3628	0.3626	0.3567	0.3789	0.3763	0.4029	0.3690
ES	0.7992	0.7976	0.8086	0.7685	0.7668	0.7754	0.7892	0.7673	0.7888	0.7615
h	0.4265	0.4245	0.4414	0.4057	0.4043	0.4187	0.4103	0.3911	0.3859	0.3925
CP	0.9210	0.9020	0.9173	0.9380	0.9200	0.9387	0.8990	0.9050	0.9000	0.9190

**Tabla D.22:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.5534	0.5532	0.5665	0.5090	0.5064	0.5140	0.5528	0.5237	0.5773	0.5131
EI	0.2281	0.2305	0.2272	0.2125	0.2110	0.2067	0.2544	0.2450	0.3108	0.2366
ES	0.8787	0.8760	0.9057	0.8056	0.8017	0.8213	0.8513	0.8023	0.8437	0.7896
h	0.6506	0.6455	0.6785	0.5932	0.5906	0.6146	0.5968	0.5572	0.5329	0.5530
CP	0.8588	0.8647	0.8819	0.9112	0.9053	0.9236	0.8460	0.8770	0.8580	0.8840

**Tabla D.23:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7385	0.7404	0.7394	0.5932	0.5934	0.5919	0.7420	0.6627	0.7238	0.6064
EI	0.4236	0.4265	0.4219	0.2642	0.2640	0.2600	0.4588	0.3999	0.5036	0.3015
ES	1.0533	1.0543	1.0570	0.9223	0.9228	0.9238	1.0251	0.9254	0.9440	0.9114
h	0.6297	0.6278	0.6351	0.6581	0.6588	0.6638	0.5663	0.5255	0.4404	0.6099
CP	0.8960	0.8990	0.9030	0.9020	0.8980	0.9008	0.8910	0.8960	0.8430	0.8650

**Tabla D.24:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7635	0.7661	0.7650	0.6530	0.6540	0.6529	0.7617	0.7087	0.7471	0.6616
EI	0.5138	0.5171	0.5133	0.3860	0.3865	0.3836	0.5311	0.4934	0.5538	0.4127
ES	1.0131	1.0151	1.0167	0.9201	0.9215	0.9221	0.9924	0.9240	0.9403	0.9105
h	0.4993	0.4980	0.5034	0.5341	0.5350	0.5384	0.4613	0.4306	0.3864	0.4978
CP	0.8950	0.9060	0.9048	0.9160	0.9270	0.9270	0.9070	0.9270	0.8790	0.9090

**Tabla D.25:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7868	0.7874	0.7874	0.7250	0.7253	0.7246	0.7817	0.7528	0.7721	0.7263
EI	0.6056	0.6065	0.6053	0.5378	0.5379	0.5361	0.6096	0.5910	0.6189	0.5492
ES	0.9680	0.9683	0.9695	0.9123	0.9126	0.9132	0.9539	0.9146	0.9253	0.9034
h	0.3624	0.3618	0.3642	0.3746	0.3747	0.3770	0.3443	0.3235	0.3064	0.3542
CP	0.9350	0.9340	0.9327	0.9470	0.9500	0.9528	0.8970	0.9130	0.8930	0.9140

**Tabla D.26:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7921	0.7927	0.7927	0.7606	0.7611	0.7609	0.7915	0.7770	0.7864	0.7618
EI	0.6616	0.6623	0.6618	0.6287	0.6293	0.6287	0.6649	0.6570	0.6686	0.6340
ES	0.9226	0.9231	0.9235	0.8924	0.8928	0.8931	0.9181	0.8970	0.9042	0.8897
h	0.2610	0.2608	0.2617	0.2636	0.2635	0.2644	0.2532	0.2401	0.2357	0.2557
CP	0.9300	0.9310	0.9330	0.9440	0.9430	0.9420	0.9350	0.9300	0.9300	0.9440

**Tabla D.27:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7976	0.7979	0.7979	0.7846	0.7849	0.7848	0.7967	0.7907	0.7951	0.7842
EI	0.7141	0.7145	0.7143	0.7009	0.7012	0.7010	0.7144	0.7121	0.7173	0.7021
ES	0.8811	0.8813	0.8815	0.8683	0.8685	0.8686	0.8790	0.8693	0.8729	0.8663
h	0.1669	0.1669	0.1672	0.1674	0.1674	0.1677	0.1646	0.1572	0.1556	0.1642
CP	0.9510	0.9530	0.9530	0.9630	0.9620	0.9630	0.9470	0.9410	0.9250	0.9490

**Tabla D.28:** *Poblaciones normales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.7660	0.7671	0.7673	0.6821	0.6825	0.6823	0.7718	0.7227	0.7556	0.6900
EI	0.5453	0.5469	0.5463	0.4520	0.4523	0.4515	0.5648	0.5274	0.5785	0.4700
ES	0.9867	0.9873	0.9883	0.9122	0.9126	0.9131	0.9789	0.9179	0.9327	0.9100
h	0.4415	0.4404	0.4420	0.4601	0.4602	0.4616	0.4141	0.3906	0.3542	0.4400
CP	0.9090	0.9030	0.9054	0.9050	0.9040	0.9074	0.9230	0.9200	0.9100	0.9180

Para las **distribuciones lognormales** se consideran

**Tabla D.30:** *Parámetros para distribuciones lognormales*

$\mu_1 = 6$	$\sigma_1^2 = 1$	$\mu_2 = 8.169$	$\sigma_2^2 = 1.5$	$\Lambda = 0.20$
$\mu_1 = 6$	$\sigma_1^2 = 1$	$\mu_2 = 7.3$	$\sigma_2^2 = 1.5$	$\Lambda = 0.40$
$\mu_1 = 6$	$\sigma_1^2 = 1$	$\mu_2 = 6.82$	$\sigma_2^2 = 1.5$	$\Lambda = 0.60$
$\mu_1 = 6$	$\sigma_1^2 = 1$	$\mu_2 = 6.448$	$\sigma_2^2 = 1.5$	$\Lambda = 0.80$

**Tabla D.31:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$*

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0146	0.1844	0.1844	0.0179	0.2025	0.2074	0.1811	0.1815	0.2081	0.2023
EI	0.0045	0.0879	0.0775	0.0072	0.1059	0.0999	0.0796	0.0838	0.1064	0.1004
ES	0.0246	0.2810	0.2914	0.0286	0.2991	0.3148	0.2826	0.2792	0.3097	0.3041
h	0.0201	0.1931	0.2139	0.0214	0.1932	0.2148	0.2030	0.1954	0.2033	0.2037
CP	0.0110	0.8250	0.8710	0.0150	0.8760	0.9340	0.8530	0.8390	0.8740	0.9070

**Tabla D.32:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.2$*

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0119	0.1887	0.1887	0.0136	0.1998	0.2021	0.1890	0.1887	0.2076	0.2018
EI	0.0055	0.1130	0.1063	0.0069	0.1241	0.1196	0.1082	0.1108	0.1278	0.1213
ES	0.0184	0.2643	0.2710	0.0203	0.2756	0.2847	0.2697	0.2665	0.2873	0.2822
h	0.0129	0.1514	0.1647	0.0134	0.1515	0.1651	0.1616	0.1557	0.1595	0.1609
CP	0.0010	0.8780	0.9110	0.0020	0.9100	0.9460	0.8860	0.8580	0.9010	0.9200

**Tabla D.33:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0102	0.1941	0.1941	0.0109	0.1998	0.2006	0.1938	0.1929	0.2033	0.2003
EI	0.0063	0.1396	0.1360	0.0070	0.1453	0.1425	0.1359	0.1375	0.1468	0.1423
ES	0.0141	0.2486	0.2522	0.0149	0.2543	0.2588	0.2516	0.2484	0.2597	0.2583
h	0.0078	0.1089	0.1162	0.0080	0.1090	0.1163	0.1157	0.1109	0.1129	0.1160
CP	0.0010	0.8980	0.9200	0.0000	0.9170	0.9410	0.9170	0.8960	0.9220	0.9400

**Tabla D.34:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0084	0.1964	0.1964	0.0087	0.1993	0.1997	0.1963	0.1960	0.2013	0.1996
EI	0.0061	0.1576	0.1553	0.0064	0.1604	0.1585	0.1554	0.1566	0.1618	0.1587
ES	0.0106	0.2353	0.2376	0.0110	0.2382	0.2409	0.2373	0.2354	0.2408	0.2405
h	0.0046	0.0778	0.0824	0.0046	0.0778	0.0824	0.0819	0.0788	0.0790	0.0818
CP	0.0000	0.9130	0.9320	0.0000	0.9250	0.9490	0.9350	0.9050	0.9150	0.9450

**Tabla D.35:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0077	0.1991	0.1991	0.0078	0.2002	0.2004	0.1985	0.1982	0.2005	0.1997
EI	0.0063	0.1742	0.1729	0.0064	0.1754	0.1742	0.1725	0.1733	0.1755	0.1737
ES	0.0090	0.2239	0.2252	0.0091	0.2251	0.2265	0.2244	0.2232	0.2254	0.2258
h	0.0026	0.0497	0.0523	0.0027	0.0497	0.0524	0.0519	0.0499	0.0499	0.0521
CP	0.0000	0.9220	0.9430	0.0000	0.9240	0.9440	0.9400	0.9180	0.9190	0.9470

**Tabla D.36:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0102	0.1929	0.1929	0.0113	0.2017	0.2029	0.1923	0.1918	0.2054	0.2020
EI	0.0053	0.1248	0.1208	0.0063	0.1336	0.1307	0.1223	0.1240	0.1367	0.1316
ES	0.0150	0.2609	0.2650	0.0163	0.2699	0.2751	0.2623	0.2596	0.2741	0.2723
h	0.0097	0.1361	0.1442	0.0100	0.1363	0.1444	0.1400	0.1355	0.1374	0.1407
CP	0.0010	0.8810	0.9100	0.0010	0.9090	0.9350	0.8900	0.8740	0.8940	0.9110

**Tabla D.37:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0150	0.1826	0.1826	0.0192	0.2054	0.2111	0.1810	0.1823	0.2151	0.2074
EI	0.0033	0.0742	0.0633	0.0067	0.0970	0.0912	0.0665	0.0728	0.0985	0.0926
ES	0.0267	0.2911	0.3019	0.0317	0.3138	0.3309	0.2954	0.2918	0.3316	0.3223
h	0.0233	0.2169	0.2386	0.0250	0.2168	0.2397	0.2289	0.2190	0.2331	0.2296
CP	0.0130	0.8270	0.8650	0.0210	0.8900	0.9440	0.8400	0.8040	0.8690	0.8990

**Tabla D.38:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0860	0.3804	0.3804	0.0977	0.3929	0.3957	0.3745	0.3819	0.4237	0.3907
EI	0.0292	0.1694	0.1574	0.0408	0.1948	0.1873	0.1625	0.1798	0.2145	0.1914
ES	0.1428	0.5913	0.6033	0.1545	0.5910	0.6041	0.5864	0.5839	0.6328	0.5900
h	0.1135	0.4219	0.4459	0.1138	0.3962	0.4168	0.4238	0.4041	0.4183	0.3986
CP	0.0800	0.8540	0.8820	0.0910	0.8960	0.9200	0.8590	0.8650	0.8870	0.9090

**Tabla D.39:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0731	0.3852	0.3852	0.0806	0.3948	0.3962	0.3868	0.3923	0.4226	0.3972
EI	0.0346	0.2194	0.2113	0.0417	0.2351	0.2292	0.2160	0.2284	0.2551	0.2336
ES	0.1117	0.5511	0.5591	0.1195	0.5545	0.5632	0.5577	0.5563	0.5902	0.5608
h	0.0771	0.3317	0.3478	0.0778	0.3194	0.3340	0.3417	0.3280	0.3351	0.3272
CP	0.0510	0.9060	0.9220	0.0580	0.9230	0.9430	0.8930	0.8850	0.9030	0.9160

**Tabla D.40:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0613	0.3927	0.3927	0.0650	0.3981	0.3986	0.3925	0.3946	0.4116	0.3984
EI	0.0381	0.2733	0.2685	0.0415	0.2810	0.2769	0.2690	0.2768	0.2918	0.2772
ES	0.0845	0.5120	0.5169	0.0884	0.5152	0.5203	0.5159	0.5125	0.5314	0.5196
h	0.0464	0.2387	0.2484	0.0469	0.2343	0.2434	0.2470	0.2358	0.2397	0.2423
CP	0.0170	0.9100	0.9240	0.0180	0.9260	0.9410	0.9250	0.9150	0.9280	0.9380

**Tabla D.41:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0507	0.3962	0.3962	0.0524	0.3991	0.3994	0.3962	0.3977	0.4062	0.3994
EI	0.0369	0.3110	0.3077	0.0385	0.3147	0.3118	0.3081	0.3133	0.3214	0.3123
ES	0.0645	0.4815	0.4847	0.0663	0.4835	0.4869	0.4843	0.4821	0.4910	0.4864
h	0.0276	0.1705	0.1770	0.0278	0.1689	0.1752	0.1762	0.1689	0.1695	0.1741
CP	0.0020	0.9230	0.9370	0.0020	0.9320	0.9420	0.9320	0.9180	0.9270	0.9450

**Tabla D.42:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0461	0.4005	0.4005	0.0468	0.4017	0.4018	0.3994	0.3999	0.4031	0.4007
EI	0.0381	0.3461	0.3441	0.0388	0.3474	0.3456	0.3435	0.3462	0.3495	0.3448
ES	0.0541	0.4550	0.4570	0.0548	0.4560	0.4580	0.4554	0.4535	0.4567	0.4566
h	0.0160	0.1090	0.1129	0.0160	0.1086	0.1124	0.1119	0.1073	0.1072	0.1118
CP	0.0010	0.9360	0.9420	0.0010	0.9360	0.9450	0.9430	0.9250	0.9210	0.9530

**Tabla D.43:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0618	0.3911	0.3911	0.0671	0.3988	0.3996	0.3907	0.3935	0.4157	0.3988
EI	0.0331	0.2438	0.2386	0.0380	0.2557	0.2517	0.2423	0.2508	0.2709	0.2545
ES	0.0906	0.5384	0.5437	0.0962	0.5419	0.5475	0.5390	0.5361	0.5604	0.5432
h	0.0575	0.2946	0.3051	0.0582	0.2861	0.2958	0.2967	0.2853	0.2895	0.2886
CP	0.0270	0.8940	0.9090	0.0310	0.9180	0.9320	0.8980	0.8860	0.9010	0.9210

**Tabla D.44:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0862	0.3773	0.3773	0.0994	0.3923	0.3955	0.3756	0.3818	0.4315	0.3929
EI	0.0231	0.1420	0.1299	0.0364	0.1747	0.1677	0.1416	0.1595	0.2009	0.1758
ES	0.1492	0.6125	0.6246	0.1625	0.6099	0.6232	0.6097	0.6042	0.6621	0.6099
h	0.1261	0.4705	0.4947	0.1261	0.4352	0.4555	0.4681	0.4447	0.4612	0.4341
CP	0.0840	0.8610	0.8730	0.1090	0.8980	0.9290	0.8560	0.8570	0.8920	0.9040



**Tabla D.45:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2095	0.5727	0.5727	0.2138	0.5288	0.5288	0.5674	0.5463	0.5925	0.5325
EI	0.0858	0.2828	0.2719	0.0916	0.2587	0.2506	0.2895	0.2851	0.3392	0.2732
ES	0.3333	0.8625	0.8735	0.3359	0.7990	0.8070	0.8453	0.8075	0.8457	0.7917
h	0.2475	0.5797	0.6016	0.2443	0.5402	0.5564	0.5557	0.5224	0.5065	0.5185
CP	0.1680	0.8610	0.8730	0.1860	0.8910	0.9110	0.8670	0.8900	0.8940	0.9060

**Tabla D.46:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1885	0.5831	0.5831	0.1938	0.5568	0.5563	0.5858	0.5728	0.6074	0.5617
EI	0.0993	0.3499	0.3420	0.1051	0.3360	0.3289	0.3570	0.3549	0.3940	0.3458
ES	0.2778	0.8163	0.8243	0.2824	0.7777	0.7836	0.8146	0.7907	0.8208	0.7775
h	0.1786	0.4664	0.4824	0.1773	0.4417	0.4548	0.4575	0.4357	0.4269	0.4317
CP	0.1130	0.9050	0.9230	0.1310	0.9270	0.9430	0.8890	0.8920	0.9070	0.9130

**Tabla D.47:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1626	0.5952	0.5952	0.1680	0.5817	0.5812	0.5947	0.5880	0.6084	0.5814
EI	0.1041	0.4251	0.4199	0.1098	0.4171	0.4120	0.4241	0.4255	0.4469	0.4164
ES	0.2210	0.7654	0.7706	0.2263	0.7462	0.7504	0.7653	0.7505	0.7699	0.7464
h	0.1169	0.3402	0.3506	0.1165	0.3291	0.3384	0.3412	0.3249	0.3231	0.3301
CP	0.0440	0.9120	0.9270	0.0470	0.9260	0.9440	0.9190	0.9120	0.9280	0.9340

**Tabla D.48:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1379	0.6009	0.6009	0.1414	0.5940	0.5936	0.6010	0.5985	0.6089	0.5940
EI	0.1013	0.4787	0.4751	0.1047	0.4740	0.4703	0.4770	0.4799	0.4911	0.4726
ES	0.1745	0.7230	0.7266	0.1780	0.7139	0.7170	0.7250	0.7171	0.7267	0.7154
h	0.0732	0.2443	0.2515	0.0733	0.2400	0.2467	0.2480	0.2372	0.2356	0.2428
CP	0.0070	0.9290	0.9400	0.0070	0.9370	0.9450	0.9290	0.9250	0.9300	0.9420

**Tabla D.49:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1261	0.6071	0.6071	0.1276	0.6042	0.6041	0.6057	0.6046	0.6087	0.6028
EI	0.1046	0.5289	0.5267	0.1060	0.5266	0.5243	0.5262	0.5284	0.5326	0.5237
ES	0.1477	0.6853	0.6875	0.1492	0.6818	0.6838	0.6852	0.6808	0.6847	0.6819
h	0.0431	0.1564	0.1608	0.0432	0.1552	0.1595	0.1590	0.1525	0.1521	0.1582
CP	0.0020	0.9340	0.9440	0.0020	0.9400	0.9510	0.9430	0.9270	0.9270	0.9540

**Tabla D.50:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.1618	0.5905	0.5905	0.1677	0.5698	0.5695	0.5908	0.5790	0.6055	0.5714
EI	0.0926	0.3839	0.3785	0.0986	0.3724	0.3674	0.3890	0.3867	0.4162	0.3780
ES	0.2311	0.7971	0.8025	0.2369	0.7673	0.7715	0.7926	0.7713	0.7948	0.7648
h	0.1386	0.4133	0.4241	0.1383	0.3948	0.4041	0.4035	0.3846	0.3787	0.3868
CP	0.0710	0.9030	0.9090	0.0820	0.9240	0.9310	0.8990	0.9010	0.9080	0.9160

**Tabla D.51:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2038	0.5661	0.5661	0.2086	0.5169	0.5173	0.5643	0.5321	0.5877	0.5220
EI	0.0701	0.2444	0.2338	0.0777	0.2234	0.2164	0.2649	0.2524	0.3212	0.2455
ES	0.3375	0.8877	0.8984	0.3394	0.8103	0.8182	0.8636	0.8117	0.8541	0.7986
h	0.2674	0.6433	0.6646	0.2617	0.5869	0.6018	0.5987	0.5593	0.5329	0.5532
CP	0.1780	0.8590	0.8690	0.1980	0.8900	0.9040	0.8480	0.8700	0.8870	0.8900

**Tabla D.52:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3667	0.7345	0.7345	0.3348	0.5927	0.5915	0.7332	0.6581	0.7192	0.6039
EI	0.1799	0.4307	0.4240	0.1411	0.2702	0.2642	0.4458	0.3937	0.4931	0.2995
ES	0.5535	1.0383	1.0450	0.5285	0.9153	0.9188	1.0205	0.9224	0.9453	0.9083
h	0.3737	0.6076	0.6210	0.3873	0.6451	0.6545	0.5747	0.5287	0.4521	0.6089
CP	0.2940	0.8650	0.8840	0.2840	0.8760	0.8890	0.8930	0.8920	0.8600	0.8640

**Tabla D.53:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50, n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3467	0.7577	0.7577	0.3288	0.6533	0.6516	0.7603	0.7061	0.7460	0.6632
EI	0.2049	0.5140	0.5088	0.1800	0.3928	0.3867	0.5281	0.4888	0.5508	0.4163
ES	0.4886	1.0013	1.0065	0.4775	0.9138	0.9165	0.9924	0.9234	0.9412	0.9101
h	0.2837	0.4872	0.4977	0.2975	0.5210	0.5298	0.4643	0.4345	0.3904	0.4937
CP	0.2020	0.9020	0.9110	0.2050	0.9150	0.9230	0.9020	0.9100	0.8880	0.8990

**Tabla D.54:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 100, n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3241	0.7789	0.7789	0.3213	0.7217	0.7202	0.7768	0.7461	0.7686	0.7217
EI	0.2214	0.6012	0.5975	0.2175	0.5389	0.5339	0.6027	0.5816	0.6132	0.5428
ES	0.4267	0.9566	0.9604	0.4250	0.9045	0.9065	0.9509	0.9105	0.9239	0.9007
h	0.2053	0.3554	0.3629	0.2075	0.3655	0.3726	0.3482	0.3289	0.3107	0.3580
CP	0.1070	0.9200	0.9270	0.1120	0.9210	0.9280	0.9220	0.9240	0.9120	0.9200

**Tabla D.55:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 200, n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2907	0.7881	0.7881	0.2928	0.7584	0.7574	0.7879	0.7722	0.7829	0.7586
EI	0.2198	0.6602	0.6577	0.2223	0.6293	0.6258	0.6606	0.6512	0.6652	0.6308
ES	0.3617	0.9160	0.9186	0.3634	0.8874	0.8890	0.9152	0.8932	0.9006	0.8865
h	0.1418	0.2558	0.2610	0.1412	0.2581	0.2632	0.2546	0.2420	0.2354	0.2558
CP	0.0370	0.9410	0.9470	0.0400	0.9240	0.9300	0.9280	0.9210	0.9170	0.9350

**Tabla D.56:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 500, n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2710	0.7966	0.7966	0.2725	0.7841	0.7836	0.7953	0.7886	0.7934	0.7828
EI	0.2272	0.7148	0.7132	0.2289	0.7021	0.7000	0.7130	0.7098	0.7155	0.7001
ES	0.3147	0.8784	0.8800	0.3162	0.8661	0.8673	0.8776	0.8674	0.8714	0.8654
h	0.0875	0.1636	0.1668	0.0873	0.1641	0.1673	0.1646	0.1576	0.1559	0.1652
CP	0.0060	0.9330	0.9380	0.0070	0.9480	0.9510	0.9430	0.9400	0.9370	0.9490

**Tabla D.57:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3111	0.7666	0.7666	0.3026	0.6843	0.6831	0.7677	0.7219	0.7531	0.6857
EI	0.1951	0.5519	0.5483	0.1816	0.4589	0.4545	0.5617	0.5280	0.5760	0.4653
ES	0.4271	0.9814	0.9849	0.4235	0.9098	0.9116	0.9738	0.9159	0.9302	0.9060
h	0.2320	0.4295	0.4366	0.2419	0.4509	0.4572	0.4121	0.3879	0.3542	0.4407
CP	0.1260	0.9060	0.9150	0.1400	0.9060	0.9120	0.8890	0.9050	0.8830	0.8960

**Tabla D.58:** *Poblaciones lognormales,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3498	0.7224	0.7224	0.3176	0.5716	0.5708	0.7179	0.6276	0.7034	0.5796
EI	0.1500	0.3812	0.3748	0.1146	0.2251	0.2203	0.4060	0.3419	0.4667	0.2560
ES	0.5497	1.0635	1.0699	0.5206	0.9180	0.9214	1.0298	0.9132	0.9400	0.9033
h	0.3998	0.6823	0.6951	0.4061	0.6929	0.7011	0.6238	0.5713	0.4733	0.6473
CP	0.3010	0.8760	0.8840	0.2940	0.8730	0.8820	0.8820	0.8600	0.8250	0.8410

Para las **distribuciones gamma** se consideran

**Tabla D.59:** *Parámetros para distribuciones gamma*

$\alpha_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 7.46$	$\Lambda = 0.20$
$\alpha_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 4.648$	$\Lambda = 0.40$
$\alpha_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 3.54$	$\Lambda = 0.60$
$\alpha_1 = 2$	$\beta_1 = 2$	$\alpha_2 = 2$	$\beta_2 = 2.84$	$\Lambda = 0.80$

**Tabla D.60:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0703	0.2004	0.2004	0.0836	0.2210	0.2286	0.2049	0.2136	0.2389	0.2306
EI	0.0247	0.0901	0.0732	0.0361	0.1112	0.1016	0.0815	0.0954	0.1144	0.1077
ES	0.1160	0.3107	0.3276	0.1311	0.3308	0.3557	0.3283	0.3318	0.3634	0.3535
h	0.0913	0.2207	0.2544	0.0950	0.2196	0.2540	0.2467	0.2363	0.2491	0.2458
CP	0.1040	0.8730	0.9270	0.1470	0.9080	0.9740	0.9060	0.9060	0.8920	0.9340

**Tabla D.61:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0707	0.2076	0.2076	0.0789	0.2206	0.2250	0.2064	0.2116	0.2256	0.2222
EI	0.0350	0.1194	0.1066	0.0422	0.1326	0.1241	0.1115	0.1200	0.1316	0.1271
ES	0.1063	0.2959	0.3086	0.1155	0.3087	0.3259	0.3014	0.3032	0.3197	0.3173
h	0.0713	0.1765	0.2020	0.0732	0.1761	0.2018	0.1899	0.1832	0.1880	0.1902
CP	0.0440	0.9150	0.9540	0.0570	0.9240	0.9620	0.9260	0.9100	0.9050	0.9410

**Tabla D.62:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0683	0.2092	0.2092	0.0723	0.2160	0.2182	0.2107	0.2134	0.2199	0.2189
EI	0.0439	0.1464	0.1373	0.0475	0.1532	0.1462	0.1418	0.1470	0.1533	0.1499
ES	0.0927	0.2720	0.2812	0.0971	0.2788	0.2901	0.2795	0.2797	0.2865	0.2879
h	0.0488	0.1257	0.1439	0.0495	0.1256	0.1439	0.1377	0.1327	0.1332	0.1380
CP	0.0010	0.9440	0.9760	0.0030	0.9430	0.9710	0.9440	0.9220	0.9010	0.9310

**Tabla D.63:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0668	0.2101	0.2101	0.0688	0.2136	0.2147	0.2119	0.2130	0.2167	0.2162
EI	0.0499	0.1655	0.1589	0.0518	0.1690	0.1634	0.1625	0.1653	0.1690	0.1666
ES	0.0838	0.2547	0.2614	0.0859	0.2582	0.2659	0.2614	0.2607	0.2644	0.2658
h	0.0339	0.0892	0.1025	0.0341	0.0892	0.1025	0.0989	0.0954	0.0954	0.0992
CP	0.0000	0.9100	0.9500	0.0000	0.9130	0.9370	0.9390	0.9220	0.9010	0.9370

**Tabla D.64:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0667	0.2106	0.2106	0.0675	0.2120	0.2125	0.2105	0.2108	0.2124	0.2122
EI	0.0560	0.1824	0.1782	0.0568	0.1838	0.1800	0.1793	0.1808	0.1824	0.1809
ES	0.0774	0.2389	0.2431	0.0782	0.2403	0.2449	0.2418	0.2409	0.2424	0.2436
h	0.0214	0.0565	0.0649	0.0214	0.0565	0.0649	0.0625	0.0601	0.0600	0.0628
CP	0.0000	0.8860	0.9350	0.0000	0.8660	0.9200	0.9250	0.9080	0.8680	0.9120

**Tabla D.65:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0708	0.2102	0.2102	0.0766	0.2197	0.2226	0.2077	0.2136	0.2237	0.2194
EI	0.0407	0.1349	0.1247	0.0460	0.1445	0.1371	0.1254	0.1348	0.1429	0.1372
ES	0.1008	0.2855	0.2957	0.1072	0.2949	0.3080	0.2900	0.2925	0.3045	0.3017
h	0.0601	0.1507	0.1711	0.0613	0.1504	0.1709	0.1646	0.1577	0.1616	0.1645
CP	0.0180	0.9330	0.9610	0.0210	0.9270	0.9650	0.9390	0.9190	0.9050	0.9360

**Tabla D.66:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.2$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.0762	0.2053	0.2053	0.0929	0.2298	0.2386	0.2023	0.2156	0.2469	0.2335
EI	0.0222	0.0805	0.0624	0.0366	0.1063	0.0967	0.0661	0.0843	0.1064	0.0976
ES	0.1302	0.3301	0.3483	0.1492	0.3533	0.3805	0.3385	0.3469	0.3874	0.3694
h	0.1080	0.2496	0.2859	0.1127	0.2469	0.2838	0.2724	0.2626	0.2811	0.2718
CP	0.1400	0.8850	0.9290	0.2110	0.9130	0.9670	0.8940	0.8930	0.9040	0.9370

**Tabla D.67:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2155	0.3849	0.3849	0.2395	0.3974	0.4004	0.3944	0.4042	0.4425	0.4078
EI	0.0788	0.1695	0.1559	0.1056	0.1954	0.1869	0.1720	0.1926	0.2244	0.1994
ES	0.3521	0.6002	0.6139	0.3733	0.5994	0.6140	0.6168	0.6157	0.6606	0.6162
h	0.2733	0.4308	0.4580	0.2678	0.4040	0.4272	0.4448	0.4231	0.4362	0.4168
CP	0.3140	0.8670	0.8820	0.3690	0.8980	0.9330	0.8850	0.9030	0.9060	0.9310

**Tabla D.68:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2169	0.3988	0.3988	0.2336	0.4072	0.4087	0.3959	0.4042	0.4292	0.4056
EI	0.1086	0.2259	0.2165	0.1264	0.2413	0.2343	0.2215	0.2366	0.2574	0.2381
ES	0.3252	0.5717	0.5811	0.3409	0.5731	0.5830	0.5703	0.5719	0.6009	0.5731
h	0.2166	0.3458	0.3646	0.2144	0.3318	0.3487	0.3488	0.3353	0.3434	0.3350
CP	0.2410	0.9070	0.9260	0.2780	0.9300	0.9550	0.9120	0.9040	0.9090	0.9370

**Tabla D.69:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2094	0.4015	0.4015	0.2186	0.4068	0.4075	0.4043	0.4092	0.4214	0.4097
EI	0.1347	0.2778	0.2712	0.1440	0.2855	0.2800	0.2774	0.2872	0.2992	0.2854
ES	0.2841	0.5253	0.5319	0.2931	0.5280	0.5349	0.5312	0.5312	0.5435	0.5341
h	0.1494	0.2475	0.2606	0.1491	0.2425	0.2548	0.2538	0.2439	0.2443	0.2487
CP	0.1090	0.9420	0.9560	0.1210	0.9560	0.9730	0.9300	0.9240	0.9170	0.9400

**Tabla D.70:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2050	0.4038	0.4038	0.2098	0.4066	0.4069	0.4069	0.4091	0.4167	0.4098
EI	0.1530	0.3157	0.3110	0.1578	0.3194	0.3152	0.3158	0.3215	0.3288	0.3198
ES	0.2570	0.4918	0.4965	0.2617	0.4937	0.4986	0.4980	0.4967	0.5046	0.4999
h	0.1040	0.1761	0.1855	0.1040	0.1743	0.1834	0.1822	0.1751	0.1758	0.1802
CP	0.0120	0.9320	0.9460	0.0170	0.9340	0.9520	0.9470	0.9290	0.9250	0.9510

**Tabla D.71:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2051	0.4053	0.4053	0.2071	0.4065	0.4066	0.4052	0.4059	0.4092	0.4064
EI	0.1722	0.3493	0.3464	0.1741	0.3507	0.3480	0.3476	0.3506	0.3541	0.3490
ES	0.2381	0.4612	0.4641	0.2400	0.4622	0.4652	0.4627	0.4611	0.4644	0.4639
h	0.0659	0.1119	0.1177	0.0659	0.1114	0.1172	0.1151	0.1105	0.1103	0.1148
CP	0.0000	0.9530	0.9630	0.0000	0.9560	0.9640	0.9390	0.9250	0.9220	0.9400

**Tabla D.72:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2171	0.4029	0.4029	0.2299	0.4096	0.4105	0.3984	0.4075	0.4262	0.4059
EI	0.1243	0.2528	0.2455	0.1376	0.2640	0.2582	0.2454	0.2616	0.2769	0.2577
ES	0.3099	0.5531	0.5604	0.3221	0.5552	0.5627	0.5513	0.5534	0.5754	0.5541
h	0.1856	0.3003	0.3149	0.1845	0.2912	0.3045	0.3059	0.2918	0.2985	0.2964
CP	0.1880	0.9230	0.9380	0.2150	0.9450	0.9540	0.9180	0.9100	0.9230	0.9370

**Tabla D.73:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.4$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.2318	0.3931	0.3931	0.2580	0.4041	0.4074	0.3875	0.4003	0.4450	0.4024
EI	0.0717	0.1506	0.1362	0.1035	0.1806	0.1721	0.1467	0.1703	0.2087	0.1789
ES	0.3919	0.6356	0.6500	0.4126	0.6276	0.6427	0.6283	0.6302	0.6814	0.6259
h	0.3201	0.4850	0.5138	0.3092	0.4471	0.4706	0.4816	0.4599	0.4727	0.4470
CP	0.3820	0.8740	0.8980	0.4550	0.9200	0.9450	0.8620	0.8810	0.8950	0.9220

**Tabla D.74:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4018	0.5626	0.5626	0.4006	0.5254	0.5254	0.5758	0.5537	0.5980	0.5383
EI	0.1710	0.2744	0.2646	0.1831	0.2589	0.2516	0.2984	0.2938	0.3461	0.2791
ES	0.6325	0.8509	0.8606	0.6182	0.7920	0.7993	0.8531	0.8136	0.8499	0.7976
h	0.4615	0.5765	0.5960	0.4350	0.5332	0.5477	0.5547	0.5198	0.5037	0.5185
CP	0.4770	0.8610	0.8770	0.5160	0.8930	0.9100	0.8760	0.9110	0.8900	0.9190

**Tabla D.75:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4127	0.5865	0.5865	0.4151	0.5596	0.5591	0.5818	0.5718	0.6022	0.5589
EI	0.2238	0.3541	0.3480	0.2346	0.3394	0.3340	0.3577	0.3587	0.3905	0.3463
ES	0.6017	0.8190	0.8251	0.5957	0.7797	0.7843	0.8059	0.7849	0.8139	0.7716
h	0.3779	0.4649	0.4770	0.3611	0.4403	0.4503	0.4482	0.4262	0.4234	0.4253
CP	0.4680	0.9040	0.9150	0.4820	0.9280	0.9410	0.8950	0.9020	0.9100	0.9220

**Tabla D.76:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4031	0.5932	0.5932	0.4075	0.5802	0.5798	0.5968	0.5931	0.6093	0.5838
EI	0.2681	0.4241	0.4200	0.2758	0.4166	0.4125	0.4303	0.4337	0.4517	0.4224
ES	0.5381	0.7623	0.7664	0.5392	0.7437	0.7470	0.7633	0.7524	0.7669	0.7451
h	0.2700	0.3382	0.3463	0.2634	0.3271	0.3345	0.3330	0.3187	0.3151	0.3228
CP	0.3120	0.9360	0.9430	0.3120	0.9480	0.9540	0.9180	0.9210	0.9160	0.9430



**Tabla D.77:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3969	0.5981	0.5981	0.4001	0.5915	0.5913	0.6021	0.6005	0.6106	0.5954
EI	0.3013	0.4771	0.4742	0.3056	0.4726	0.4697	0.4809	0.4844	0.4947	0.4765
ES	0.4926	0.7191	0.7220	0.4945	0.7104	0.7129	0.7234	0.7166	0.7266	0.7143
h	0.1913	0.2420	0.2477	0.1889	0.2378	0.2432	0.2425	0.2322	0.2319	0.2377
CP	0.1350	0.9320	0.9380	0.1310	0.9440	0.9510	0.9420	0.9320	0.9380	0.9500

**Tabla D.78:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.3977	0.6007	0.6007	0.3992	0.5981	0.5980	0.6007	0.5998	0.6045	0.5980
EI	0.3366	0.5235	0.5218	0.3384	0.5215	0.5197	0.5232	0.5254	0.5306	0.5211
ES	0.4588	0.6779	0.6796	0.4599	0.6748	0.6763	0.6781	0.6741	0.6783	0.6749
h	0.1221	0.1544	0.1578	0.1215	0.1533	0.1566	0.1549	0.1486	0.1477	0.1538
CP	0.0120	0.9460	0.9530	0.0110	0.9490	0.9530	0.9320	0.9160	0.9180	0.9420

**Tabla D.79:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4145	0.5927	0.5927	0.4178	0.5722	0.5717	0.5869	0.5818	0.6058	0.5686
EI	0.2493	0.3888	0.3842	0.2584	0.3771	0.3727	0.3883	0.3934	0.4176	0.3785
ES	0.5798	0.7967	0.8013	0.5773	0.7673	0.7708	0.7855	0.7701	0.7940	0.7587
h	0.3305	0.4079	0.4171	0.3189	0.3902	0.3980	0.3972	0.3767	0.3765	0.3803
CP	0.4030	0.9190	0.9230	0.4140	0.9410	0.9440	0.9090	0.9070	0.9260	0.9350

**Tabla D.80:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.6$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.4240	0.5693	0.5693	0.4125	0.5189	0.5189	0.5625	0.5375	0.5906	0.5206
EI	0.1626	0.2504	0.2401	0.1675	0.2267	0.2197	0.2656	0.2584	0.3256	0.2444
ES	0.6854	0.8883	0.8986	0.6575	0.8110	0.8182	0.8595	0.8166	0.8556	0.7967
h	0.5228	0.6379	0.6585	0.4900	0.5842	0.5985	0.5938	0.5582	0.5300	0.5523
CP	0.5410	0.8680	0.8870	0.5950	0.9100	0.9240	0.8440	0.8890	0.8810	0.9000

**Tabla D.81:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6114	0.7298	0.7298	0.5273	0.5978	0.5965	0.7429	0.6638	0.7238	0.6110
EI	0.3253	0.4233	0.4177	0.2373	0.2812	0.2759	0.4575	0.4009	0.5003	0.3086
ES	0.8976	1.0362	1.0419	0.8173	0.9143	0.9171	1.0283	0.9267	0.9473	0.9134
h	0.5722	0.6129	0.6242	0.5800	0.6331	0.6412	0.5708	0.5258	0.4470	0.6048
CP	0.6530	0.8760	0.8900	0.6190	0.8730	0.8840	0.9110	0.9050	0.8620	0.8780

**Tabla D.82:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 50$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6456	0.7662	0.7662	0.5800	0.6587	0.6576	0.7594	0.7080	0.7467	0.6603
EI	0.4120	0.5271	0.5239	0.3391	0.3999	0.3961	0.5306	0.4943	0.5531	0.4123
ES	0.8791	1.0053	1.0084	0.8208	0.9175	0.9191	0.9882	0.9217	0.9404	0.9084
h	0.4671	0.4782	0.4845	0.4816	0.5176	0.5229	0.4577	0.4274	0.3874	0.4960
CP	0.6470	0.8970	0.9010	0.6210	0.9070	0.9130	0.8890	0.9000	0.8770	0.8890

**Tabla D.83:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6479	0.7818	0.7818	0.6188	0.7254	0.7246	0.7852	0.7560	0.7767	0.7290
EI	0.4726	0.6064	0.6045	0.4449	0.5451	0.5424	0.6172	0.5972	0.6269	0.5538
ES	0.8232	0.9572	0.9591	0.7926	0.9057	0.9067	0.9532	0.9148	0.9264	0.9043
h	0.3506	0.3508	0.3545	0.3477	0.3606	0.3642	0.3360	0.3176	0.2996	0.3505
CP	0.5430	0.9240	0.9270	0.5070	0.9320	0.9340	0.9120	0.9240	0.9080	0.9260

**Tabla D.84:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 200$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6476	0.7920	0.7920	0.6344	0.7624	0.7619	0.7961	0.7809	0.7928	0.7672
EI	0.5191	0.6664	0.6651	0.5075	0.6354	0.6337	0.6731	0.6639	0.6788	0.6432
ES	0.7762	0.9176	0.9189	0.7613	0.8894	0.8902	0.9191	0.8979	0.9069	0.8912
h	0.2571	0.2513	0.2537	0.2538	0.2540	0.2564	0.2460	0.2340	0.2282	0.2480
CP	0.4110	0.9320	0.9360	0.3580	0.9400	0.9430	0.9340	0.9330	0.9370	0.9420

**Tabla D.85:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 500$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6534	0.7975	0.7975	0.6482	0.7853	0.7851	0.7975	0.7910	0.7969	0.7855
EI	0.5697	0.7170	0.7163	0.5652	0.7046	0.7037	0.7179	0.7146	0.7220	0.7056
ES	0.7370	0.8780	0.8787	0.7313	0.8661	0.8666	0.8771	0.8675	0.8718	0.8654
h	0.1673	0.1610	0.1624	0.1661	0.1615	0.1628	0.1592	0.1528	0.1498	0.1598
CP	0.1750	0.9470	0.9480	0.1460	0.9500	0.9520	0.9290	0.9240	0.9170	0.9400

**Tabla D.86:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6537	0.7760	0.7760	0.6044	0.6917	0.6908	0.7701	0.7298	0.7598	0.6904
EI	0.4456	0.5654	0.5633	0.3931	0.4685	0.4655	0.5688	0.5410	0.5847	0.4749
ES	0.8618	0.9865	0.9887	0.8157	0.9149	0.9160	0.9714	0.9185	0.9348	0.9060
h	0.4161	0.4210	0.4254	0.4226	0.4465	0.4505	0.4026	0.3774	0.3501	0.4311
CP	0.6280	0.9120	0.9160	0.5930	0.9220	0.9240	0.9080	0.9060	0.8930	0.8990

**Tabla D.87:** *Poblaciones gamma,  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 30$  y  $\Lambda = 0.8$* 

	D	D-BC	D-BC-L	L-D	L-D-BC	L-D-BC-L	B	B-p	B-BCa	L-B
$\hat{\Lambda}$	0.6267	0.7282	0.7282	0.5207	0.5751	0.5740	0.7217	0.6352	0.7083	0.5860
EI	0.3102	0.3916	0.3856	0.2008	0.2293	0.2244	0.4116	0.3499	0.4708	0.2659
ES	0.9432	1.0649	1.0709	0.8406	0.9209	0.9237	1.0319	0.9204	0.9458	0.9061
h	0.6330	0.6733	0.6853	0.6398	0.6916	0.6993	0.6204	0.5704	0.4750	0.6401
CP	0.6810	0.8860	0.8930	0.6670	0.8830	0.8890	0.8840	0.8810	0.8450	0.8470